Беклемишев Д.В.

О невозможных расширениях курса линейной алгебры

То, что я буду говорить – не математика, а о математике. Поэтому все мои высказывания будут расплывчаты, неоднозначны , а значит, каждый может понимать их по-своему. Все, что сказано в начале о взаимосвязи математических наук, весьма спорно, я и сам могу оспорить любое положение. Вместо спора можно постараться выработать свою точку зрения.

Как я себе представлю, математику можно разделить на дисциплины: алгебру, геометрию и анализ. Множества эти нечеткие, между ними нет границ, по краям они перемешиваются. Если раскрасить алгебру красным, геометрию – синим, а анализ желтым, то возникнут оранжевая, фиолетовая, зеленая и белая зоны, и каждая из них переливается различными оттенками цвета и насыщенности.

Пожалуй, наиболее четкое определение геометрии дал кто-то из классиков, сказав, что геометрия – это то, чем занимаются геометры. Аналогично можно определить и остальные дисциплины. Естественно возникает вопрос, кто же такие геометры. Тут не следует ждать точного определения, но геометра так же легко отличить, скажем, от алгебраиста, как математика от физика.

Результат обучения – не только, а может быть и не столько, усвоение фактов, а воспитание, привитие обучаемому понятия о том, что правильно, а что не правильно, что должно быть, а чего не должно, что хорошо и что плохо. Так вот, представители разных направлений в математике отличаются воспитанием. Небольшой пример, никому не в осуждение, а для того, чтобы показать что означает разница в воспитании.

Кафедра математики Физтеха состояла (и состоит) в значительной мере из специалистов по анализу. Когда я начинал преподавать, квадратичная форма опеределялась как однородный многочлен второй степени от n переменных, определение, из которого исходил, скажем, Сильвестр. В этом изложении было совершенно не ясно, что же значит привести форму к каноническому виду: канонический вид – другой многочлен. Вопрос обходился, хотя и при таком определении можно всё четко разъяснить. Это как-то никого не беспокоило, а мне с геометрическим воспитанием казалось невозможным заминать это место.

Для пояснения цветной картинки можно сказать, что топология, предметом которой является изучение предельного перехода при самых общих предположениях, или изучение свойств множеств, неизменных при взаимно однозначных непрерывных отображениях, относится, в основном, к фиолетовой зоне. А дифференциальная геометрия – к оранжевой. Но они не только соприкасаются, но и в значительной мере перемешиваются.

Возможность построить гладкое векторное или определенного типа тензорное поле на дифференцируемом многообразии определяется его топологической структурой. Простой пример: на сфере, в отличие от плоскости, не может существовать гладкого векторного поля без особой точки.

Когда было понято значение связи топологического строения многообразия с тензорными полями на нем, возникло целое большое направление математических исследований. Это напоминало огонь газосварочнго аппарата: синее и оранжевое смешиваются и возникает ослепительное почти белое пламя. Сходство дополняла и выделявшаяся при этом энергия.

Нужно заметить, что чем лучше разработана математическая теория, тем больше она отливает красным цветом. Алгебраические свойства математических объектов глубже всего лежат в природе вещей, и когда мы добираемся до сути, суть эта оказывается алгебраической. (О пучках квадратичных форм)

Но пора перейти к линейной алгебре. Она возникла в конце XIX в как чисто алгебраическая дисциплина, алгебра линейных, а затем и билинейных многочленов. Однако, начиная с 20-х годов XX в. стала переходить в геометрию. Начало было положено книгой Шрейера и Шпернера "Линейная алгебра в геометрическом изложении", и преимущества этого изложения оказались так значительны, что сейчас линейная алгебра воспринимается как геометрическая дисциплина. Большую роль в этом процессе сыграл функциональный анализ, по мере развития всё больше окрашивавшийся в фиолетовый цвет.

Сейчас линейная алгебра может быть определена как геометрия линейных пространств и уверенно закрашена синей краской. С другой стороны, существует предмет "теория матриц", содержание которого отличается от линейной алгебры не более, чем терминами и акцентами. Теория матриц стоит на алгебраической точке зрения и не чуждается применения методов анализа. Одно и то же содержание может быть окрашено разными красками!

Сравнение матричного и геометрического подхода поучительно. Отдельный результат в матричном виде может оказаться проще, но с гораздо большим трудом просматривается взаимосвязь результатов. Представьте себе, что вы смотрите на картину, закрытую листом картона, в котором прорезано окошко. Фрагмент, который вы видите проще всей картины, но попробуйте понять, чьи ноги видны в правом верхнем углу.

За весь XX в. роль линейной алгебры в приложениях к другим математическим дисциплинам и наукам, использующим математику, резко возрастала, и сейчас, как мне кажется, может сравниться с ролью классического анализа.

Одна из основных причин в том, что дифференцируемая функция, гладкое поле, дифференцируемое отображение в малом линейны, и их локальное изучение требует применения методов линейной алгебры.

Вторая, как мне кажется, причина – это красота линейной алгебры. Одной полезности не достаточно для популярности. Один из примеров, подтверждающих это – применение аппарата дуальных векторов к задачам теоретической механики. Всё хорошо, но уж больно громоздко: на слоне ехать, может быть, и не плохо, мы мы уж лучше как-нибудь без слона...

Если говорить о Физтехе, время, отводимое на изучение линейной алгебры, вдвое меньше, чем время, отводимое на анализ. Между тем, в программе математики на

Физтехе линейная алгебра – единственный представитель геометрического (да и алгебраического) направления, и спрос с нее ото всех и за всё. Если кто-либо считает, что в обязательный курс математики должны входить группы Ли, он спрашивает "Почему вы в линейной алгебре ничего не говорите о группах Ли", хотя и при самом вольном толковании их трудно отнести к линейной алгебре. Ответ может быть только словами Козьмы Пруткова: "Никто не может объять необъятного!". А еще, конечно, "А что бы Вы выкинули?".

Вопрос риторический, всё необходимо. Между тем, не всегда в курс линейной алгебры входило все то, что в него входит сейчас, хотя всегда он был перегружен. Образно говоря, нужно иметь в виду две модели расширения курса: модель холодильника и модель масленки. Если холодильник набит, часто можно навести порядок, что-то передвинуть и освободить место. С другой стороны, в масленку можно набить сколько угодно масла, если набивать с одного края, и не интересоваться тем, что вылезает с другого.

Кус аналитической геометрии и линейной алгебры был поставлен профессорами МГУ, пришедшими на ФТФ, скорее всего, Б.Н. Делоне. Курс по тем временам был революционным: объединение в один курс аналитической геометрии и линейной алгебры было произведено впервые. Для сравнения можно сказать, что а курсе аналитической геометрии, который в те же годы читался на Мех-мате векторы вводились только во втором семестре.

Курс создавался при полном понимании того, что его содержание нетривиально, и усваивается с трудом. В частности, алгебраическая теория систем линейных уравнений предшествовала теории линейных пространств для того, чтобы студент не понявший линейных пространств, всё-таки мог усвоить системы уравнений. (Здесь можно вспомнить сказанное о геометрической и алгебраической точках зрения.)

Содержание курса, в том виде, как я застал его через 10 лет после основания Физтеха, было таким. В первом семестре читалась общая теория линий второго порядка со всеми подробностями, касающимися инвариантов, все метрические задачи решались только в прямоугольных координатах. Аффинные преобразования читались в меньшем объеме, их постоянно не успевали прочесть и переносили во второй семестр. Второй семестр начинался с детерминантов и кончался основной теоремой о самосопряженных преобразованиях. Ничего не говорилось о линейных и билинейных функциях, линейных отображениях, унитарных пространствах и ,конечно, о тензорах. Не было многих других понятий, например, не упоминалась матица Грама.

В соответствии с моделью холодильника с тех пор курс постепенно расширялся. Важным вкладом было введение теоремы Фредгольма по инициативе В.С. Владимирова. Тензоры были введены, можно сказать, по инициативе студентов.

Однажды студенты моей группы спросили меня, что такое тензор. Я спросил их, кто им сказал такое слово.
– Физик!
– Ну вот у него бы и спросили!
– А он не знает...
Тут я почувствовал, что обязан им рассказать, и после этого стал думать о включе-

нии тензоров в обязательный курс. Но тут сработала модель масленки...

Не все новшества прививались сразу, некоторые не прививались совсем. Мне запомнилось высказывание одного из авторитетнейших членов кафедры: "Зачем это вам понадобились параметрические уравнения плоскости!"

Каждая работа использует какие-либо ресурсы. Казалось, что в чтении лекций единственный ограничивающий ресурс – это лекционное время. Однако расширение курса сейчас столкнулось с другим ограничивающим ресурсом – скоростью усвоения материала студентами.

Обойтись без сведений из наук геометрического цикла в других дисциплинах нельзя. Поэтому, в курсах использующих математику — физике, механике, теории вероятностей, дискретном анализе, теории управления, экономике и др. — по необходимости излагаются нужные сведения. Как, с какой точки зрения, в каком объеме – об этом у математиков информации практически нет. По имеющимся отрывочным сведениям можно судить, что здесь, как говорится, "есть резервы для улучшения". Особенно важна точка зрения. Несомненно, в процессе обучения учащийся должен узнавать все факты (в том числе, и в различных дисциплинах) с единой точки зрения.

Можно и нужно знакомиться и с другими точками зрения, но это должно быть четко оговорено, и каждая новая точка зрения должна быть сопоставлена с основной.

Ясно, что диапазон материала, используемого в различных приложениях, настолько велик, что не может быть речи о чтении курса, который этот материал включал бы. Более того, такой курс и не нужен. Специалист по механике сплошной среды может прожить долгую и счастливую жизнь и добиться выдающихся успехов в своей области, ничего не зная о положительных матрицах или о линейном программировании. А специалист по математической экономике никогда не услышит о теплицевых матрицах и ничего не потеряет.

В идеале, должна быть продумана система специальных курсов, ориентированных на приложения в различных областях, и программы этих курсов должны разрабатываться совместно с представителями специальностей. В действительности, чаще всего темы и программы спецкурсов формируются совсем иначе.

Что же должно входить в идеальный общий курс аналитической геометрии и линейной алгебры, помимо того, что входит сейчас в курс не идеальный.

1. Теорема Жордана.

На нее существенно опирается курс дифференциальных уравнений, но там читается только формулировка, хотя и решаются задачи на приведение к жордановой форме.

Существует очень много различных доказательств этой теоремы, среди них и сравнительно короткое индуктивное доказательство Филиппова. Оно не кажется мне удачным, так как краткость достигается за счет трудности, а рассуждение по индукции не вскрывает сути дела.

А суть дела такая. Рассматривается линейное преобразование пространства $\mathcal{L}$. Известно, что $\mathcal{L}$ не всегда может быть представлено как прямая сумма собственных подпространств $\operatorname{Ker}(\mathsf{A} - \lambda_i \mathsf{E})$. Но раскладывается в прямую сумму подпространства $\operatorname{Ker}((\mathsf{A} - \lambda_i \mathsf{E}))^{k_i}$, где k_i – кратность корня λ_i. Эти подпространства называются корневыми подпространствами. Доказательство этого факта сравнительно несложное и короткое. Основная трудность состоит в том, чтобы затем доказать, что каждое из корневых подпространств в свою очередь раскладывается в прямую сумму инвариантных подпространств, называемых циклическими подпространствами.

Однако, для того, чтобы по данной матрице A вычислить матрицу e^{At} , в действительности нет необходимости в приведении к жордановой форме, достаточно найти корневые подпространства. Этот факт как-то не нашел отражения в курсе дифференциальных уравнений. Впрочем, его еще тоже надо доказывать, так что, как всегда, еще нужно проверить, что лучше. Возможно, что при изобилии времени, стоило бы рассказать оба подхода.

2. Теорема Гамильтона – Кэли.

Каждая матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению.

Я думаю, что нельзя считать кого-либо изучившим линейную алгебру, если он не знает этого факта. Сейчас эта теорема читается эпизодически, в программу не входит. Если будет читаться теорема Жордана в том виде, как описано выше, то теорема Гамильтона – Кэли будет необходима, как и разговоры о минимальном многочлене.

3. Теорема Шура о приведении к треугольному виду:.

Для каждого линейного преобразования унитарного пространства найдется ортонормированный базис в котором его матрица верхняя треугольная.

Это важная теорема, имеющая много приложений в линейной алгебре и за ее пределами, которая во многих случаях может заменить теорему Жордана. Я читаю ее по просьбе А.А. Абрамова, с этого года ее будет читать и П.А. Кожевников на ФОПФ. К сожалению, на других потоках она не читается. В моем изложении недостаток в том, что приведение к треугольному виду оказывается сильно оторванным по времени от ортогонализации базиса.

4. Сингулярное разложение..

Это теорема, которую я всячески стараюсь пропагандировать среди математиков. Среди вычислителей она в пропаганде не нуждается. Речь идет о следующем.

Для линейного отображения $\mathsf{A} : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ линейных пространств, как известно, существует пара базисов, в которых его матрица равна единичной матрице порядка $\operatorname{Rg} \mathsf{A}$, дополненной нулевыми строками и столбцами до нужных размеров. А что можно сказать в случае, когда пространства евклидовы, и мы ограничимся ортонормированными базисами? Оказывается, что меняется не так-то много. Единицы заменятся на некоторые неотрицательные числа, называемые сингулярными числами A. Матричная формулировка этого факта следующая: Для любой матрицы A

размеров $m \times n$ найдутся ортогональные матрицы P и Q, соответственно порядков m и n, такие, что

$$A = PDQ^T,$$

где

$$D = \left\| \begin{array}{c|c} D_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right\|,$$

и

$$D_r = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_\mathrm{r}), \qquad \alpha_1, \ldots, \alpha_\mathrm{r} > 0.$$

Геометрическая трактовка может быть такой: сфера в n-мерном пространстве $\mathcal{L}$ переходит в эллипсоид в r-мерном подпространстве пространства $\mathcal{M}$. Сингулярные числа – полуоси этого эллипсоида. Ясно, что результат фундаментальный.

Одно из многих приложений сингулярного разложения – численное нахождение ранга матрицы при приближенных вычислениях. Дело в том, что ранг матрицы определяется равенствами – обращением в нуль ее миноров. при приближенных вычислениях точное равенство проверено быть не может, и понятие ранга становится расплывчатым. Практически это выражается, например, в том, что методом Гаусса вы получаете строку, состоящую из элементов, имеющих порядок погрешности вычислений. Можете ли вы считать эту строку нулевой?

Умножение на ортогональную матрицу не меняет нормы строк, и вопрос сводится к тому же вопросу для матрицы D. Но тут он прост – в каждой строке не больше одного ненулевого элемента.

5. Нормированные пространства.

Необходимо познакомить студентов с понятиями нормы и матричной нормы, показать разнообразие возможных норм и доказать их эквивалентность для конечномерного пространства. Нужны, конечно и примеры бесконечномерных нормированных пространств. Эта тема может быть развита теоремами о бесконечномерных пространствах, но есть опасность нечаянно прочесть курс функционального анализа.

6. Комплексные пространства.

В университетских курсах линейная алгебра рассказывается "над произвольным полем скаляров". С первых дней Физтеха, считалось, что это трудно и неэффективно, и курс ограничивался вещественными пространствами. Затем, "под влиянием общественности" (в лице С.П. Аллилуева), были введены унитарные пространства. О них сообщают не так уж мало, но в конце курса и почти без доказательств, ограничиваясь ссылками на аналогию с вещественным случаем. В результате эффект незначителен. Что и как тут можно изменить при изобилии времени – предмет для размышлений и дискуссий. Ясно, однако, что объем сведений тут должен быть расширен хотя бы за счет теорем о нормальных преобразованиях.

Другой вопрос о понятии комплексной структуры в четномерном вещественном пространстве, комплексификации и овеществлении. Эти понятия необходимо ввести.

7. Основы тензорной алгебры.

Это необходимо всем, если не с точки зрения возможных приложений, то как важный элемент мировоззрения.

Мне не кажется, что тут можно начинать с современного определения с помощью тензорных произведений пространств. Во всяком случае мои попытки сделать это не оказались удачными. Хотя в университетских курсах такое определение и распространено, должной методической проработки оно пока не получило.

В этом разделе обязательным представляется знакомство с алгеброй внешних форм. И внешние формы, и тензоры вообще начинают работать в связи с соответствующими полями. Следует ли в курсе линейной алгебры педантически придерживаться исключительно алгебраических методов? Возможны разные точки зрения, моя состоит в том, что для Физтеха – не следует. Другой вопрос – количество. Занявшись тензорными полями можно никогда не кончить.

8. Теорема Куранта – Фишера.

Во всяком случае нужно, чтобы в программе было понятие отношения Рэлея для самосопряженного преобразования A:

$$\rho(x) = \frac{\|\mathsf{A}(x)\|}{\|x\|},$$

и доказательство того, что это – наилучшее приближение к собственному значению при условии, что x – приближенный собственный вектор, того, что значения отношения Рэлея заключены между минимальным и максимальным собственными значениями.

Несложно и доказательство теоремы

При условии, что собственные значения самосопряженного преобразования A *пронумерованы в порядке невозрастания, для любого* k *выполнено*

$$\lambda_k = \max_{\mathcal{L}_k} \min_{o \neq x \in \mathcal{L}_k} \rho(x),$$

$$\lambda_k = \min_{\mathcal{L}_{n-k+1}} \max_{o \neq x \in \mathcal{L}_{n-k+1}} \rho(x).$$

Если ее доказывать, то необходимы какие-то пояснения, касающиеся роли ее аналога в бесконечномерном пространстве.

9. Мелкие вопросы.

Существует еще ряд сравнительно небольших по объему тем, которые можно считать существенными.

1. *Клеточные матрицы.* Умножение клеточных матриц, теорема Лапласа, формула Бине – Коши – всё это полезный, а иногда и необходимый инструмент, и время на него затраченное окупается.

2. *Факторпространства.* Пусть $\mathcal{L}'$ – линейное подпространство в $\mathcal{L}$. Объединим в один класс все векторы из $\mathcal{L}$ такие, что разность любых двух из них принадлежит $\mathcal{L}'$. Множество таких классов является линейным пространством относительно естественно определенных операций, которое называется факторпространством $\mathcal{L}$ по $\mathcal{L}'$.

3. *LU-разложение.* Метод Гаусса занимает достойное место, но ничего не говорится о его современной реализации. Это не сложно и должно быть сделано.

10. Кватерниноны.

В начале изучения векторной алгебры у первокурсника естественно может возникнуть вопрос о возможности определения "хорошего"умножения для векторов. (Если вопрос и не возникнет, его не грех и поставить.) Для векторов на плоскости это приводит к комплексным числам и, попутно, к взгляду на дуальные и двойные числа. А в трехмерном пространстве – к кватернионам. Помимо того, что это интересно само по себе, это приводит к полезным разговорам о введении в пространство дополнительной структуры при определении операции.

Кватернионы нужны и для преподавателей теоретической механики (строение $SO(3)$).

11. Точечные пространства.

1. *Аффинные пространства.*В современном курсе не остается возможности говорить об аффинных пространствах. В тему "Аффинные пространства можно, помимо классификации поверхностей второго порядка, включить теоремы о выпуклых многогранниках, возможно, и теорему Фаркаша.

2. *Проективные пространства.* Этот раздел, я считаю, обязательно должен присутствовать, но в каком объеме, мне сейчас сказать трудно. По всяком случае в каком-нибудь виде должны присутствовать конечные проективные плоскости.

На этом список можно закончить

Остается привести

названия нескольких спецкурсов геометро-алгебраического направления.

Их программы здесь я обсуждать не берусь, список, разумеется остается открытым.

1. Общая алгебра.
2. Теория линейных представлений.
3. Линейное программирование.
4. Специальные виды матриц.
5. Дифференцируемые многообразия.
6. Локализация корней и критерии устойчивости матрицы.
7. Возмущения и численная устойчивость в вычислительных задачах линейной алгебры.

В заключение

несколько слов о том, какой математике мы должны учить студентов. Нужно понимать, что мы сейчас готовим претендентов на Нобелевские премии по физике 2040 г., и от наших результатов в значительной степени зависит решение жюри.

Какая математика используется в высоких достижениях физики? В 80-е годы XIX в. трудами, в основном, итальянской геометрической школы были разработаны тензорный анализ и риманова геометрия. Через поколение примерно, эти результаты были с успехом использованы создателями обще теории относительности.

В начале 20-х годов XX в. одним из главных центров приложения математической мысли была общая алгебра: теория групп, колец, полей, алгебр... Кому-то из великих физиков того времени приписываются примерно такие слова: "Если меня попросят указать математическую теорию, которая никогда не найдет применения в физике, я в первую очередь укажу на теорию групп!" Проживи он еще лет 30, он увидел бы блестящие достижения, полученные именно с помощью теории групп.

Причина этого явления, возможно, такова. Логично выбирать инструмент, соответствующий реальной задаче, но жизнь не всегда устроена логично. Можно заподозрить следующий механизм.

Молодые математики, увлеченные работами Риччи и Леви-Чивита, учили своих учеников тому, что они считали самым важным и интересным. Когда эти ученики подросли, из безбрежного моря задач они выбрали ту, которая соответствовала их возможностям.

Так какой же из этого вывод? То, чему следует учить физиков XXI в. должны определять молодые математики, участвующие в разработке наиболее актуальных современных математических проблем. В любом случае – не я.