Орлов Ю.Н.

(ИПМ РАН, МФТИ)

Методы математической демографии:

современное состояние, проблемы, точные результаты

ВВЕДЕНИЕ
В ПРОБЛЕМАТИКУ

Цели демографического исследования

- Спрогнозировать численность людей определенной категории (возрастной, половой, социальной, этнической), которые будут находиться на некоторой территории (город, страна, мир) в заданный момент времени (год). Для этого необходимо:
- определить вероятность смерти по всем причинам для представителей выбранной страты;
- определить вероятности перехода из одной социальной страты в другую и миграционный поток в единицу времени (год);
- определить вероятность рождения ребенка в данный год в данной социальной страте.

Важность знания демографического положения и тенденций

- Численность трудоспособного населения определяет уровень использования производственных мощностей, потребность в будущих рабочих местах, желаемый уровень трудовой миграции.
- Изменение соотношения между численностью трудоспособного населения и пенсионеров приводит к изменению внутреннего социально-экономического уклада.
- Численность новорожденных определяет будущую численность ВС, потребность в детских садах, школах, ВУЗах, а также необходимую численность учителей, врачей и т.п.
- Внутренняя и внешняя миграции приводят к изменению этнического состава поселений и уровня заселенности территорий.

Методы исследования

- Эмпирико-статистические методы:
  - перепись населения;
  - обработка текущих данных;
  - оценка точности проведенных измерений.

- Методы математического моделирования:
  - модель эволюции повозрастного распределения;
  - модель изменения коэффициента воспроизводства;
  - модель ассимиляции в полиэтническом сообществе;
  - модели нелинейной динамики для описания численности.

Основные определения

- Возрастная когорта – численность людей в определенном возрастном промежутке
- Когортная рождаемость – среднее число детей, рожденных женщиной определенного года рождения в течение своей жизни
- Нетто-коэффициент воспроизводства – среднее число девочек от одной матери, доживающих до среднего возраста матери
- Фертильность – число рождений на 1000 женщин данного возраста в текущий год.
- Стандартизованный коэффициент смертности – число умерших в течение года на 1000 списочного состава людей данного возраста

Демографический переход

«Демографический переход» (Ландри, Ноутстайн, 1945) – смена типа воспроизводства населения. Вместо высокой рождаемости при высокой смертности общество перешло к низкой рождаемости при низкой смертности.

Основные этапы перехода:

1. Прогресс в науках и технологиях → успехи медицины → снижение смертности во всех возрастах.
2. Т.к. рождаемость осталась прежней, численность населения резко возрастает.
3. С запаздыванием на 40-50 лет рождаемость снижается, и еще через 40-50 лет население становится стабильным.

Фактически же рождаемость снизилась так, что воспроизводство стало отрицательным.

Точность измерения в демографии

Ошибка в подсчете численности при переписи – 5%.

Искажение национальной принадлежности при самоидентификации.

Неточность определения причины и места смерти, недоучет долгосрочной трудовой миграции.

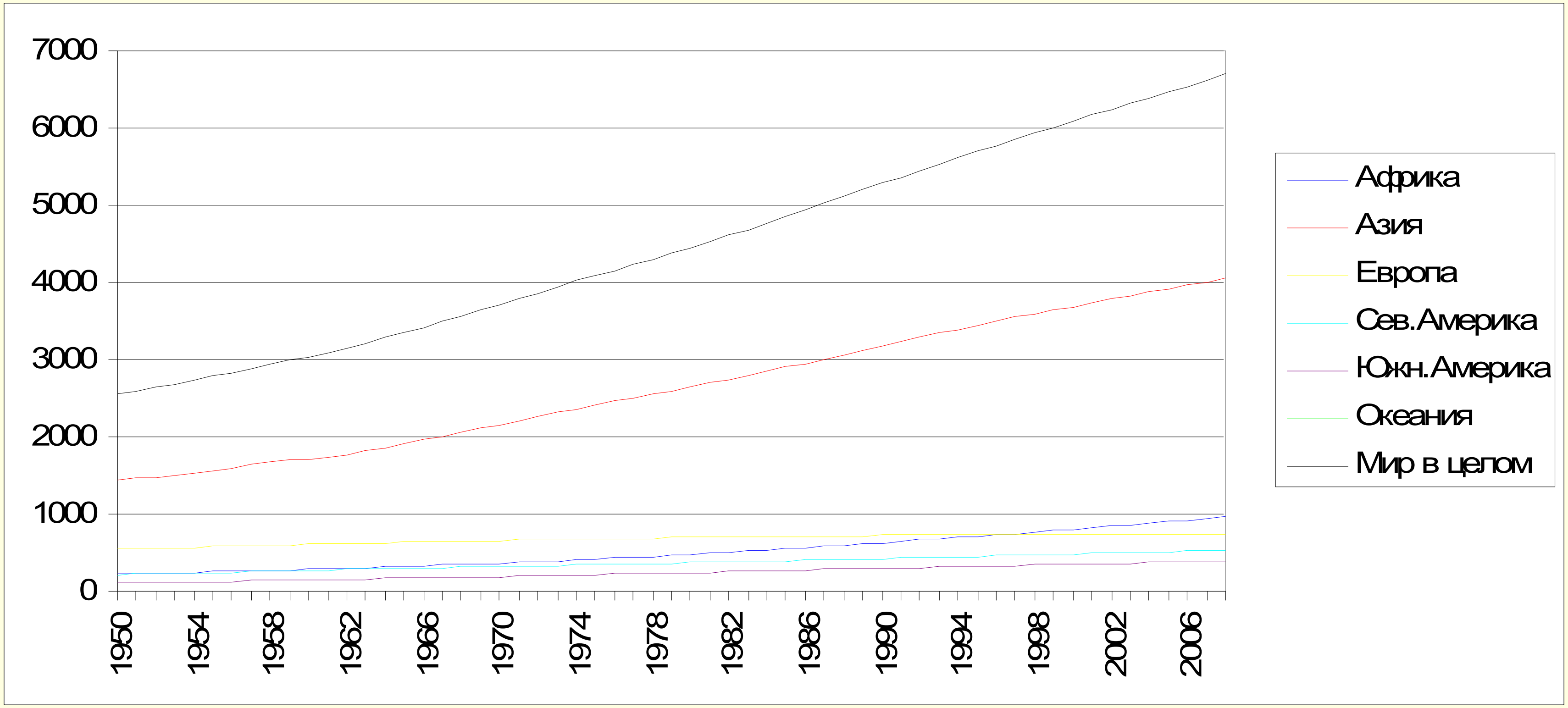
В разных странах различные подходы к определению младенческой смертности: «кого считать живым?»

Ошибка в оценке миграции – до 500%.

ДЕМОГРАФИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ В РОССИИ И В МИРЕ

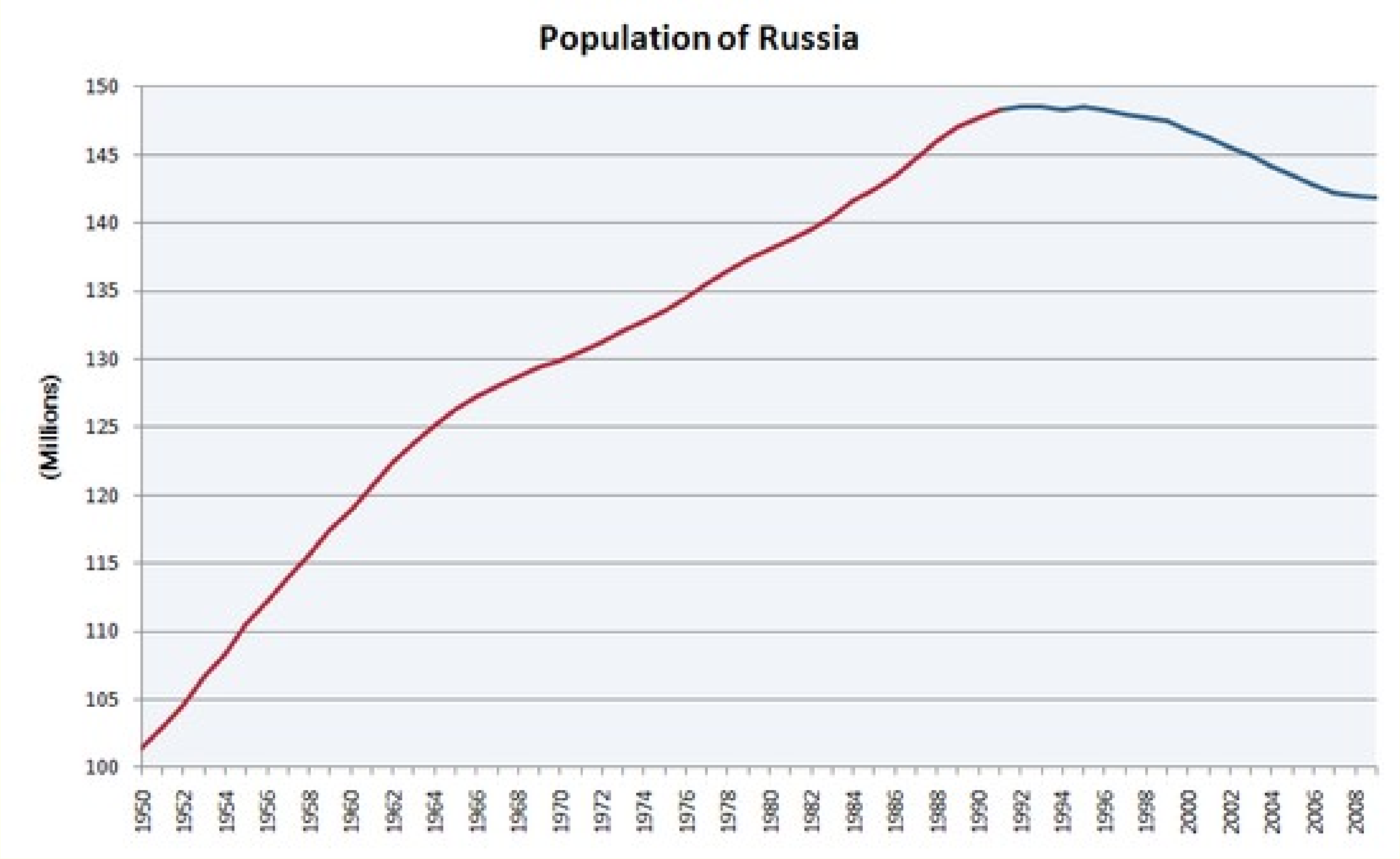
ЧИСЛЕННОСТЬ НАСЕЛЕНИЯ

Динамика численности мирового населения

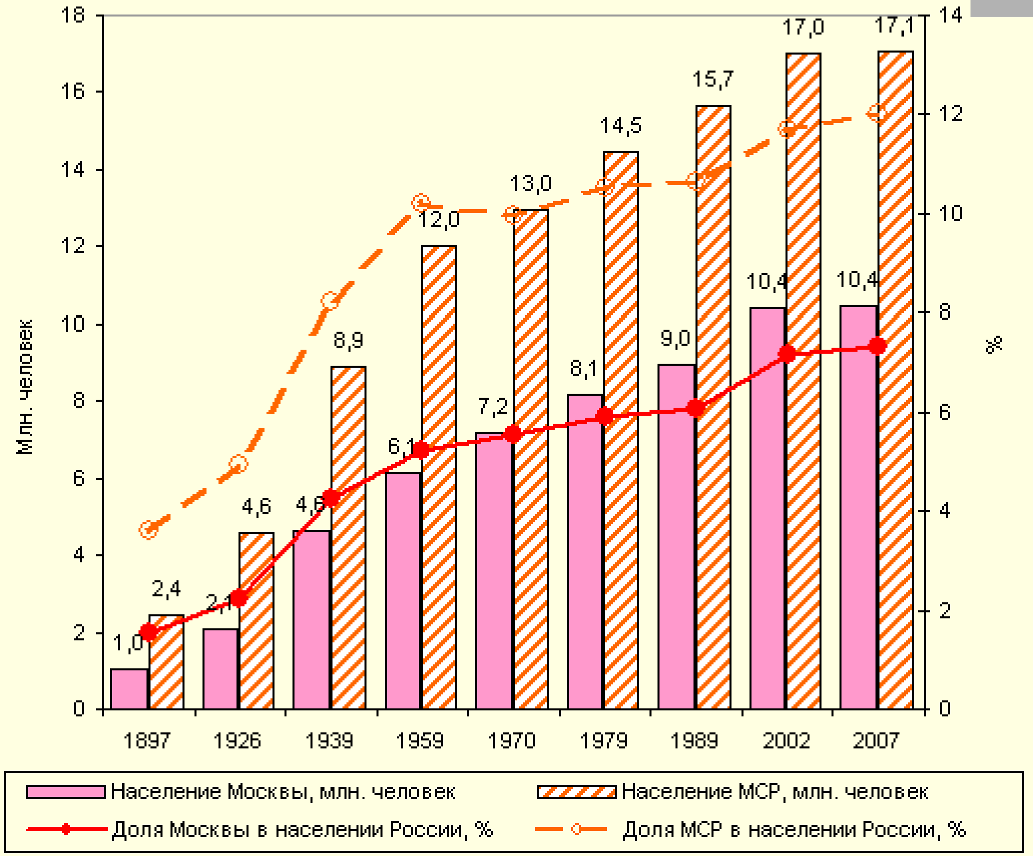


Рост населения мира по континентам, млн чел.

Динамика численности населения России

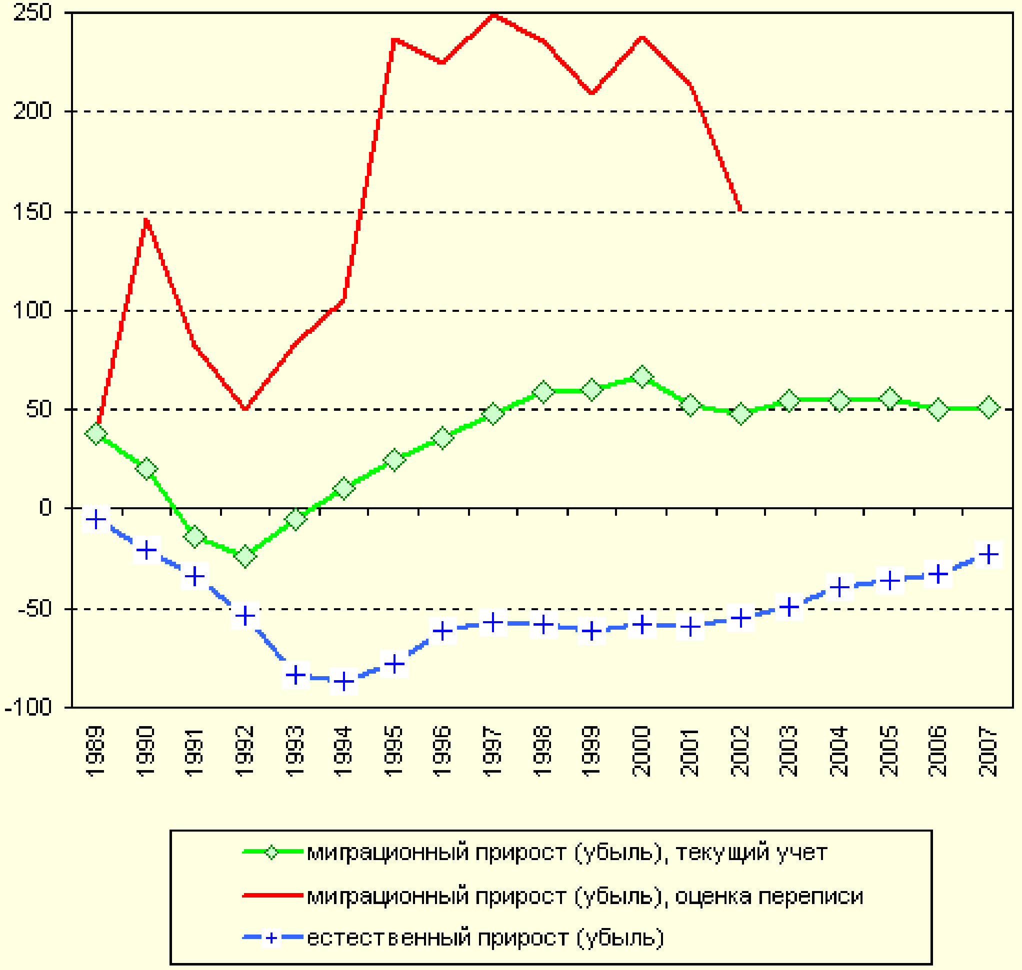


Население Москвы



Население Москвы и московского столичного региона (МСР)

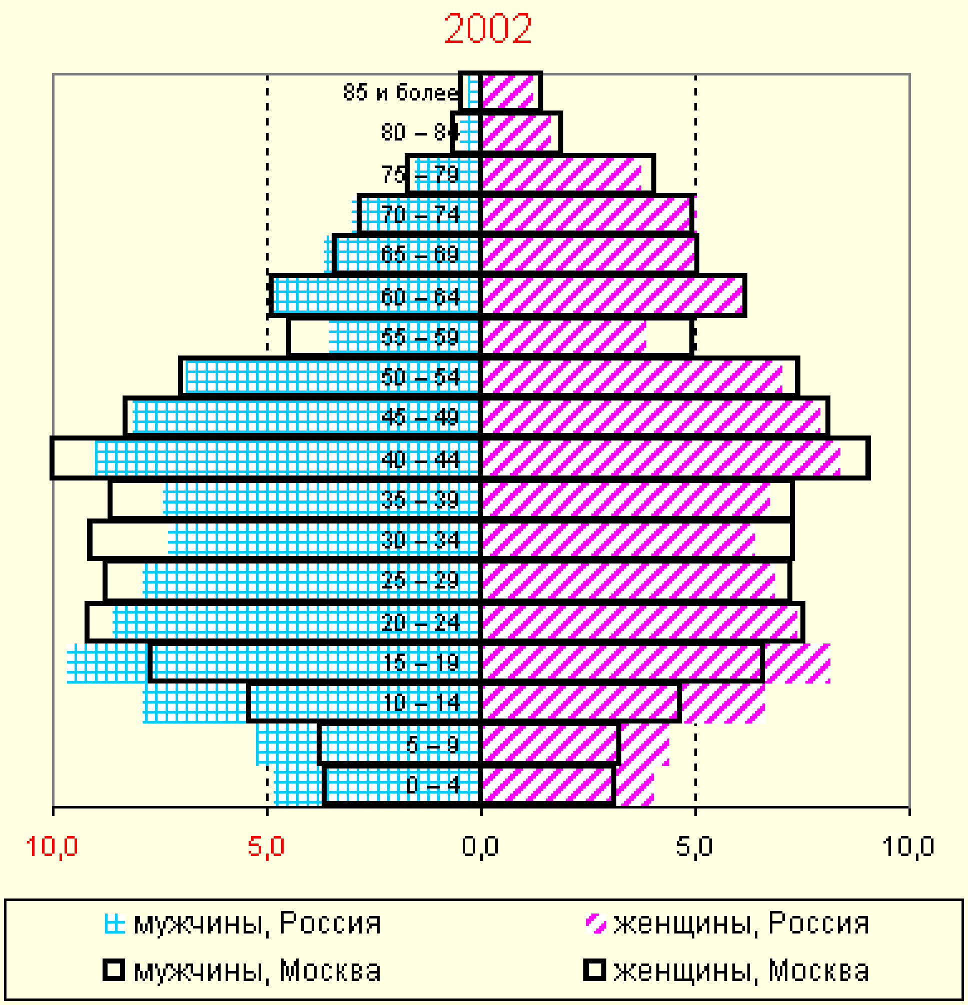
Миграционный прирост в Москве
(тыс. чел.)



ПОВОЗРАСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

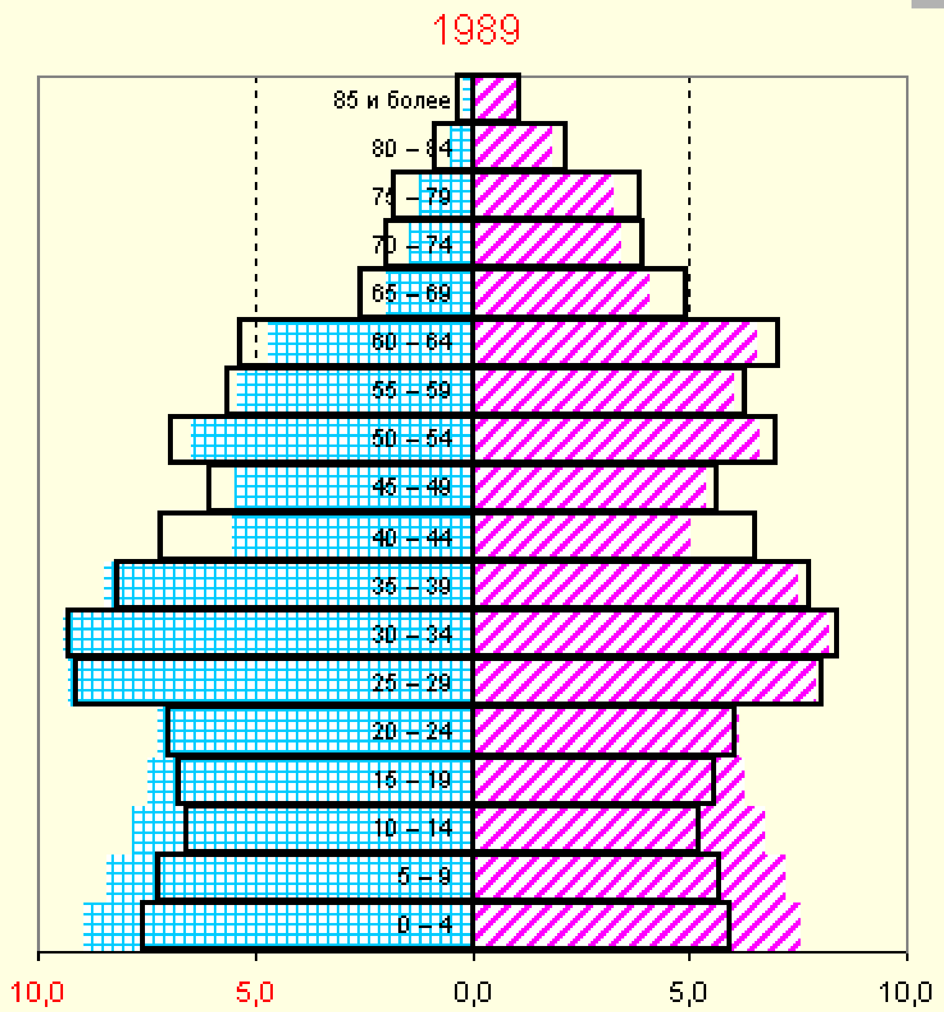
Возрастная пирамида

(Москва и Россия, 2002 г., в % от общей численности)



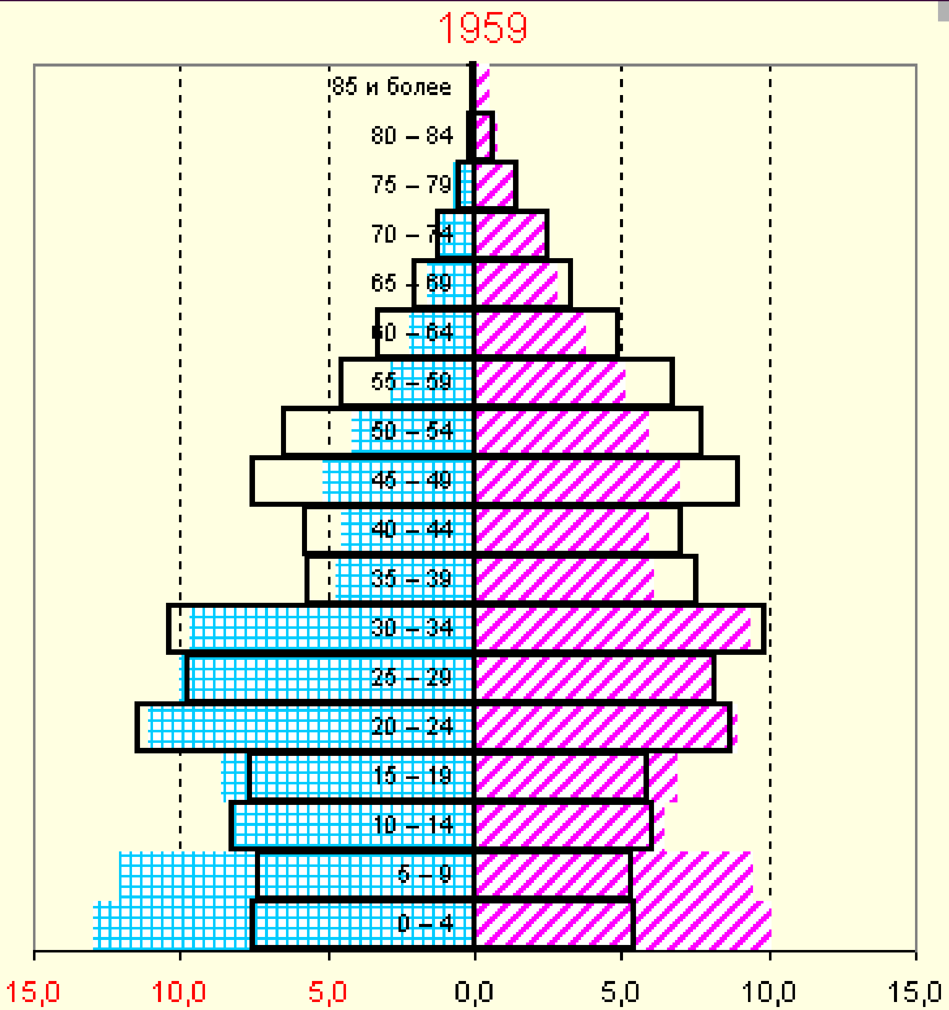
Возрастная пирамида

(Москва и Россия, 1989 г., в % от общей численности)



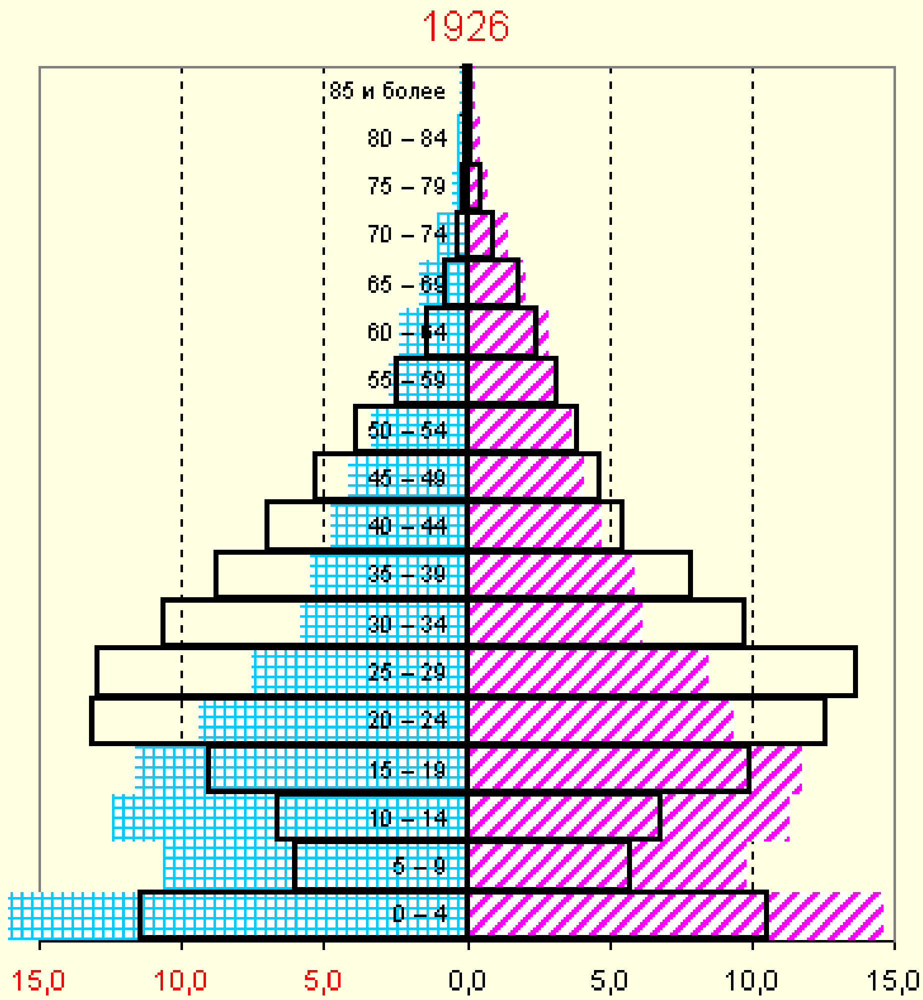
Возрастная пирамида

(Москва и Россия, 1959 г., в % от общей численности)

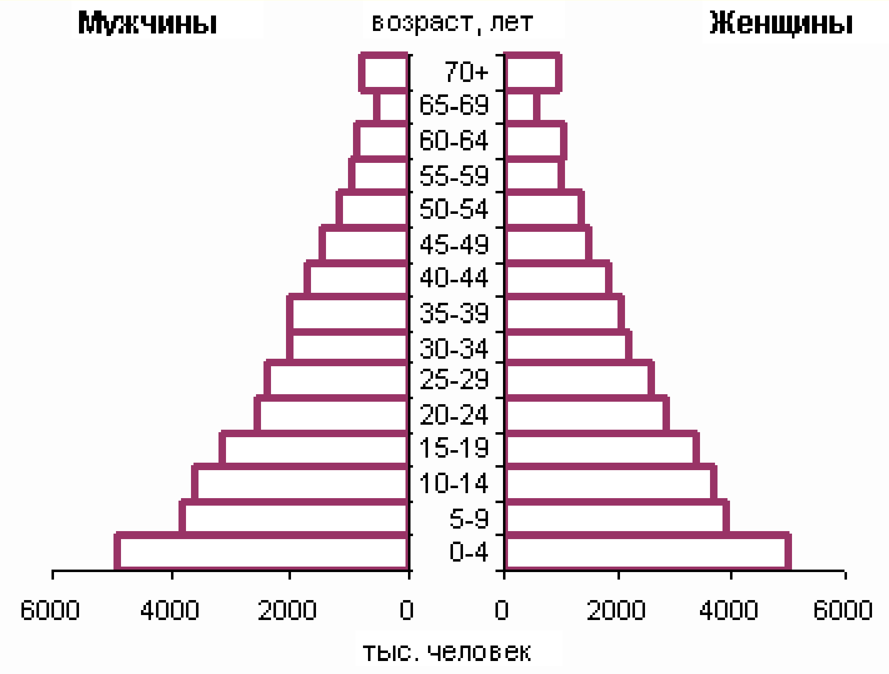


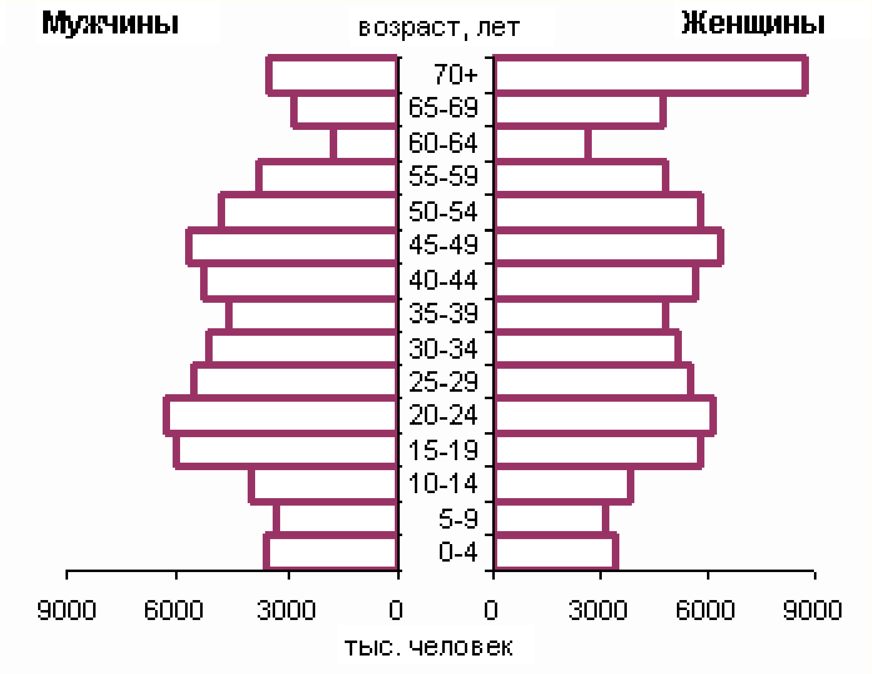
Возрастная пирамида

(Москва и Россия, 1926 г., в % от общей численности)



Изменение возрастной структуры населения России за 100 лет





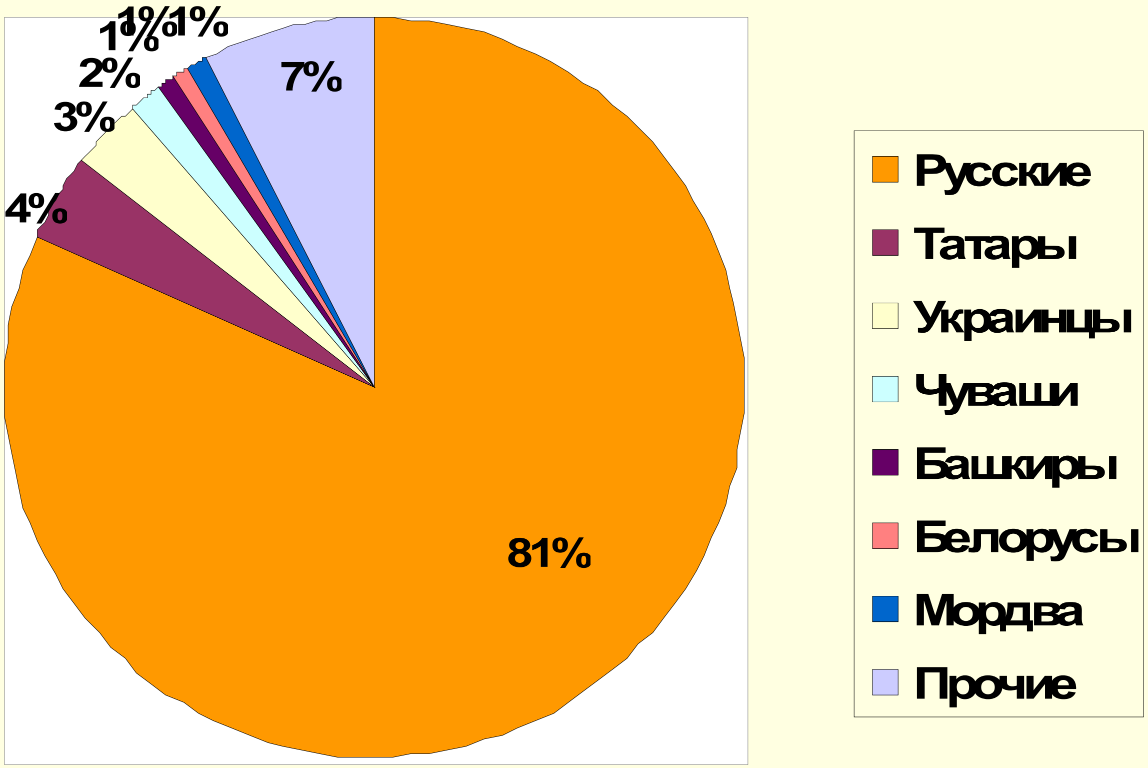
1897 г. (первая перепись)

2007 г. (расчет на основе переписи 2002 г.)

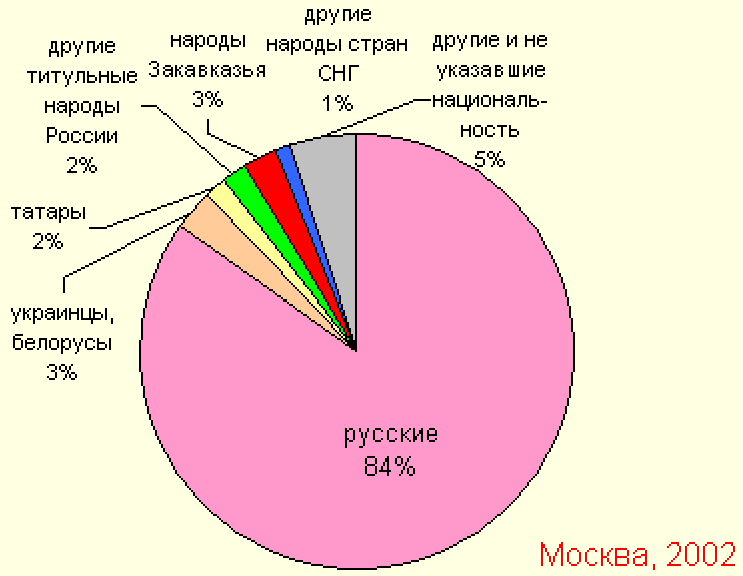
ЭТНИЧЕСКИЙ СОСТАВ

Этнический состав России

(на основе самоидентификации по переписи)

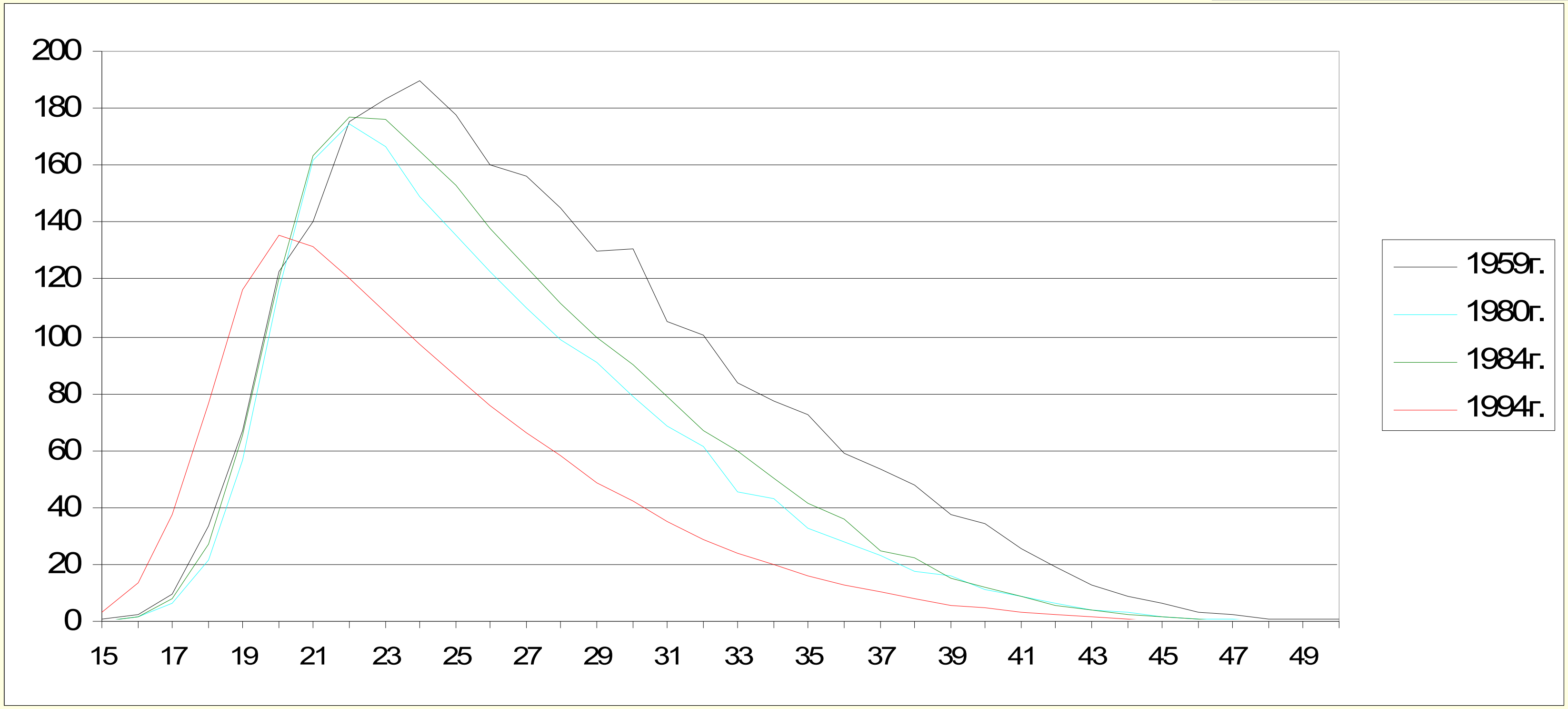


Этнический состав населения Москвы



РОЖДАЕМОСТЬ

Возрастной коэффициент рождаемости, Россия

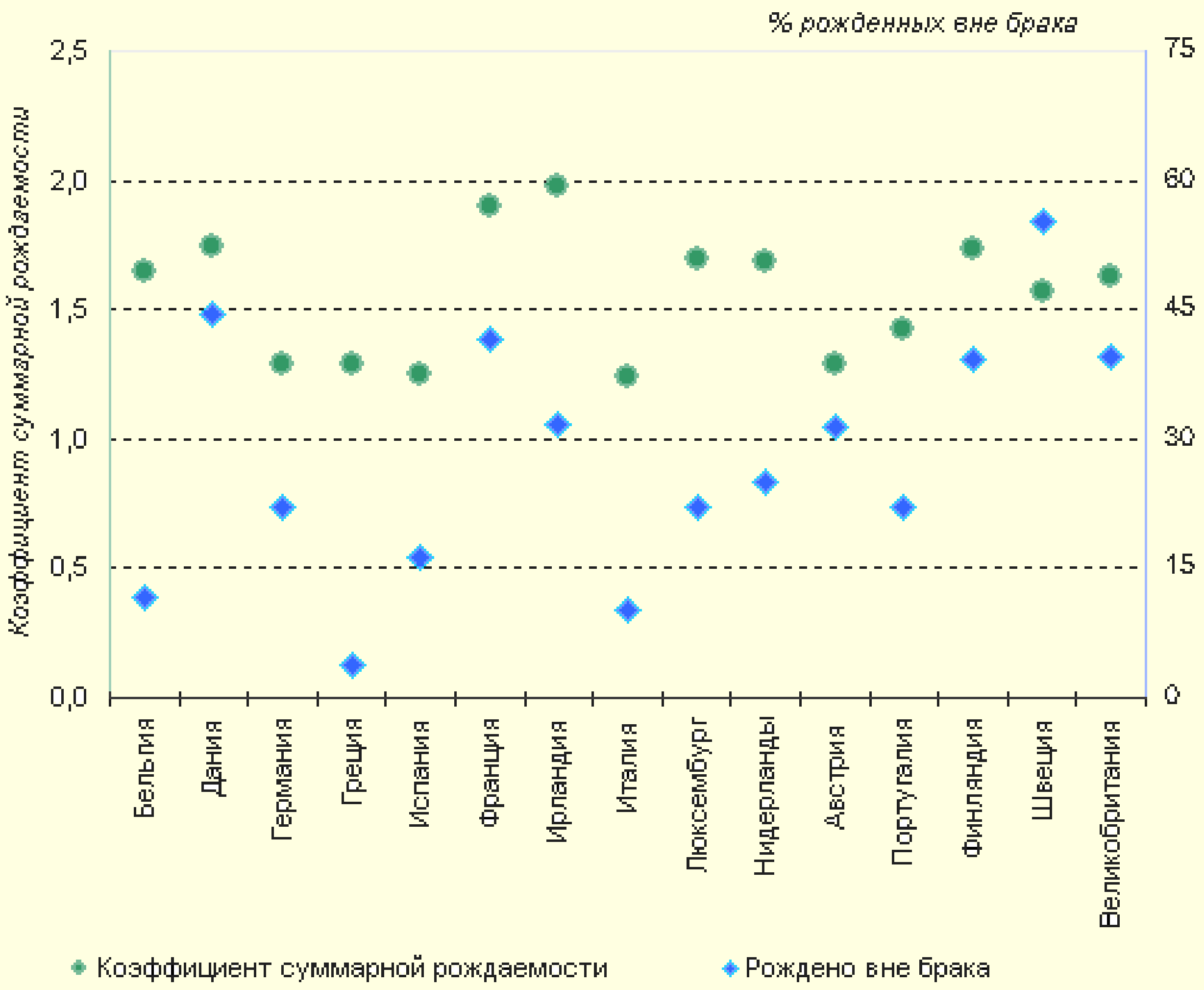


Число рождений на 1000 женщин данного возраста.

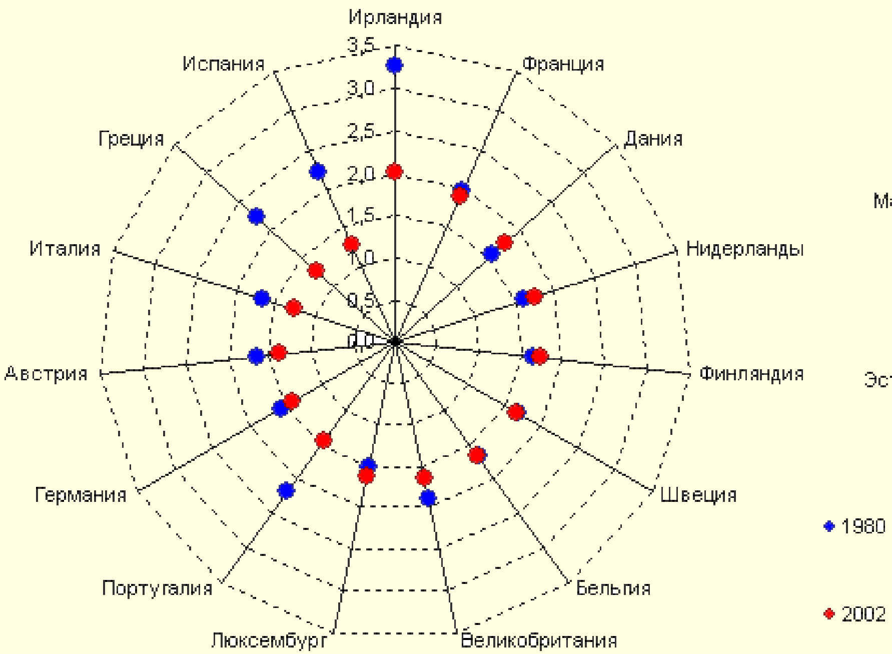
Коэффициент рождаемости (интеграл) на 1 женщину:

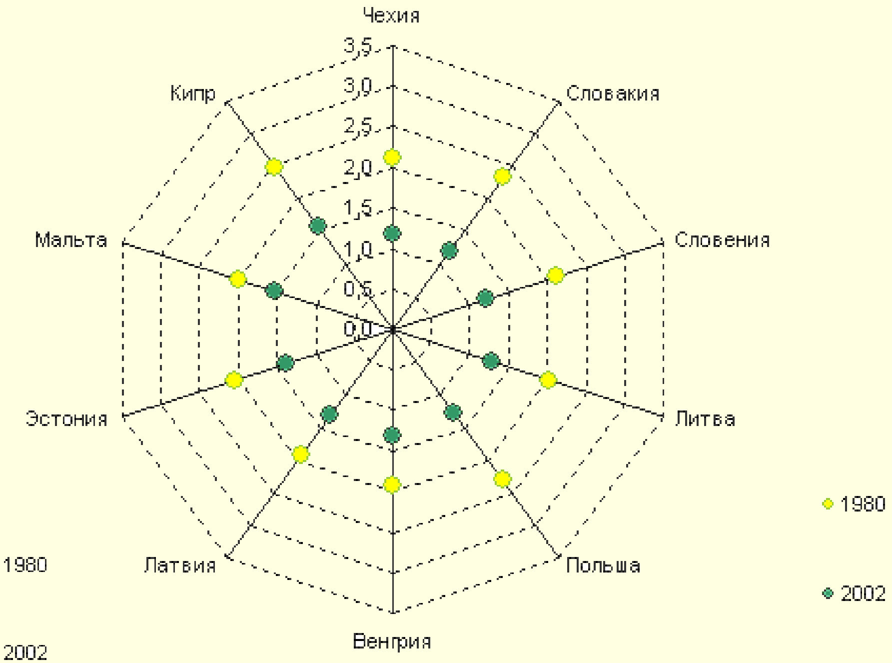
2,58 (1959г.), 1,86 (1980г.), 2,05 (1984г.), 1,38 (1998-2006гг.).

Коэффициенты рождаемости в странах Европы

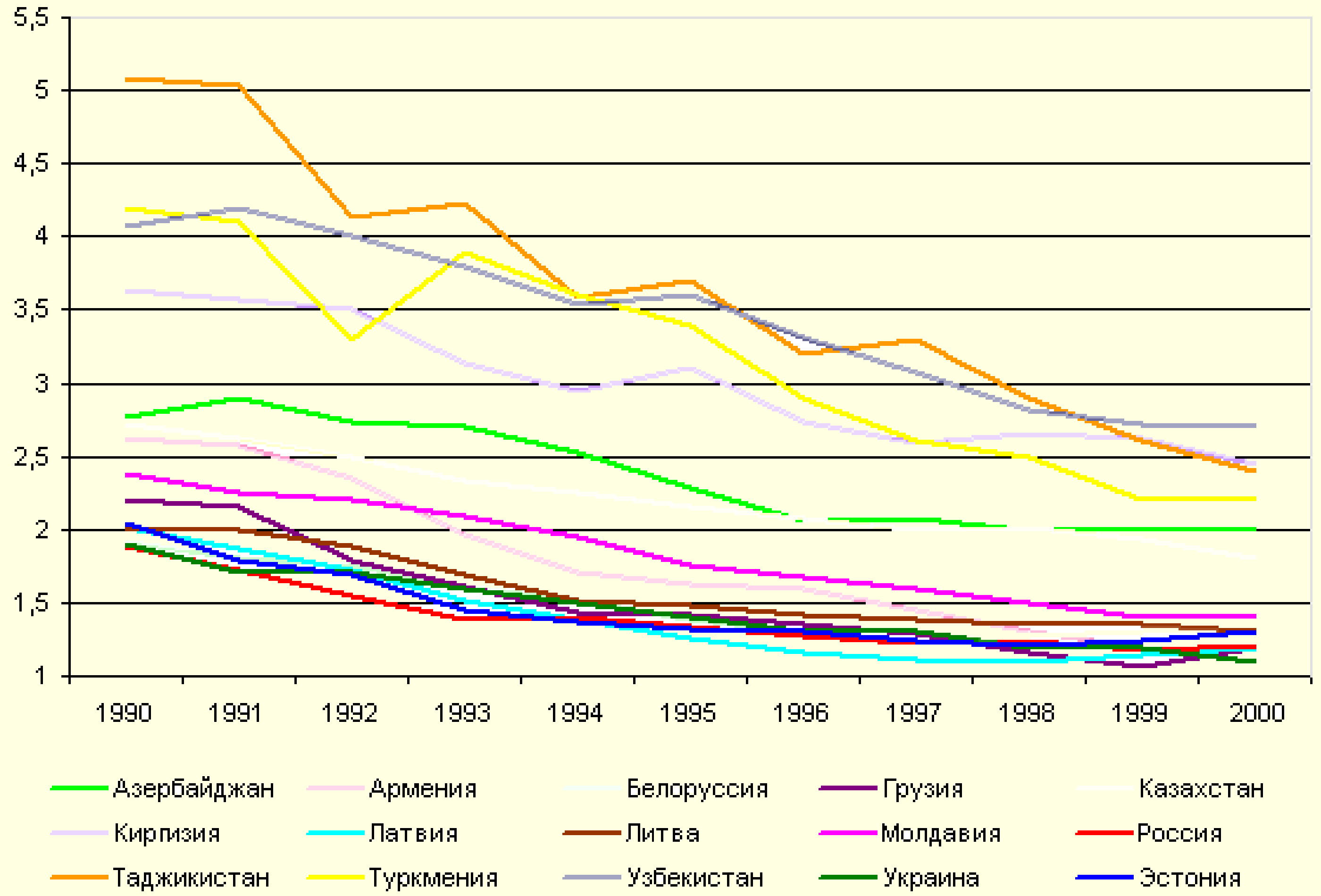


Динамика коэффициента рождаемости в странах Европы

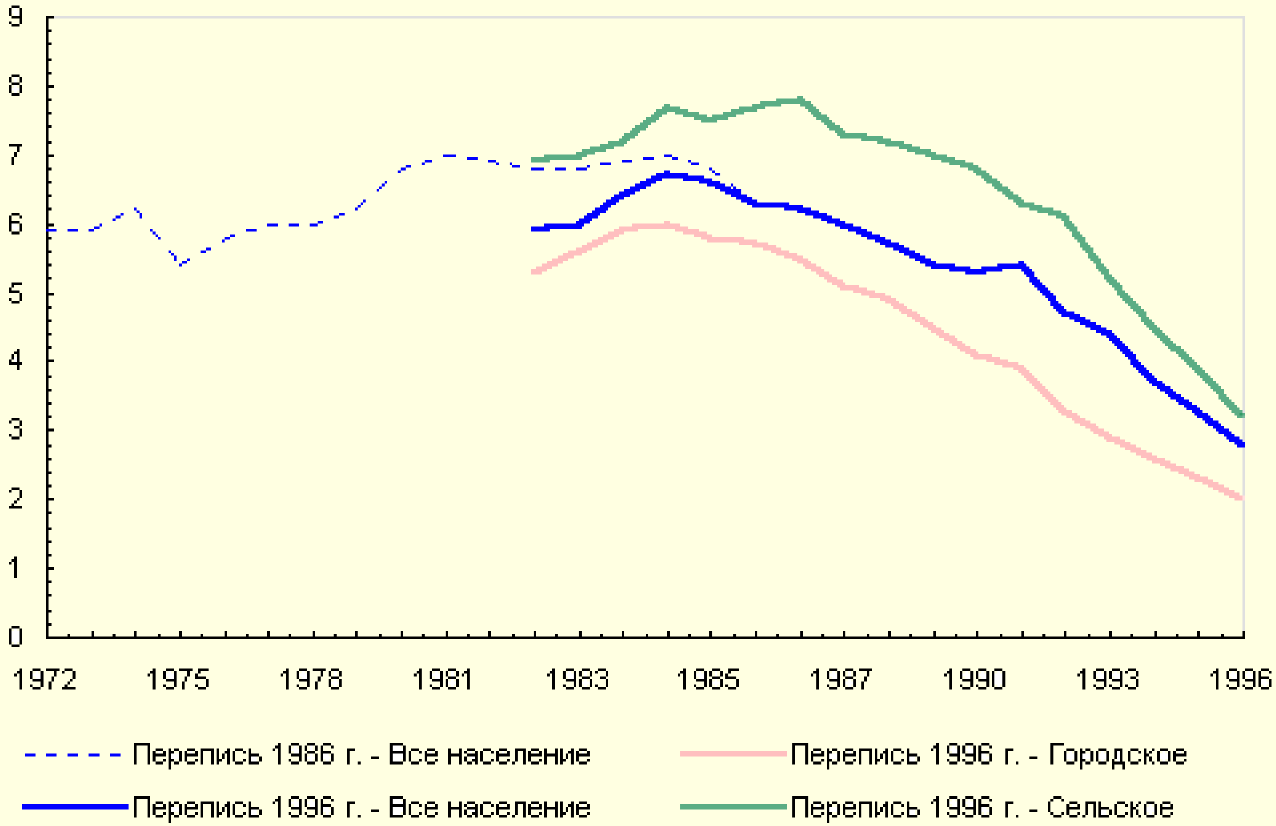




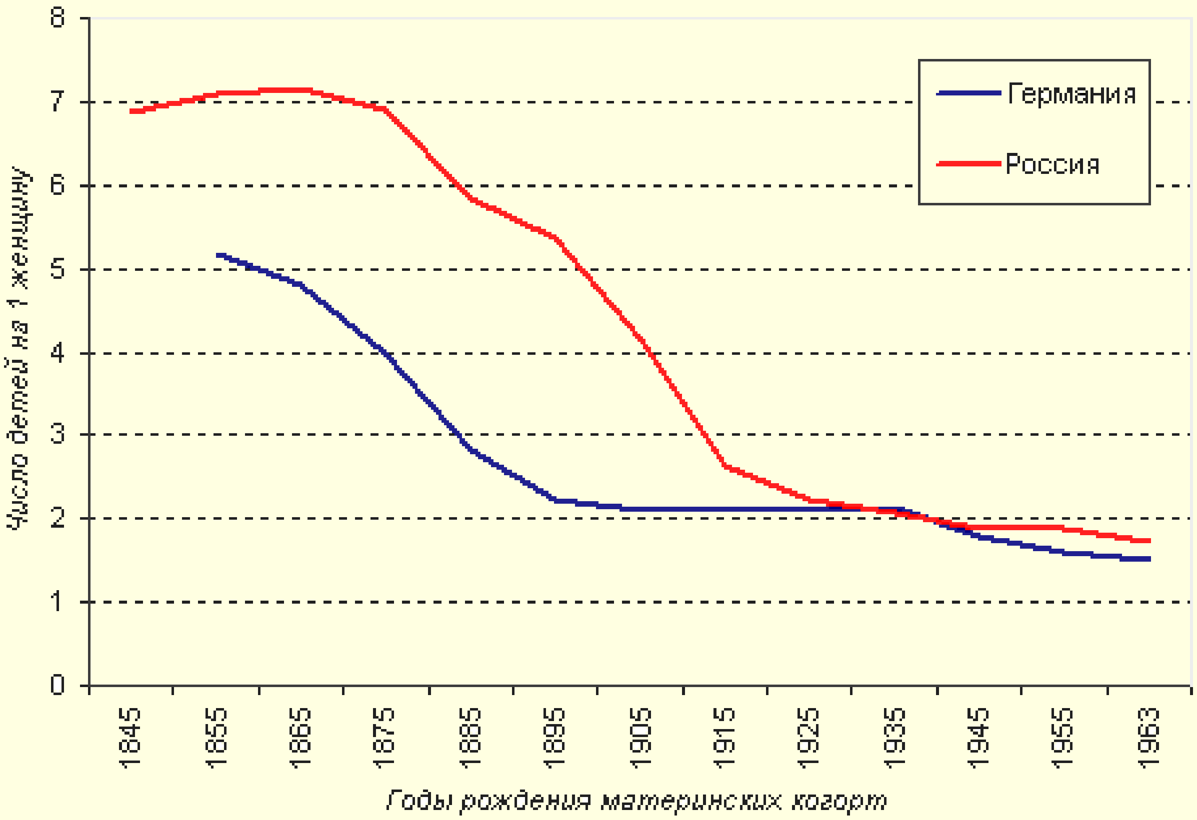
Динамика коэффициента рождаемости в странах СНГ



Динамика коэффициента рождаемости в Иране



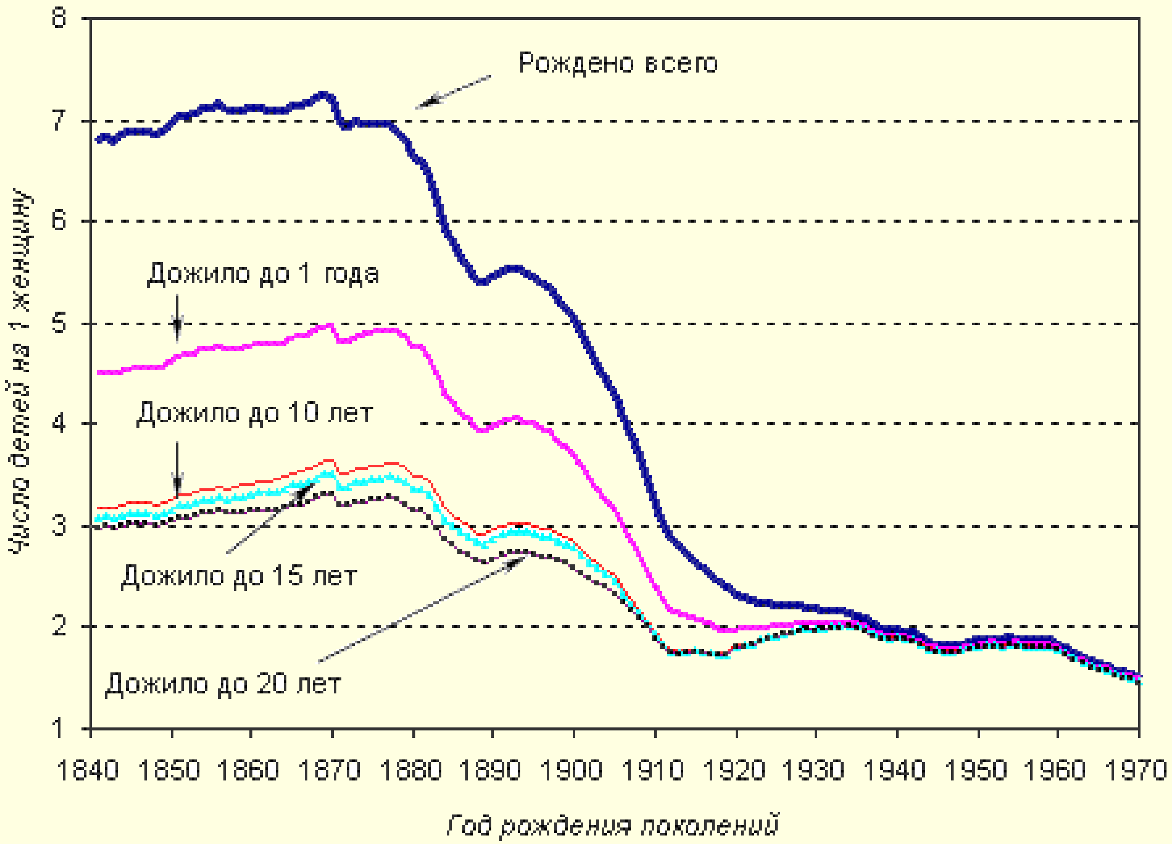
Когортная рождаемость



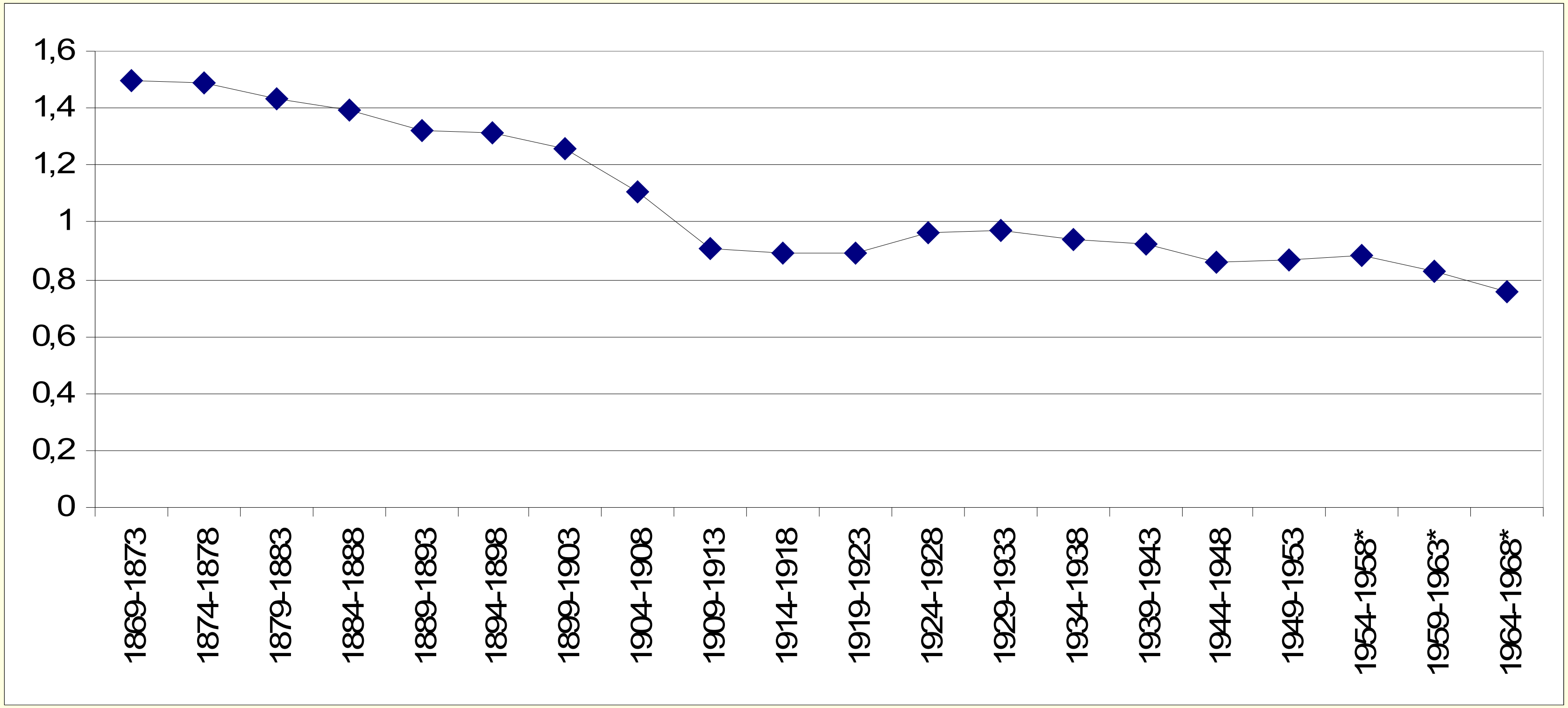
Когортная рождаемость в Европе

	Годы рождения поколений женщин									
	1930	**1935**	**1940**	**1945**	**1950**	**1955**	**1959**	**1960**	**1961**	**1964**
Бельгия	2,30	2,27	2,17	1,93	1,84	1,83	1,84	1,85	1,81	1,75
Дания	2,36	2,38	2,24	2,06	1,90	1,84	1,88	1,89	1,90	1,91
Германия	2,17	2,16	1,98	1,79	1,72	1,67	1,66	1,65	1,62	1,54
Греция	2,21	2,02	2,01	2,00	2,07	2,03	1,94	1,95	1,88	1,75
Испания	2,59	2,67	2,59	2,43	2,19	1,90	1,79	1,75	1,68	1,59
Франция	2,64	2,58	2,41	2,22	2,11	2,13	2,11	2,10	2,08	2,00
Ирландия	3,50	3,44	3,27	3,27	3,00	2,67	2,44	2,41	2,34	2,19
Италия	2,29	2,29	2,14	2,06	1,90	1,79	1,68	1,65	1,60	1,49
Люксембург	1,97	2,00	1,92	1,82	1,72	1,68	1,71	1,71	1,70	1,67
Нидерланды	2,65	2,50	2,21	1,99	1,90	1,87	1,85	1,86	1,82	1,75
Австрия	2,32	2,45	2,13	1,93	1,86	1,77	1,71	1,68	1,65	1,61
Португалия	2,95	2,85	2,61	2,31	2,12	1,97	1,91	1,88	1,86	1,81
Финляндия	2,51	2,30	2,03	1,87	1,85	1,89	1,95	1,95	1,95	1,90
Швеция	2,11	2,14	2,05	1,96	2,00	2,03	2,04	2,05	2,01	1,97
Великобритания	2,35	2,41	2,36	2,17	2,03	2,01	1,97	1,96	1,94	1,88
Европейский Союз	2,42	2,39	2,23	2,08	1,97	1,90	1,83	1,81	1,77	1,68

Детализация когортной рождаемости в России



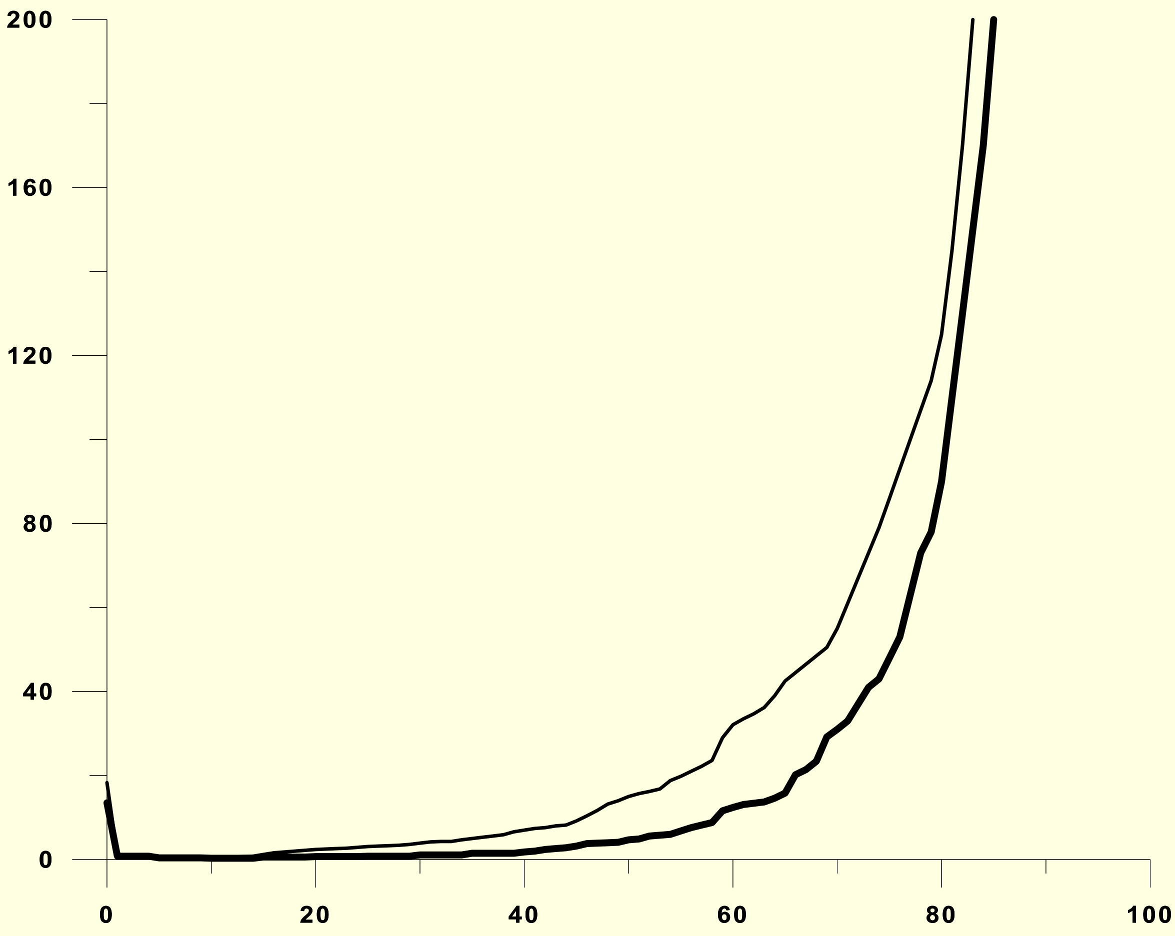
Нетто-коэффициент воспроизводства в России



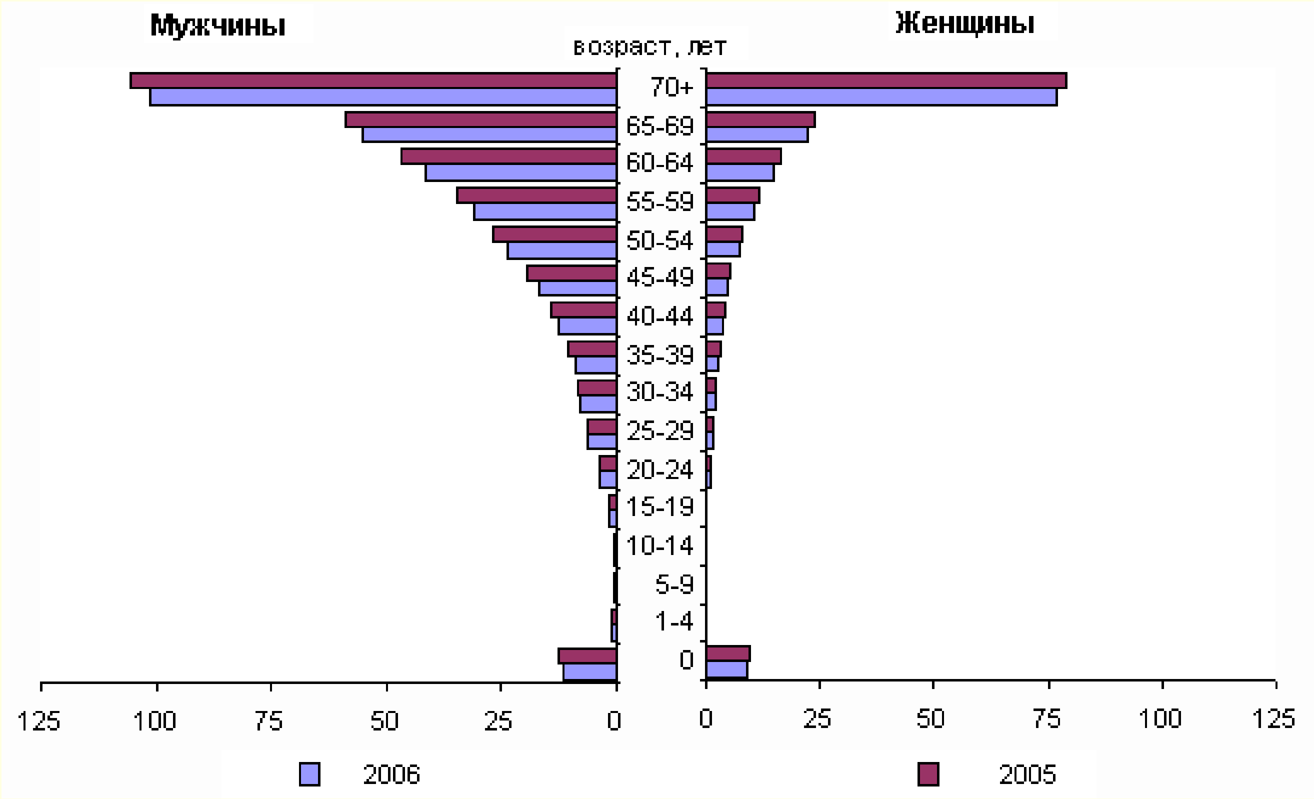
Число девочек, рожденных женщиной данной возрастной когорты в течение жизни, и доживших до среднего возраста матери

СМЕРТНОСТЬ

Возрастные коэффициенты смертности на 1000 чел., Россия

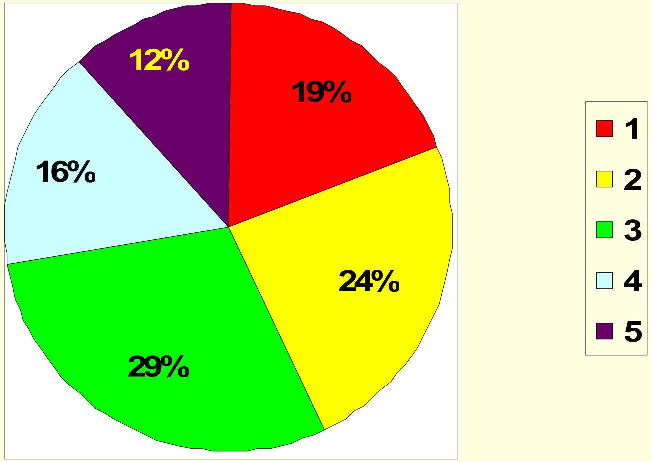


Снижение смертности в 2005/2006 гг.

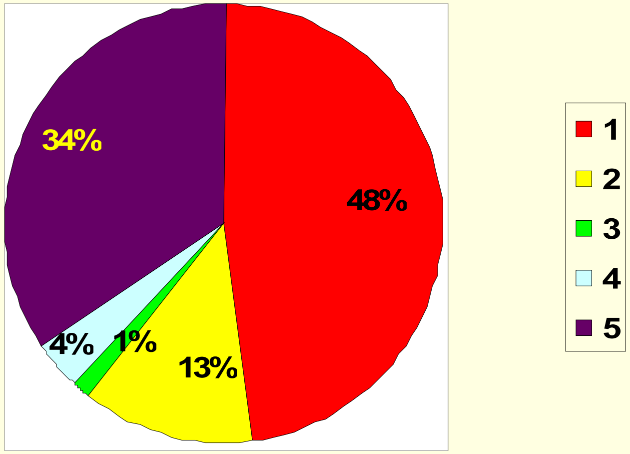


Ожидаемая продолжительность жизни (средний возраст смерти) составила: у мужчин 60,4 года (+1,5 года), у женщин 73,2 года (+0,8)

Причины смертности



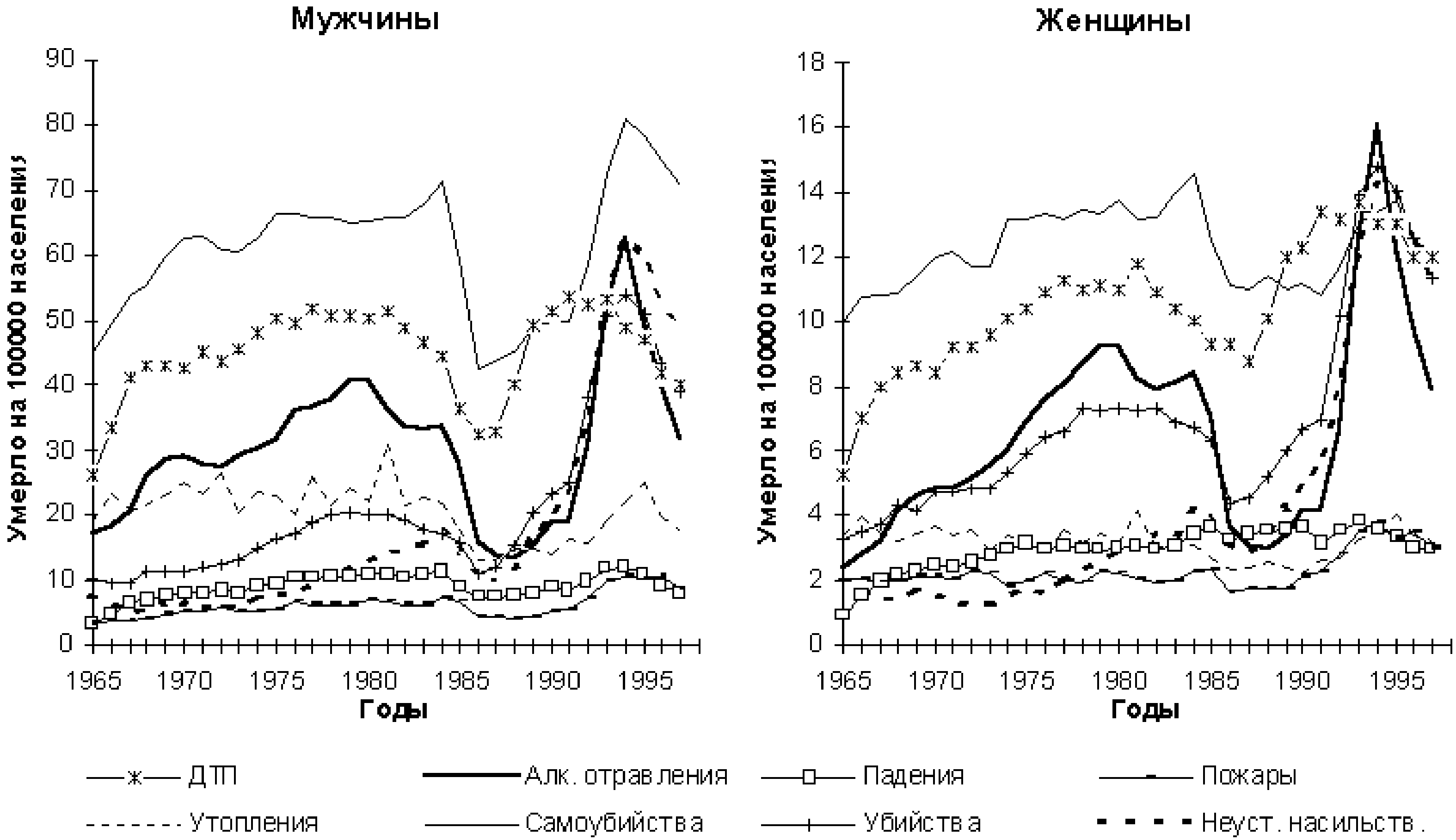
Мир



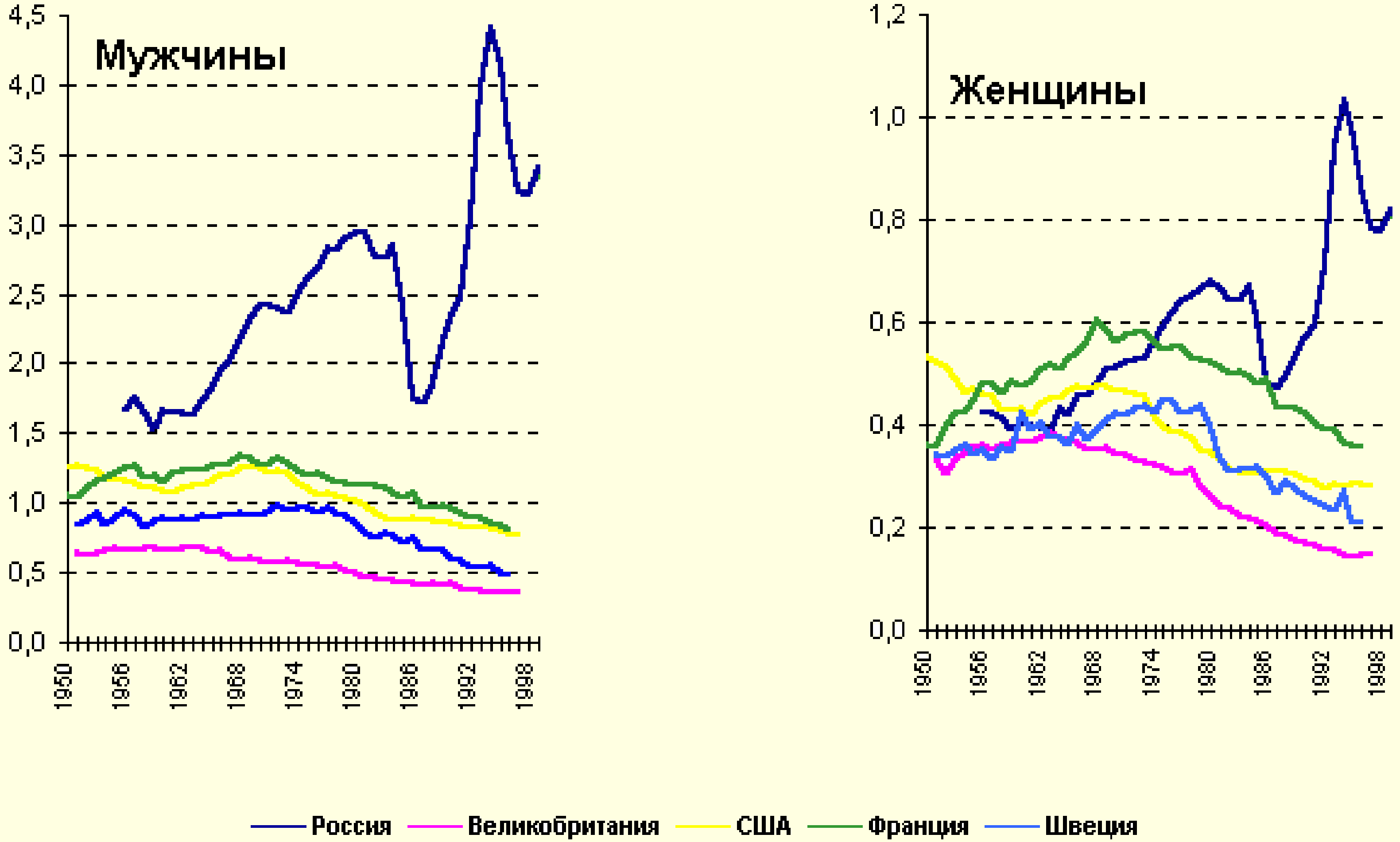
Россия

1 – болезни сердечно-сосудистой системы, 2 – новообразования, 3 – инфекции, 4 – болезни органов дыхания, 5 – внешние причины

Смертность от внешних причин



Сравнение смертности от внешних причин (на 1000 чел.)



МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЕМОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Обозначения

- Пусть $N^{M,F}(x,t)$ – численность мужчин «*M*» и женщин «*F*» возраста x (лет) в момент времени t.
- $B(x)$ – возрастной коэффициент рождаемости, так что $\int B(x) N^F(x,t)dx$ есть число детей, рождаемых в год t;
- $q^{M,F}(x)$ – возрастной коэффициент смертности;
- $p^{M,F}(x,t)$ – миграционный поток.

Демографическое уравнение

$$\frac{\partial N^{M,F}(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial N^{M,F}(x,t)}{\partial x}=-q^{M,F}(x)N^{M,F}(x,t),\quad x>0,\ t>0;$$

$$N^{M}(0,t)=0{,}512\int_{0}^{\infty}B(x)N^{F}(x,t)dx\,;\quad N^{F}(0,t)=0{,}488\int_{0}^{\infty}B(x)N^{F}(x,t)dx\,;$$

$$N^{M,F}(x,0)=N_0^{M,F}(x).$$

Уравнение описывает движение вдоль оси времени и смертность, граничные условия отвечают рождению, а в начальный момент задается некоторое известное распределение.

Общее решение

Общее решение демографического уравнения имеет вид

$$N^{M,F}(x,t) = f^{M,F}(t - x)Q^{M,F}(x)$$

где f есть произвольная функция, а Q – функция дожития, которая показывает долю людей, доживших до возраста x:

$$Q^{M,F}(x) = \exp\left(- \int_0^x q^{M,F}(y)dy \right)$$

Решение уравнения для $f^F(x,t)$

Функция $f^F(x)$ определяется из начального и граничного условий демографического уравнения.

Поскольку начальное условие имеет вид $N_0^F(x) = f^F(-x)Q^F(x)$, то при отрицательных аргументах функции f ее значения определяются формулой

$$f^F(-x) = N_0^F(x)/Q^F(x).$$

При положительных аргументах из граничного условия следует

$$f^F(x) = \int_0^x K^F(x-y)f^F(y)dy + \int_{-\infty}^0 K^F(x-y)f^F(y)dy,\ x \ge 0;$$

$$K^F(x) = Q^F(x)B^F(x).$$

Решение уравнения для $f^F(x,t)$

В результате для $f^F(x)$ получилось интегральное уравнение второго рода с разностным ядром и переменным верхним пределом (уравнение Вольтерра или уравнение восстановления):

$$f^F(x) = \varphi^F(x) + \int_0^x K^F(x-y) f^F(y)\,dy,$$

$$\varphi^F(x) = \int_0^\infty K^F(x+y)\frac{N_0^F(y)}{Q^F(y)}\,dy.$$

Решение этого уравнения получается с помощью преобразования Лапласа. Введем лапласовский образ ядра

$$\widetilde{K}^F(s) = \int_0^\infty K^F(x) e^{-sx}\,dx.$$

Решение уравнения для $f^F(x,t)$

Решение уравнения восстановления в образах имеет вид

$$\tilde{f}^F(s) = \frac{\tilde{\varphi}^F(s)}{1 - \tilde{K}^F(s)}.$$

Тогда $$f^F(x) = \varphi^F(x) + \int_0^x R^F(x-y)\varphi^F(y)dy = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\tilde{\varphi}^F(s)e^{sx}}{1 - \tilde{K}^F(s)} ds,$$

$$R^F(x) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \tilde{R}^F(s)e^{sx} ds,$$

где лапласовский образ резольвенты $\tilde{R}^F(s)$ определяется через образ ядра исходного уравнения по формуле

$$\tilde{R}^F(s) = \frac{\tilde{K}^F(s)}{1 - \tilde{K}^F(s)}.$$

Решение уравнения для $N^F(x,t)$

Собственные значения ядра уравнения восстановления являются решениями уравнения

$$\tilde{K}^F(s) = 1.$$

Пусть эти корни s_k простые. Тогда собственные функции имеют вид

$$f_k(x) = e^{s_k x},$$

и решение уравнения восстановления представляет их линейную комбинацию:

$$f^F(x) = \sum_k r_k e^{s_k x}, \qquad r_k = \lim_{s \to s_k} \frac{(s - s_k)\tilde{\varphi}^F(s)}{1 - \tilde{K}^F(s)}.$$

Решение исходного уравнения имеет вид:

$$N^F(x,t) = Q^F(x) \sum_k r_k e^{s_k (t - x)}.$$

Оценка корня: $$\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{\bar{T}_{mother}} \frac{k_{netto} - 1}{k_{netto}}.$$

Модель неоднородной популяции

Пусть имеется несколько категорий населения с различными значениями коэффициентов смертности и рождаемости. Пусть заданы также вероятности перехода в единицу времени между стратами. Тогда демографическое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} + \frac{\partial N_i}{\partial x} = -q_i(x) N_i - N_i \sum_j P_{ji}(x) + \sum_j P_{ij}(x) N_j, \quad x, t > 0;$$

$$N_i\big|_{x=0} = \sum_{j=1}^{n} \int_0^\infty A_{ij} B_j(y) N_j(y,t)\,dy; \quad N_i\big|_{t=0} = N_{0i}(x).$$

Случай приводимости по Ляпунову

Введем матрицу

$$C_{ij}(x) = P_{ij}(x) - \left[q_i(x) + \sum_j P_{ji}(x) \right] \delta_{ij}.$$

Тогда демографическое уравнение примет вид

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial x} = \hat{C}\vec{N}.$$

Пусть система приводима по Ляпунову, т.е. существует такая невырожденная матрица $\Lambda(x)$, что

$$\hat{D} = \Lambda^{-1}\left(\hat{C}\Lambda - \Lambda'\right)$$

есть постоянная матрица. Тогда делается преобразование

$$N = \Lambda F$$

Диагонализация уравнения

В новых переменных система имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}=\hat{D}\vec{F},\quad \vec{F}(0,t)=\int_0^\infty \hat{S}(y)\vec{F}(y,t)dy,$$

$$\vec{F}(x,0)=\Lambda\vec{N}_0(x)\equiv\vec{F}_0;$$

$$S_{ij}=\left(\Lambda^{-1}\right)_{ik}A_{km}B_m\Lambda_{mj}.$$

Пусть существует матрица T, приводящая $\hat{D}$ к диагональному виду: $T^{-1}\hat{D}T=diag(d_1,...,d_n).$

Тогда вводится матрица дожития

$$\hat{Q}(x)=\exp\left(\hat{D}x\right)=T^{-1}diag\left(e^{d_1x},...,e^{d_nx}\right)T$$

Решение уравнения для F

$$F_j(x,t)=\sum_{l=1}^{n} Q_{jl}(x)\sum_k r_{lk}\exp\left[s_k(t-x)\right],$$

s_k – корни уравнения

$$\det\left(\hat{I}-\tilde{\hat{R}}(s)\right)=0,\quad \tilde{\hat{R}}(s)=\int_0^{\infty}\hat{R}(x)e^{-sx}dx,\quad \hat{R}(x)=\hat{S}(x)\hat{Q}(x).$$

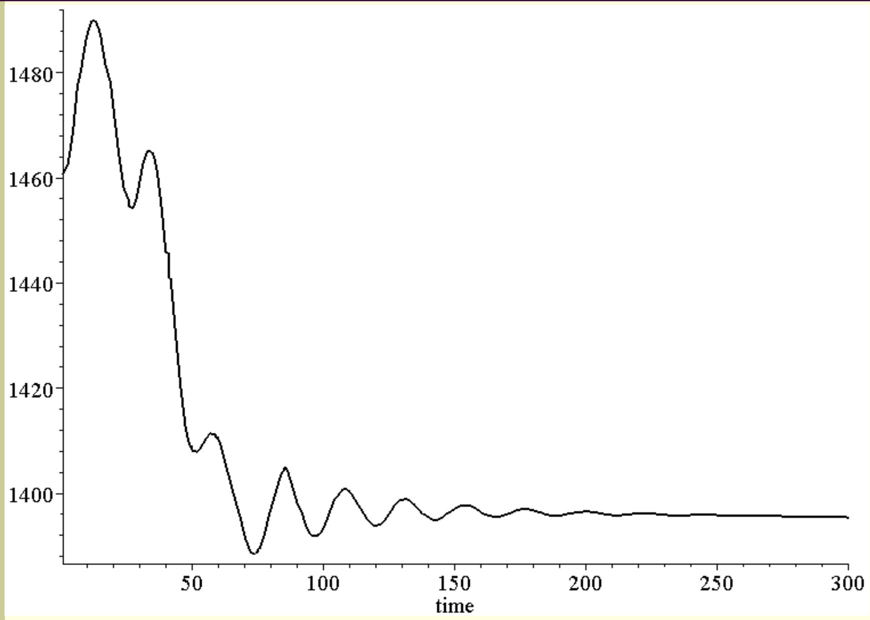
.

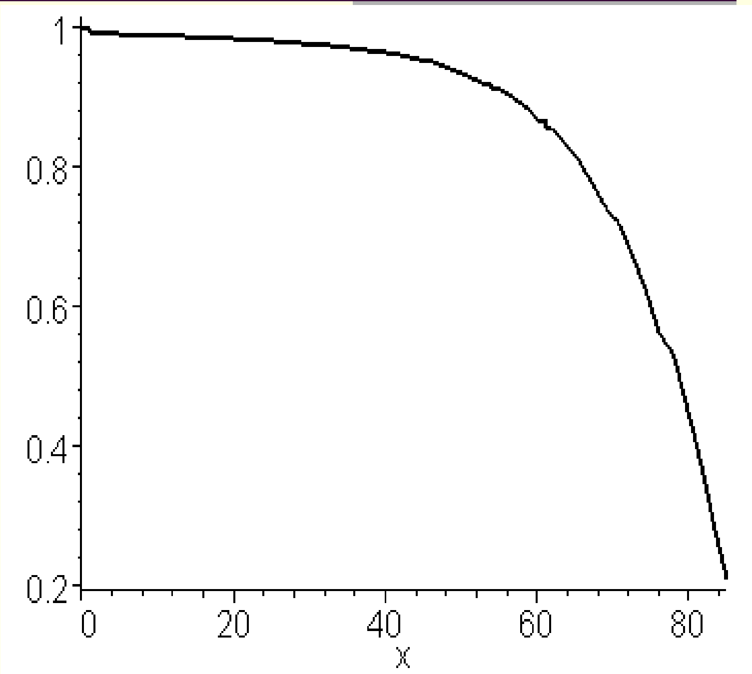
r_{lk} – вычеты подынтегрального выражения для решения уравнения в образах:

$$\vec{\tilde{f}}(s)=\left(\hat{I}-\tilde{\hat{R}}(s)\right)^{-1}\vec{\tilde{\varphi}}(s),\quad \vec{\varphi}(x)=\int_0^{\infty}\hat{R}(x+y)\hat{Q}^{-1}(y)\vec{F}_0(y)dy.$$

ПРОГНОЗЫ и СЦЕНАРИИ

Модель стабильного населения





Динамика полной численности населения по годам на 100 тыс. чел. при увеличении рождаемости в когорте 19-24 года в 2,12 раз (слева) и распределение населения по возрастам для этого стационарного режима (справа).

$$\int_0^\infty B^{M,F}(x)Q^{M,F}(x)dx \equiv \int_0^\infty K^{M,F}(x)dx = 1 \quad \Rightarrow \quad N(x) = N(0)Q(x)$$

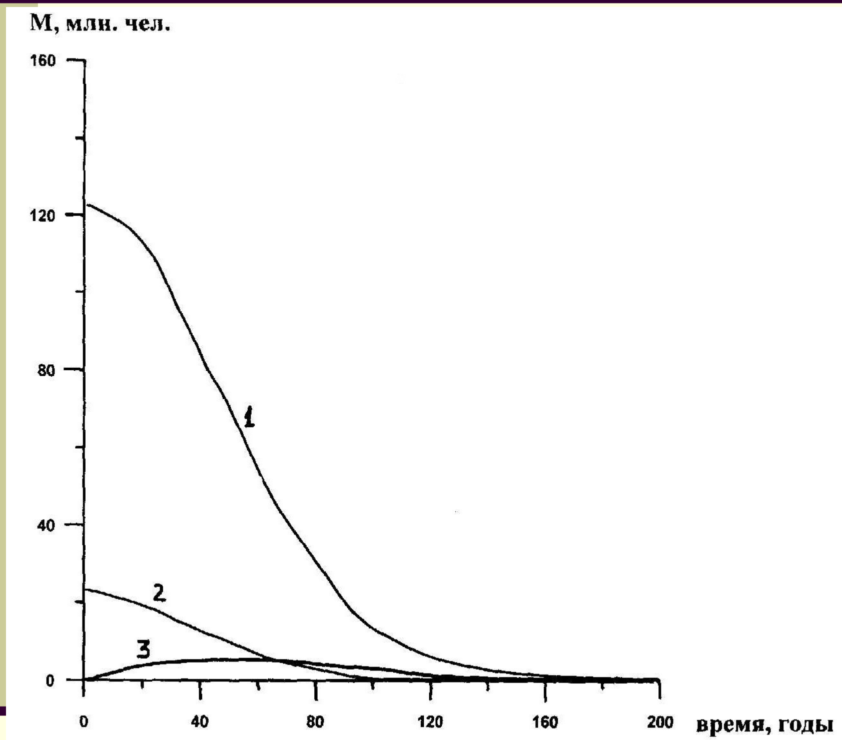
Модель ассимиляции

Вариант определения категории детей по типу родителей:

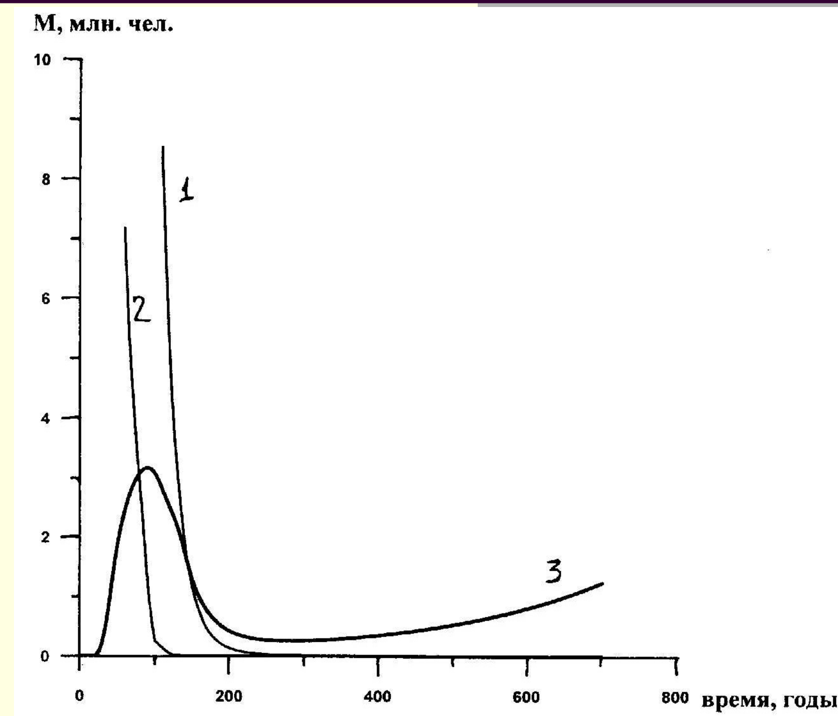
F / *M*	0	L	m	R	1
0	0	0.5 «0» 0.5 L	L	0.5 L 0.5 m	m
L		L	0.5 L 0.5 m	m	0.5 m 0.5 R
m			m	0.5 m 0.5 R	R
R				R	0.5 «1» 0.5 R
1					1

«0» - аборигены, «1» - пришельцы, «m» - метисы от браков «0» и «1», «L» - левые метисы от браков «0» и «m», «R» - правые метисы от браков «m» и «1».

Сценарий выживания
(1-аборигены, 2-пришельцы, 3-метисы)

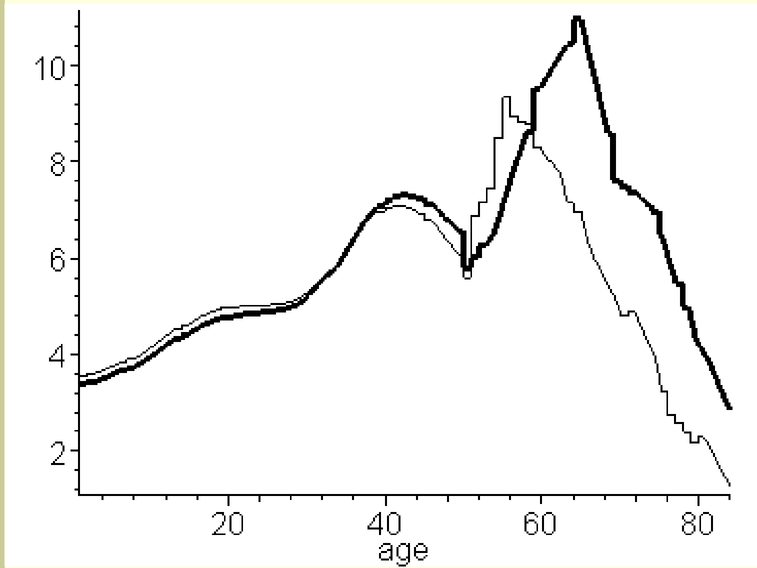


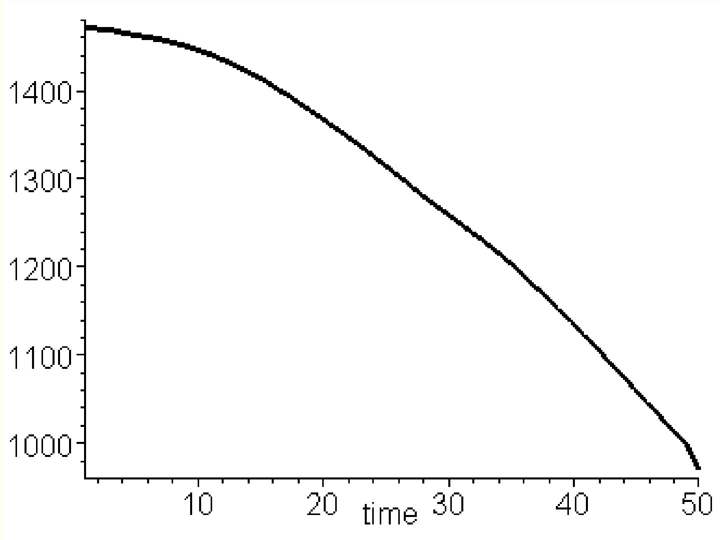
Трех-групповая модель ассимиляции без брачных предпочтений и без учета миграции.



Пяти-групповая модель ассимиляции без брачных предпочтений и без учета миграции. Выживают левые метисы, если рождаемость пришельцев повысить в 1,5 раза.

Среднесрочный прогноз численности населения России





Повозрастное распределение (слева) и полная численность (справа) населения России к 2050 г., 100 тыс. чел.

«Наивный прогноз» по состоянию на 2000 г.