

О математическом моделировании транспортных потоков

(по материалам пособия и курсов лекций, прочитанных в МФТИ и НМУ)

<http://crec.mipt.ru/study/courses/optional/gasnikov/>

<http://ium.mccme.ru/s11/gasnikov-spekurs.html>

Гасников Александр gasnikov@yandex.ru

доцент кафедры МОУ ФУПМ МФТИ

Холодов Ярослав kholodov@crec.mipt.ru

доцент кафедры Вычислительной математики МФТИ

Замечание. При подготовке презентации использовались некоторые рисунки, подготовленные коллегами по пособию.

12 октября 2011 г.



Модель Лайтхилла – Уизема(Уитема) – Ричардса (LWR), в которой поток автомобилей (далее АТС) рассматривается как поток одномерной сжимаемой жидкости.

В модели LWR предполагается, что

- 1) существует взаимно-однозначная зависимость между скоростью $v(t, x)$ и плотностью (погонной) $\rho(t, x)$ потока;**
- 2) выполняется “закон сохранения массы” (количества АТС).**

Запись $\rho(t, x)$ - обозначает число АТС на единицу длины в момент времени t в окрестности точки трассы с координатой x . Аналогично, $v(t, x)$ - скорость АТС в момент времени t в окрестности точки трассы с координатой x . Везде в дальнейшем предполагается, что пространственные масштабы, на которых транспортный поток описывается макроскопическими (гидродинамическими) моделями, значительно превышают характерный размер АТС (т.е. составляют не менее сотни метров).

Первое предположение выразим условием (*уравнение состояния*):

$$v(t, x) = V(\rho(t, x)). \quad (1)$$

Относительно функции $V(\rho)$ делается следующее предположение:

$$V'(\rho) < 0, \text{ где } Q(\rho) = \rho V(\rho) \quad (2)$$

- интенсивность потока АТС (количество АТС, проходящих в единицу времени через заданное сечение). Зависимость $Q(\rho)$ часто называют **фундаментальной диаграммой**. Для однополосного потока принято считать: $Q''(\rho) < 0$.

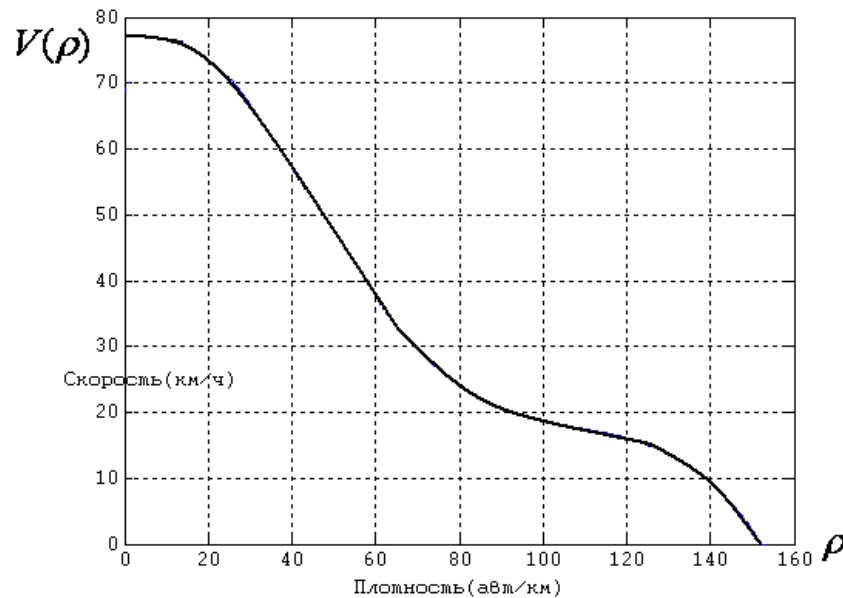


Рис. 1 (Уравнение состояния транспортного потока)

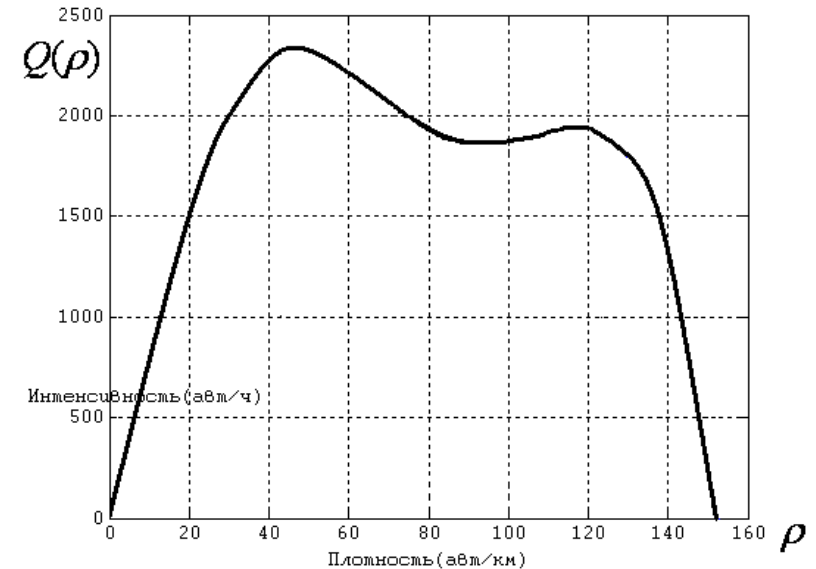


Рис. 2 (Фундаментальная диаграмма)

Второе предположение выразим законом сохранения

$$\int_a^b \rho(t + \Delta, x) dx - \int_a^b \rho(t, x) dx = - \left\{ \int_t^{t+\Delta} Q(\rho(\tau, b)) d\tau - \int_t^{t+\Delta} Q(\rho(\tau, a)) d\tau \right\}.$$

Отсюда следует, что для любого прямоугольного контура Γ в полуплоскости $t \geq 0$, со сторонами параллельными осям (легко показать, что это соотношение справедливо для произвольного кусочно-гладкого контура Γ), выполняется:

$$\oint_{\Gamma} \rho(t, x) dx - Q(\rho(t, x)) dt = 0. \quad (3)$$

В точках гладкости $\rho(t, x)$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (v\rho)}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (V(\rho)\rho)}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

Поставим начальное условие вида (*условие типа Римана*)

$$\rho(0, x) = \begin{cases} \rho_-, & x < x_- \\ \rho_0(x), & x_- \leq x < x_+ \\ \rho_+, & x \geq x_+ \end{cases} \quad (5)$$

Задача Коши (4), (5) возникает, например, при описании распространения затора (пробки): пусть

$$\rho_0'(x) \geq 0, \quad \rho_+ = \rho_{\max},$$

где ρ_{\max} - максимально возможная плотность (ситуация “бампер к бамперу”).

Требуется определить, как по транспортному потоку будет распространяться информация о заторе впереди. Решение этой задачи позволит ответить, например, на следующий вопрос: если движение АТС с утра на Дмитровском шоссе в сторону Москвы “встало” в районе г. Долгопрудный, то, через какое время затор дойдет до г. Дмитрова?

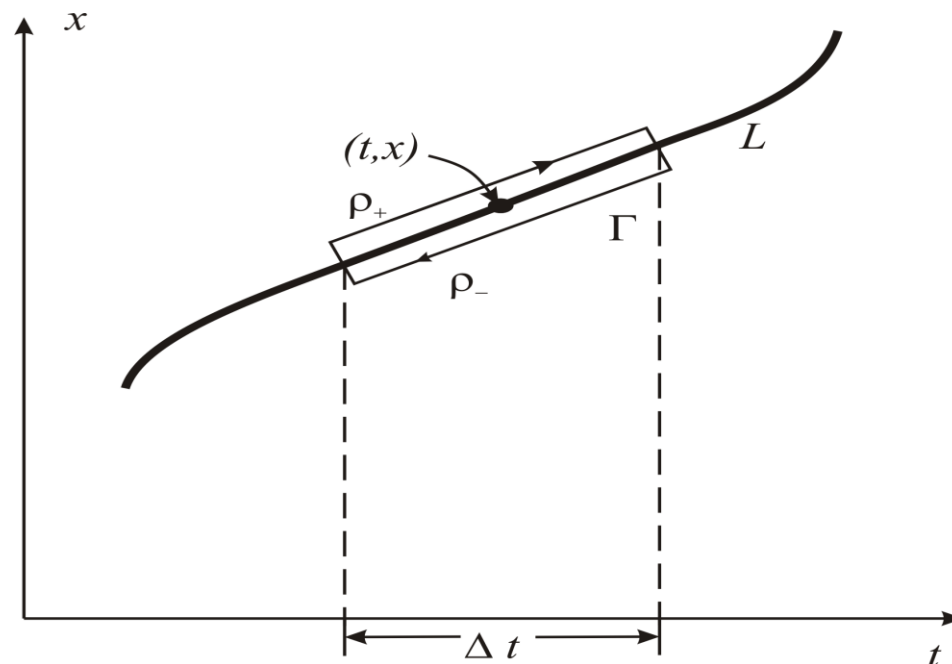


Рис. 3 (RRH условие на разрыве)

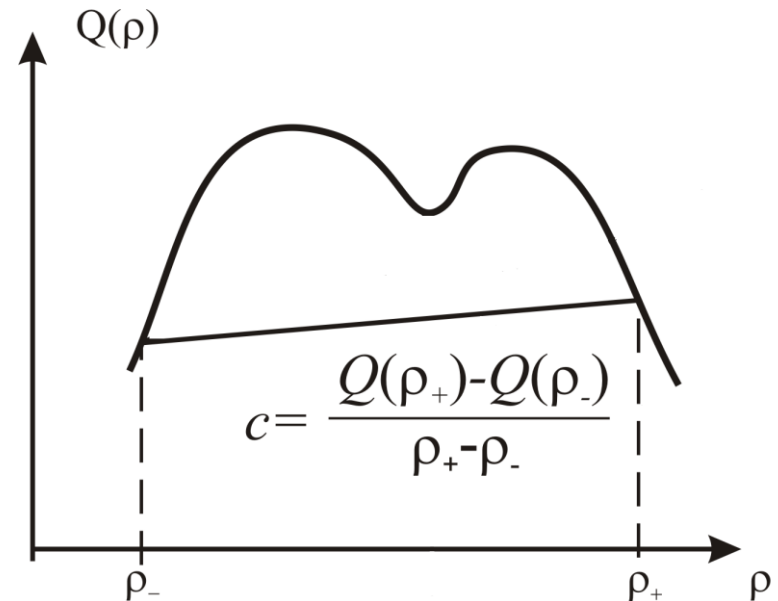
Вернемся к соотношению (3). Обратим внимание, что это соотношение может быть выполнено и для разрывной функции плотности $\rho(t, x)$. При этом разрыв функции $\rho(t, x)$ - есть резкое увеличение плотности, что соответствует границе затора. Пусть в момент времени t разрыв находится в точке с координатой x , и $\rho(t, x-0) = \rho_-$, $\rho(t, x+0) = \rho_+$.

Тогда из (3) следует, что

$$0 = \oint_{\Gamma} \left(\rho(t, x) dx - Q(\rho(t, x)) dt \right) = (\rho_+ c - Q(\rho_+)) \Delta t - (\rho_- c - Q(\rho_-)) \Delta t + o(\Delta t),$$

где $c = dx/dt$ - соответствует наклону касательной к L в точке (t, x) , Δt - длина проекции контура на ось t . При $\Delta t \rightarrow 0$ это равенство переходит в следующее условие (частный случай условия Стокса (1848)) для *скорости движения разрыва* c , которое называется (во всяком случае, должно называться, согласно П. Лаксу) *условием Римана–Ранкина–Гюгонио*

$$c = \frac{Q(\rho_+) - Q(\rho_-)}{\rho_+ - \rho_-} \text{ (RRH).}$$



Модель Танака

Приведем один из способов определения зависимости $V(\rho)$, предложенный в 1963 г. Танака и др. (по-видимому, этот способ был известен и раньше).

Рассматривается однополосный поток АТС. Пусть скорость АТС не может превышать v_{\max} . Плотность

$$\rho(v) = 1/d(v), \text{ где } d(v) = L + c_1 v + c_2 v^2$$

- среднее (безопасное) расстояние между АТС при заданной скорости v движения потока, L - средняя длина АТС, c_1 - время, характеризующее реакцию водителей (на больших плотностях $v \approx 0$ и $d(v) \approx L + c_1 v \Rightarrow$ вблизи точки $\rho_{\max} \sim 1/L$ выполняется $Q(\rho) = -(L/\tau) \cdot (\rho - \rho_{\max})$), c_2 - коэффициент пропорциональности тормозному пути. Из зависимости $d(v)$ можно получить зависимость (1) $V(\rho)$, удовлетворяющую условию (2). Пример из практики

$$d(v)[\text{м}] = 5,7[\text{м}] + 0,504[\text{с}] \cdot v[\text{м/с}] + 0,0285[\text{с}^2/\text{м}] \cdot v^2[\text{м}^2/\text{с}^2].$$

Модель Уизема

Следующим шагом (упомянутым еще в 1955 г., и окончательно предложенным в 1974 г. Дж. Уиземом) был учет “дальнозоркости” водителей:

$$v(t, x) = V(\rho(t, x)) - \frac{D(\rho(t, x))}{\rho(t, x)} \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial x}, \quad D(\rho) > 0;$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right). \quad (6)$$

Появившиеся в правых частях новые (по сравнению с (1) и (4)) диффузионные слагаемые соответствует тому факту, что водители снижают скорость при увеличении плотности потока впереди и увеличивают при уменьшении. Гидродинамическая (макроскопическая) модель (2), (5), (6) называется *моделью Уизема*.

Замечание (модель Кортевега–де Фриза–Бюргерса–Уизема).

$$v(t, x) = V(\rho(t, x)) - \frac{1}{\rho(t, x)} \left(\varepsilon \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 \rho(t, x)}{\partial x^2} \right).$$

В случае (Б. Гриншилдс (1934)), когда $Q(\rho)$ - парабола (вогнутая),

$$D(\rho) = \varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$$

можно показать, что уравнение (4) сводится, с помощью линейной замены переменных и неизвестной функции: $t \rightarrow \tilde{t}$, $x \rightarrow \tilde{x}$, $\rho \rightarrow \tilde{\rho}$, к *уравнению Бюргерса* (играющему важную роль в гидродинамике (см., например, работы Х. Бэйтмана (1915), Ж. Лерэ (1934), Дж. Бюргерса (1940), Е. Хопфа (1950)))

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{x}} = \varepsilon \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial \tilde{x}^2}, \quad \varepsilon > 0.$$

С помощью замены Флорина–Хопфа–Коула: $\tilde{\rho} = -2\varepsilon \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} (\ln w) = -2\varepsilon \frac{w_{\tilde{x}}}{w}$;

задача (4), (5) (для уравнения Бюргерса) сводится к задаче Коши для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial \tilde{x}^2}, \quad w(0, \tilde{x}) = \exp \left(-\frac{1}{2\varepsilon} \int_0^{\tilde{x}} \tilde{\rho}_0(\xi) d\xi \right).$$

Используя этот факт, Е. Хопф в 1950 г. изучал поведение решения начальной задачи Коши для уравнения Бюргерса. Так, например, им был обоснован предельный переход (получивший название *метода исчезающей вязкости* (хотя в рассматриваемом нами случае речь идет скорее о диффузии, чем о вязкости)) при $\varepsilon \rightarrow 0+$ от уравнения Бюргерса к уравнению Хопфа

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{x}} = 0.$$

В связи с вышесказанным заметим, что для нелинейного закона сохранения (4) гладкое решение задачи Коши (4), (5) существует, как правило, только в малой окрестности линии, где заданы начальные условия. По разрывным начальным условиям решение задачи Коши для нелинейных уравнений, вообще говоря, не определяется однозначно даже в сколь угодно малой окрестности линии, где заданы начальные условия. Для того чтобы задача Коши для нелинейных уравнений с гладкими или разрывными начальными условиями была однозначно разрешима в большей области, необходимо рассматривать разрывные решения уравнения и по-новому ставить задачу Коши.

Казалось бы, что достаточно (следуя идеям Н.М. Гюнтера, С.Л. Соболева, Л. Шварца в линейном случае) равенства (4), (5) понимать в слабом смысле (понимать (4) в смысле соотношения (3)). Однако (О.А. Олейник (1957)) такое определение решения не обеспечивает его единственности.

Корректный способ заключается в том, чтобы понимать решения задачи Коши (4), (5) $\rho(t, x)$, как предел (почти всюду по x при любом фиксированном значении $t > 0$) при

$$\varepsilon \rightarrow 0+, \quad D(\rho) := \varepsilon D(\rho), \quad D(\rho) > 0$$

решений задач Коши (6), (5) $\rho_\varepsilon(t, x)$:

$$\|\rho(t, \cdot) - \rho_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L_1(\mathbb{R})} = O(\sqrt{\varepsilon t}) \quad (\text{оценка Н.Н. Кузнецова (1975)}).$$

Так определенное решение принято называть обобщенным решением.

Это представляется естественным. Ведь оба уравнения (4) и (6) возникли (на разных уровнях детализации) при описании одного явления. Обоснованием метода исчезающей вязкости интенсивно занимались в 50-ые годы XX века (О.А. Олейник, А.Н. Тихонов и А.А. Самарский, П. Лакс, О.А. Ладыженская, И.М. Гельфанд и др.). Наиболее общие результаты получил С.Н. Кружков в конце 60-ых.

Заметим, что уравнение (6) параболического типа, следовательно, решение можно понимать в обычном (классическом смысле), даже при разрывных начальных условиях. Для таких нелинейных уравнений развит достаточно эффективный аппарат. Прежде всего, это различные варианты принципа максимума и основанные на них методы априорных оценок старших производных (С.Н. Бернштейн, И.Г. Петровский, О.А. Олейник, О.А. Ладыженская и др.), позволяющие довольно тонко исследовать различные свойства решений начально-краевых задач для уравнений параболического типа.

Примеры

- Эволюция заторов (начальное условие типа Римана (5))

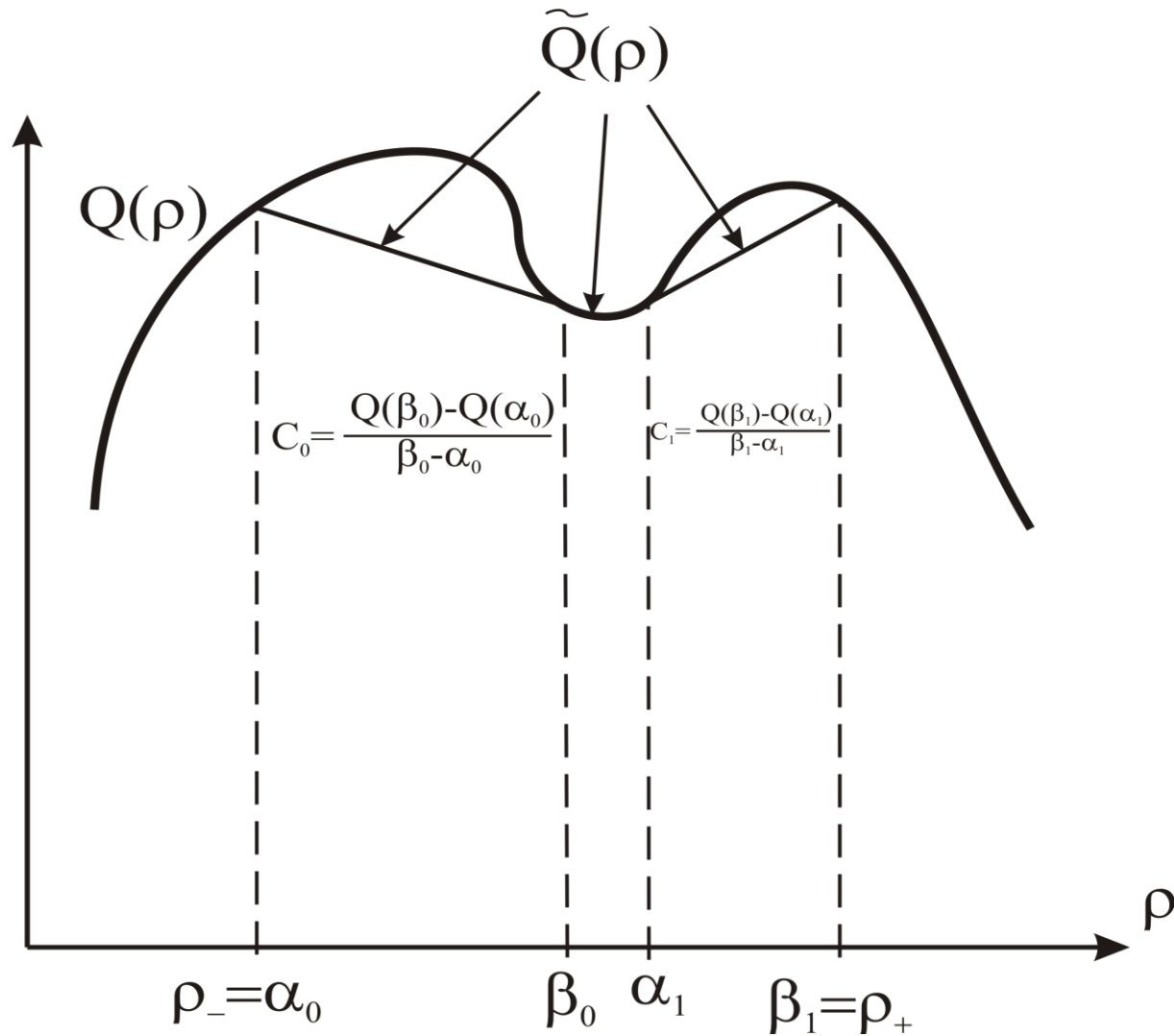


Рис. 4 (Построение И.М. Гельфанда (1958))

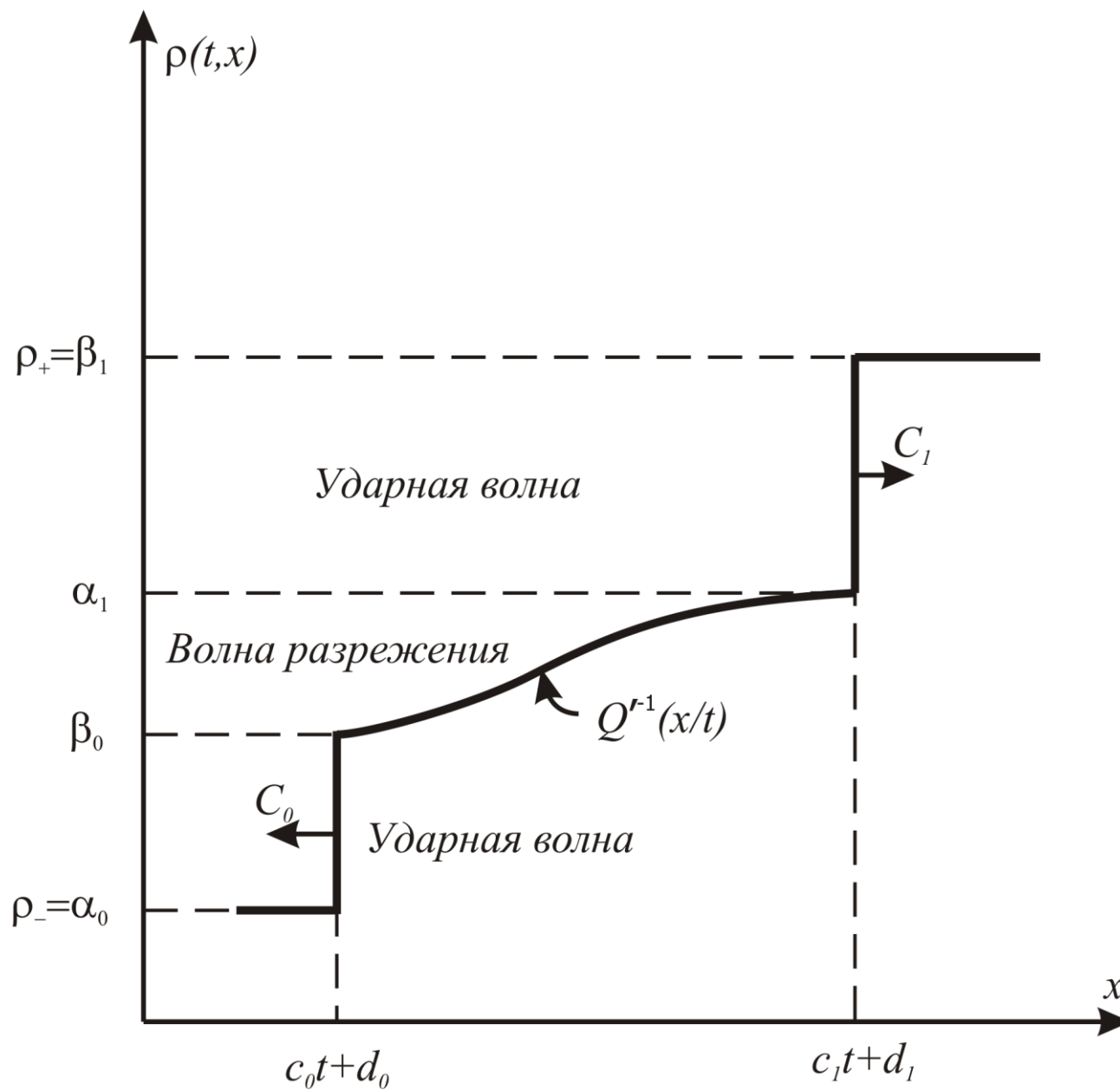


Рис. 5 (Эволюция глобального затора. Система волн для модели LWR)

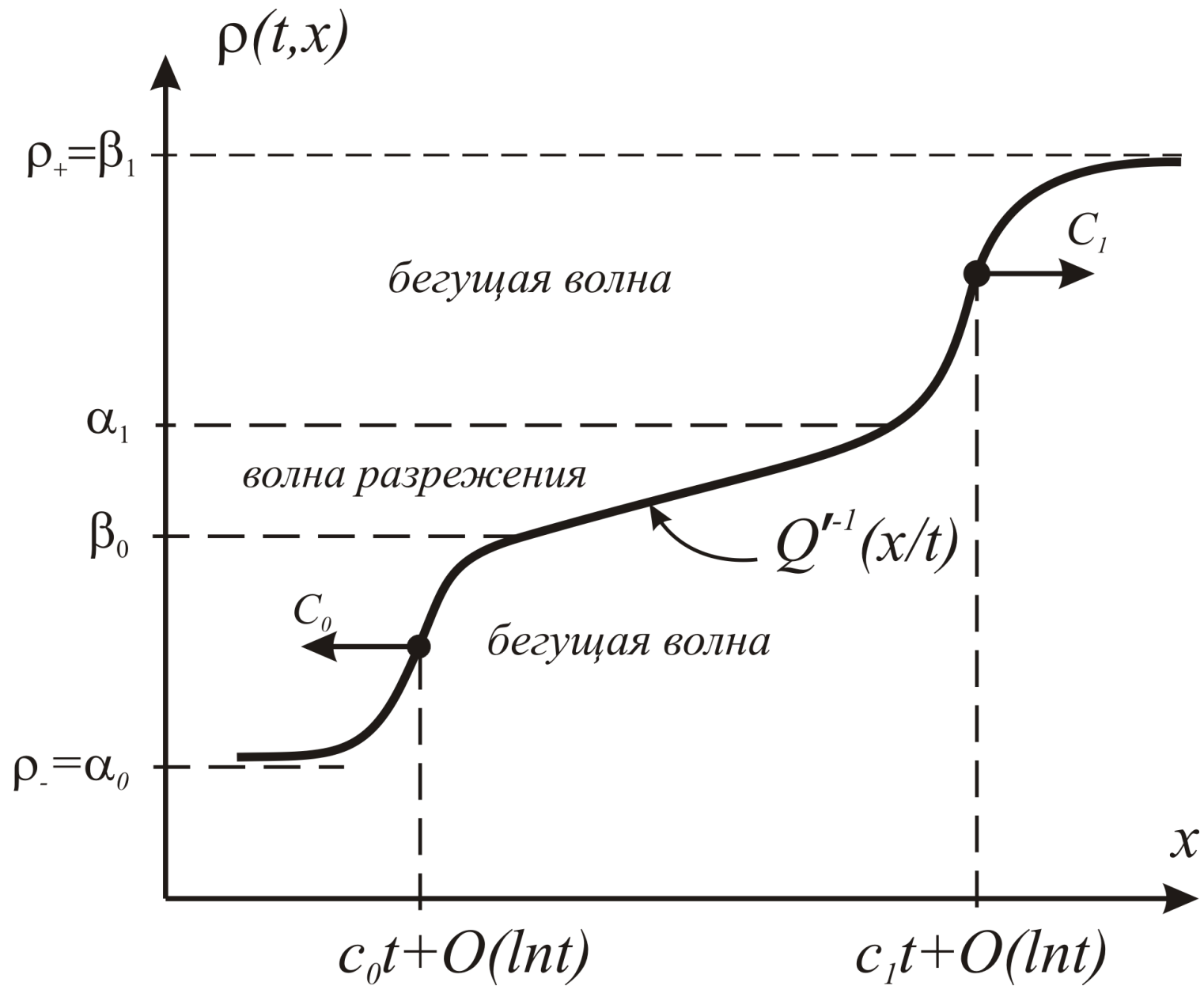


Рис. 6 (Эволюция глобального затора. Система волн для модели Уизема)

Гипотеза: Аналогичная картинка имеет место и для модели КдФБ – Уизема, если μ/ε^2 достаточно мало

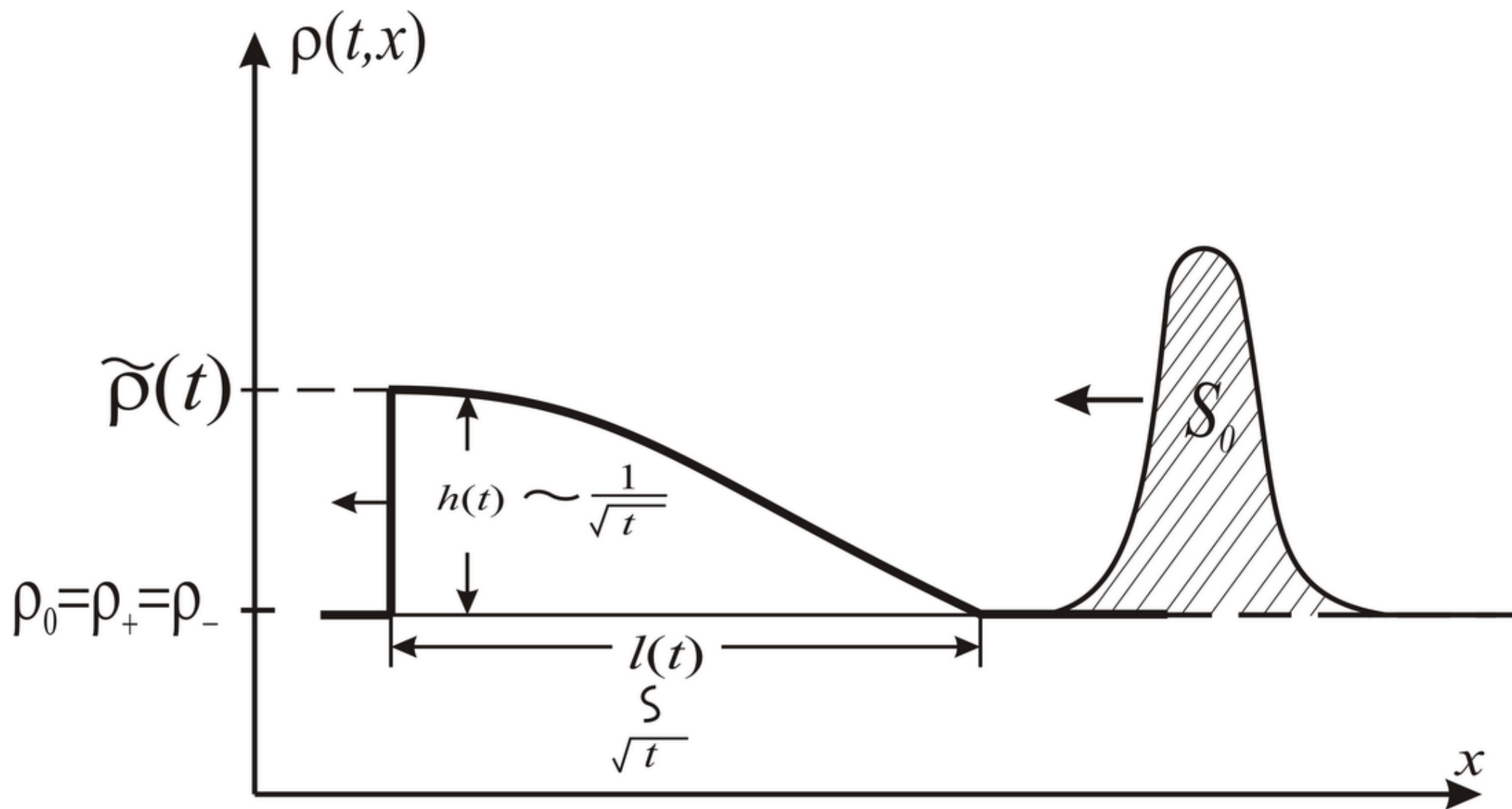


Рис. 7 (Эволюция локального затона)

- **Задача о светофоре**

В 1955 г. в работе М. Лайтхиллом и Дж. Уиземом была поставлена и решена (на основе модели LWR) следующая задача:

Найти такое число $k > 0$, что перед светофором (работающим в двух режимах: зеленый и красный) не будет скапливаться очередь, если

$$T_{\text{зел}} / T_{\text{кр}} \geq k.$$

Считать, что транспортный поток вдали от светофора имеет плотность $\rho_i < \rho_m$ (значение потока q_i), где ρ_m - плотность, при которой значение потока максимально.

Приведем ответ, введя обозначение для максимального потока $q_m = Q(\rho_m)$,

$$(q_m - q_i) T_{\text{зел}} \geq q_i T_{\text{кр}} \Rightarrow k = \frac{q_i}{q_m - q_i}.$$

$$(q_m - q_i)T_{зел} \geq q_i T_{кр} \Rightarrow k = \frac{q_i}{q_m - q_i}.$$

Заметим, что полученное соотношение достаточно хорошо согласуется с интуитивными представлениями. Действительно, если принять, что когда горит красный цвет, тогда поток АТС через светофор равен нулю, а когда горит зеленый, тогда поток максимальный (в течение всего времени горения зеленого), то получим условие: излишек АТС, скопившейся за время горения красного $q_i T_{кр}$, должен быть не больше чем та “добавка”, которую получаем за время горения зеленого $(q_m - q_i)T_{зел}$. “Добавка” же, в свою очередь, обусловлена тем, что при наличии светофора интенсивность потока АТС через светофор во время горения зеленого q_m превышает интенсивность потока АТС, подъезжающих к светофору q_i .

МОДЕЛЬ ПЭЙНА И ЕЁ ОБОБЩЕНИЯ

Важным шагом стала *модель Пэйна (1971)*. Эту модель можно понимать, как закон сохранения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (v\rho)}{\partial x} = 0,$$

в котором уже не предполагается зависимость скорости от плотности (уже не предполагается, что желаемая скорость устанавливается мгновенно). А для скорости выписывается уравнение

$$\frac{d}{dt} v = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\tau} \left(v - \left(V(\rho) - \frac{D(\rho)}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \right).$$

стремления реальной скорости v к желаемой скорости

$$V(\rho) - \frac{D(\rho)}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x},$$

причём τ ($\tau \sim 1$ сек.) - характеризует скорость стремления (в электротехнической терминологии τ – время релаксации). Полученную систему уравнений запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v & \rho \\ D/(\tau\rho) & v \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} 0 \\ V - v \end{pmatrix}, \quad (7)$$

из которого легко следует строгая гиперболичность этой системы (матрица при $\partial/\partial x$ имеет различные вещественные собственные значения).

Интересно заметить следующий, достаточно общий, факт: основное отличие гидродинамических моделей транспортных потоков от соответствующих гидродинамических аналогов заключается в правых частях, возникающих, как правило, гиперболических (строго) систем уравнений и их диффузионных аналогов. Действительно, первое уравнение системы Пэйна есть просто “закон сохранения массы” (в дивергентной форме), а второе уравнение – “закон изменения импульса”, приведенное к дивергентной форме, имеет вид:

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2 + P(\rho))}{\partial x} = -\frac{1}{\tau}(\rho v - \rho V(\rho)),$$

где “давление”

$$P(\rho) = \frac{1}{\tau} \int_0^\rho D(\tilde{\rho}) d\tilde{\rho}.$$

Отмеченное обстоятельство представляется естественным. Ведь “транспортная жидкость” — эта жидкость с мотивацией (стремление двигаться с желаемой скоростью), которая и присутствует в правой части. Это замечание позволяет использовать в расчетах по гидродинамическим моделям транспортных потоков хорошо разработанные более чем за полвека вычислительные алгоритмы (схемы П. Лакса, С.К. Годунова и др.).

Заметим также, что уже для системы двух законов сохранения (система Х. Пэйна (7) как раз представляет пример такой системы, причём имеется ещё и нелинейная правая часть) в общем случае неизвестно, как корректно определять глобальное по времени обобщенное решение. Метод исчезающей вязкости для систем оказывается уже чувствительным к выбору положительно определённой матрицы $D(\rho)$ в правой части (проблема не единственности решения). Тем не менее, для строго гиперболической систем законов сохранения с одной пространственной переменной за последние 15 лет был достигнут определённый прогресс: в общем случае построена глобальная теория существования, единственности и устойчивости по начальным данным. Отметим, что теория была построена разными способами, в том числе и с помощью метода исчезающей вязкости:

$\varepsilon \rightarrow 0+$, $D(\rho) := \varepsilon I$, где $I = \text{diag}\{1, \dots, 1\}$ - единичная матрица.

Желание “размазать разрывы решений” привело от модели LWR к модели Уизема. Это же желание мотивировало и введение в модель Пэйна диффузионные поправки. Заметим, что, вводя в правую часть системы диффузионные (дисперсионные) поправки, мы, как правило, решаем вопрос о том, что мы понимаем под решением. Иначе говоря, для корректной (и адекватной “физике процесса”) постановки начальной задачи Коши для системы законов сохранения, важно знать, “как эта система была приготовлена”. Откуда и как она возникла: что огрубил, чем пренебрегли и т.д. На таком пути получаются новые модели: Р. Кюна (1993), Кернера–Конхойзера (1994) и др. На текущий момент существует более 100 моделей такого типа. Здесь мы лишь упомянем некоторые подходы российских ученых (в которых обобщается подход Х. Пэйна): Н.Н. Смирнова, А.Б. Киселёва, В.Ф. Никитина, М.В. Юмашева (МГУ); Я.А. Холодова, А.С. Холодова и др. (МФТИ).

Несколько недостатков модели Пэйна (и многих впоследствии предложенных моделей, в том числе с диффузионными поправками) были указаны К. Даганзо (1995). В частности, было показано, что при сильных пространственных неоднородностях начальных условий могут возникать отрицательные значения скоростей (затор “рассасывается назад” как результат действия вязкости). При определенных значениях параметров могут возникать плотности,

превышающие максимально допустимые (“бампер к бамперу”). Также, согласно этим моделям, на движение АТС заметное влияние оказывают АТС, находящиеся сзади, что в случае одной полосы вряд ли возможно в реальном транспортном потоке. В начале XXI века А. Эу и М. Раскль, Х.М. Занг показали, как можно устранить недостатки, отмеченные К. Даганзо. Основная идея заключается в изменении второго уравнения в системе Пэйна:

$$\frac{d}{dt}(v + p(\rho)) = \frac{\partial(v + p(\rho))}{\partial t} + v \frac{\partial(v + p(\rho))}{\partial x} = 0.$$

При этом требуется, чтобы

$$p'(\rho) > 0.$$

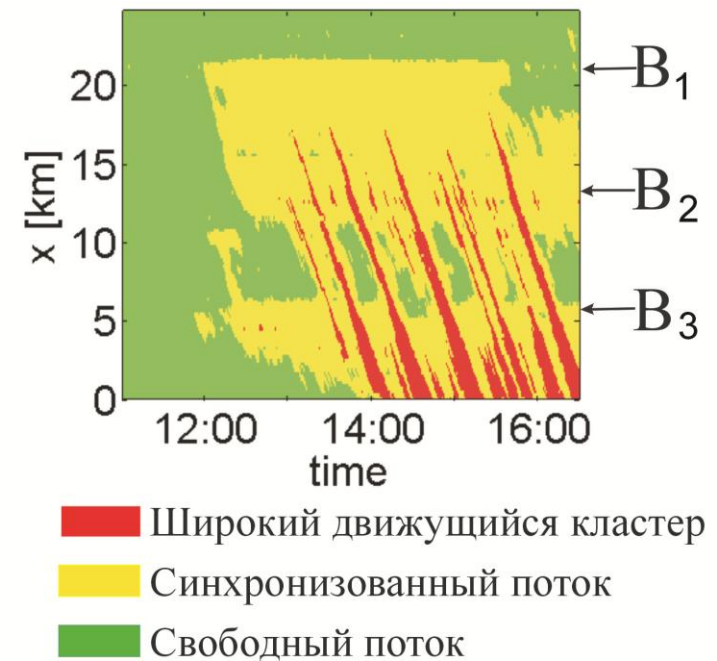
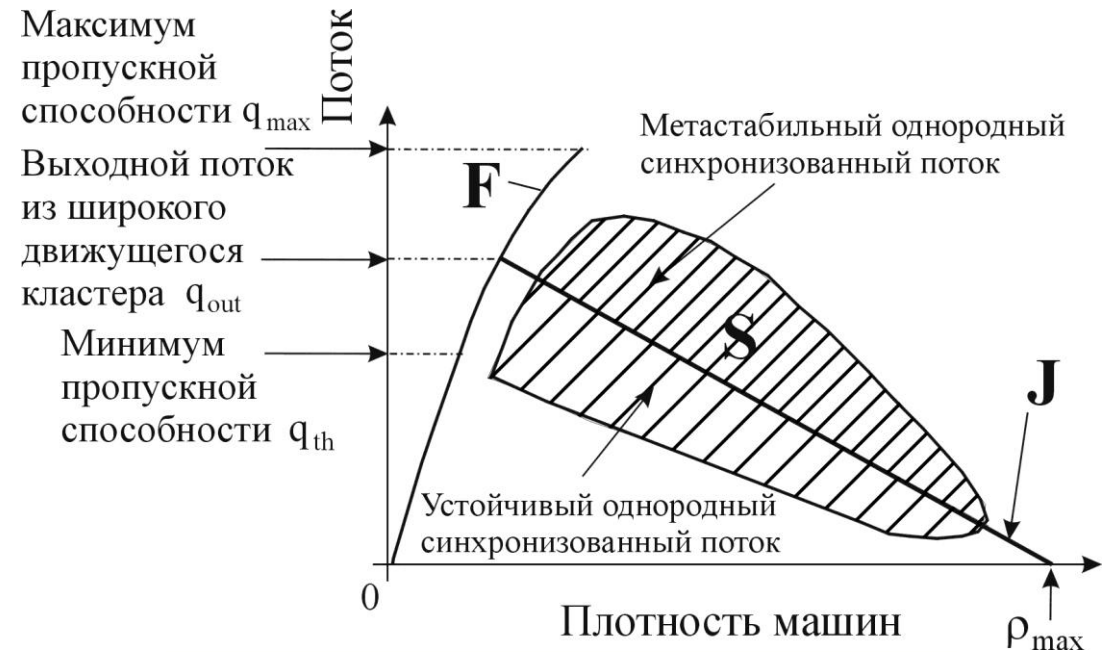
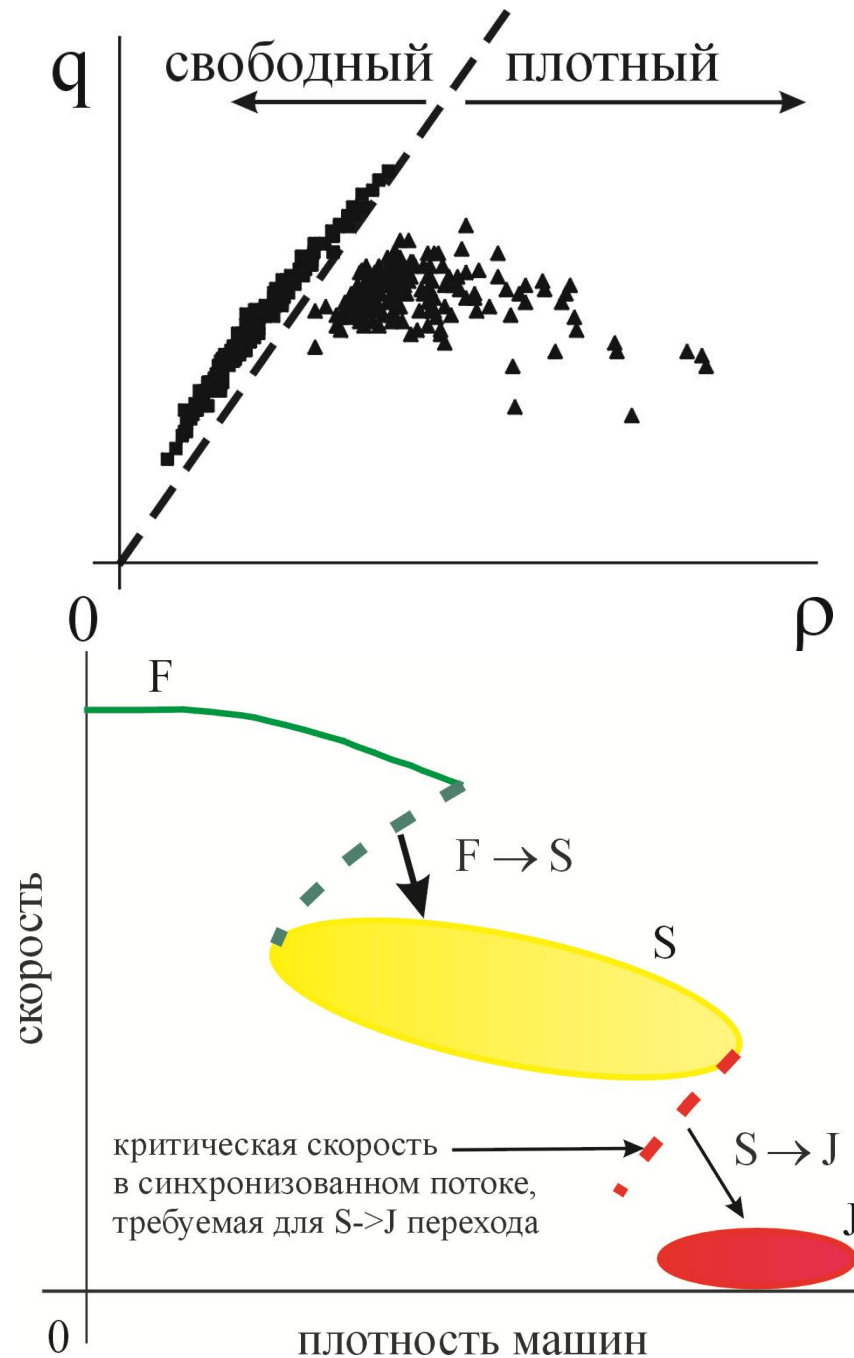
В частности, для “давления” $p(\rho)$ были предложены следующие формулы:

$p(\rho) = \rho^\gamma, \gamma > 0$	А. Эу и М. Раскль (2000)
$p(\rho) = -V(\rho)$	Х.М. Занг (2002)

Возможная модификация второго уравнения

$$\frac{d}{dt}(v + p(\rho)) = -\frac{1}{\tau}(\rho v - \rho V(\rho)).$$

Модель также должна описывать три фазы Кернера



2. МИКРОСКОПИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Пусть АТС в однополосном потоке пронумерованы слева направо. Обозначим через $s_n(t)$ - координату центра n -го АТС в момент времени $t \geq 0$.

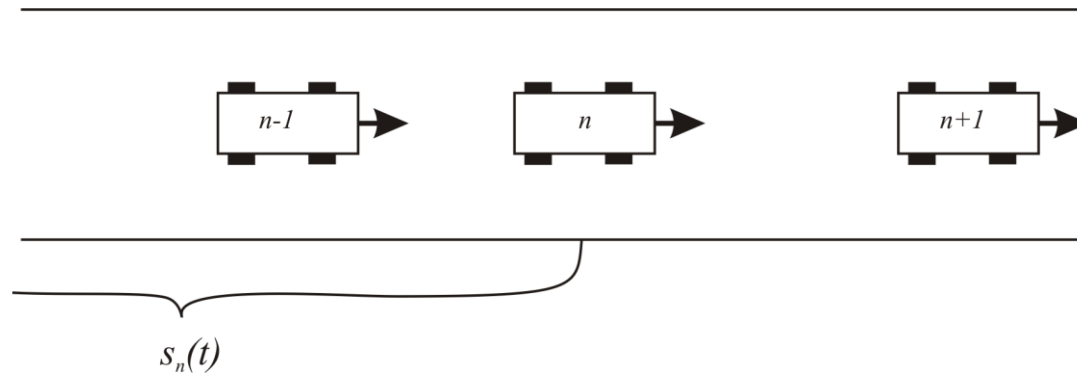


Рис. 9 (Микроскопическая модель)

Модели оптимальной скорости и следования за лидером можно объединить в одну общую *микроскопическую модель разумного водителя (Intelligent Driver Model (IDM))*:

$$s_n''(t) = F\left(s_{n+1}(t) - s_n(t), s_{n+1}'(t) - s_n'(t), s_n'(t)\right).$$

Как показали численные эксперименты, наиболее “удачной” моделью этого класса является *модель М. Трайбера (Трайба) (1999)*:

$$s_n''(t) = a_n \cdot \left[1 - \left(\frac{s_n'(t)}{V_n^0} \right)^\delta - \left(\frac{d_n^* \left(s_n'(t), s_{n+1}'(t) - s_n'(t) \right)}{s_{n+1}(t) - s_n(t)} \right)^2 \right].$$

Первое слагаемое

$$a_n \cdot \left[1 - \left(\frac{s_n'(t)}{V_n^0} \right)^\delta \right]$$

в правой части этого соотношения описывает динамику ускорения АТС на свободной дороге, в то время как второе слагаемое описывает торможение из-за взаимодействия с *лидером* (впереди идущим АТС).

Модель

$$s_n''(t) = a_n \cdot \left[1 - \left(\frac{s_n'(t)}{V_n^0} \right)^\delta \right]$$

естественно называть моделью оптимальной скорости, а модель

$$s_n''(t) = a_n \cdot \left[1 - \left(\frac{d_n^* \left(s_n'(t), s_{n+1}'(t) - s_n'(t) \right)}{s_{n+1}(t) - s_n(t)} \right)^2 \right]$$

естественно называть моделью следования за лидером.

Очевидно, что параметр δ отвечает за поведение при разгоне (при $\delta = 1$ имеет место экспоненциальный по времени разгон, в пределе при $\delta \rightarrow \infty$ разгон происходит с постоянным “комфортным” ускорением a_n вплоть до достижения желаемой скорости V_n^0).

Тормозящий член определяется отношением *желаемой дистанции* d_n^* (*безопасным расстоянием*) к фактической дистанции

$$h_n(t) = s_{n+1}(t) - s_n(t),$$

причем желаемая дистанция определяется следующим образом:

$$d_n^* \left(s'_n(t), s'_{n+1}(t) - s'_n(t) \right) = d_n + T_n s'_n(t) - \frac{s'_n(t) \left(s'_{n+1}(t) - s'_n(t) \right)}{2\sqrt{a_n b_n}},$$

где d_n - расстояние между АТС (n -ым и $n+1$ -ым) в заторе (естественно, что $d_n \geq L$, где $L \sim 5,7$ м - средняя длина АТС, и действительно, принято считать, что $d_n \sim 7,5$ м), b_n - ускорение “комфортного” торможения ($a_n \sim b_n \sim 2$ м/с²), T_n - аналог времени реакции водителя.

Поясним предложенную для безопасного расстояния формулу. Пока водитель n -ого АТС среагирует на изменение ситуации впереди он проедет путь $T_n s'_n(t)$. Потом, “поняв, что надо, скажем, тормозить” ($s'_{n+1}(t) < s'_n(t)$) он успеет выровнять свою скорость со скоростью впереди идущего АТС (двигаясь с ускорением торможения b_n) до момента, когда достигнет $(n+1)$ -ое АТС, только если расстояние в момент когда “пришло понимание” между n -ым и $(n+1)$ -ым АТС было не меньше

$$-\frac{s'_n(t)(s'_{n+1}(t) - s'_n(t))}{2\sqrt{a_n b_n}}.$$

Ситуация, когда надо ускориться ($s'_{n+1}(t) > s'_n(t)$) рассматривается аналогичным образом. Собственно, из-за желания охватить “одной формулой” две разные ситуации (ускорение и торможение) и возник знаменатель $2\sqrt{a_n b_n}$.

Заметим, что в *правилах дорожного движения* (ПДД) некоторых стран величина T_n достаточно жестко регламентирована (ограничена снизу ПДД). Так, например, в США от водителя требуют увеличивать безопасное расстояние (считается, что впереди идущее АТС имеет ту же скорость) на длину АТС L при увеличении скорости на 5 м/с (т.е. на 18 км/ч). Таким образом,

$$T_n \sim 5,7 [м] / 5 [м/с] \sim 1,1 \text{ сек.}$$

В равновесном потоке одинаковых АТС, когда

$$s_n''(t) \equiv 0, s_{n+1}'(t) - s_n'(t) \equiv 0, s_n'(t) \equiv V:$$

$$d(V) \stackrel{\text{def}}{=} s_{n+1}(t) - s_n(t) = d^*(V, 0) \left[1 - (V/V^0)^\delta \right]^{-1/2}.$$

Из этого соотношения (считая, что $\rho(v) = 1/d(V)$) можно сначала построить уравнение состояния транспортного потока – зависимость $V(\rho)$, а потом фундаментальную диаграмму $Q(\rho)$. В пределе при $\delta \rightarrow \infty$ так построенная фундаментальная диаграмма будет стремиться к треугольной (см. рис. 8).

3. ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ МОДЕЛЕЙ

Несмотря на элементарность, модель LWR (а также ее дифференциально-разностные и разностные аналоги) достаточно популярна в прикладных расчетах (часто также считают, что фундаментальная диаграмма имеет треугольный вид (см. рис. 9)). Во многом это связано с недостаточным объемом данных, для использования моделей более высокого уровня (поправки, привносимые более тонкими моделями, нивелируются неточностью данных). Ряд современных коллективов исследователей сосредотачивается на решении начально-краевых задач для уравнения (4) на графе транспортной сети. Основные сложности при этом возникают при постановке краевых условий в узлах графа транспортной сети. Модель LWR (точнее ее разностные аналоги) хорошо подходит и для управления транспортными потоками. В подтверждение этих слов приведем некоторые идеи, использованные в подходе Берклиевской группы (П. Варайа, А. Куржанский, Р. Хоровитц и др.). За базовую модель берется *модель клеточных автоматов* CTM (Cell Transmission Model,) К. Даганзо (1994, 1995) = схема Годунова (1959) для (4) + треугольная фундаментальная диаграмма (рис. 9).

Метод численного решения начально-краевой задачи для закона сохранения, предложенный С. К. Годуновым в конце 50-х годов XX века

Начальное условие $\rho(0, x)$ аппроксимируется кусочно-постоянной функцией

$$\rho^\delta(0, x) = \rho_k, \quad k\delta \leq x < (k+1)\delta,$$

где δ – шаг по пространству, а ρ_k – среднее от $\rho(0, x)$ на промежутке $[k\delta, (k+1)\delta)$, т.е.

$$\rho_k = \frac{1}{\delta} \int_{k\delta}^{(k+1)\delta} \rho(0, x) dx.$$

Задача с начальными данными $\rho^\delta(0, x)$ может быть решена точно. В каждой точке $k\delta$ мы должны решить *задачу Римана о распаде разрыва* (см. выше). «Волны», выходящие из двух соседних точек разрыва $k\delta$ и $(k+1)\delta$, не пересекаются, пока $t \cdot c_{\max} \leq \delta/2$, где $c_{\max} = |\max Q'(\rho)|$ – максимальная скорость распространения возмущения.

Итак, объединив решения задач Римана, можно получить точное решение. В момент времени $\tau = \delta / (2c_{\max})$ – шаг по времени (такой выбор шага иногда называют *условием Лакса*, причем автоматически выполняется необходимое *условие Куранта–Фридрихса–Леви* $\tau / \delta \leq (c_{\max})^{-1}$ сходимости разностных схем при численном решении гиперболических уравнений), мы опять заменим это точное решение приближенной кусочно-постоянной функцией и повторим процесс.

Особенно просто схема Годунова выглядит для уравнения (4) с треугольной фундаментальной диаграммой (рис. 9)

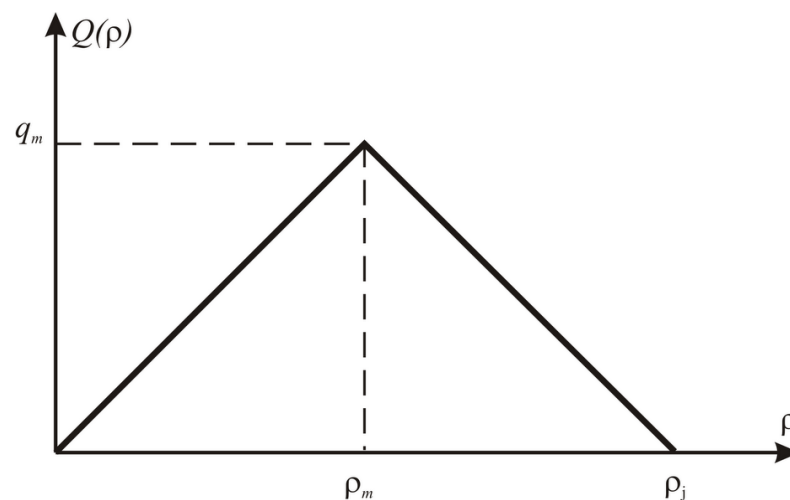


Рис. 9 (Треугольная фундаментальная диаграмма, аналогично рассматривается трапециидальная)

Выпишем СОДУ на графе транспортной сети, используя лишенную деталей модификацию правила «пропорциональных приоритетов»:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_i}{dt} = & \min \left\{ \sum_{j: j \rightarrow i} \beta_i^j \min \{ \rho_j v_j, Q_j^{\max} \}, \min \{ (\rho_i^{\max} - \rho_i) w_i, Q_i^{\max} \} \right\} - \\ & - \sum_{k: i \rightarrow k} \beta_k^i \min \{ \rho_i v_i, Q_i^{\max} \} \cdot \min \left\{ 1, \frac{\min \{ (\rho_k^{\max} - \rho_k) w_k, Q_k^{\max} \}}{\sum_{l: l \rightarrow k} \beta_k^l \min \{ \rho_l v_l, Q_l^{\max} \}} \right\}, \end{aligned}$$

здесь каждое ребро ориентированного графа транспортной сети пронумеровано, ρ_i — плотность потока на i -м ребре, β_i^j — доля потока АТС на ребре j , ответвляющаяся на ребро i . Обратим внимание, что в общем случае следует считать $\beta_i^j(t, \vec{\rho})$. Причем если учитывать задержки в узлах графа транспортной сети, связанные, например, с наличием светофоров, то, вообще говоря,

$$\sum_{k: i \rightarrow k} \beta_k^i(t, \vec{\rho}) < 1.$$

Принцип управления светофорами

Из фундаментальной диаграммы следует, что одному и тому же значению потока АТС соответствуют разные (как правило, две) плотности и, как следствие, разные скорости. Очевидно, что более выгодным режимом является режим с большей скоростью (см. рис. 10): потоки будут удовлетворены в том же количестве, однако среднее время движения снизится, поскольку движение будет проходить при больших скоростях (и, как следствие, с меньшими плотностями). Задача управления (скажем, светофорами или въездами на основные магистрали) заключается в том, чтобы большую часть времени среднестатистический водитель проводил именно в таких режимах.

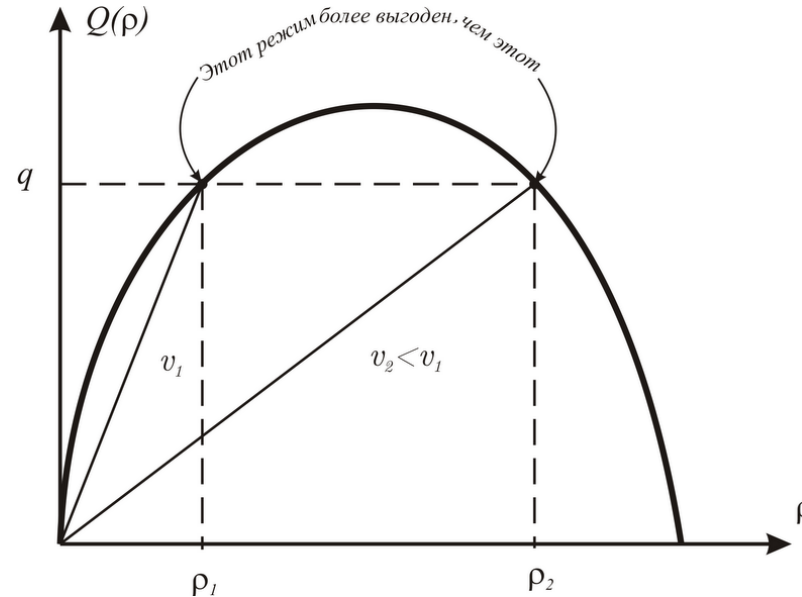


Рис. 10

Математические модели расчета матрицы корреспонденций и распределения потоков

1. Модель расчета матрицы корреспонденций

В некотором городе имеется n районов, $L_i > 0$ - число жителей i -го района, $W_j > 0$ - число работающих в j -ом районе (число рабочих мест), $x_{ij}(t) \geq 0$ - число жителей, живущих в i -ом районе и работающих в j -ом в момент времени $t \geq 0$. Со временем пронумерованные жители (количество которых не изменяется, и равно $N = \sum_{i=1}^n L_i = \sum_{j=1}^n W_j$) меняют места жительства (квартиры). Считается, что отмеченные изменения могут происходить только за счёт обмена квартирами, т.е.

$$x_{ij}(t) \geq 0, \sum_{j=1}^n x_{ij}(t) \equiv L_i, \sum_{i=1}^n x_{ij}(t) \equiv W_j, i, j = 1, \dots, n. \quad (A)$$

Пусть в момент времени $t \geq 0$ r -ый житель живет в k -ом районе и работает в m -ом, а l -ый житель живет в p -ом районе и работает в q -ом. Тогда $p_{k,m;p,q}^L(t)\Delta t + o(\Delta t)$ - есть вероятность того, что жители с номерами r и l ($1 \leq r < l \leq N$) поменяются квартирами в промежутке времени $(t, t + \Delta t)$. Естественно считать, что вероятность в единицу времени обмена местами жительства зависит только от мест проживания и работы обменивающихся.

Например, можно считать, что время, потраченное в пути от района i до района j - есть $c_{ij} \geq 0$, а

$$p_{k,m;p,q}^L(t) \equiv p^L \exp\left(c_{km} + c_{pq} - (c_{pm} + c_{kq})\right) > 0.$$

Тогда по эргодической теореме для конечных однородных марковских процессов (см. также теорему Батищевой-Веденяпина-Малышева-Пирогова)

$$\forall \left\{x_{ij}\right\}_{i=1, j=1}^{n,n} \in (A) \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} P\left(x_{ij}(t) = x_{ij}, i, j = 1, \dots, n\right) = Z^{-1} \prod_{i=1, j=1}^{n,n} \exp\left(-2c_{ij}x_{ij}\right) \cdot \left(x_{ij}!\right)^{-1} \stackrel{def}{=} p\left(\left\{x_{ij}\right\}_{i=1, j=1}^{n,n}\right).$$

Распределение $p\left(\left\{x_{ij}\right\}_{i=1, j=1}^{n, n}\right)$ на множестве (А) сконцентрировано при $N \gg 1$

(см. ниже) в окрестности наиболее вероятного значения $\left\{x_{ij}^*\right\}_{i=1, j=1}^{n, n}$, которое находится, как решение задачи энтропийно–линейного программирования:

$$\sum_{i=1, j=1}^{n, n} x_{ij} \ln x_{ij} + 2 \sum_{i=1, j=1}^{n, n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min_{\left\{x_{ij}\right\}_{i=1, j=1}^{n, n} \in (A)}. \quad (\text{ЭЛП})$$

Решение этой задачи можно представить как $x_{ij} = \exp(-1 - \lambda_i^L - \lambda_j^W - 2c_{ij})$, где множители Лагранжа (двойственные переменные) $\left\{\lambda_i^L\right\}_{i=1}^n$ и $\left\{\lambda_j^W\right\}_{j=1}^n$ определяются из равенств системы (А). На практике мы имеем информацию о $\left\{L_i, W_i\right\}_{i=1}^n$

и $\left\{c_{ij}\right\}_{i=1, j=1}^{n, n}$. Решив задачу (А), мы найдем $\left\{x_{km}\left(\left\{L_i, W_i\right\}_{i=1}^n ; \left\{c_{ij}\right\}_{i=1, j=1}^{n, n}\right)\right\}_{k=1, m=1}^{n, n}$.

Если $N \sim n^{\alpha+1}$, $L_i, W_j \sim n^\alpha$ ($\alpha > 1$), $n \gg 1$, $\forall i, j = 1, \dots, n \rightarrow c_{ij} = c > 0$, то распределение вероятностей $p\left(\left\{x_{ij}\right\}_{i=1, j=1}^{n, n}\right)$ на множестве (А) сконцентрировано в $O\left(n^{(\alpha-1)/2}\right)$ окрестности наиболее вероятного значения $x_{ij}^* \approx L_i W_j / N \sim n^{\alpha-1}$.

Поэтому,

$$\exists \lambda > 0: \lim_{t \rightarrow \infty} P\left(\forall i, j = 1, \dots, n \rightarrow \left|x_{ij}(t)/x_{ij}^* - 1\right| \leq \lambda/n^{(\alpha-1)/2}\right) \geq 0.999.$$

Приведем (следуя А.Дж. Вильсону) схему доказательства.

$$\forall \left\{x_{ij}\right\}_{i=1, j=1}^{n, n} \in (A) \rightarrow \sum_{i=1, j=1}^{n, n} \frac{\partial \ln p\left(\left\{x_{ij}^*\right\}_{i=1, j=1}^{n, n}\right)}{\partial x_{ij}} \cdot (x_{ij} - x_{ij}^*) \leq 0.$$

Поэтому $\forall \left\{x_{ij}\right\}_{i=1, j=1}^{n, n} \in (A) \exists \theta \in [0, 1]:$

$$\ln p\left(\left\{x_{ij}\right\}_{i=1, j=1}^{n, n}\right) \leq \ln p\left(\left\{x_{ij}^*\right\}_{i=1, j=1}^{n, n}\right) + \sum_{i=1, j=1}^{n, n} \frac{\partial^2 \ln p\left(\left\{x_{ij}^* \theta + x_{ij} \cdot (1-\theta)\right\}_{i=1, j=1}^{n, n}\right)}{\partial x_{ij}^2} \cdot \frac{\left(x_{ij} - x_{ij}^*\right)^2}{2}.$$

Но

$$\frac{\partial^2 \ln p\left(\left\{x_{ij}\right\}_{i=1, j=1}^{n, n}\right)}{\partial x_{ij}^2} = \frac{\partial^2 \left(-\sum_{i=1, j=1}^{n, n} x_{ij} \ln x_{ij}\right)}{\partial x_{ij}^2} = -\frac{1}{x_{ij}}$$

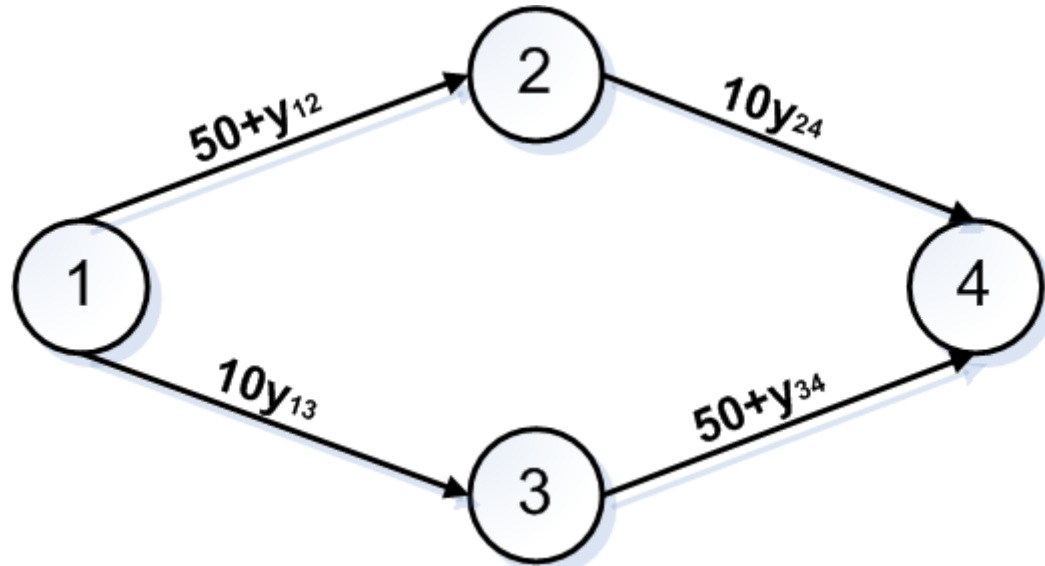
Следовательно, приходим к “неравенству о концентрации меры”:

$$\forall M > 0, \forall \left\{x_{ij}\right\}_{i=1, j=1}^{n, n} \in (A): \sum_{i=1, j=1}^{n, n} \frac{\left(x_{ij} - x_{ij}^*\right)^2}{2 \max \left\{x_{ij}, x_{ij}^*\right\}} \geq M$$

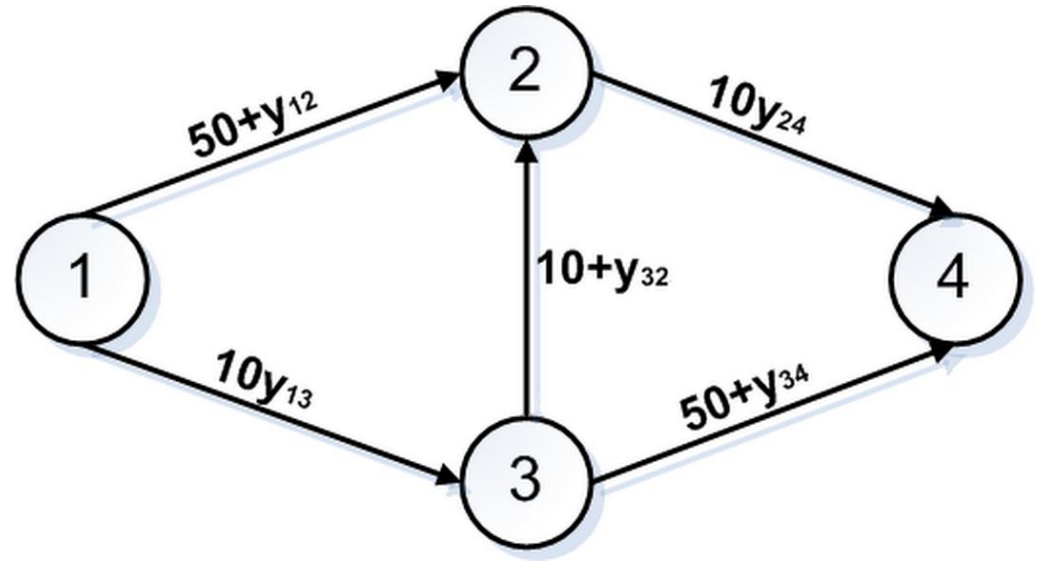
$$p\left(\left\{x_{ij}\right\}_{i=1, j=1}^{n, n}\right) \leq e^{-M} p\left(\left\{x_{ij}^*\right\}_{i=1, j=1}^{n, n}\right).$$

2. Модель распределения потоков

Пусть корреспонденция $x_{14} = 6$ (тысяч АТС/час)



Случай 1



Случай 2

Вес ребра – есть время движения по ребру (в минутах), если поток через ребро есть y_{ij} (тысяч АТС/час)

Например, в случае 2: $y_{24} = x_{1324} + x_{124}$. Естественно считать, что время движения возрастающая функция потока

Парадокс Д. Брайеса (1968)

Случай 1: $x_{124} = x_{134} = 3$

Полно время в пути $T = 83$ мин

Случай 2: $x_{124} = x_{1324} = x_{134} = 2$

Полное время в пути $T = 92$ мин

Принцип Нэша-Вардропа (1952): Для любой корреспонденции x_{ij} и любого пути $\tilde{x}_{i\dots j}$:

$\tilde{x}_{i\dots j} > 0 \Rightarrow T_{\tilde{x}_{i\dots j}}(\vec{x}) = \min_{x_{i\dots j}} T_{x_{i\dots j}}(\vec{x})$, $\vec{x} = \{x_{k\dots m}\}$ - множество всевозможных путей

(минимум берется по всем путям, начинающимся в вершине i и заканчивающимся в вершине j),

Таким образом, чтобы найти равновесие Нэша-Вардропа \vec{x}^* нужно решить вариационное неравенство:

$$\forall \vec{x} \in X \rightarrow \langle \vec{T}(\vec{x}^*), (\vec{x} - \vec{x}^*) \rangle \geq 0, \text{ где } X = \left\{ \{x_{k\dots m}\} \geq 0 : \sum_{\dots} x_{k\dots m} = x_{km} \right\}.$$

Вариационное неравенство можно переписать, как проекционное уравнение

$$x^* = \Pi_X \left(x^* - \lambda T(x^*) \right), \lambda > 0,$$

где $\Pi_X \left(x^* - \lambda G(x^*) \right)$ - такая “точка” множества X , которая доставляет минимум функционалу расстояния от точки $x \in X$ до фиксированной точки $x^* - \lambda G(x^*)$. Выписанное проекционное уравнение можно далее численно решать, например, с помощью метода простой итерации $x_{n+1} = \Pi_X \left(x_n - \lambda G(x_n) \right)$.

Вернемся к парадоксу Брайеса. Кажется невероятным, что строительство новой дороги (из 3 в 2) приводит к худшему равновесию Нэша - Вардропа (это равновесие будет не оптимальным по Парето)? Более того, естественная эволюционная динамика “наилучших” текущих действий (водителей) исходя из “вчерашнего дня” приводит именно к этому равновесию (других нет):

$$p_{kr..qm}(t+1) = \gamma \frac{\max\{x_{kr..qm}(t), 1\} \exp(-\beta T_{x_{kr..qm}}(\vec{x}(t)))}{\sum_{\dots} \max\{x_{k\dots m}(t), 1\} \exp(-\beta T_{x_{k\dots m}}(\vec{x}(t)))} - \text{вероятность того, что}$$

водитель, стартующий из k и финиширующий в m , выберет путь $kr..qm$. Параметр $\beta > 0$ характеризует отношение к риску (чем больше β , тем менее рискован водитель). Параметр $0 < \gamma \leq 1$ характеризует любопытство, консерватизм. С вероятностью $1 - \gamma$ водитель не меняет вчерашнего маршрута.

Утверждение: Описанная выше динамика “приводит” к равновесию Нэша—Вардропа.

