

# **Квантовые вычисления**

---

**Л. Е. Федичкин**

***Межпредметный семинар***

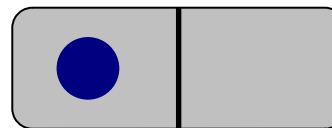
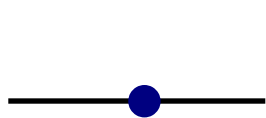
***202 НК***

***МФТИ, Долгопрудный,***

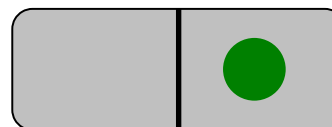
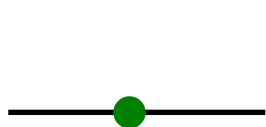
***21 сентября 2011 года***

# Квантовый бит (кубит)

---



$|1\rangle$



$|0\rangle$

$$\psi = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

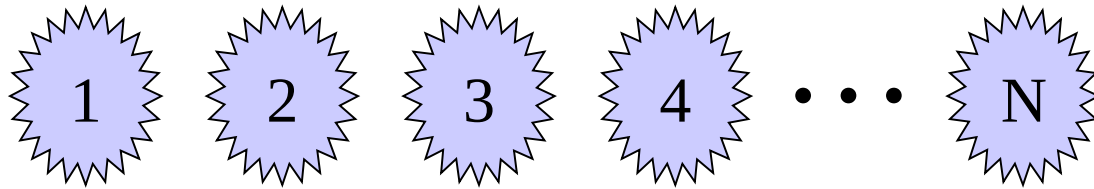
Energy

Spin

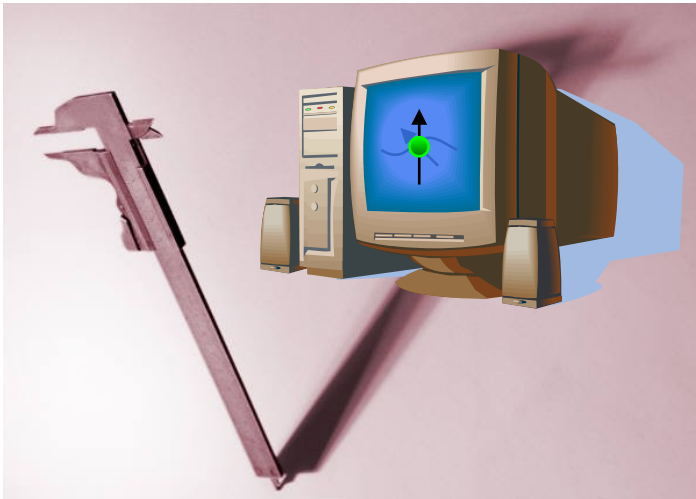
Position

# Квантовый регистр

---

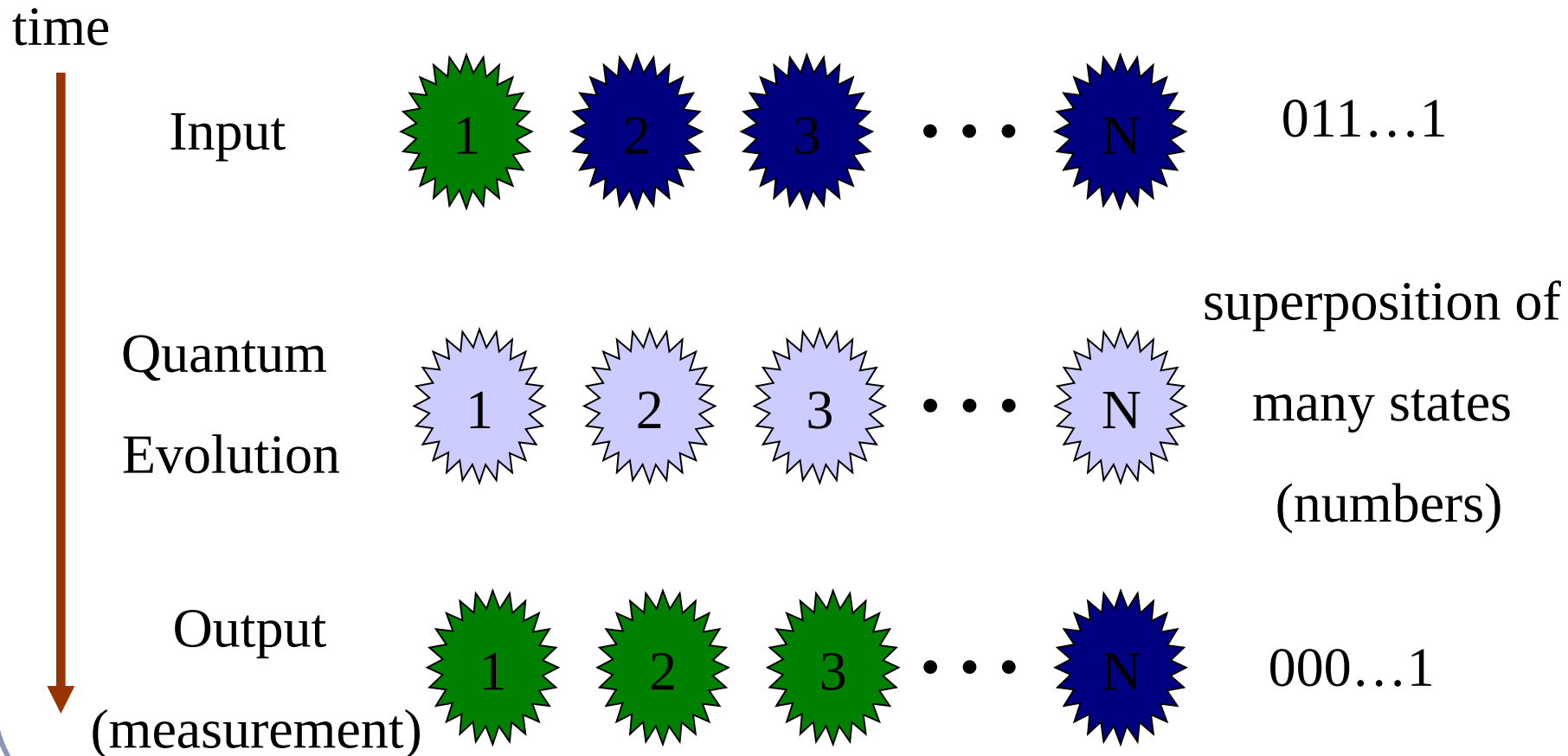


$$\Psi = \sum_{k=0}^{2^N-1} \alpha_k |k\rangle$$



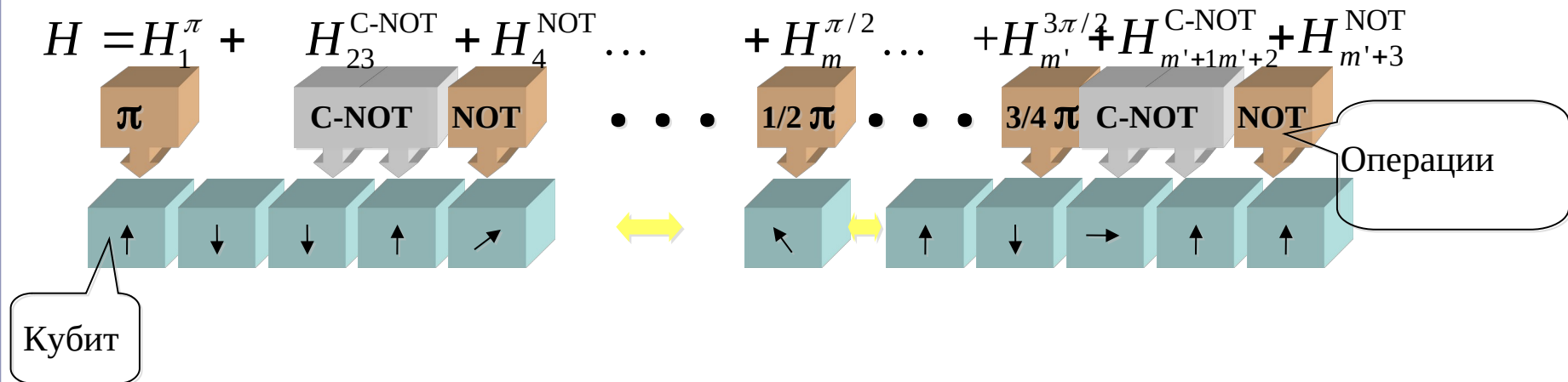
$$|\tilde{k}\rangle = |00101101011011\dots101\rangle$$

# Квантовое вычисление



# Квантовый алгоритм

Квантовый алгоритм может быть представлен в виде последовательности элементарных квантовых операций:



В во время каждого вычислительного такта гамильтониан является суммой непересекающихся одно- и двух-кубитовых операторов

# Критерии DiVincenzo

---

D. DiVincenzo, Fortschr. Phys. **48**, 771 (2000)

1. *Масштабируемость*: Наличие масштабируемой физической системы, составленная из хорошо определённых элементов (обычно кубитов).
2. *Инициализируемость*: Возможность привести систему в простое основное состояние.
3. *Управляемость*: Способность управления состоянием системы посредством последовательного применения универсального набора элементарных операций.
4. *Помехоустойчивость*: Высокая когерентность и возможность подавления декогерентизации с помощью процедур коррекции ошибок и устойчивых к ошибкам вычислительных алгоритмов.
5. *Измеряемость*: Возможность измерения состояния системы в удобном базисе.

# Очень краткая история

---

1. Квантовая логика. И. Нейман 1930-е, К.Ф. Вайцзеккер, В.К. Гейзенберг 1940-е и 1950-е
2. Практическая невозможность многочастичного квантового моделирования. А. Шлютер 1970 (Ю.И. Манин 1980)
3. Квантовый компьютер, кубит, квантовая операция (вентиль, гейт). Р. Фейнман 1982 и 1985
4. Квантовая машина Тьюринга. Д. Дойч 1985
5. Алгоритм факторизации, коррекция ошибок. П. Шор 1994 и 1997

# Алгоритм Гровера

Дан неупорядоченный список вида:

$$\{(x, a_x)\} \quad 0 \leq x < 2^n, \quad x \in \mathbb{Z}$$

$x$  - номер элемента  
(номер ячейки, индекс...)

$a_x$  - информация

Найти номер элемента списка, удовлетворяющего заданному критерию.

Например,  $a_x = A_{иск}$  или  
 $a_x \in A$

Введём функцию  $P(x)$  такую, что

$$P(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x, a_x) \text{ удовлетворяет} \\ & \text{заданному критерию} \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Найти корень уравнения:

$$P(x) = 1$$



Введём дополнительное условие:

$$P(x) = 1$$

имеет единственное решение:

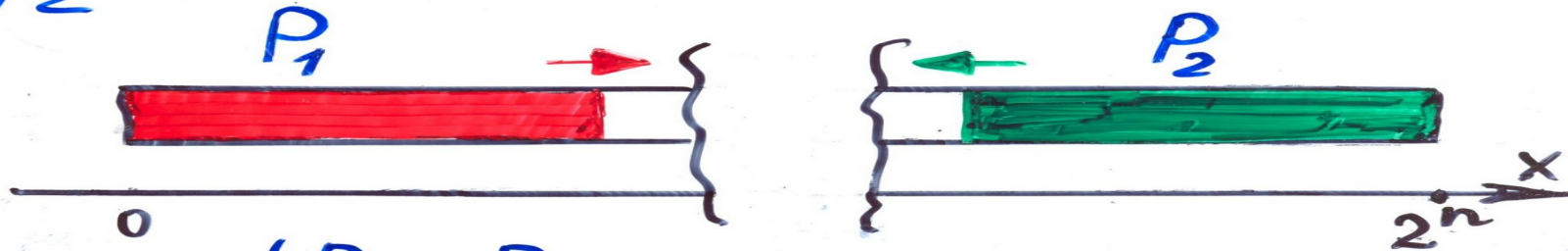
$$x = x_0.$$

В классическом списке  
необходимо просмотреть

$K > 2^{n-1}$  элементов, чтобы

обнаружить  $x_0$  с вероятностью

$$P > 1/2$$



$$\begin{cases} P_1 = P_2 \\ P_1 + P_2 < 1 \end{cases} \Rightarrow P_1 < 1/2$$

Число операций  $O(K)$ , т.е.

$$O(2^n)$$

В квантовом списке все элементы могут быть помещены в один квантовый регистр:

$$\psi = 2^{-n/2} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle$$

Функции  $P(x)$  соответствует quantum gate  $U_P$ :

$$U_P |x, y\rangle \rightarrow |x, y \oplus P(x)\rangle$$

$$U_P |x, 0\rangle \rightarrow |x, P(x)\rangle$$

$$U_P U_P = I$$

Найти  $|x_0\rangle$ :  $U_P |x_0, 0\rangle \rightarrow |x_0, 1\rangle$

Обозначим  $\psi(k, l) = k|x_0\rangle + l \sum_{\substack{x=0, \\ x \neq x_0}}^{2^n-1} |x\rangle$

$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  оператор Адамара

$W = \underbrace{H \otimes H \otimes \dots \otimes H}_n$  оператор Волла и операторов Адамара

# Алгоритм Гровера

1. Стартуем с состояния

$$|0\rangle = |0\rangle_1, |0\rangle_2 \dots |0\rangle_n$$

$$2. W |0\rangle = \prod_{i=1}^n \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_i + |1\rangle_i) \right] = 2^{-n/2} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle$$

Повторяем  $\left[ \frac{\pi}{4} \sqrt{2^n} \right]$  раз шагами 3 и 4

$$3. \psi(k, l) \rightarrow \psi(-k, l)$$

Меняем знак амплитуды у  $|x_0\rangle$

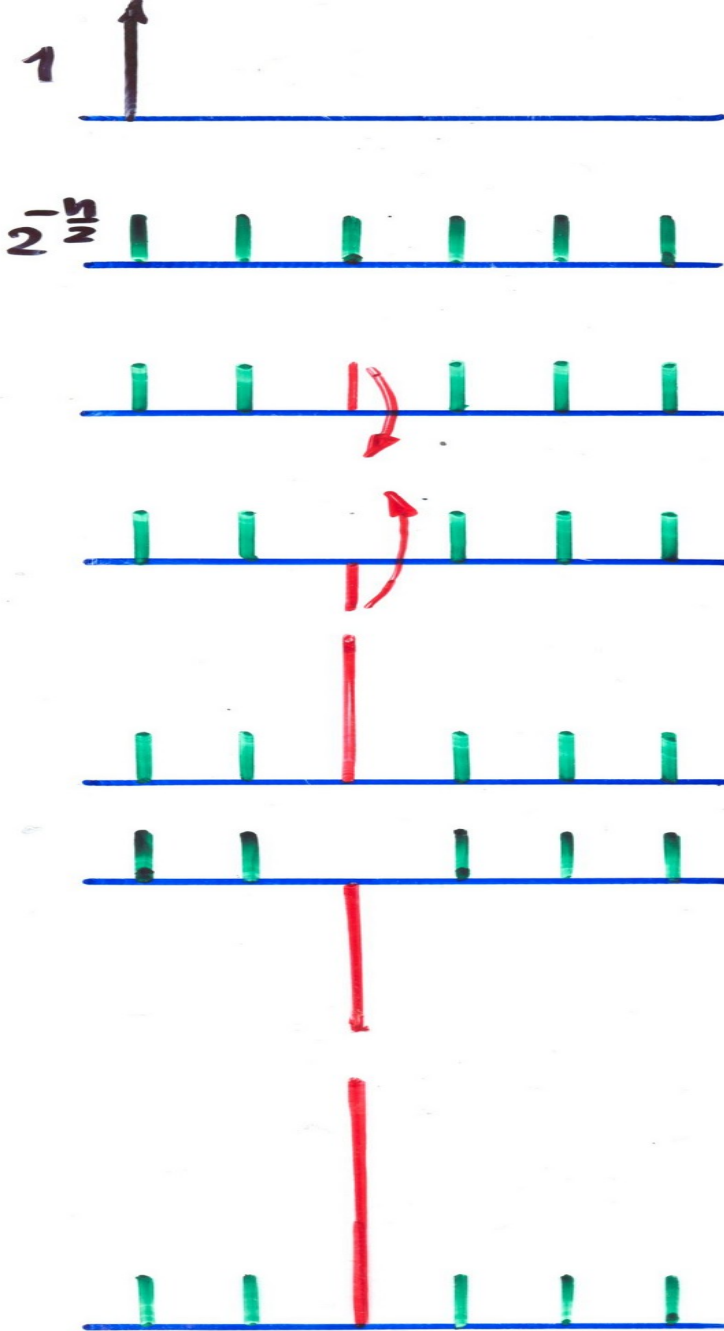
$$4. \psi(k, l) \rightarrow \psi\left(\frac{2^n-2}{2^n}k + \frac{2(2^n-1)}{2^n}l, \frac{2^n-2}{2^n}l - \frac{2}{2^n}k\right)$$

Инверсия всех амплитуд отн. среднего значения

5. Измеряем  $|x\rangle$ .

С вероятностью  $P > 1 - 2^{-n}$

$$|x\rangle = |x_0\rangle$$



$|0\rangle$

$W|0\rangle$

$U_p |W|0\rangle, 0\rangle$

$\Psi_{a23}(\tilde{Z})$

$\Psi_{a24}(D)$

$\Psi_{a23}(\tilde{Z})$

$\Psi_{a24}(D)$



$$\psi(k, l) : k |x_0\rangle + \sum_{x \neq x_0} l |x\rangle$$

После  $j$ -той итерации (3 ÷ 4)

$$\begin{cases} k_{j+1} = (1 - 2^{1-n}) k_j + 2(1 - 2^{-n}) l_j \\ l_{j+1} = (1 - 2^{1-n}) l_j - 2^{1-n} k_j \end{cases}$$

$\hat{=}$

$$\begin{cases} k_j = \sin((2j+1)\theta) \\ l_j = (2^n - 1)^{-1/2} \cos((2j+1)\theta) \end{cases}$$

$$\theta = \arcsin(2^{-n/2})$$

Требуем  $k_m = 1$ , тогда

$$(2m+1)\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow m = \frac{\pi}{4\theta} - \frac{1}{2}$$

$$m \approx \frac{\pi}{4} 2^{n/2} - \frac{1}{2}$$

## Вероятность успеха

$$\tilde{m} = \frac{\pi}{4} 2^{n/2} - \frac{1}{2} \quad \begin{cases} \ell_{\tilde{m}} = 1 \\ \ell_{\tilde{m}} = 0 \end{cases} \quad \tilde{m} \notin N$$
$$m = \left[ \frac{\pi}{4} 2^{n/2} \right]$$

$$|m - \tilde{m}| \leq \frac{1}{2} \quad \delta = m - \tilde{m}$$

$$\begin{aligned} |\ell_m| &= (2^n - 1)^{-1/2} |\cos(\frac{\pi}{2} - 2\delta\theta)| = \\ &= (2^n - 1)^{-1/2} |\sin(2\delta\theta)| < \\ &< (2^n - 1)^{-1/2} |\sin\theta| = 2^{-n/2} (2^n - 1)^{-1/2} \end{aligned}$$

$$P_- = (2^n - 1) |\ell_m|^2 < 2^{-n}$$

$$P_+ = 1 - P_- > 1 - 2^{-n}$$

1) Добавляем к регистру  $(n+1)$ -ый qubit

$$\psi = 2^{-n/2} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle |0\rangle$$

2) Действуем  $U_p$ :

$$U_p \psi = 2^{-n/2} \sum_{\substack{x=0, \\ x \neq x_0}}^{2^n-1} |x\rangle |0\rangle + 2^{-n/2} |x_0\rangle |1\rangle$$

3) Пусть  $\tilde{Z} = \underbrace{I \otimes I \otimes \dots \otimes I}_n \otimes Z$

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Z|0\rangle = |0\rangle \quad Z|1\rangle = -|1\rangle$$

$$\text{Потому } \tilde{Z} \varphi(a, b) = \varphi(-a, b)$$

$$\text{где } \varphi(a, b) = a |x_0\rangle |1\rangle + b \sum_{\substack{x=0, \\ x \neq x_0}}^{2^n-1} |x\rangle |0\rangle$$

Шаг 3  $\Rightarrow$  применение  $\tilde{Z}$ .

4) Шаг 4  $\Rightarrow$  применение  $D \otimes I$ .

$$D \stackrel{\text{def}}{=} W R W$$

$$R \stackrel{\text{def}}{=} 2|0\rangle\langle 0| - \underbrace{I \otimes I \otimes \dots \otimes I}_n$$

$$\begin{aligned} W|0\rangle\langle 0|W &= \left( \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} \langle x| \right) = \\ &= 2^{-n} \sum_{x=0}^{2^n-1} \sum_{y=0}^{2^n-1} |x\rangle\langle y| \end{aligned}$$



$$D = 2^{(1-n)} \sum_{x=0}^{2^n-1} \sum_{y=0}^{2^n-1} |x\rangle \langle y| - \underbrace{I \otimes I \otimes \dots \otimes I}_n =$$

$$= 2^{1-n} \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = 2^{1-n} M - E$$

$$M |x\rangle = \sum_{y=0}^{2^n-1} |y\rangle \quad M \sum_{x=0}^{2^n-1} c_x |x\rangle = \sum_{x=0}^{2^n-1} c_x \sum_{y=0}^{2^n-1} |y\rangle$$

Введём ср. арифм.  $A = \sum_{x=0}^{2^n-1} c_x \frac{1}{2^n}$ , тогда

$$M \sum_{x=0}^{2^n-1} c_x |x\rangle = 2^n A \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle$$

$$D \sum_{x=0}^{2^n-1} c_x |x\rangle = 2A \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle - \sum_{x=0}^{2^n-1} c_x |x\rangle =$$

$$= \sum (2A - c_x) |x\rangle$$

$$D \cdot D = E$$

$$\begin{cases} A' = 2^{-n} \sum (2A - c_x) = A \\ 2A' - (2A - c_x) = c_x \end{cases}$$



Boyer et al. (1996)

$$O\left(\frac{n2^{n/2}}{\sqrt{t}}\right)$$

Число решений  $t$  неизвестно.

$$t < \frac{3}{4} 2^n$$

1.  $m := 1$

$$\lambda := 6/5$$

$$|\psi_0\rangle = \sum_{x=0}^{2^n-1} 2^{-n/2} |x\rangle$$

2.  $j := \text{RANDOM}(m) \quad 0 \leq j < m$

3.  $j$  раз совершаем итерацию  
Гровера (шаги 3 ÷ 4 в  
алгоритме Гровера)

4. Измеряем состояние регистров

$$|\psi\rangle \rightarrow |x\rangle$$

5. Если  $P(x) = 1$ , то останавливаем  
программу

6.  $m := \min(\lambda m, 2^{n/2})$

7. Переходим к п. 2

## Quantum correction of errors with ancilla measurement

1. The  $n$ -qubit number  $|x\rangle$  is coded to  $(n+k)$  qubit

$$\underbrace{C|x\rangle}_n \underbrace{|0\rangle}_k = \underbrace{C(x)}_{n+k}$$

2. Quantum calculation process  $UC(x)$  introduces errors

$$\sum_i E_i :$$

$$\sum_i E_i UC(x), \quad E_i - \text{error operators}$$

3. Error syndromes are transferred to ancilla qubits:

$$S \sum_i E_i \otimes UC(x) |0\rangle = \sum_i E_i \otimes UC(x) |i\rangle$$

4. Error identification by ancilla qubits measurement

$$\sum_i E_i \otimes UC(x) |i\rangle \xrightarrow[\text{measurement}]{\text{ancilla}} E_i \otimes UC(x) |i\rangle$$

5. Identified error  $E_i$  correction

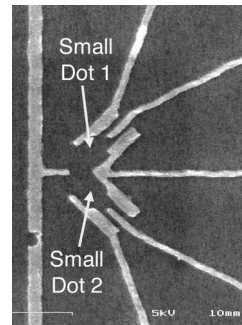
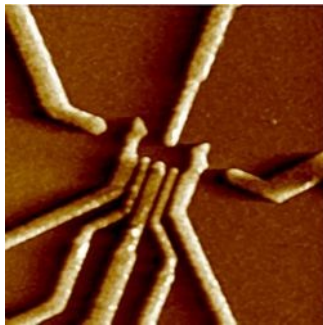
$$E_i^{-1} E_i \otimes UC(x) |i\rangle = UC(x) |i\rangle$$

6. The ancilla qubits cleaning

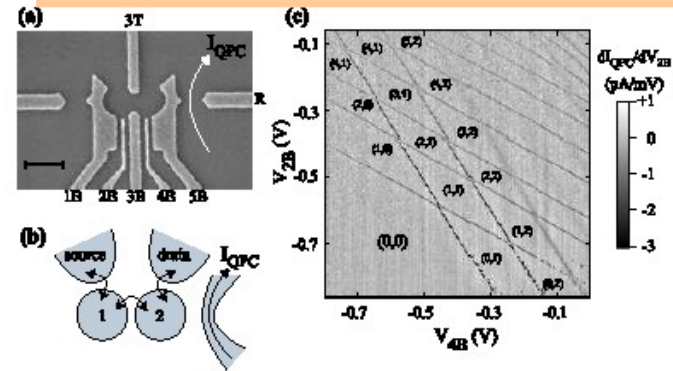
$$|i\rangle \rightarrow |0\rangle$$

# Experimental Realizations of Double-Well Potential

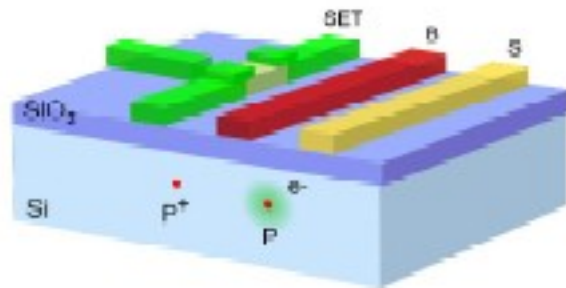
L. Kouwenhoven et al., TU Delft



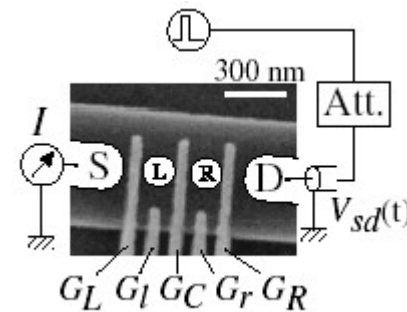
A. Sachrajda et al., NRC, Ottawa



C. Marcus et al., Harvard



R. Clark et al., CQCT, Australia

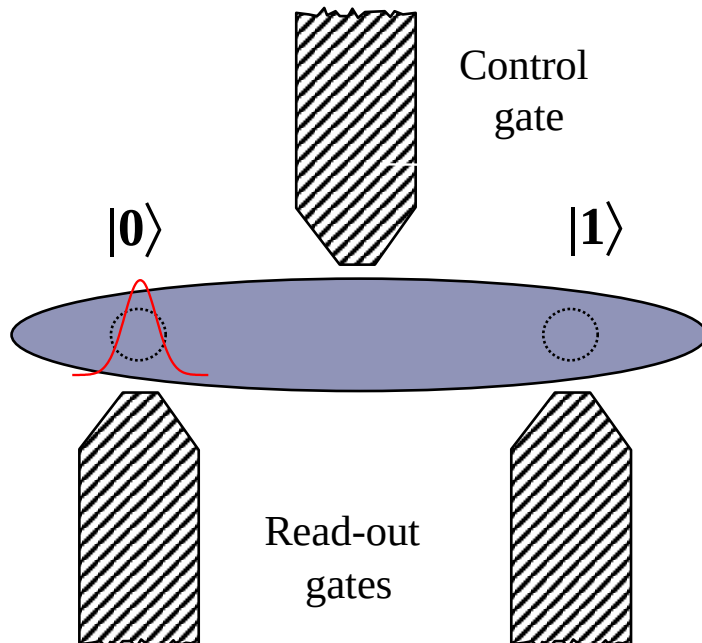


T. Fujisawa et al., NTT, Japan

# Electron in Double Quantum Dot

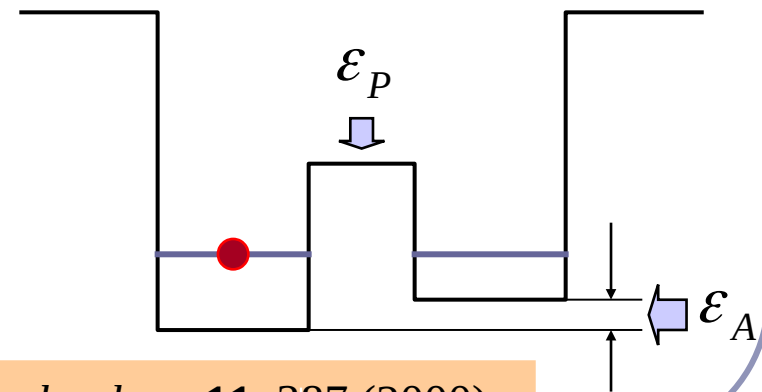
Two-level approximation for an electron in double-well

$$H_e = -\frac{1}{2}\varepsilon_A(t)\sigma_x - \frac{1}{2}\varepsilon_P(t)\sigma_z, \text{ in the basis } \{|0\rangle, |1\rangle\}$$



$$\text{Energy splitting: } \varepsilon = \sqrt{\varepsilon_A^2 + \varepsilon_P^2}$$

$$\psi(r) = \alpha\psi_L(r) + \beta\psi_R(r)$$



L. Fedichkin, M. Yanchenko, K.A. Valiev, *Nanotechnology* **11**, 387 (2000).

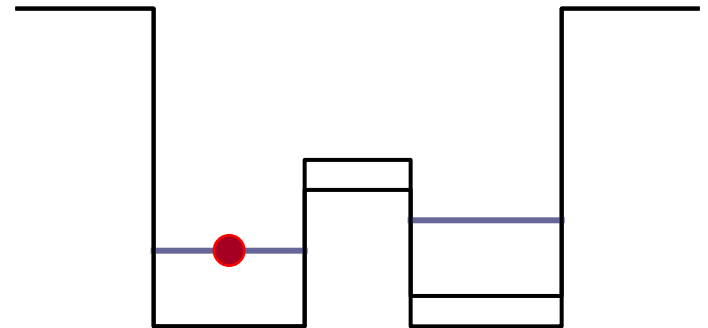
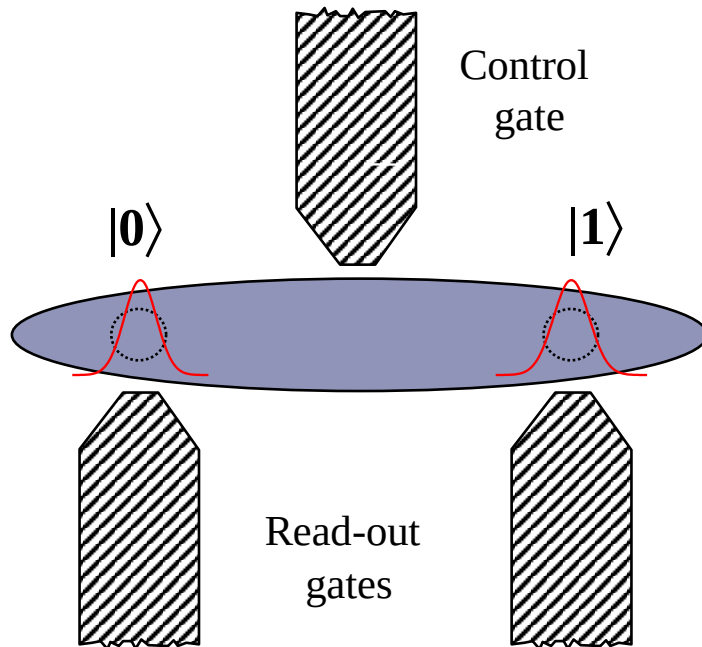
# NOT-gate

$$H_e = -\frac{1}{2}\varepsilon_A(t)\sigma_X - \frac{1}{2}\varepsilon_P(t)\sigma_Z$$

$$\varepsilon = \varepsilon_A = \text{const}; \varepsilon_P(t) = 0, \text{ for } t \in [0, 2\pi/\varepsilon]$$

$$\psi(0) = |0\rangle = \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle \exp(-\varepsilon_A t/\hbar)$$



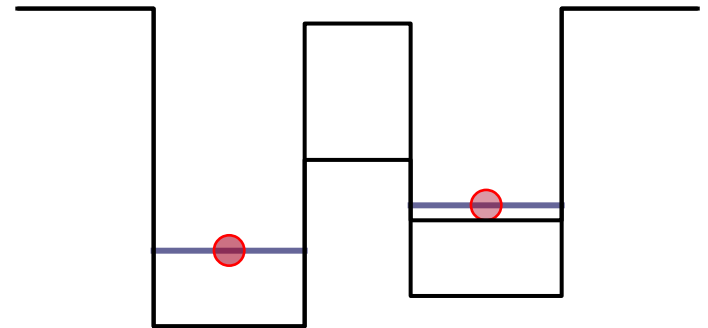
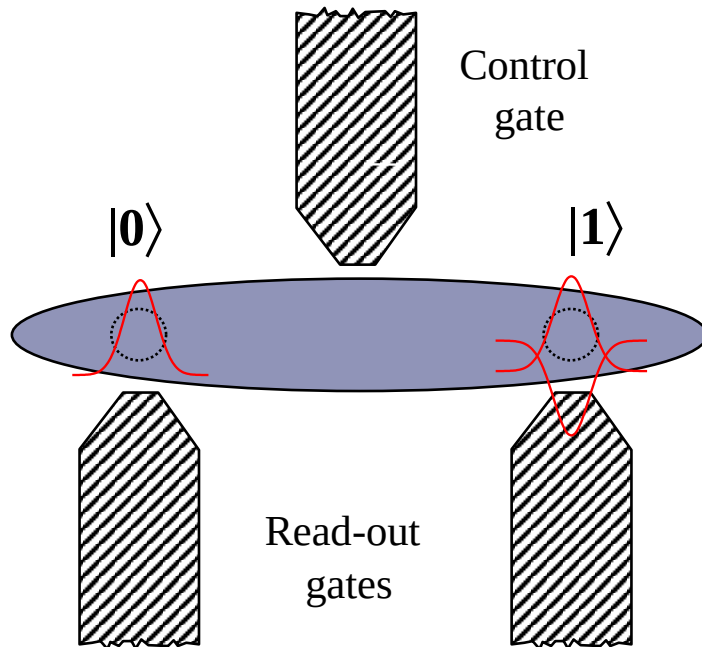
# $\pi$ -PHASE Gate

$$H_e = -\frac{1}{2}\varepsilon_A(t)\sigma_X - \frac{1}{2}\varepsilon_P(t)\sigma_Z$$

$$\varepsilon = \varepsilon_P = \text{const}; \varepsilon_A(t) = 0, \text{ for } t \in [0, 2\pi/\varepsilon]$$

$$\psi(0) = |+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

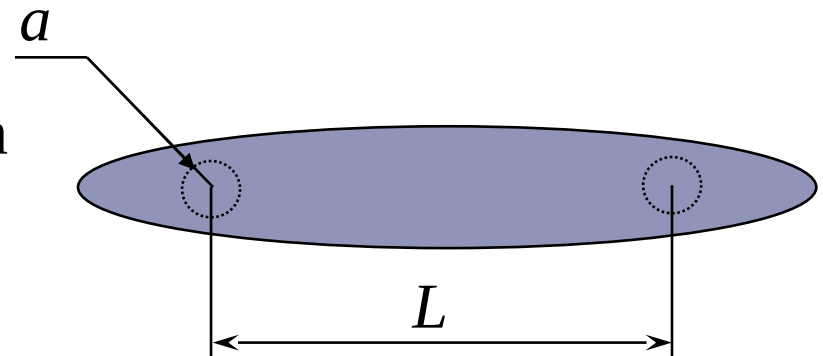
$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \exp(-\varepsilon_P t/\hbar)$$



# Main Parameters

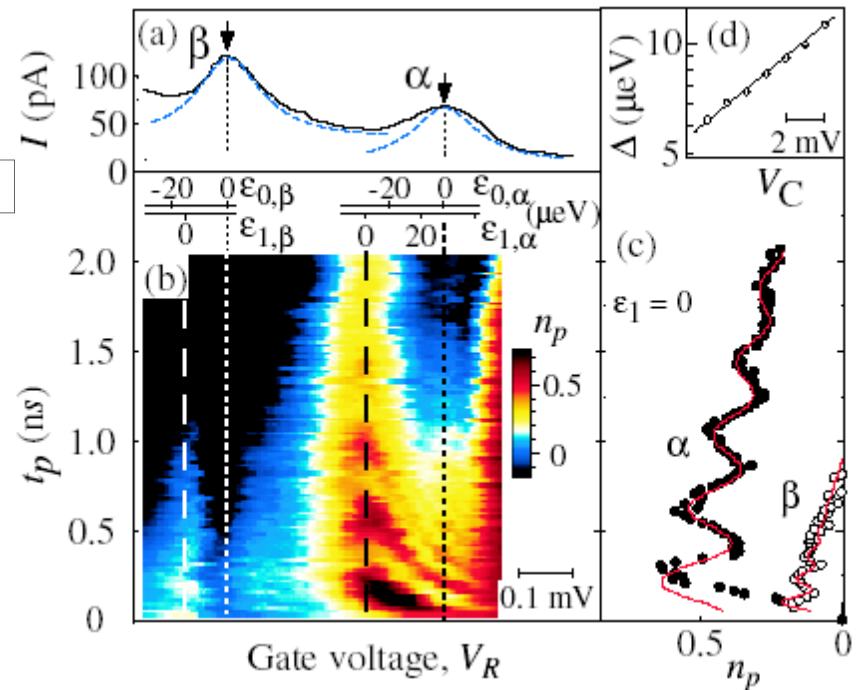
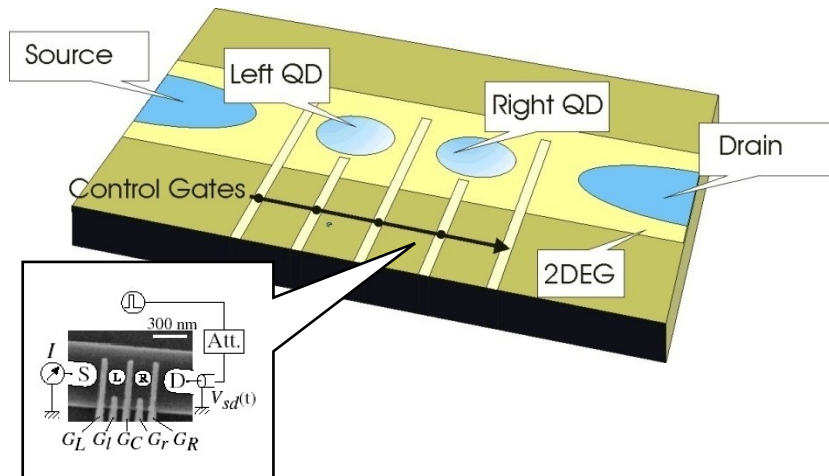
Parameter	Gate-engineered DD in GaAs, Si	Double P-impurity in Si
L	50 nm	
a	25 nm	3 nm
$\Psi(r)$	Gaussian $\sim \exp(-r^2/(2a^2))$	Hydrogenic $\sim \exp(-r/a)$
T	0	

$L$  – distance between electron density maxima;  
 $a$  – dot radius.



# Coherent Behavior Observed in Experiment

## Gate-engineered Quantum Double-Dot in GaAs



T. Hayashi, T. Fujisawa, H.-D. Cheong, Y.-H. Jeong, Y. Hirayama, Phys. Rev. Lett. **91**, 226804 (2003)