ОБ ОБОБЩЕННЫХ ГРУППАХ ВАГНЕРА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ В ФИЗИКЕ И ГЕОМЕТРИИ

В. Г. Жотиков

Московский физико-технический институт
(Национальный исследовательский *университет*)
e-mail: Zhotikov @ yandex.ru

Доклад

Межпредметный семинар МФТИ
г. Москва – г. Долгопрудный
03 марта 2010 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Ведение: симметрии в физике и их связь с законами сохранения

Типы симметрий в физике

(некоторые важные примеры)

- «Пространственно-временные» симметрии:
- однородность времени ⇔ закон сохранения энергии: $t \to t' + a \Longrightarrow L \to L'$ и $\mathcal{S} = \mathcal{S}' = \mathrm{inv}$.

однородность пространства ⇔ закон сохранения импульса: $r \to r' + c \Longrightarrow L \to L'$ и $\mathcal{S} = \mathcal{S}' = \mathrm{inv}$.

«Внутренние» симметрии:

примеры: группа $U(1)$ ⇔ закон сохранения заряда;

группы $SU(2)$, $SU(3)$ и. т.д.

Теорема Э. Нетер (1918 г.)

О связи геометрия и теория групп

Феликс Клейн (F. Klein 1849 - 1925), вступая в 1872 году в должность профессора Эрлангенского университета, прочел вступительную лекцию:

«Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований» («Эрлангенская программа»).

В ней была сформулирована единая точка зрения на геометрию как на теорию инвариантов сответствующей группы преобразований, причем, название геометрии, как правило, совпадает с названием группы: конформная, аффинная, эквиаффинная, проективная ...

Т.о. классификация групп преобразований дает нам классификацию геометрий.

Виктор Владимирович Вагнер
(4.XI.1908 - 15.VIII.1981)

Выдающейся математик

XX –го века, известный своими работами в области оснований дифференциальной геометрии и абстрактной алгебры.

Родился в городе Саратове.

Учился в МГУ им. М.В. Ломоносова. Профессор, доктор физ.-мат. наук

Заведовал кафедрой геометрии Саратовского университета (1937 – 1979). Награждён международной премией имени Н.И. Лобачевского(совместно с Э. Картаном) в 1937 году.

IV Всесоюзный математический съезд СССР (июль,1961 г., Ленинград)

В.В. Вагнер

«Основания дифференциальной геометрии и современная алгебра»

«После того, как Ф. Клейн в своей Эрлангенской программе дал классификацию различных геометрий по характеризующим их группам преобразований, казалось, можно было думать, что теория групп будет той частью алгебры, на которой будет основано все дальнейшее развитие геометрии (и физики).

Однако, это оказалось не так.

IV Всесоюзный математический съезд СССР (июль,1961 г., Ленинград)

Для современной дифференциальной геометрии понятие группы является совершенно недостаточным при рассмотрении, с алгебраической точки зрения, основных понятий соответствующих геометрических теорий. Мало того, алгебраические проблемы возникающие в исследованиях по основаниям современной дифференциальной геометрии (и физики), приводят к необходимости изучения специальных алгебраических систем, которые до последнего времени по существу не изучались. Эти алгебраические системы возникают в результате аксиаматизации теории частичных отбражений множеств».

О понятии частичного преобразования

В современной геометрии приходится иметь дело не с отображениями одного множества A в другое множество B или отображениями множества A на себя, а с так называемыми частичными отображениями некоторых подмножеств этих множеств. Иными словами , иметь дело, с так называемыми, локальными преобразованиями, которые отображают окрестность некоторой точки множества A на окрестность некоторой другой его точки, или же преобразования, которые определены не всюду.

Подобные преобразования называют в геометрии частичными преобразованиями.

Типы преобразований используемые в физике

Термин «преобразование» используется в физике в значительно более широком смысле, чем преобразование какого либо множества в себя.

Поэтому, теорема о том, что отображение всякого множества $\mathscr{A}$ на себя образуют группу, вообще говоря, не применима ко всем рассматриваемым в физике преобразованиям.

Т.о., в современной физике в основном приходится иметь дело с понятием, именно, частичное преобразование.

В. Баргман (Bargman V.//Rev. Mod. Phys. 1957. Vol. 29. P. 161) ввел в физику термины: «активное преобразование» и «пассивное преобразование»

Типы преобразований используемые в физике

1. <u>Активные преобразования физической системы:</u> есть её *движение*, т.е. изменение её характеристик под влиянием внутренних и внешних воздействий (точка зрения одного наблюдателя).

2. <u>Пассивные преобразования физической системы:</u> это всевозможные *изменения способа описания* физической системы (точка зрения 2-х и более наблюдателей).

Оба этих типа преобразований, в большинстве своем, не удовлетворяют аксиомам классической группы. Иными словами, не образуют группу.
(Клепиков Н.П. УФН, 1987. Том. 152 (вып. 3). С. 521)

2. Обобщенные группы Вагнера (инверсные полугруппы)

1. Вагнер В.В. *Обобщенные группы.* ДАН СССР. Том 84 (1951). С. 1119 - 1122.

2. Вагнер В.В. *Обобщенные группы.* УМН. Том 7, вып. 2 (48), (1951). С. 146.

3. Вагнер В.В. *Теория обобщенных групп и бобщенных груд.* Математический сборник, том 32 (74), вып. 3 (1953). С. 545 - 632.

4. Вагнер В.В. *Основания дифференциальной геометрии и современная алгебра.*

   Труды четвертого Всесоюзного математического съезда*.* Том 1, Ленинград (1963). С. 17 - 29.

2. Обобщенные группы Вагнера (инверсные полугруппы)

5. Preston G.V. *Inverse semigroups.* J. London Math. Soc. Vol. 29 (1954). P. 396 - 403.

6. Preston G.V. *The structure of normal inverse semigroups.* Proc. Glasgow Math. Assoc. Vol. 3 (1956). P. 1 - 9.

7. Клиффорд А., Престон Г. (Clifford A. and Preston G.) *Алгебраическая теория полугрупп*. Перевод с англ. Том I, М.: Мир (1972), 285 с. Том II, М.: Мир (1972), 422 с.

2. Обобщенные группы Вагнера (инверсные полугруппы)

Основная теорема теории обобщенных групп

Теорема Вагнера (1951) – Престона (1956)

Всякая абстрактная обобщенная группа изоморфна некоторой обобщенной группе

взаимно-однозначных частичных преобразований.

Задача о нахождении всех представлений заданной

абстрактной обобщенной группы решена Б. Шаином

(Шаин Б.М. *Представления обобщенных групп.*

Известия Вузов. Математика № 3 (28), 1962. С. 164 - (176.)

Обобщенные группы Вагнера (инверсные полугруппы)

Определение группы

1. *Ассоциативность.* Для a, b, $c \in G$ имеет место
$(ab)c = a(bc) = b(ac)$.

2. *Наличие единичного* (нейтрального) *элемента.* $e \in G$.
Для любого $a \in G \Longrightarrow ea = ae = a$.

3. *Существование обратного элемента.*
Для любого $a \in G$ существует $a^{-1} \in G$, что $a^{-1}a = e$.

Обобщения группы:

- Лупа (неассоциативные группа - квазигруппа с единицей)
- Полугруппа ⟶ инверсная полугруппа
- Группоид

2. Обобщенные группы Вагнера (инверсные полугруппы)

Шаин Б.М. *К теории обобщенных групп.* ДАН СССР, Том 153, № 2 (1963). С. 296 – 299.

Определение

Обобщенная группа Вагнера определяется как полугруппа, в которой для каждого элемента $g \in G$ существует единственный обобщенно обратный элемент g^{-1}, удовлетворяющий условиям:

$$gg^{-1}g = g; \; g^{-1}gg^{-1} = g^{-1} \qquad (2.1)$$

и идемпотентные элементы которой попарно коммутируют.

Элемент j называется идемпотентным, или просто *идемпотентом,* если он удовлетворяет условию:

$$j^2 = jj = j. \qquad (2.2)$$

2. Обобщенные группы Вагнера (инверсные полугруппы)

Определение.

Обобщенная группа взаимно однозначных частичных преобразований множества A - это множество взаимно однозначных преобразований множества A, замкнутое относительно операции умножения и вместе с каждым частичным преобразованием содержащее обратное частичное преобразование.

Обычная, группа (в частности непрерывная группа Ли) является обобщенной группой с единственным идемпотентным элементом, который является единицей этой группы е.

3. Некоторые свойства обобщенных групп

1. **В обобщенной группе вводится отношение порядка**

$$\omega = \{g_1 < g_2 : g_1 = (g_1\, g_1^{-1} g_2) = (g_2\, g_1^{-1} g_1)\}. \qquad (3.1)$$

которое называется каноническим отношением порядка обобщенной группы.

Отношение порядка ω есть отношение включения частичных преобразований.

Для обычной группы отношение порядка сводится к тождественному отношению.

2. **В обобщенной группе можно ввести тернарную операцию которая каждой упорядоченной тройке элементов $g_1, g_2, g_3 \in G$ ставит в соответствие элемент**

$$g = g_1\, g_2^{-1} g_3,\ g \in G. \qquad (3.2)$$

Множество с заданной на нем тернарной операцией называется обобщенной грудой.

3. Некоторые свойства обобщенных групп

Тернарная операция и её симметрии:

$$g_1, g_2, g_3 \in G \to g = g_1 g_2^{-1} g_3, \; g \in G. \qquad (3.4)$$

Важным примером симметрии, связанной с тернарной операцией в физике является *CPT* – симметрия, где:

C – операция замены частицы на античастицу: $q \to -q$;

P – операция пространственной инверсии;

T – операция обращения времени: $t \to -t$.

Из теории обобщенных групп и обобщенных груд следует, что *CPT* – симметрия в физике носит в природе абсолютный характер.

3. Некоторые свойства обобщенных групп

Отношение порядка в обобщенной групп

бинарное отношение

$$\omega = \{g_1 < g_2 : g_1 = = (g_1 g_1^{-1} g_2) = (g_2 g_1^{-1} g_1) = (g_1 g_2^{-1} g_1)\}, \quad (3.1')$$

называется **канонический отношением порядка**.

Оно есть отношение включения преобразований:

$$g_1 \leftrightarrow \varphi_1,\ g_2 \leftrightarrow \varphi_2,\ \text{то из } g_1 < g_2 : \varphi_1 \subset \varphi_2. \quad (3.5)$$

Эквивалентное определение:

$$g_1 < g_2 \Leftrightarrow g_1 g_2^{-1} = g_1 g_1^{-1} \quad (3.6)$$

3. Некоторые свойства обобщенных групп

Калибровочные группы, соответствующие известным фундаментальным взаимодействиям: электромагнитному $U(1)$, слабому $\mathcal{S}U(2)$ и сильному $\mathcal{S}U(3)$ являются подгруппами обобщенной группы.

Они образуют полурешетку (обобщенную группу Клифforда) с нетривиальными свойствами.

Вмещение указанных групп в обобщенную группу

Вагнера позволяет решить нетривиальным образом

проблему унификации указанных фундаментальных взаимодействий.

Применение к обобщенным группам Вагнера теоремы Э. Нётер позволяет ввести в рассмотрение новые (более общие) законы сохранения, которые присущи Природе.

4. Проблема объединения фундаментальных взаимодействий

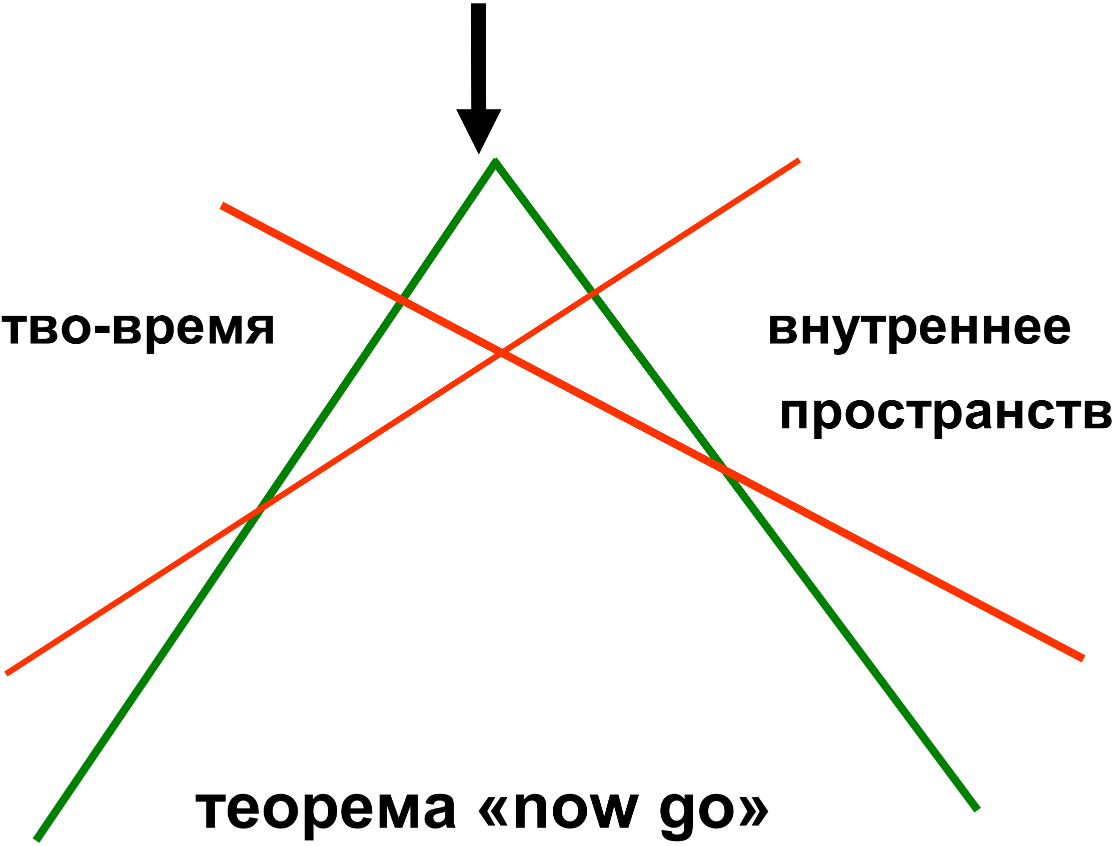
S. Coleman and J. Mandula Phys. Rev. 159 (1967) 1251

пространство-время

внутреннее
пространство

теорема «now go»

4. Проблема объединения фундаментальных взаимодействий



пространство-время

внутреннее

пространство

теорема «now go»
не имеет место для
обобщенных групп

4. Проблема объединения фундаментальных взаимодействий

Главное значение для теорий Великого объединения (ТВО) и соответственно Суперобъединения фунаментальных заимодейстий будут иметь понятие обобщенной группы Вагнера (фундаментальной инверсной полугруппы) и обобщенной груды частичных преобразований.

5. О проявлениях симметрий обобщенных групп и обобщенных груд в Природе

Обобщенные группы Вагнера (фундаментальные инверсные полугруппы) и обобщенные груды находят в Природе самые неожиданные проявления.

Кристаллография

Полная классификация групп симметрий кристаллов

была завершена в конце 30-х годов прошлого века.

Она соответствует простым простым группам Ли.

Однако, в эту классификацию не попадают, например,

группа икосаэдра и группа пятиугольника.

5. О проявлениях симметрий обобщенных групп обобщенных груд в Природе

Согласно представлениям «классической кристаллографии» правильные пятиугольники в кристаллах не встречаются и не бывает орнаментов с симметрией пятого порядка.

<u>Однако</u>:

1984 год: создан сплав $Al_{0.86}Mn_{0,14}$ имеющий икосаэдральную структуру, не допускаемую «классической» классификацией, а обладающий симметрией икосаэдра.

Новые металлические сплавы, обладающие некристаллографической симметрией, были названы <u>квазикристаллами</u>.

5. О проявлениях симметрий обобщенных групп и обобщенных груд в Природе

Квазикристалл –
это высокоорганизованная твердотельная фаза, являющаяся промежуточной от кристаллов до стекол.

Артамонов В.А. *Квазикристаллы и их симметрии.* ФПМ. Том 10, № 3 (2004). С. 3 – 10.

Имеющиеся в настоящее время экспериментальные данные и теория указывают на существование нового класса упорядоченных структур в твердом теле, не являющихся ни стеклами, ни кристаллами.

5. О проявлениях симметрий обобщенных групп и обобщенных груд в Природе

Сверхструктуры (сверхрешетки),
т.е. кристаллические структуры уппорчдоченных твердых растворов, состоящие из 2 -х и более кристаллических подрешеток, каждая из которых заполнена преимущественно атомами одного сорта.

Пусть имеется, например, 3-х подрешеточная кристаллическая структура.

Инвариантность относительно тернарной операции:

$$g_1, g_2, g_3 \in G \to g = g_1 g_2^{-1} g_3,\ g \in G,$$

где g_i описывает операцию трансляции атомов каждой отдельной подрешетки, описывает возникновение сверхрешетки.

Все это приводит к необходимости пересмотра квантовой и классической физики твердого тела.

5. О проявлениях симметрий обобщенных групп и обобщенных груд в Природе

Еще большее число примеров реализации инверсных полугрупп дает нам живая Природа.

6. Заключительные замечания

Теория обобщенных групп и обобщенных груд служит для описания симметрий имеющих место в упорядоченных структурах.

Применение аппарата теории обобщенных групп и обобщенных груд в современных физических исследованиях несомненно приведет к новым важным результатам в понимании законов живой и неживой Природы.

6. Заключительные замечания

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

6. Заключительные замечания

«Еще многое имею сказать Вам,
но теперь Вы не можете вместить.»

(Евангелие от Иоанна, глава 16, стих. 12)