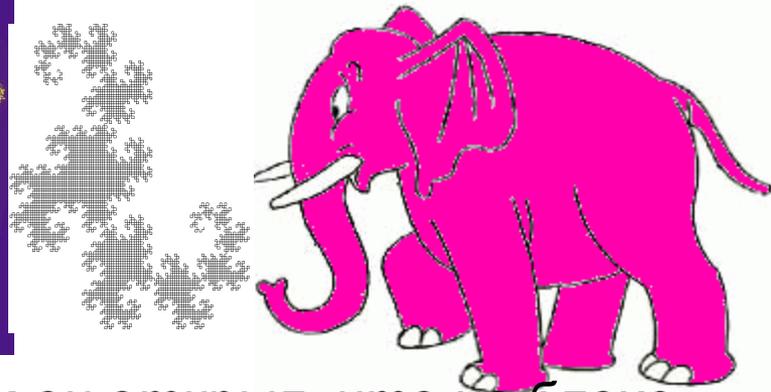
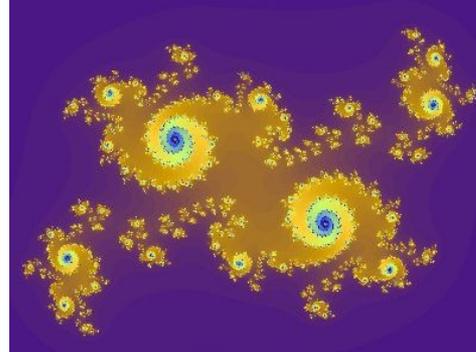


**Единицы
измерения,
размерности и
фракталы в
математике,
физике,
биологии и
искусстве**
М.Г.Иванов

(кафедра теор.физики МФТИ)



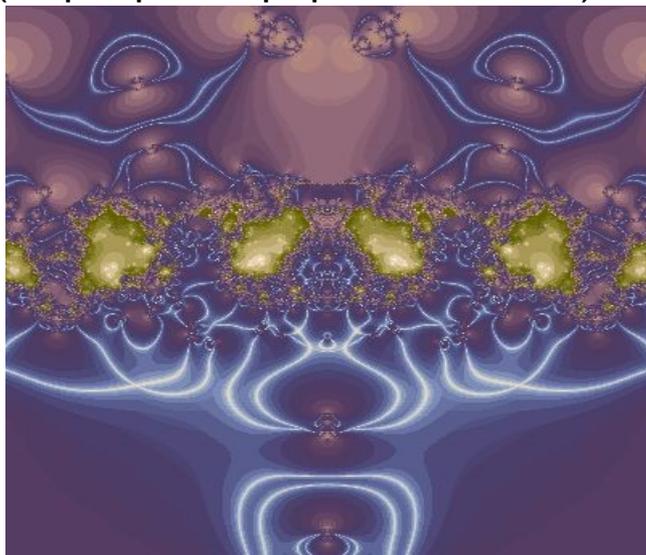
*Под микроскопом он открыл, что на блохе
Живёт блоху кусающая блошка;
На блошке той блошинка-крошка,
В блошинку же вонзает зуб сердито
Блошиночка, и так ad infinitum.*

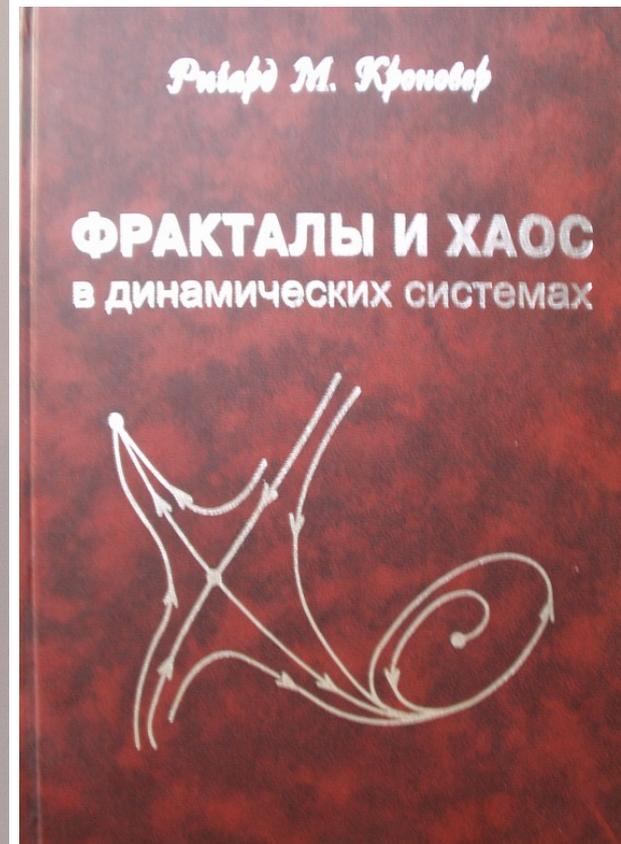
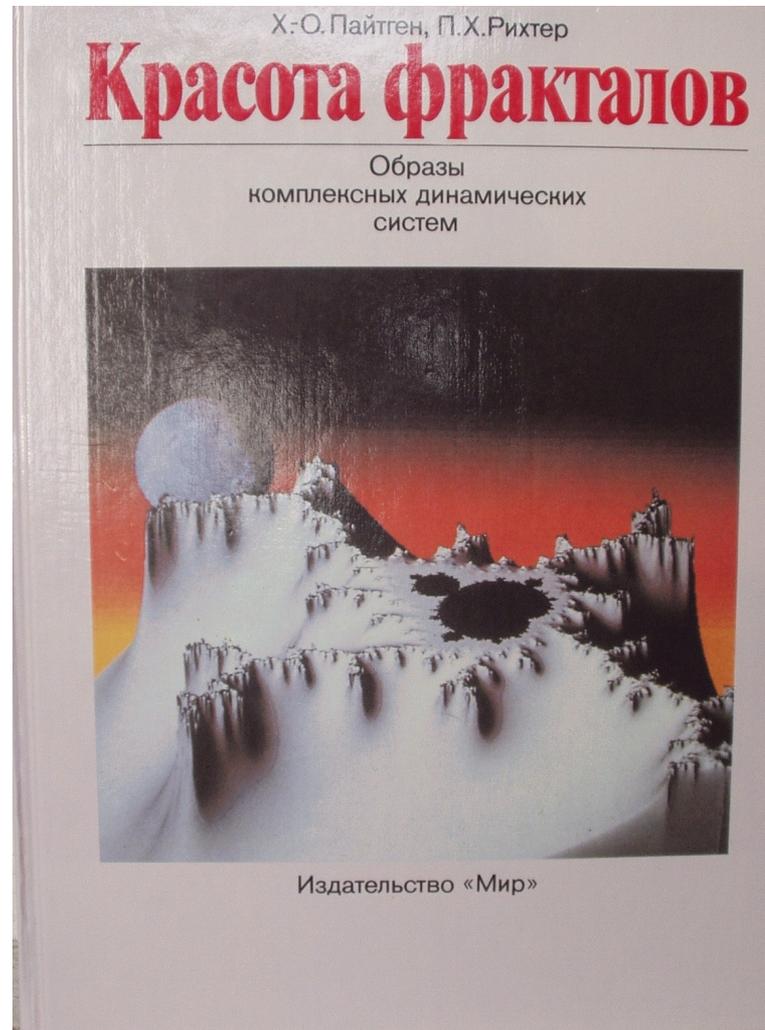
Д.Свифт (не знаю чей перевод)

*Натуралистами открыты
У паразитов паразиты,
И произвел переполох
Тот факт, что блохи есть у блох.
И обнаружил микроскоп,
Что на клопе бывает клоп,
Питающийся паразитом,
На нем другой, ad infinitum*

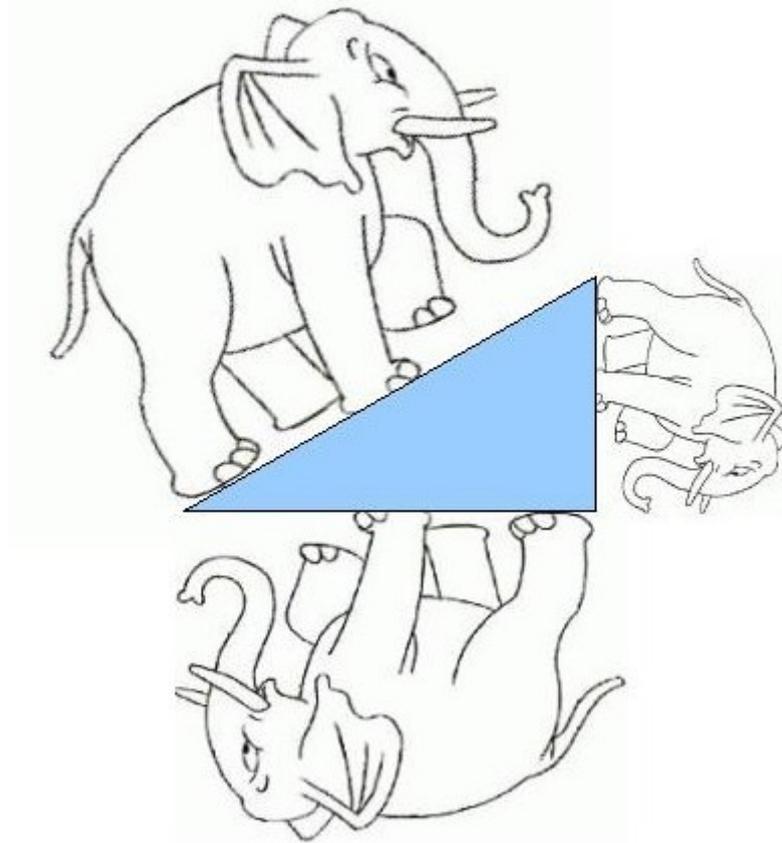
Д.Свифт (перевод Маршака)

1 декабря 2009 г, Школа №1, г. Долгопрудный

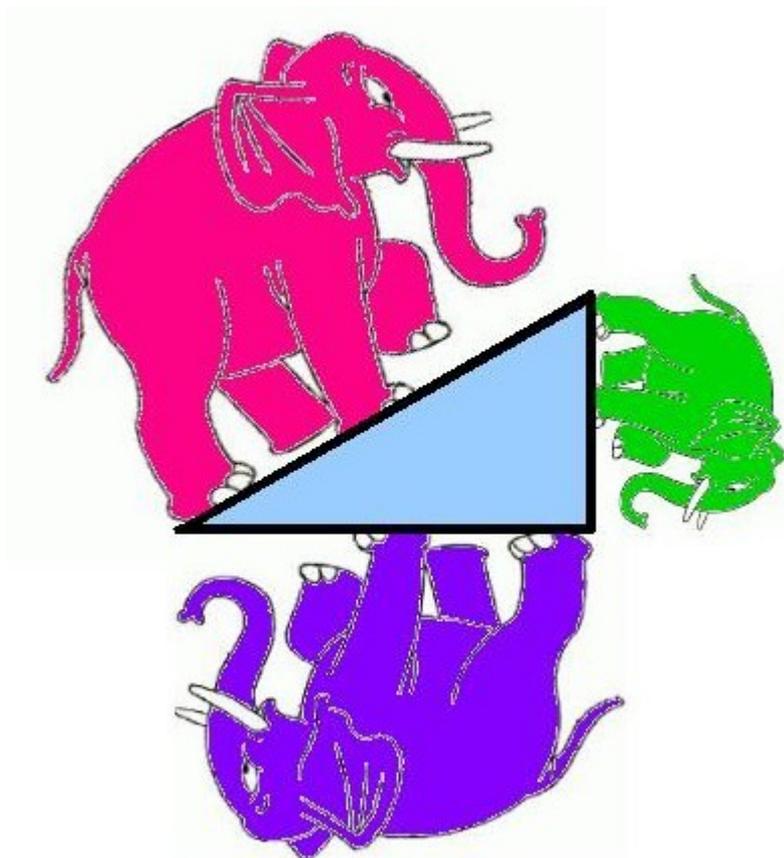




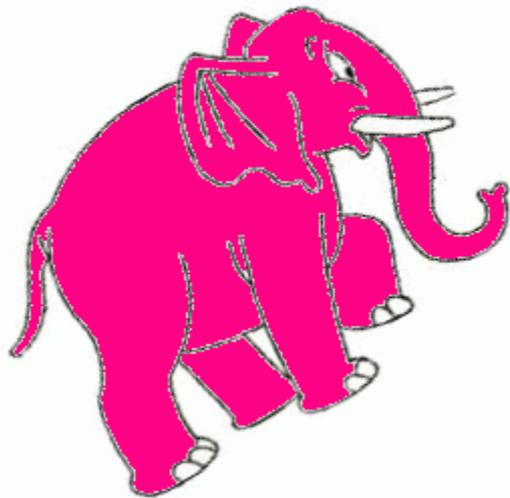
Теорема Пифагора



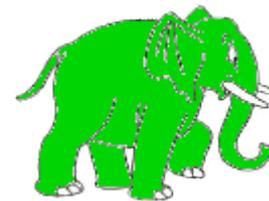
Теорема Пифагора



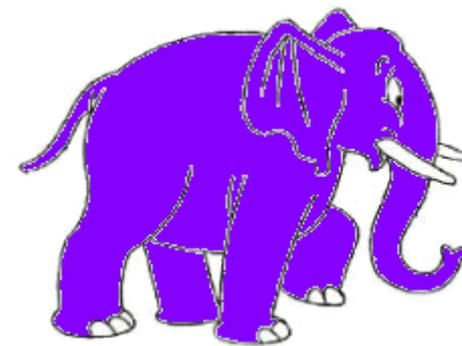
Теорема Пифагора



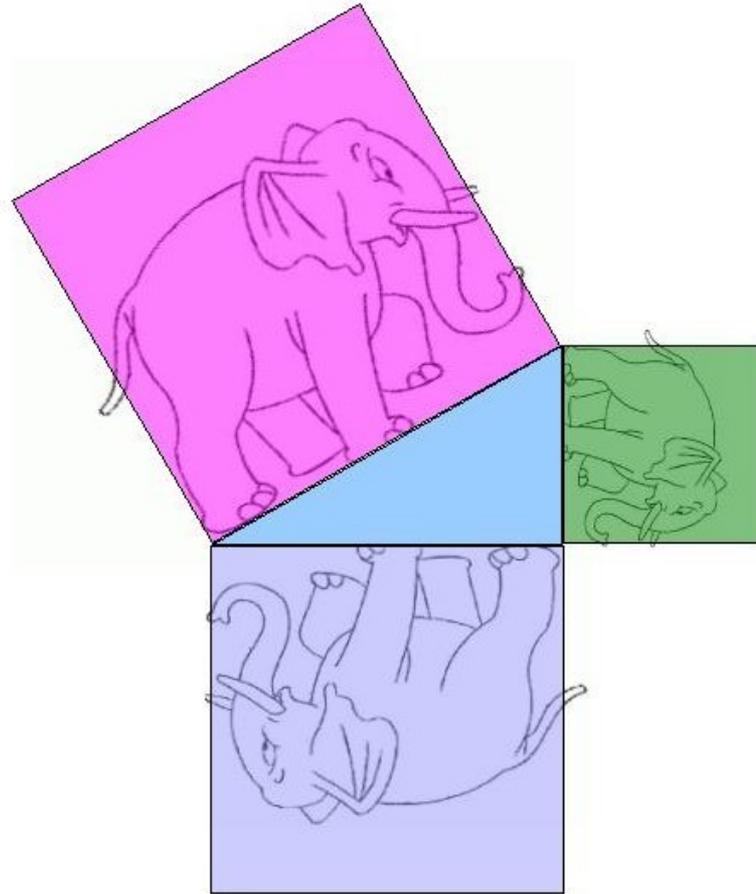
=



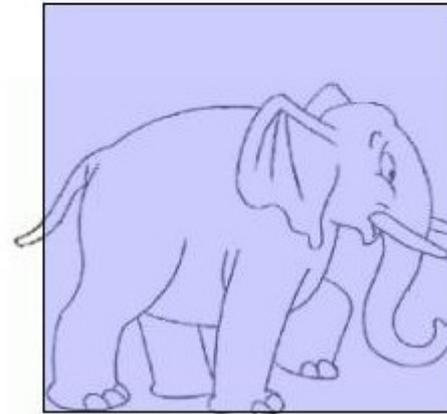
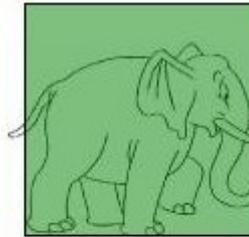
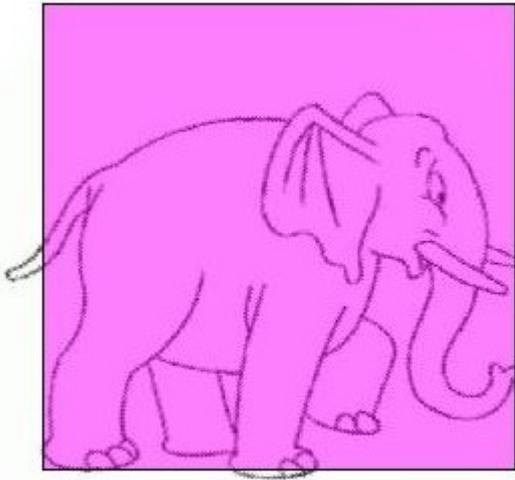
+



Теорема Пифагора



Доля слона в квадрате одинакова



Напоминание

$$a^n = \underbrace{a \ a \ \dots \ a}_{\text{множителей}}$$

$$a^n = a^m \cdot a^{n+m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$$a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a} \right)^n$$

$$\log_a x = n \quad a^n = x$$

Примеры:

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$$

$$\log_2 8 = 3$$

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

$$8^{4/3} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^4 = 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

Чем площадь отличается от длины?

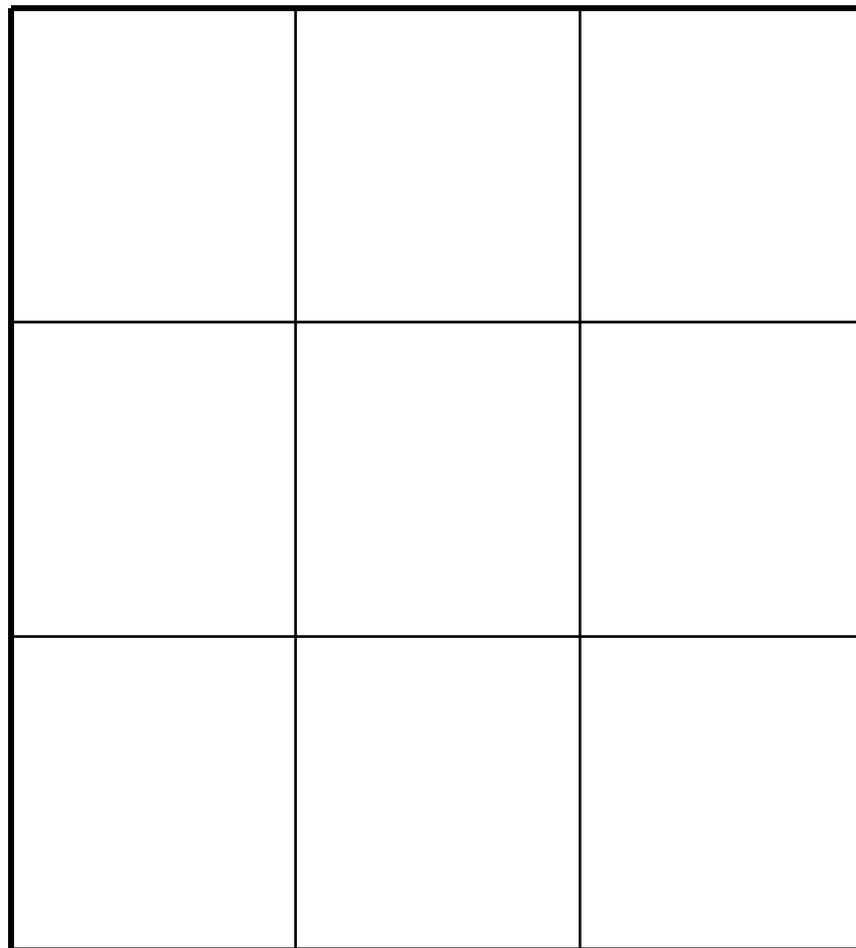
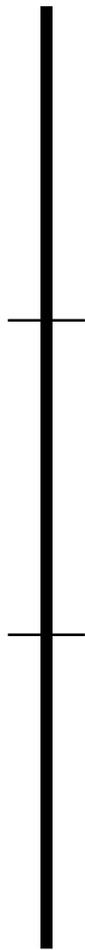
- Длина:

$$1\text{ м} = 100\text{ см}$$

- Площадь:

$$1\text{ м}^2 = 100\text{ см} \times 100\text{ см} = 10000\text{ см}^2$$

Если единицу измерения
уменьшить в 3 раза...



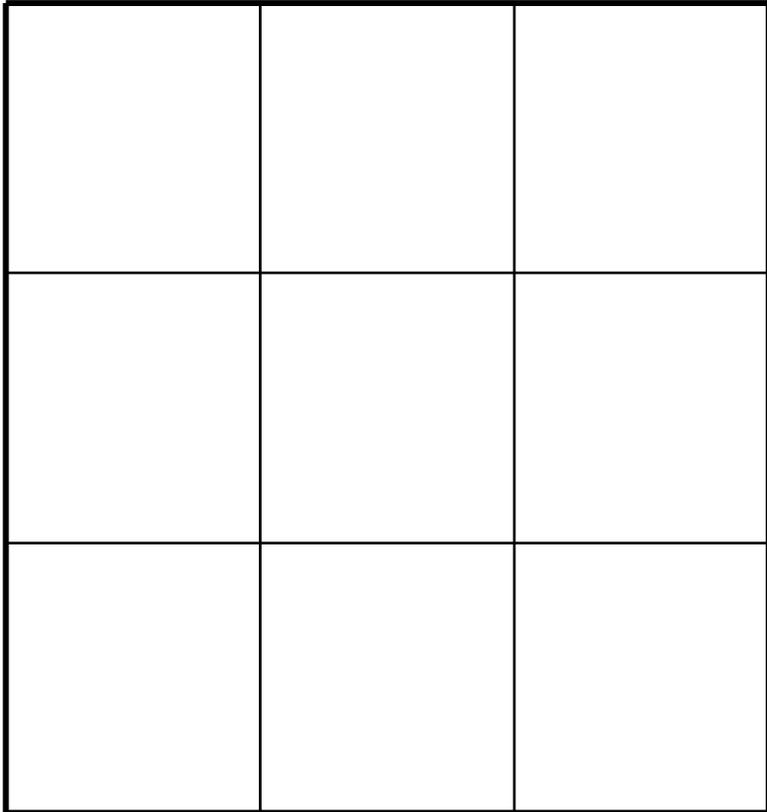
Размерность отрезка

- Отрезок состоит из 3 одинаковых кусков в 3 раза меньших размеров.
- Вычисляем размерность D

$$3 = 3^D$$

$$D = \log_3 3 = \frac{\ln 3}{\ln 3} = 1$$

Размерность квадрата

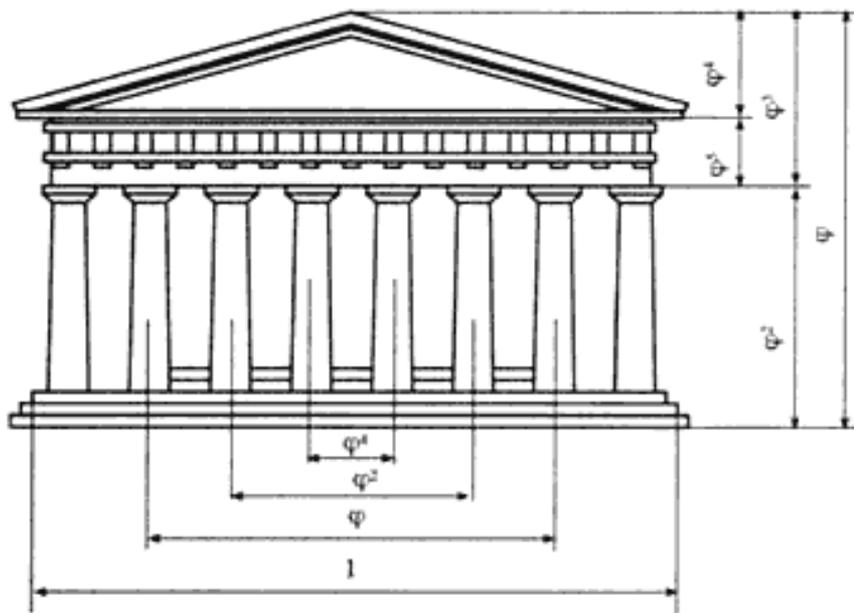


- Квадрат состоит из 9 одинаковых кусков в 3 раза меньших размеров.
- Вычисляем размерность D

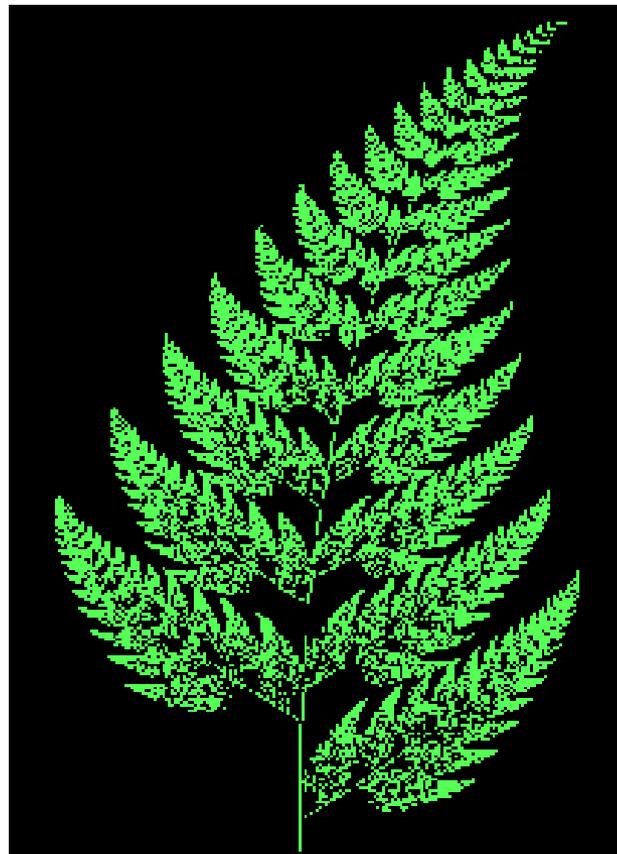
$$9 = 3^D$$

$$D = \log_3 9 = \frac{\ln 9}{\ln 3} = 2$$

Геометрия школьная и геометрия фрактальная



Лист «школьный» и лист фрактальный



Это настоящий папоротник, а
предыдущий был математический





Молния – предфрактал



Два предфрактала: тучи и молнии



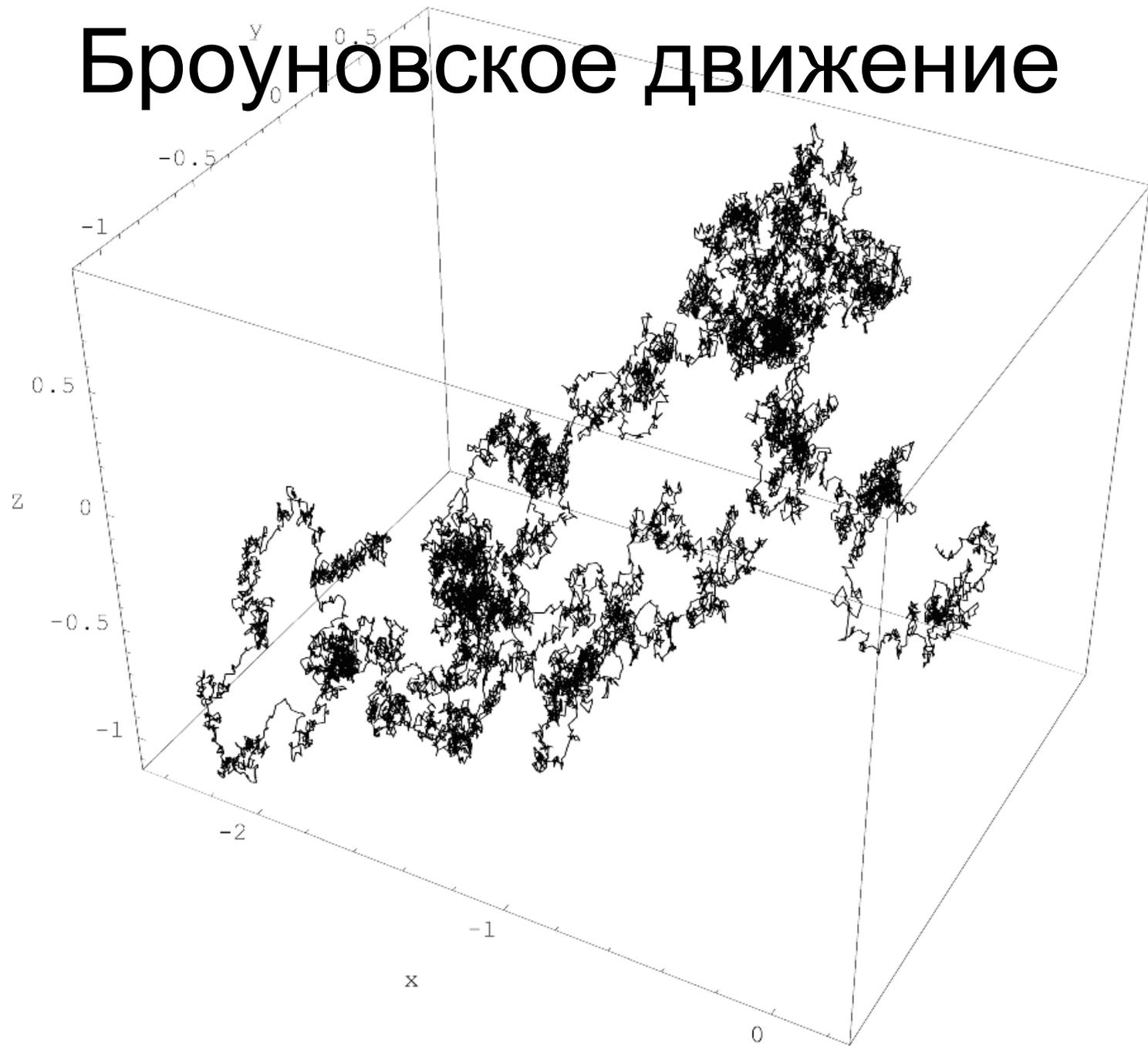
Ещё два предфрактала



Глядя на облака сложно оценить их
размер (самоподобие)

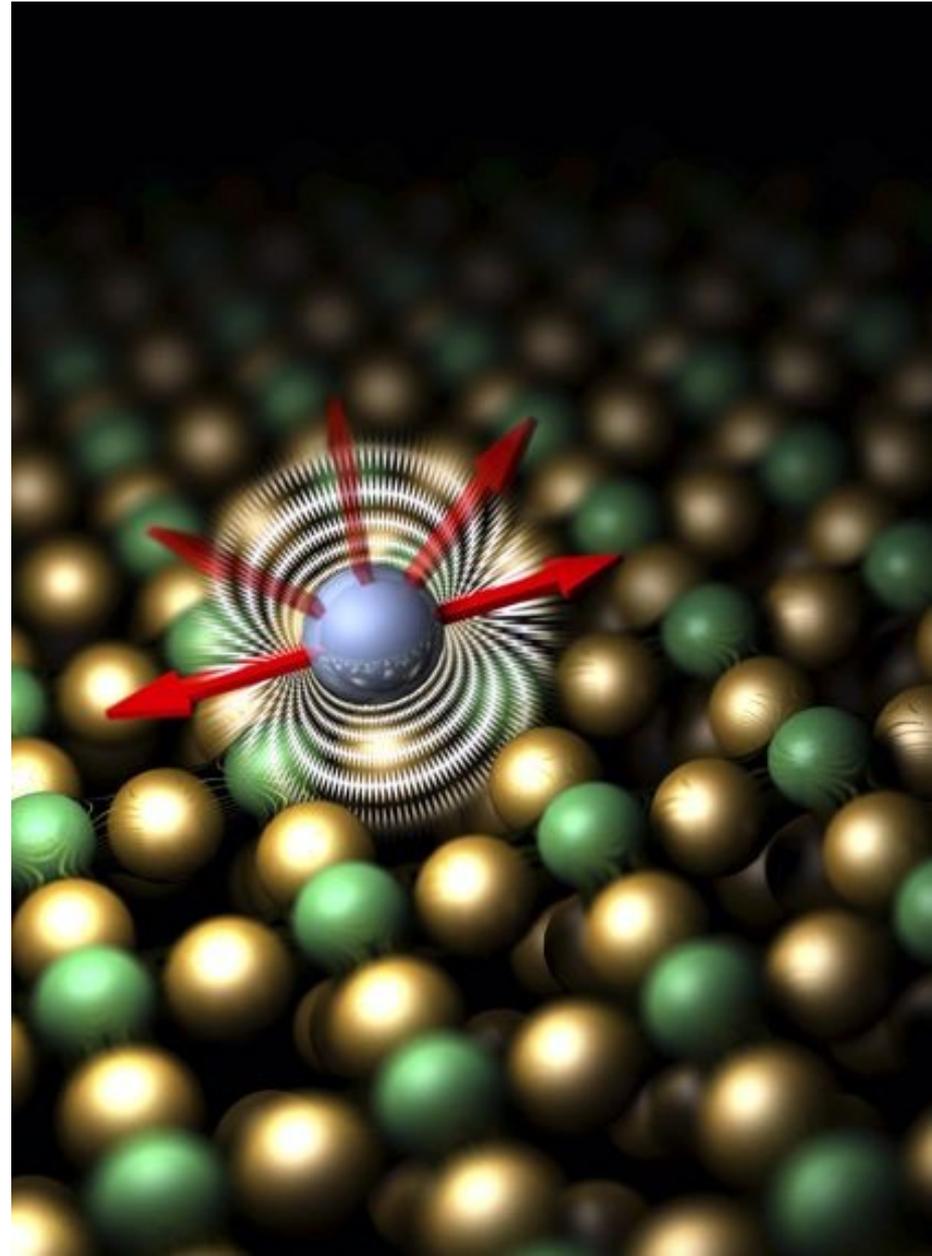


Броуновское движение

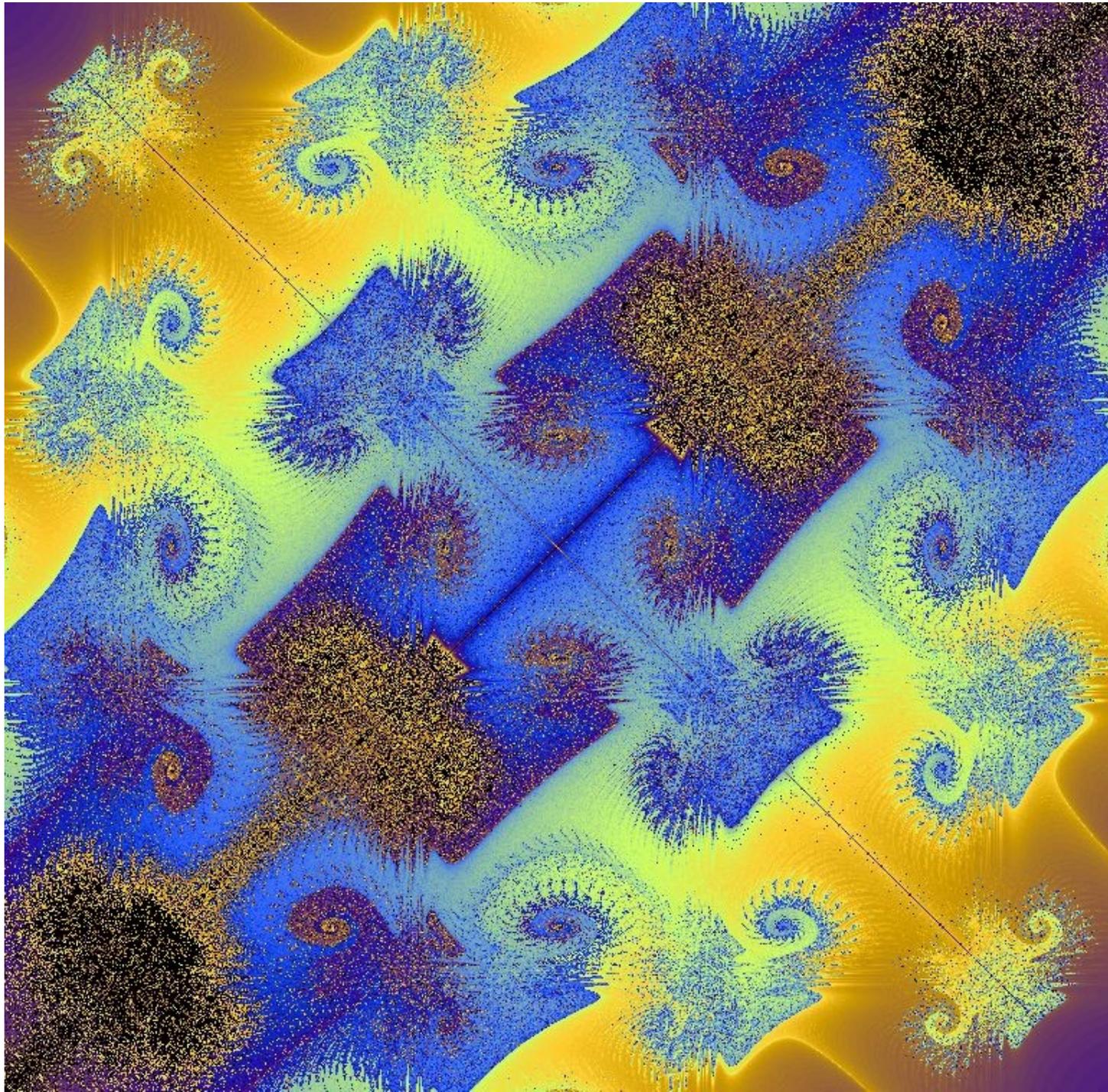


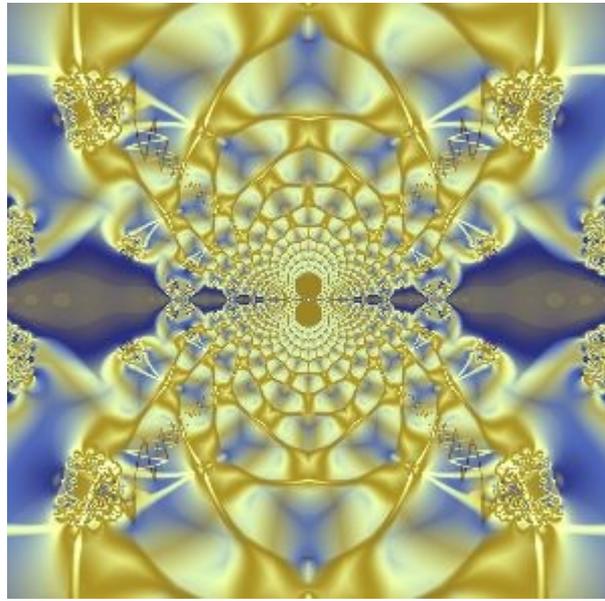
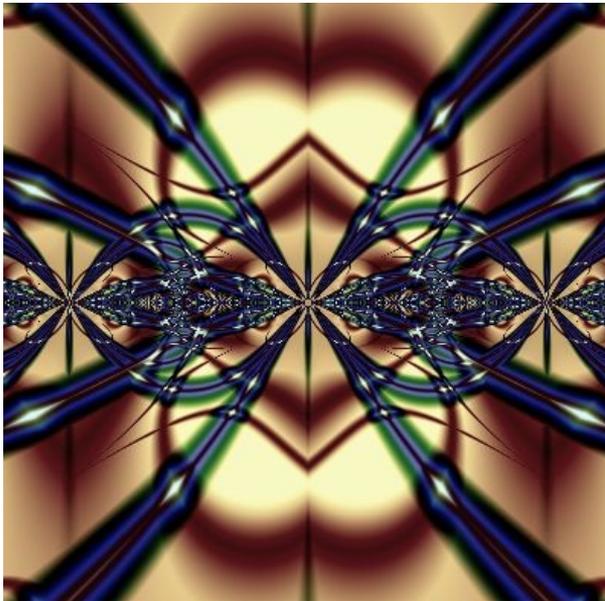
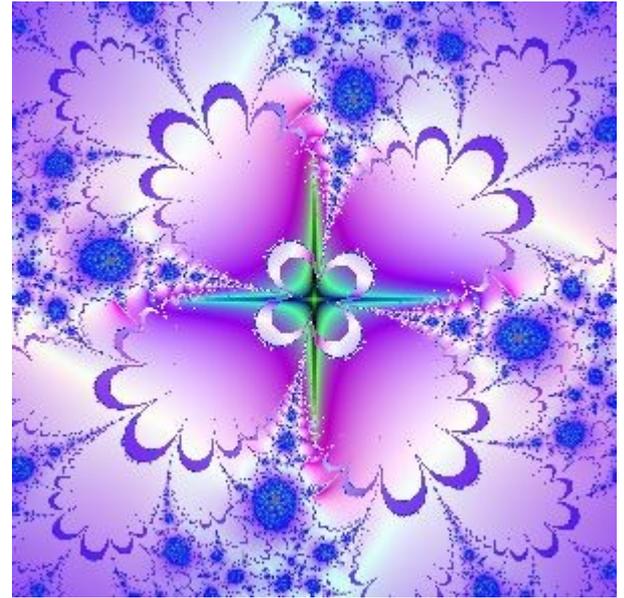
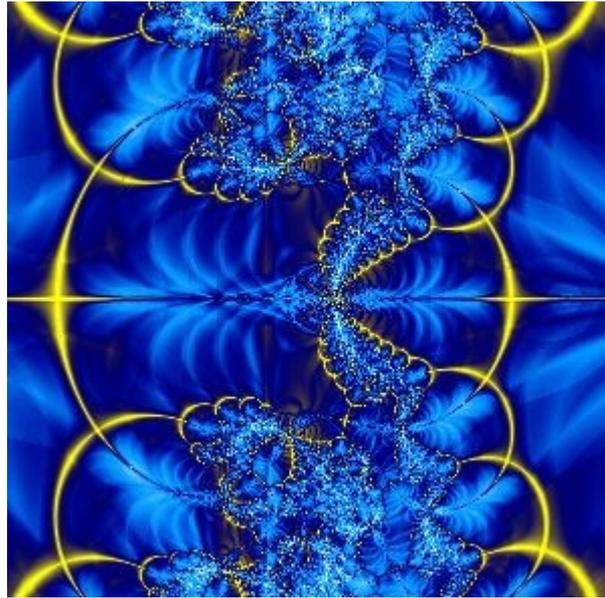
«Настоящих» фракталов в природе не бывает

- Бывают только предфракталы.
- Мешает дискретность атомов и молекул

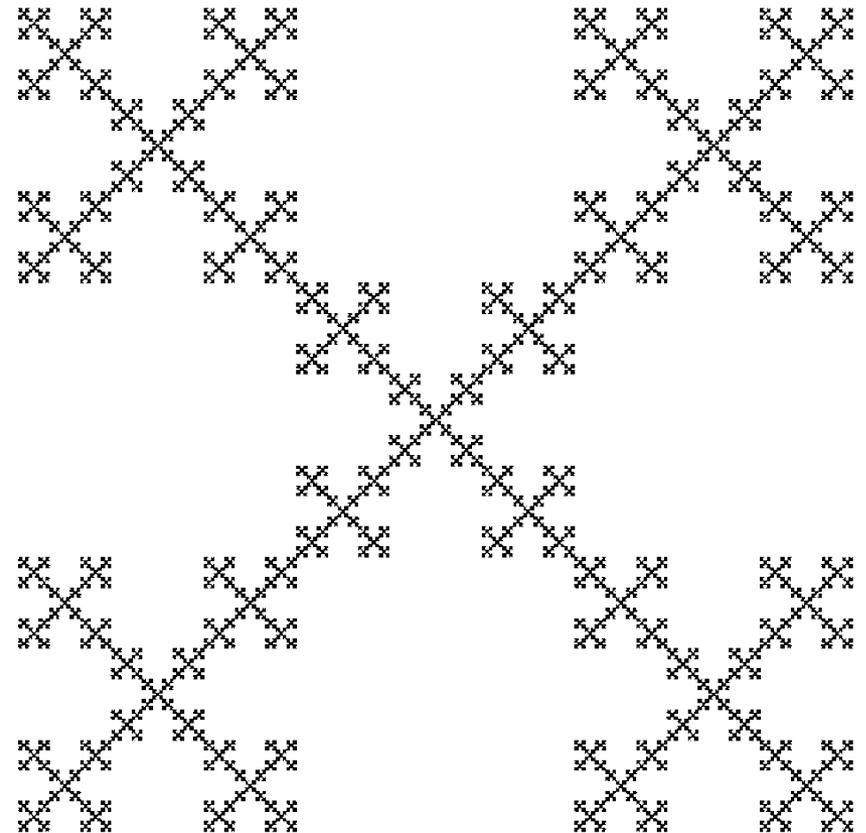
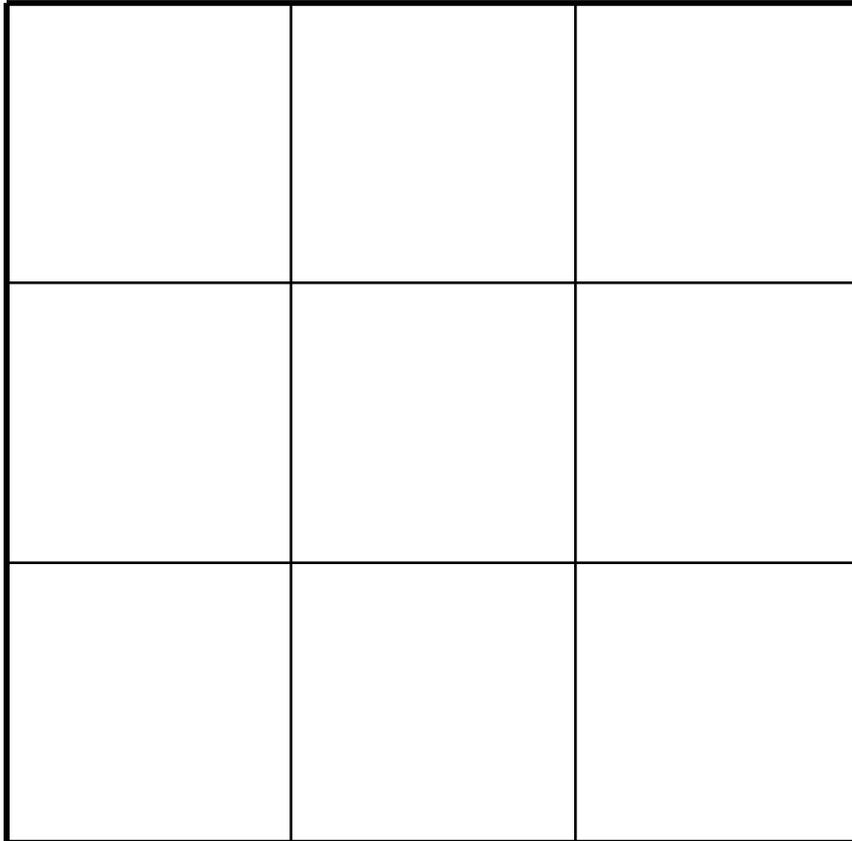




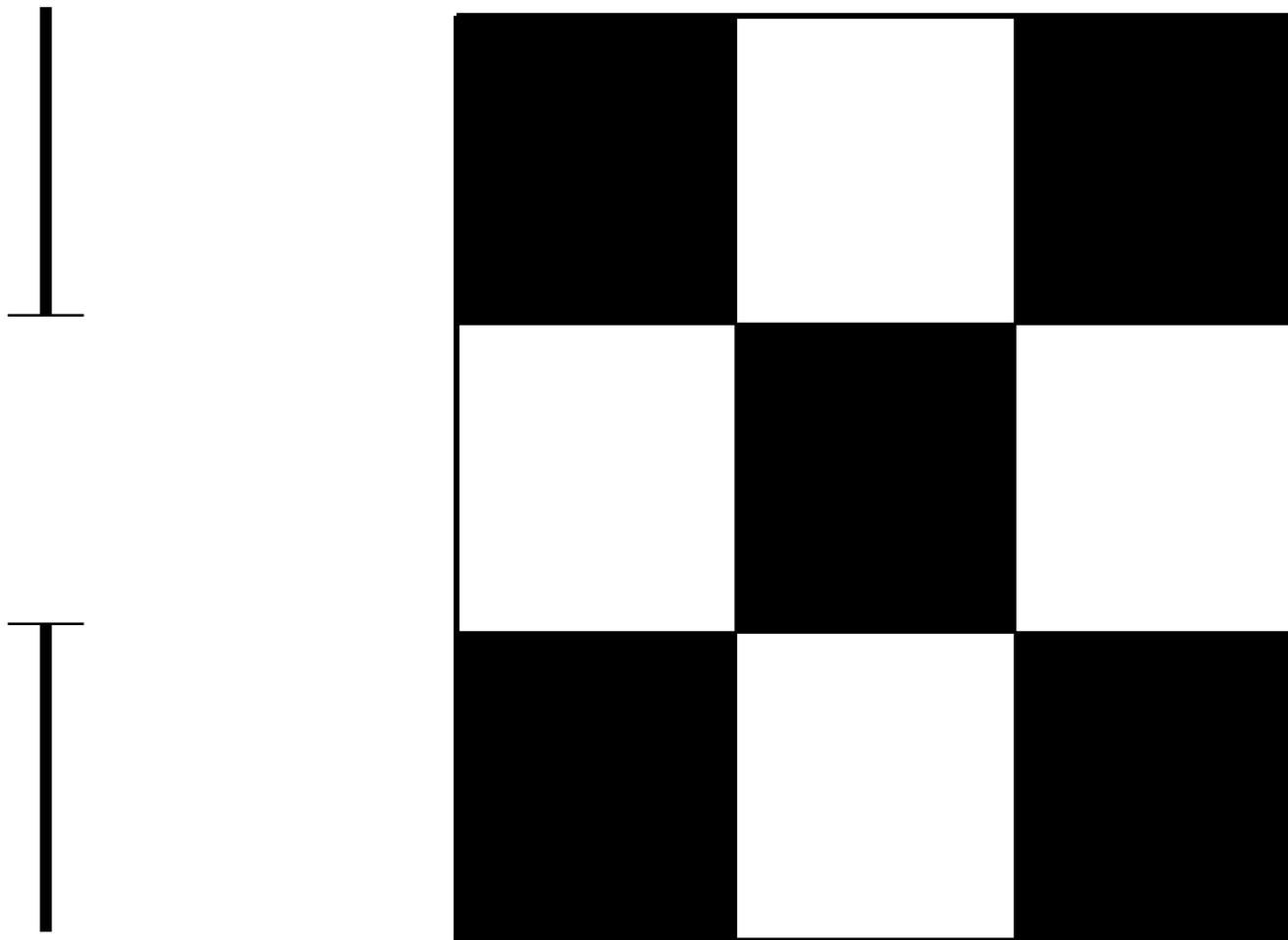




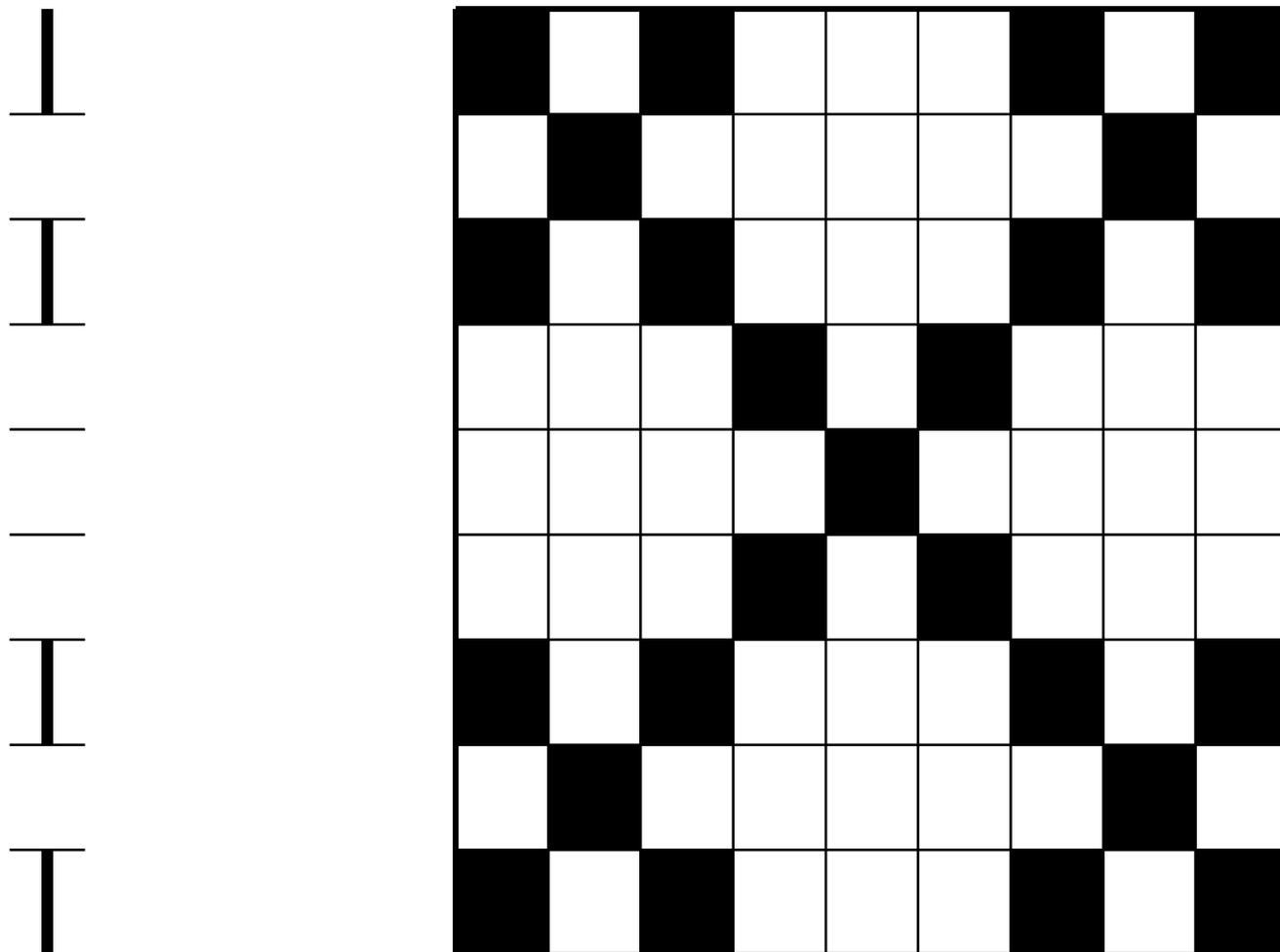
Чем фрактал отличается от «нормальной» фигуры?



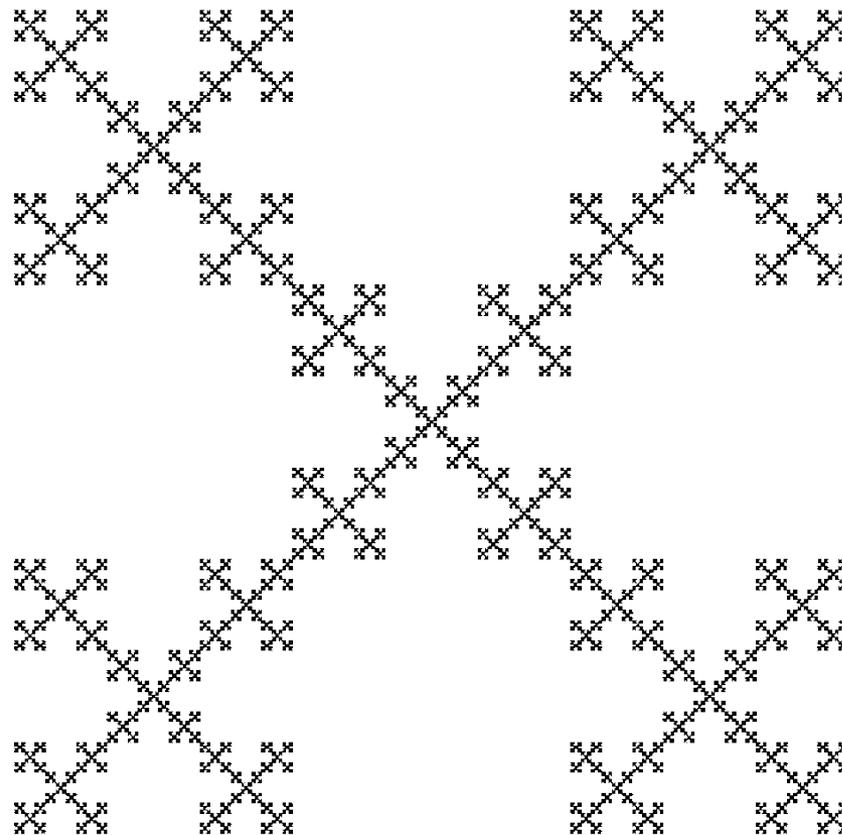
Первый шаг...



Второй шаг...



Канторово множество и ковёр Серпинского



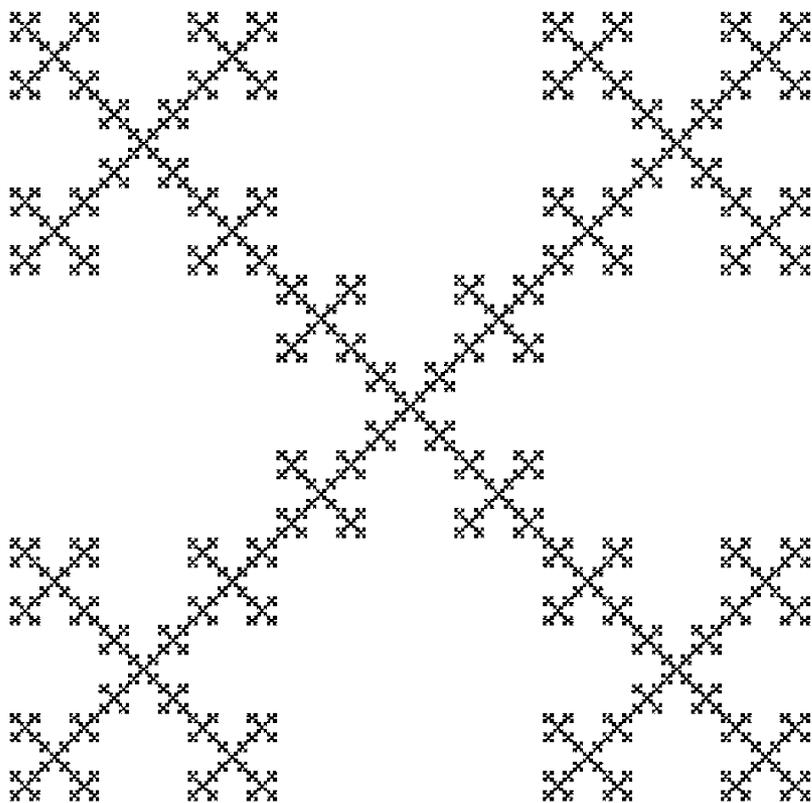
Размерность канторова множества

- Канторово множество состоит из 2 одинаковых кусков в 3 раза меньших размеров.
- Вычисляем размерность D

$$2 = 3^D$$

$$D = \log_3 2 = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,63$$

Размерность ковра Серпинского

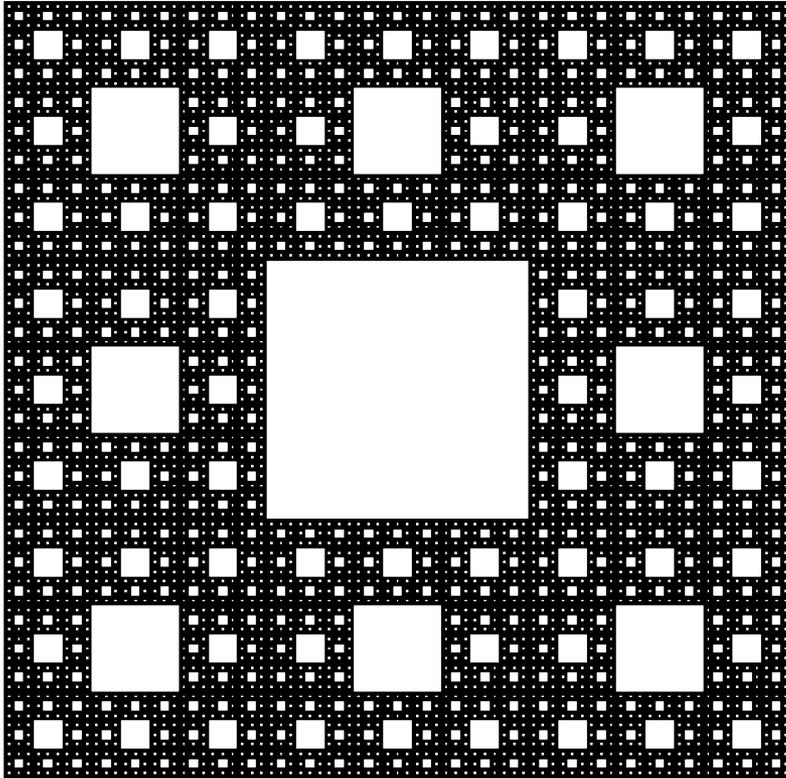


- Ковёр Серпинского состоит из 5 одинаковых кусков в 3 раза меньших размеров.
- Вычисляем размерность D

$$5 = 3^D$$

$$D = \log_3 5 = \frac{\ln 5}{\ln 3} \approx 1,465$$

Другая версия ковра Серпинского



- Такой ковер Серпинского состоит из 8 одинаковых кусков в 3 раза меньших размеров.
- Вычисляем размерность D

$$8 = 3^D$$

$$D = \log_3 8 = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1,89$$

Процесс построения

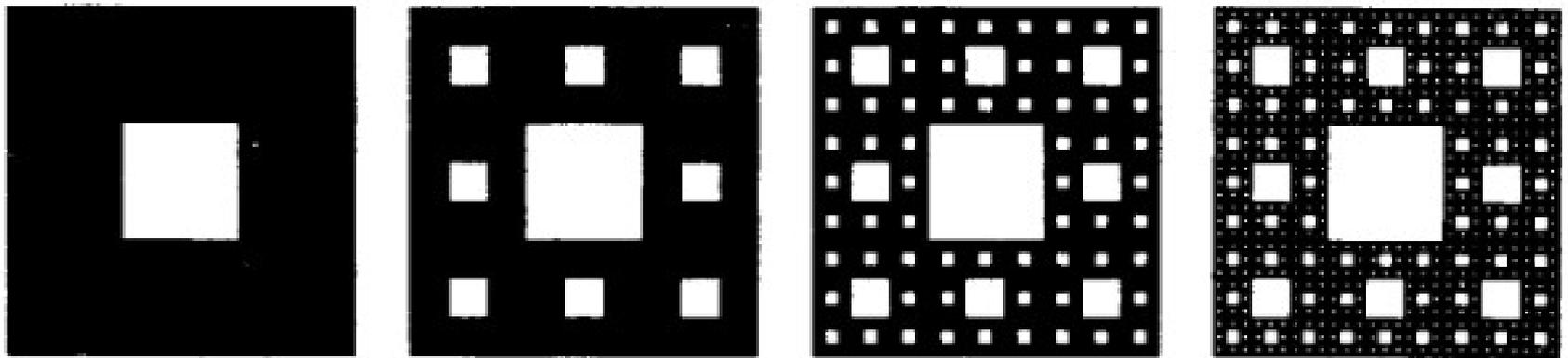
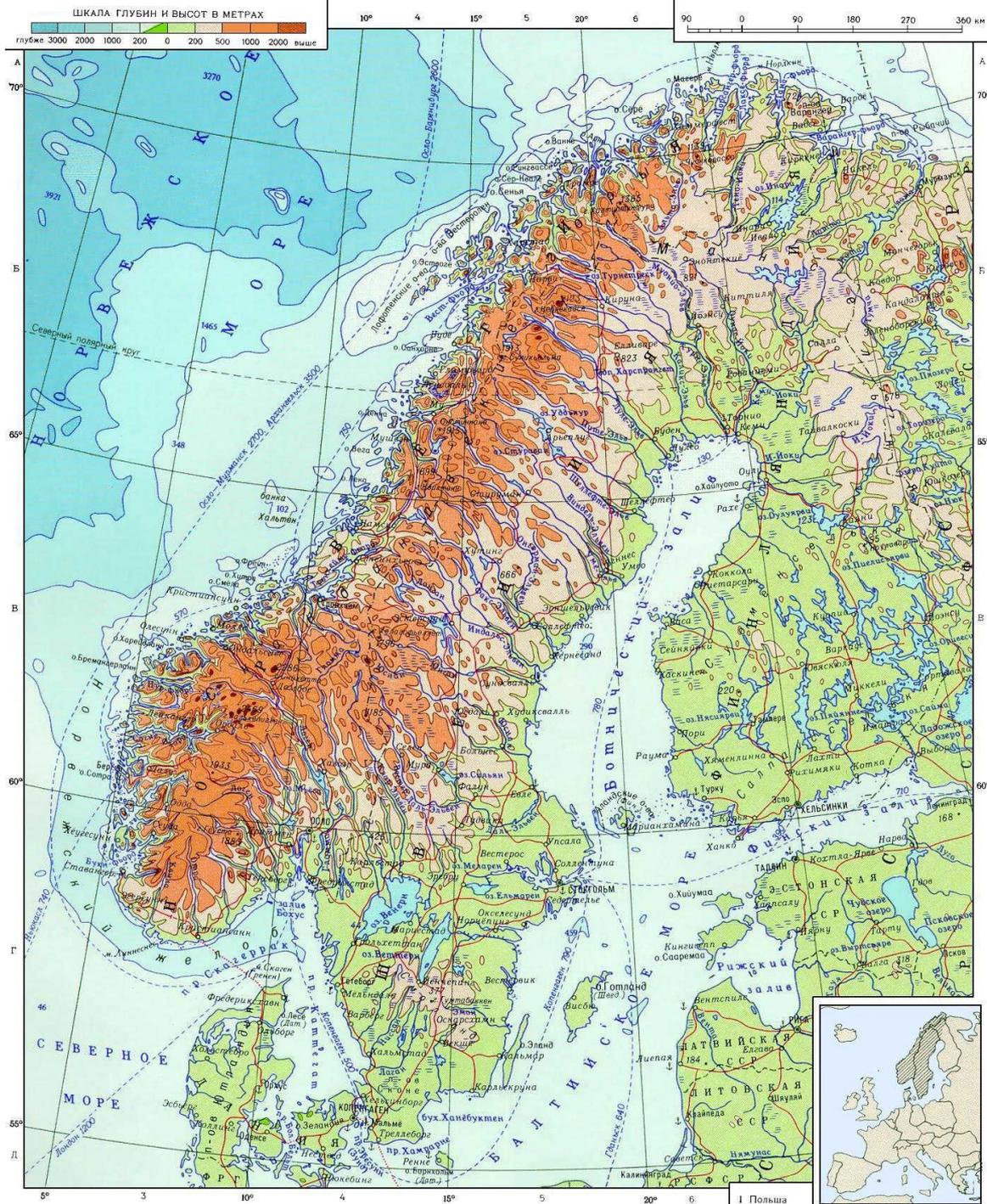


РИС. 2.16. Построение ковра Серпинского. Затравка -- квадрат, а образующий элемент (*слева*) состоит из $N = 8$ квадратов, полученных из затравки преобразованием подобия (сжатием) с коэффициентом подобия $r = 1/3$. *Справа*: четвертый этап построения; размерность подобия $D = \ln 8 / \ln 3 = 1,89 \dots$

Одно из определений фрактала

- Фрактал – фигура с дробной размерностью

Норвегия
имеет
береговую
линию сильно
изрезанную
фиордами



Береговая линия Норвегии

$$D \approx 1,52$$

Длина береговой
линии описывается
приближенной
формулой:

$$L(\delta) = a \cdot \delta^{1-D}$$

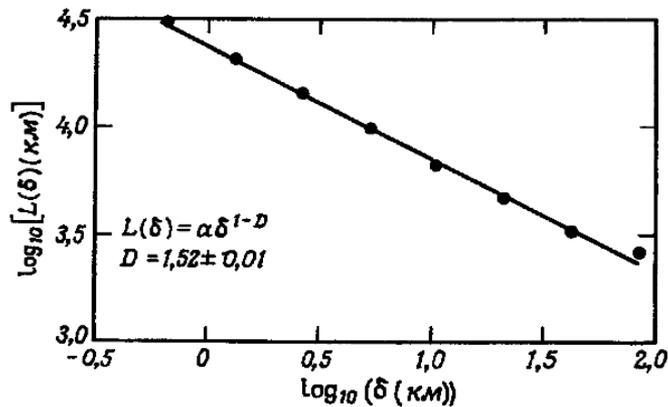


РИС. 2.2. Измеренная длина береговой линии, изображенной на рис. 2.1, как функция шага δ (км) — длины стороны $\delta \times \delta$ квадратных ячеек, образующих покрытие береговой линии на карте. Прямая на графике в дважды логарифмическом масштабе соответствует зависимости $L(\delta) = a \cdot \delta^{1-D}$, где $D \approx 1,52$.



РИС. 2.1. Побережье южной части Норвегии. Береговая линия перечерчена из географического атласа и представлена в цифровом виде с помощью раstra, состоящего примерно из 1800×1200 ячеек. Изображенная сверху квадратная решетка имеет шаг $\delta \sim 50$ км.

Клеточная размерность

- Понятие размерности множества можно определить разными способами (и получать при этом разные значения размерности).

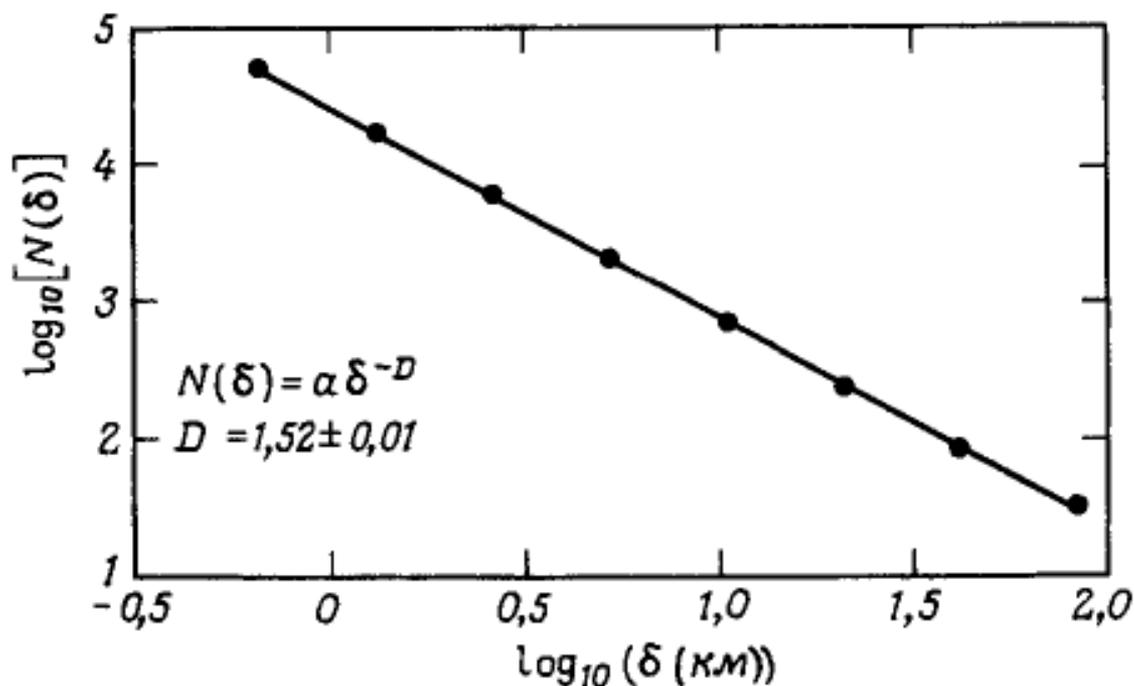
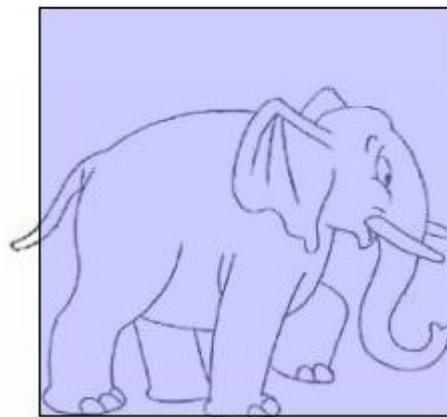
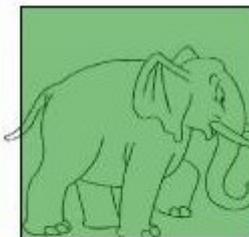
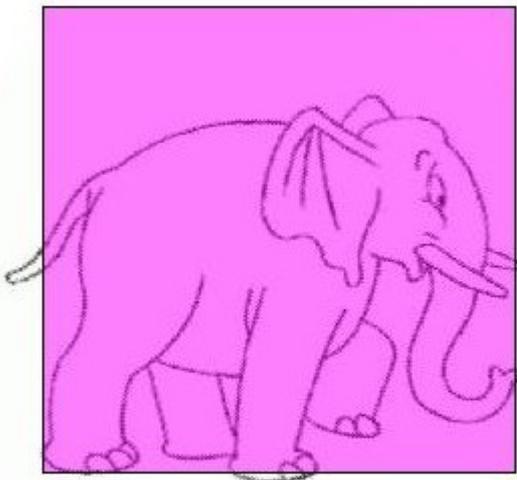
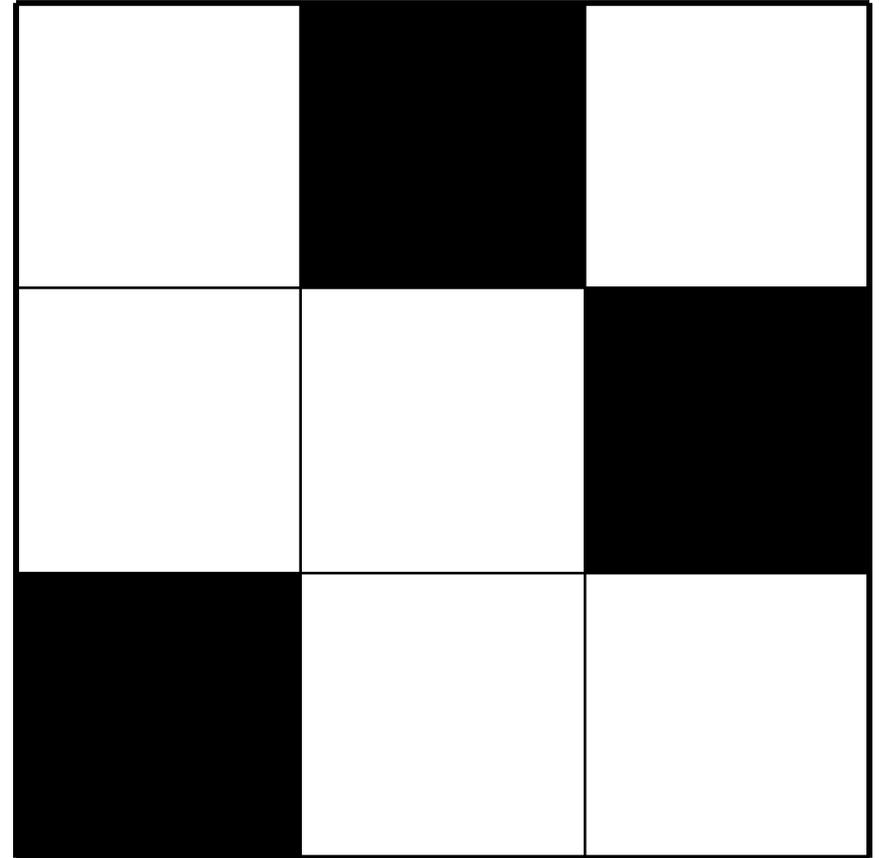


РИС. 2.7. Число ячеек размером $\delta \times \delta$, необходимых для покрытия береговой линии, изображенной на рис. 2.1 как функция шага δ (км). Прямая в дважды логарифмических координатах соответствует зависимости $N(\delta) = \alpha \delta^{-D}$ и построена по результатам измерений. Фрактальная размерность $D \approx 1,52$.

Доля слона в квадрате
одинакова, т.к. слон гладкий



Фрактал с размерностью 1



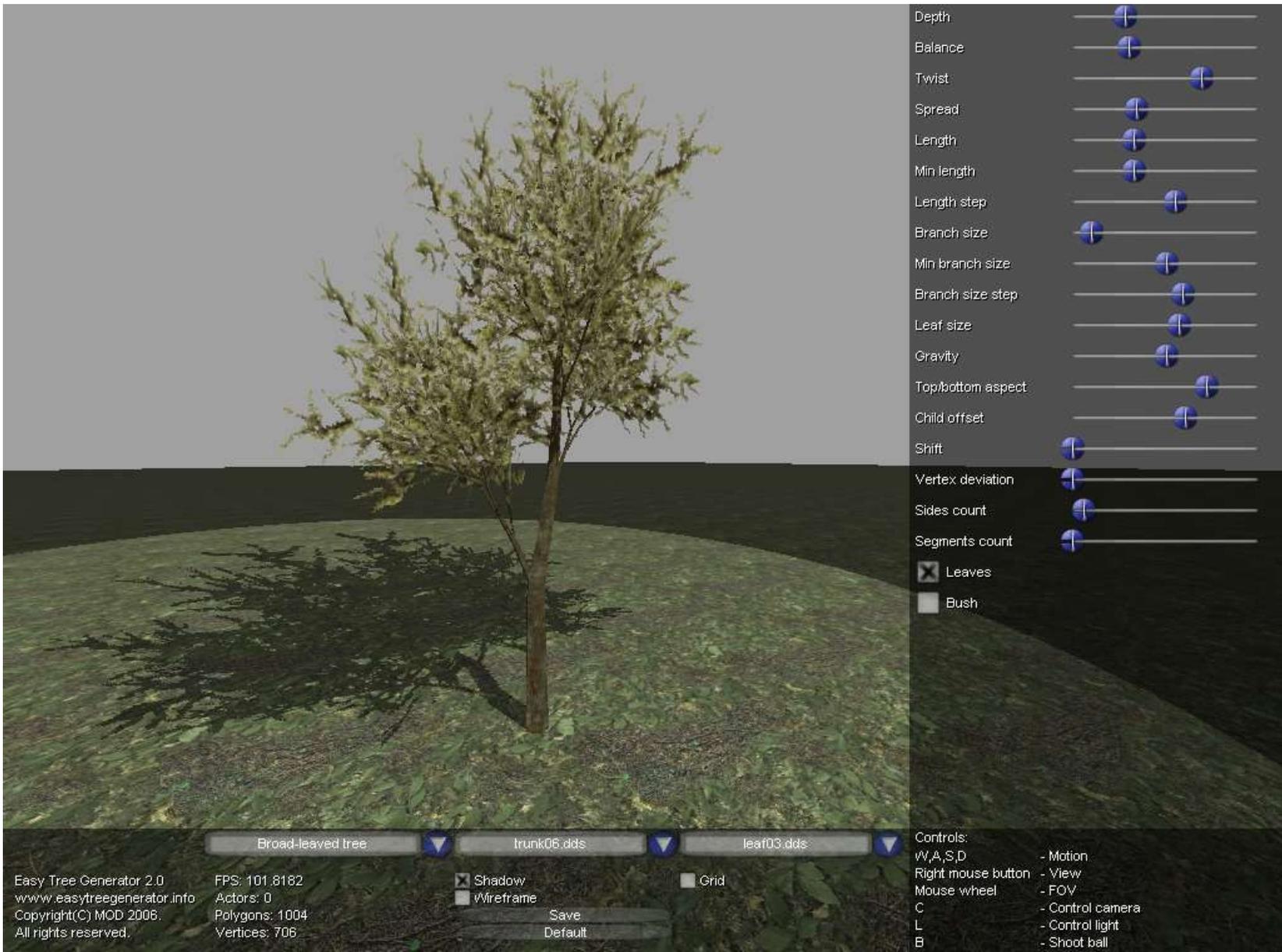


Как зависит площадь листвы от размера дерева?



<http://www.easytreegenerator.info/>

Дерево - предфрактал



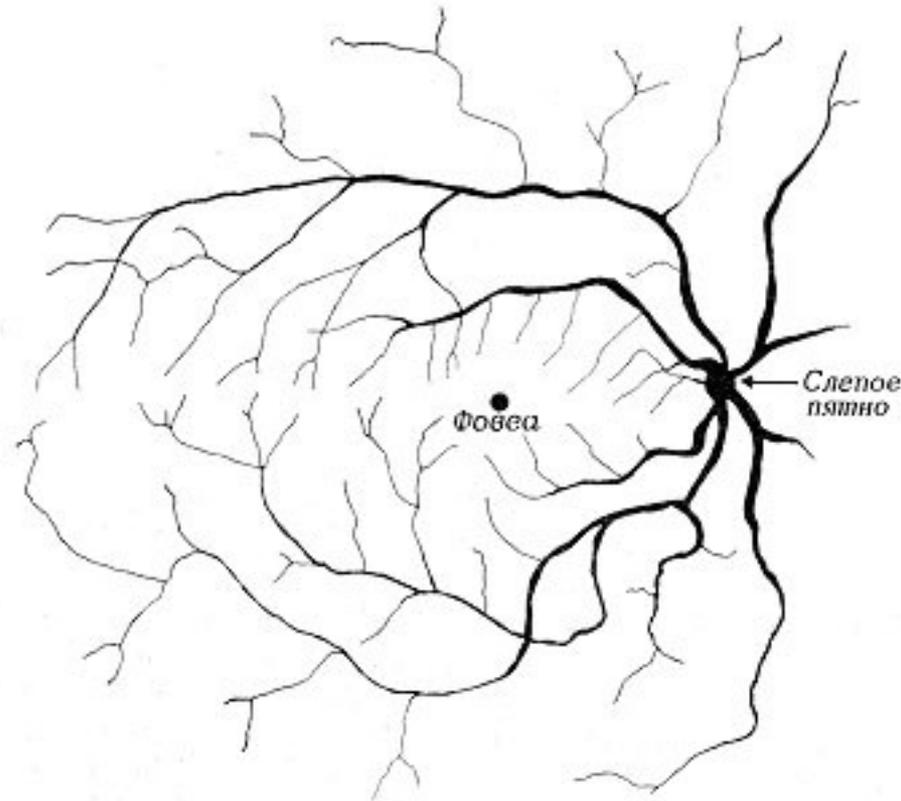
The image shows a 3D rendered tree in a virtual environment. The tree is a broad-leaved tree with a brown trunk and green foliage. It is positioned on a green, grassy ground. The background is a simple gray sky and a dark horizon line.

On the right side of the image, there is a control panel with various sliders and checkboxes. The sliders are labeled with parameters such as Depth, Balance, Twist, Spread, Length, Min length, Length step, Branch size, Min branch size, Branch size step, Leaf size, Gravity, Top/bottom aspect, Child offset, Shift, Vertex deviation, Sides count, and Segments count. Each slider has a blue knob and a horizontal line indicating the range. Below the sliders are two checkboxes: "Leaves" (checked) and "Bush" (unchecked).

At the bottom of the image, there is a status bar with several elements. On the left, it says "Easy Tree Generator 2.0", "www.easytreegenerator.info", "Copyright(C) MOD 2006.", and "All rights reserved.". In the center, it displays "FPS: 101.8182", "Actors: 0", "Polygons: 1004", and "Vertices: 706". On the right, there are checkboxes for "Shadow" (checked), "Wireframe" (unchecked), and "Grid" (unchecked). Below these are buttons for "Save" and "Default".

At the bottom right, there is a "Controls" section with a list of keys and their functions: W,A,S,D for Motion; Right mouse button for View; Mouse wheel for FOV; C for Control camera; L for Control light; and B for Shoot ball.

"Дерево Пуркиньюе" - кровеносные сосуды на дне глазного яблока



Пуркинье дерево (англ. *Purkinje figures*)

- - зрительно воспринимаемая при особых условиях сеть кровеносных сосудов собственного глаза (сетчатки глаза). Обычно мы не воспринимаем эти сосуды, хотя на свету в силу устройства сетчатки (ее инвертированности у позвоночных) сосуды отбрасывают на поверхность *рецепторов* постоянную тень, которая вполне могла бы достаточно четко восприниматься и мешать восприятию внешних объектов. Однако вследствие т. н. локальной адаптации (см. *Адаптация сенсорная*) мы не воспринимаем объект, изображение которого строго неподвижно относительно рецепторной поверхности. Этот факт экспериментально демонстрируется феноменом **пустого поля** (см. *Движения глаз*) в условиях, когда исследователи добивались искусственной стабилизации изображений на сетчатке (R. W. Ditchburn, V. L. Ginsberg; А. Л. Ярбус; В. П. Зинченко, Н. Ю. Вергилес; и др.). Дестабилизацию тени кровеносных сосудов и тем самым видение П. д. можно вызвать, если в затемненной комнате освещать глаз наблюдателя сбоку или снизу колеблющимся узким пучком света. Название дано в честь выдающегося чешского физиолога Яна Пуркинье (Пуркинье, 1787-1869). См. также *Последовательные образы*. (Б. М.)

- **Литература**

- Мещеряков Б., Зинченко В. Большой психологический словарь, 3-е изд., Прайм-Еврознак, С.-Петербург, 2003
- Мещеряков Б., Зинченко В. Большой психологический словарь, 3-е изд., Прайм-Еврознак, С.-Петербург, 2003

- **Большой психологический словарь**

- http://wiki.myword.ru/index.php/Дерево_Пуркинье

колония бактерий *Bacillus subtilis*.

(фото с сайта www.igmors.u-psud.fr)



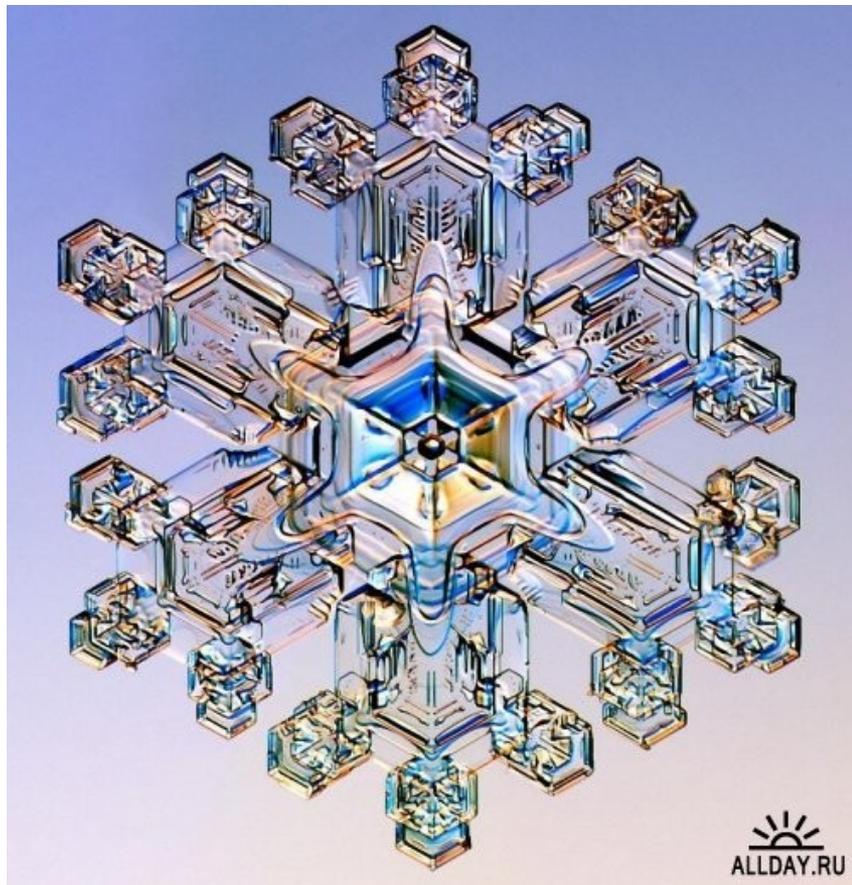
<http://zahav.elementy.ru/genbio/synopsis?artid=23>

Размеры тела и соотношения параметров у млекопитающих

(задачник И.Л.Окштейна)

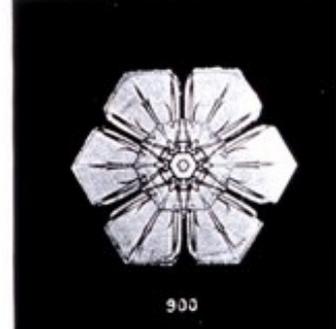
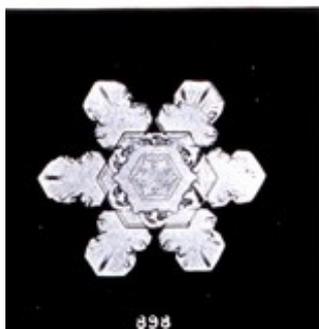
- потребление O_2 (л/ч) $0,696 m^{3/4}$ (*l*)
- потребление O_2 (л O_2 /кг • ч) $0,696 m^{-1/4}$ (*i*)
- вентиляция легких (л/ч) $20,0 m^{3/4}$
- объем легких (л) $0,063 m^{1,02}$
- дыхательный объем (л) $0,0062 m^{1,01}$
- объем крови (л) $0,055 m^{0,99}$
- вес сердца (кг) $0,0058 m^{0,99} = 0,006 m$
- частота дыхания (/мин) $53,5 m^{-0,26}$
- частота сокращений сердца (/мин) $241 m^{-0,25}$
- масса почек (кг) $0,021 m^{0,85}$
- масса печени (кг) $0,082 m^{0,87}$
- площадь поверхности тела (м²) $S(m) = 0,1 m^{2/3}$

Снежинки

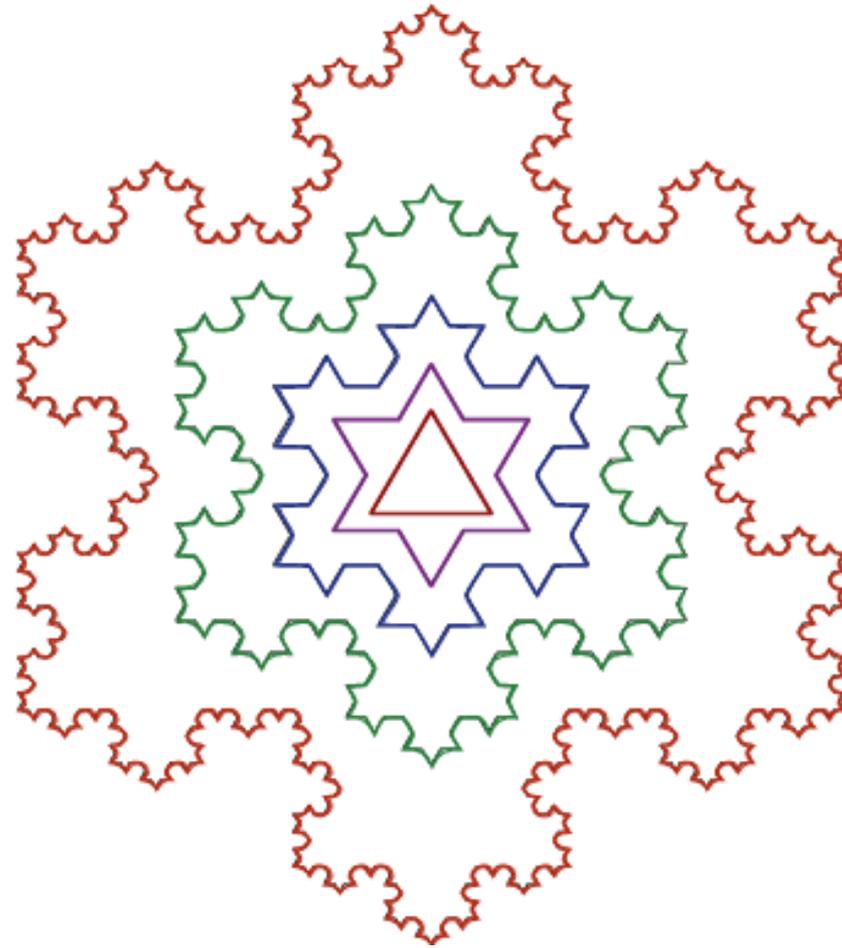


Ещё снежинки...





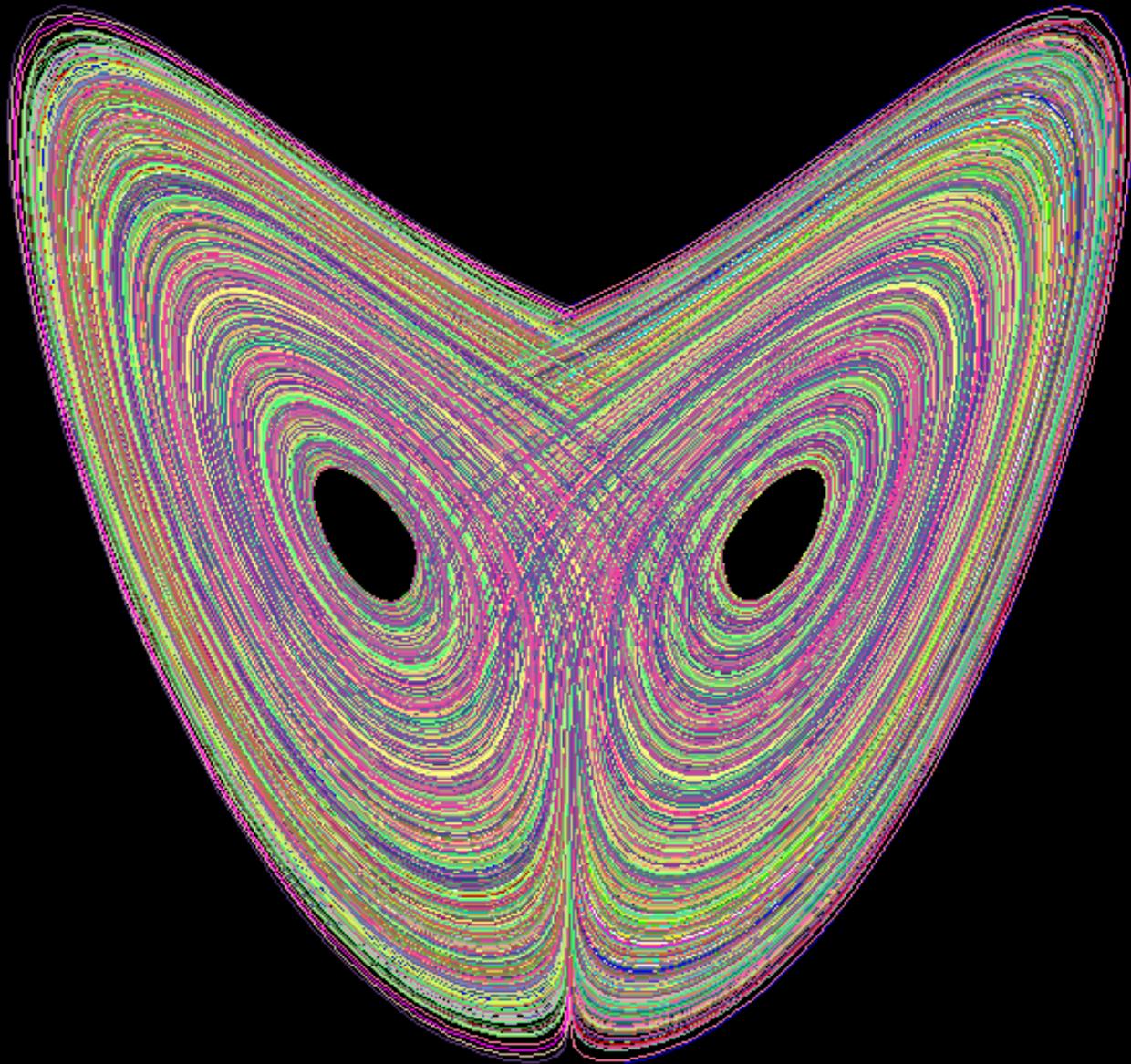
Снежинка Коха



Фрактальной может быть и динамика

- Неустойчивая динамика – малая ошибка влечёт большие отклонения
- Пример: погода.

Аттрактор Лоренца



Аттрактор Лоренца

Предельная траектория в 3-мерном пространстве (спроецирована на плоскость рисунка)

$$z(0) = y(0) = z(0) = 1;$$

$$x(n+1) = x(n) + a*[-x(n) + y(n)]*dt$$

$$y(n+1) = y(n) + [b*x(n) - y(n) - z(n)*x(n)]*dt$$

$$z(n+1) = z(n) + [-c*z(n) + x(n)*y(n)]*dt$$

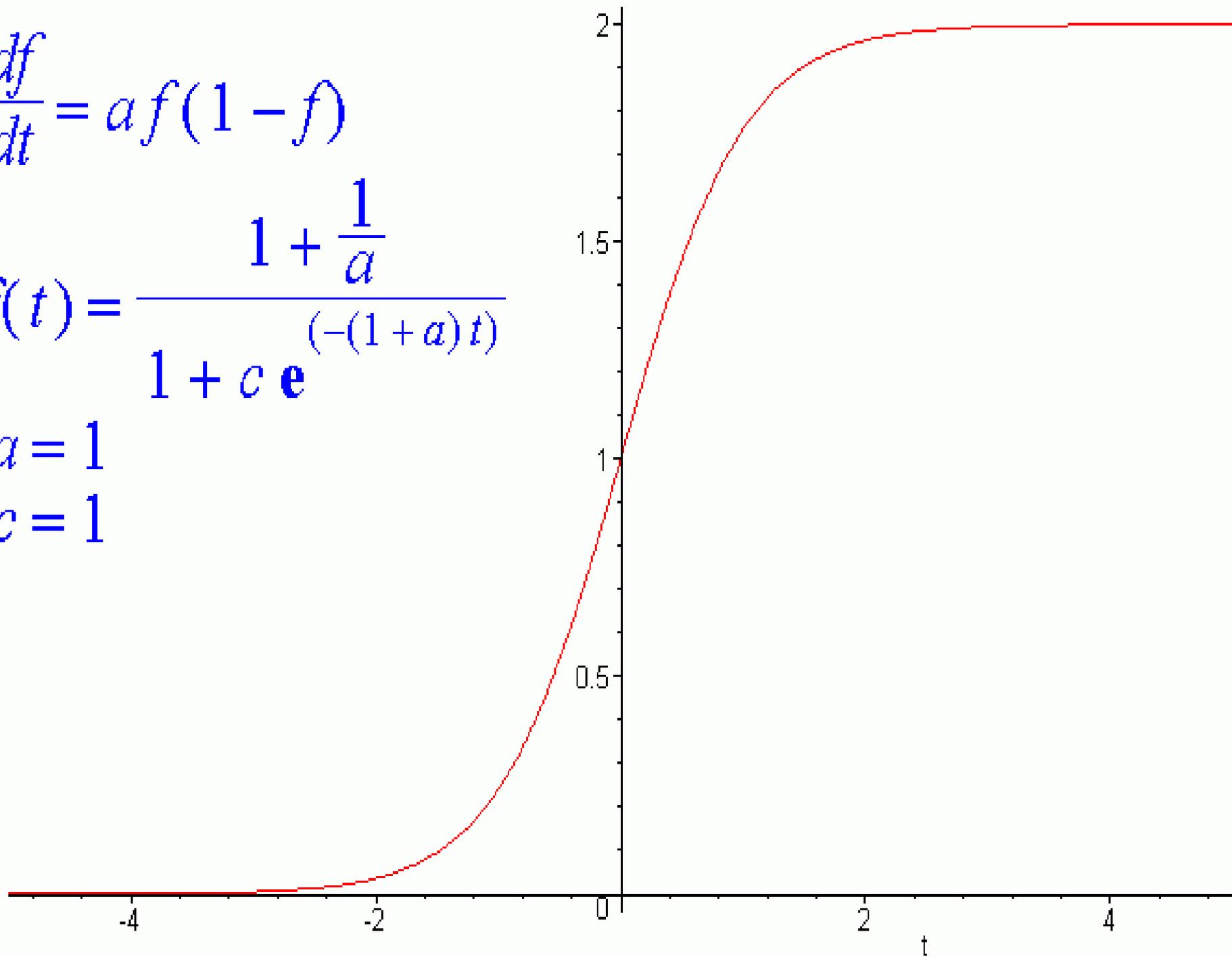
Параметры: dt, a, b и c.

$$\frac{df}{dt} = af(1-f)$$

$$f(t) = \frac{1 + \frac{1}{a}}{1 + c e^{-(1+a)t}}$$

$$a = 1$$

$$c = 1$$



$$\frac{df}{dt} = af(1-f)$$

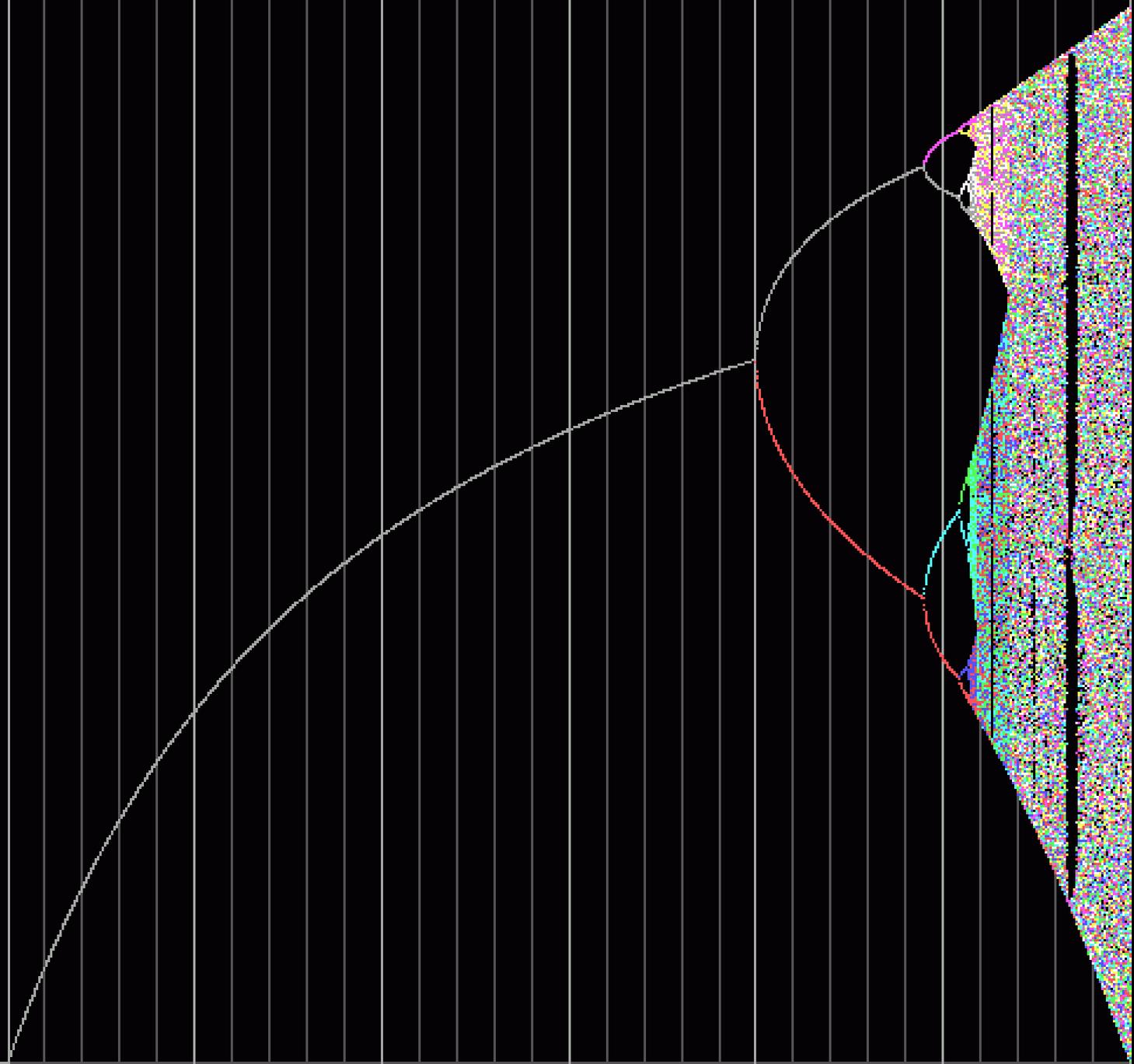
$$f(t) = \frac{1 + \frac{1}{a}}{1 + ce^{-(1+a)t}}$$

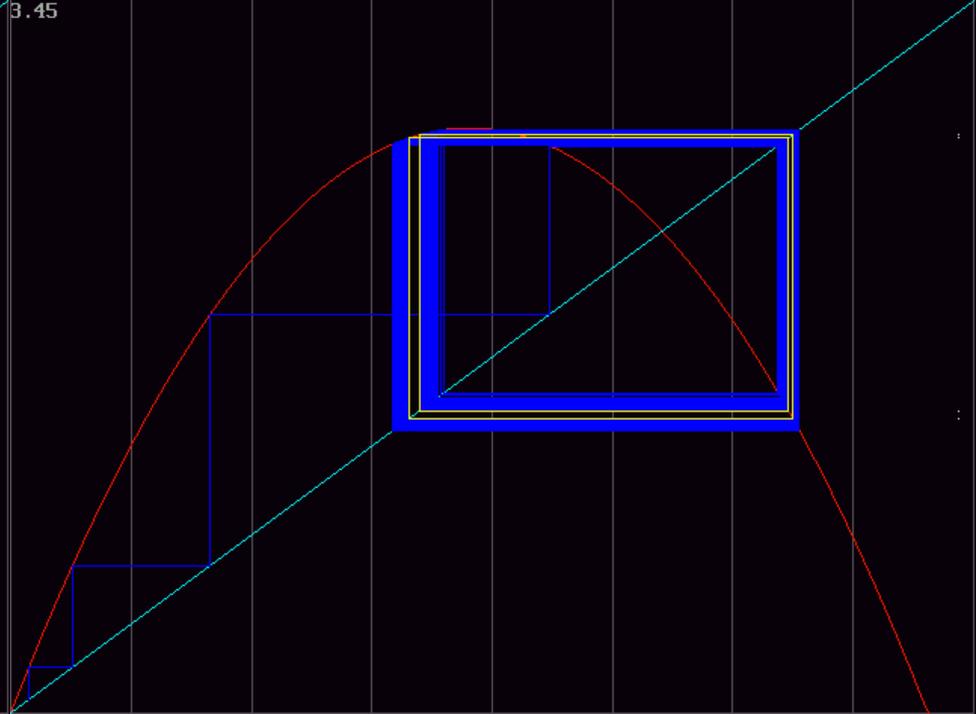
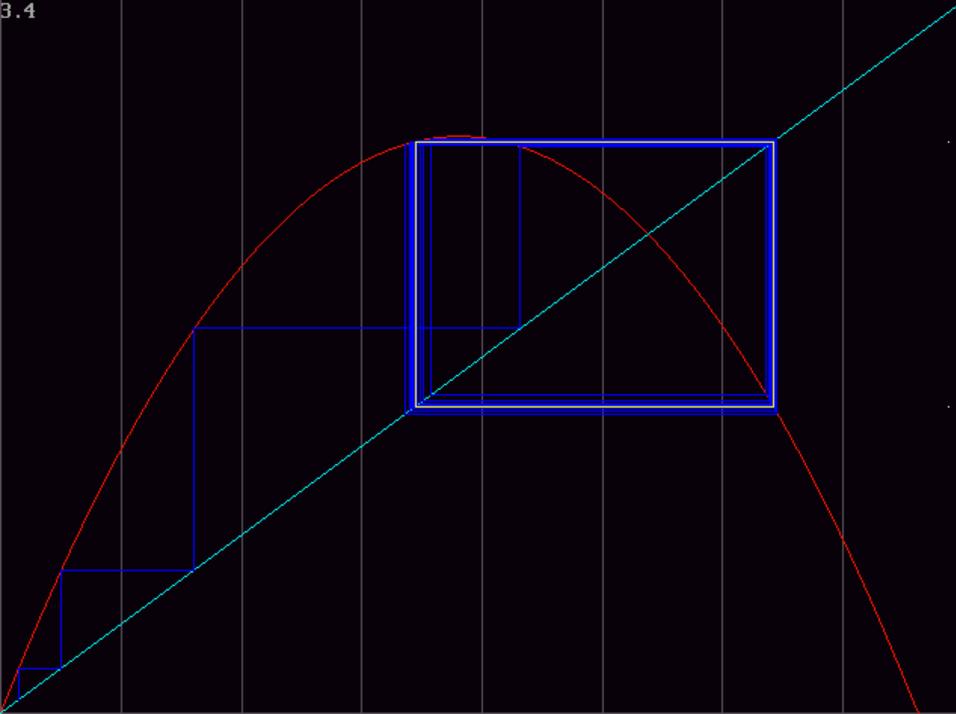
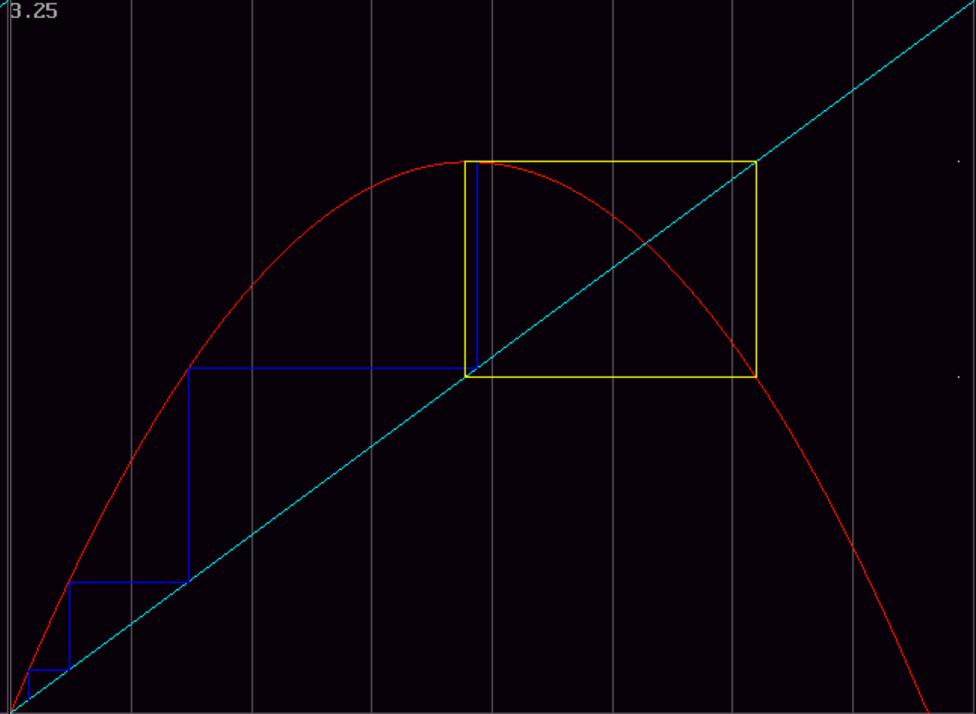
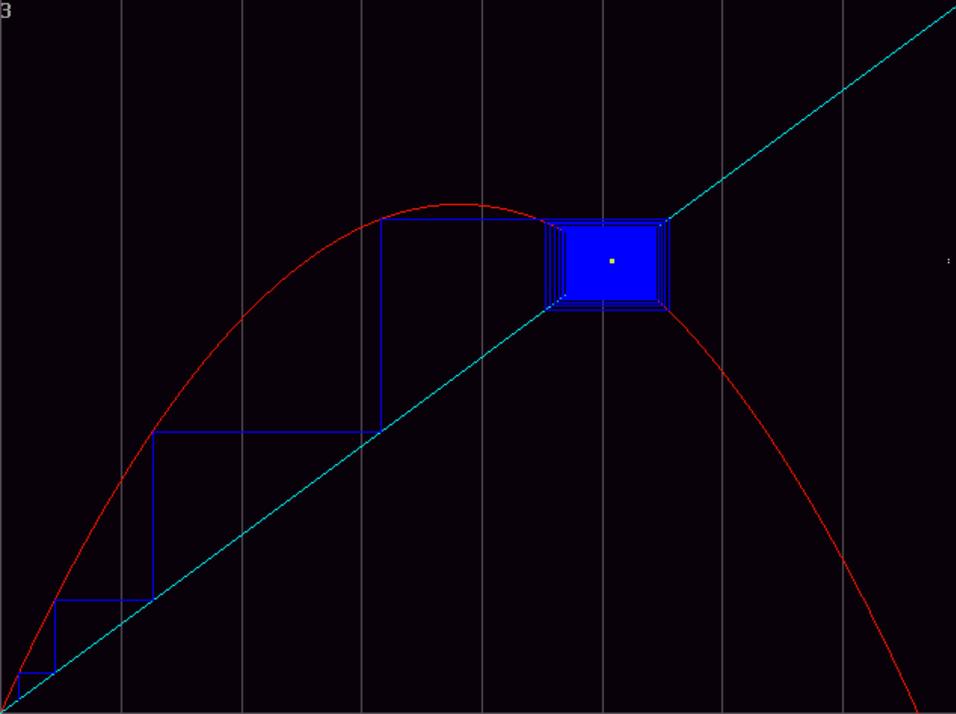
$$\begin{aligned} f_{n+1} &= f_n + af_n(1-f_n) = \\ &= (1+a)f_n - af_n^2 \end{aligned}$$

$$g = \frac{1+a}{a} f$$

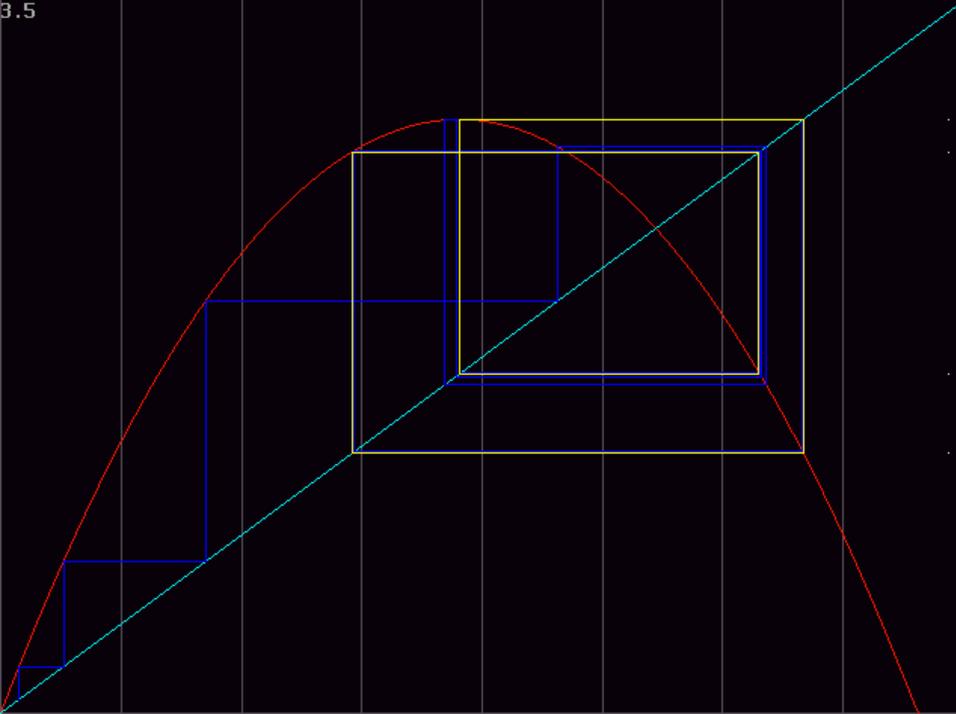
$$r = 1+a$$

$$\begin{aligned} g_{n+1} &= rg_n(1-g_n) = \\ &= rg_n - rg_n^2 \end{aligned}$$

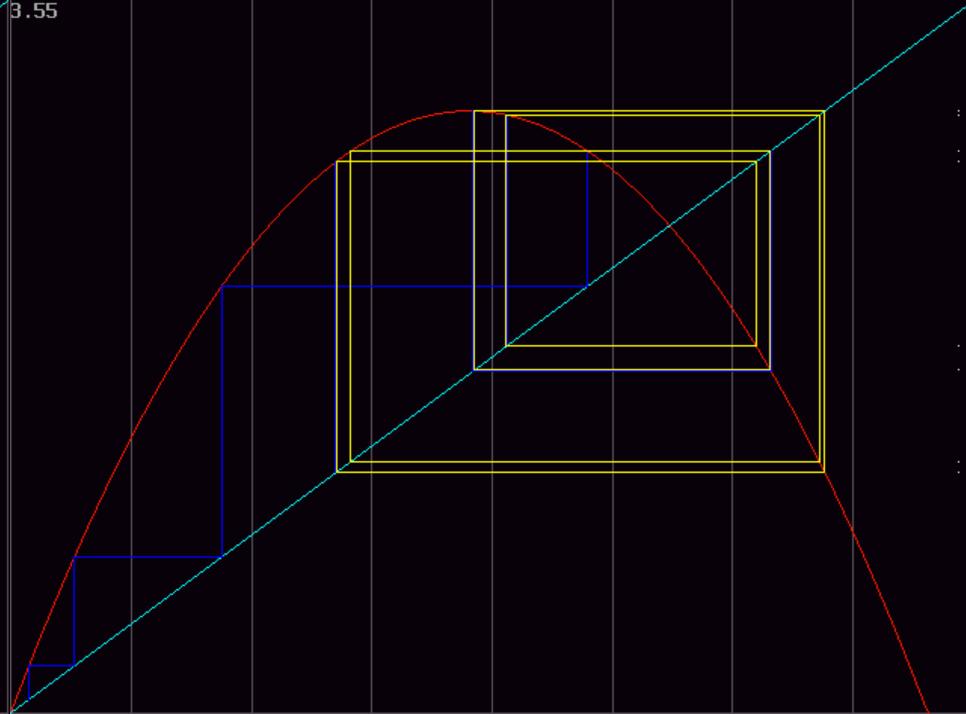




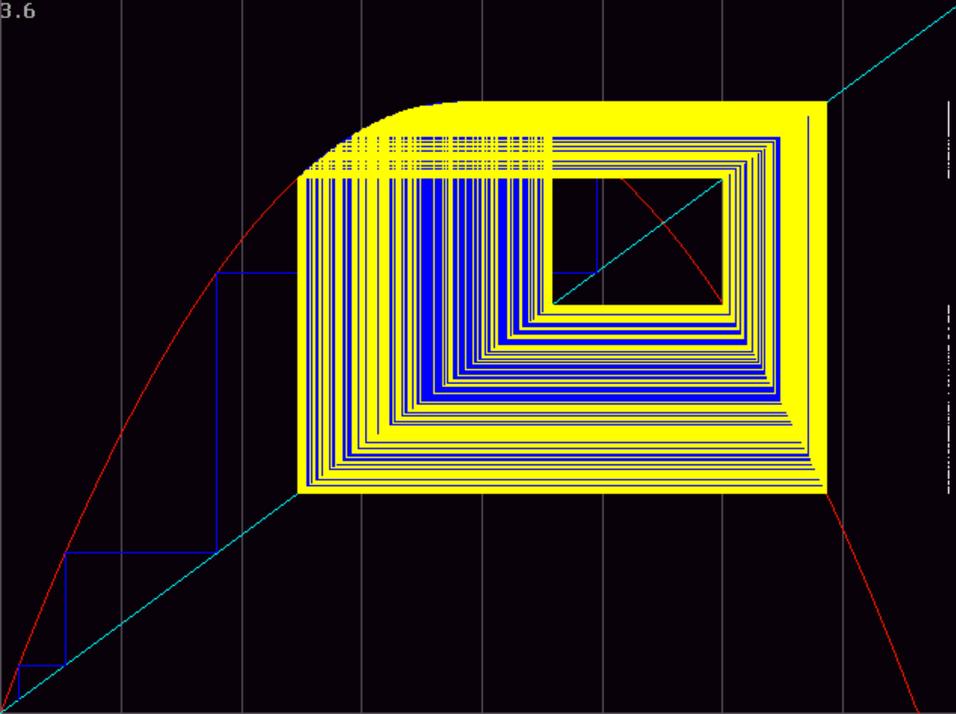
3.5



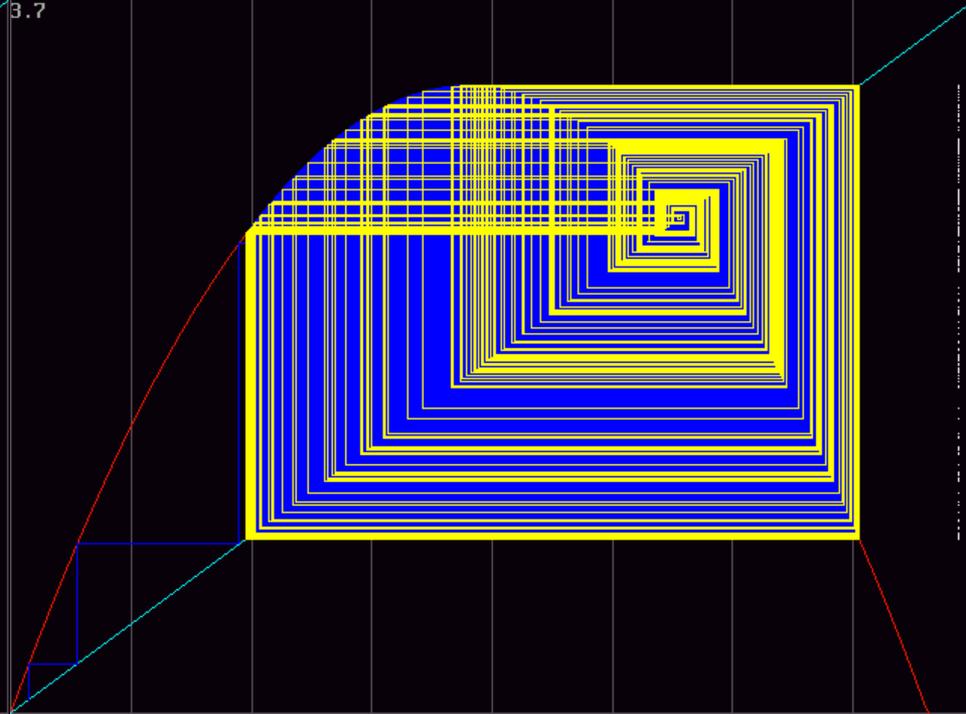
3.55



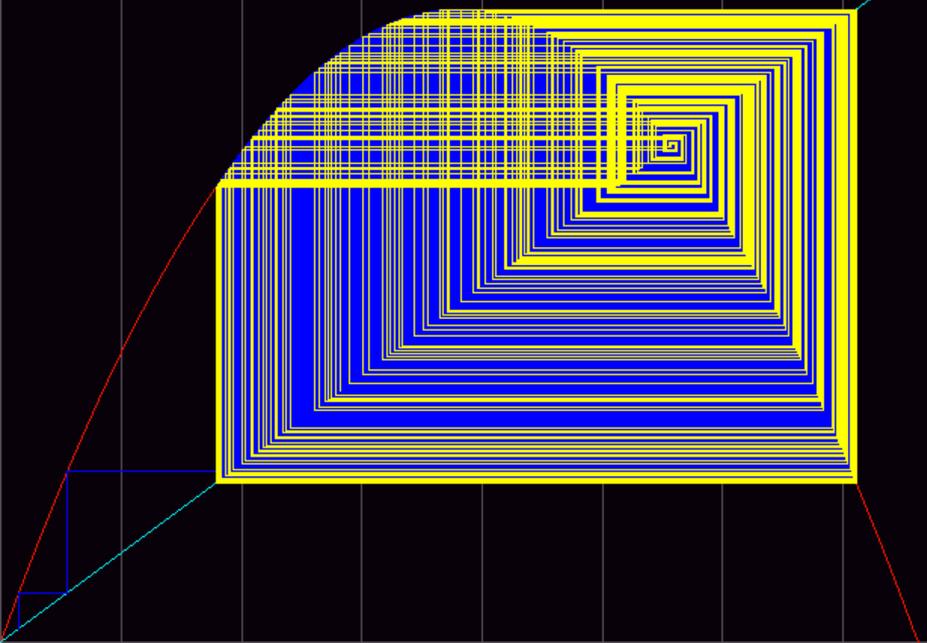
3.6



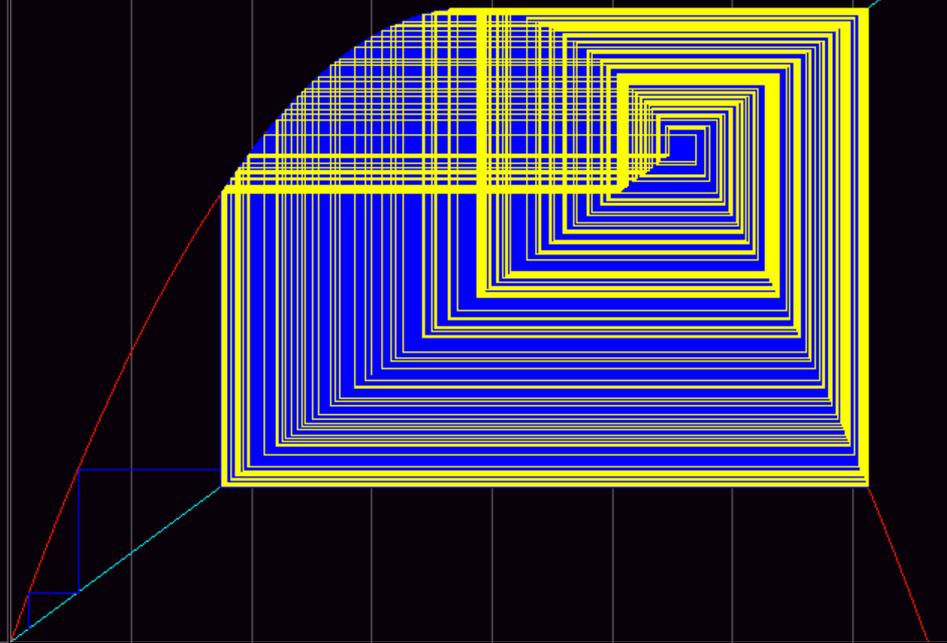
3.7



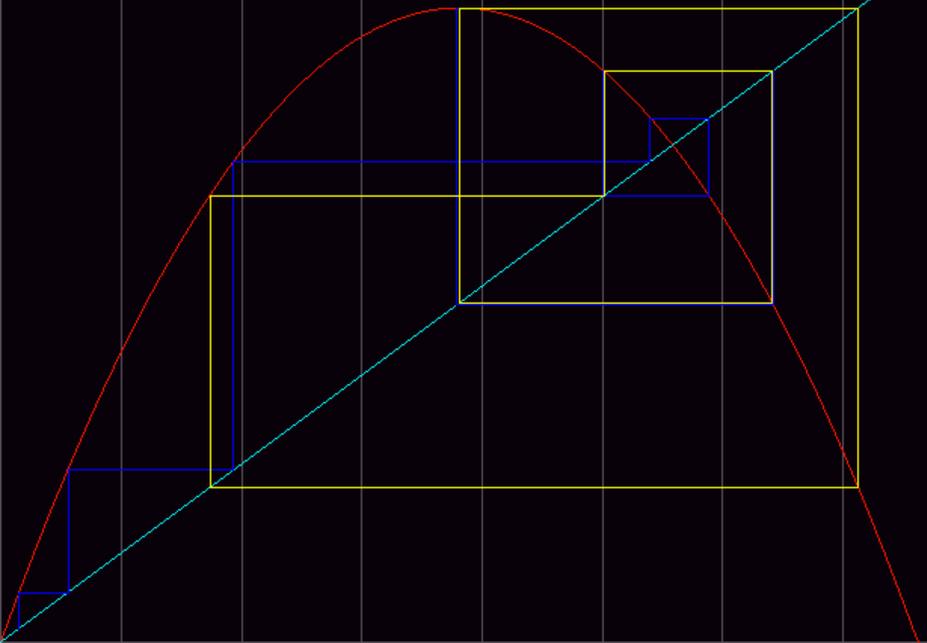
B.73



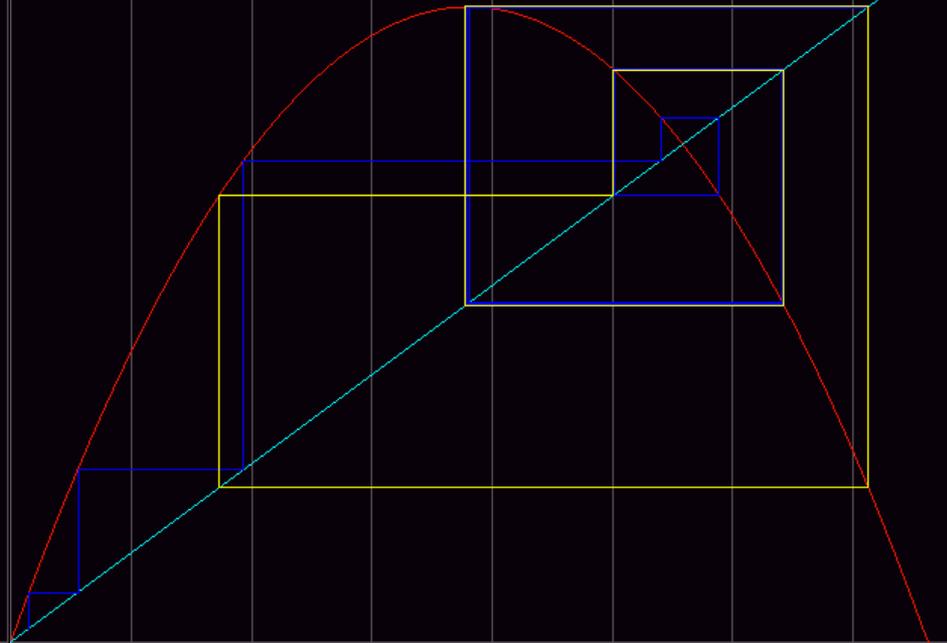
B.738



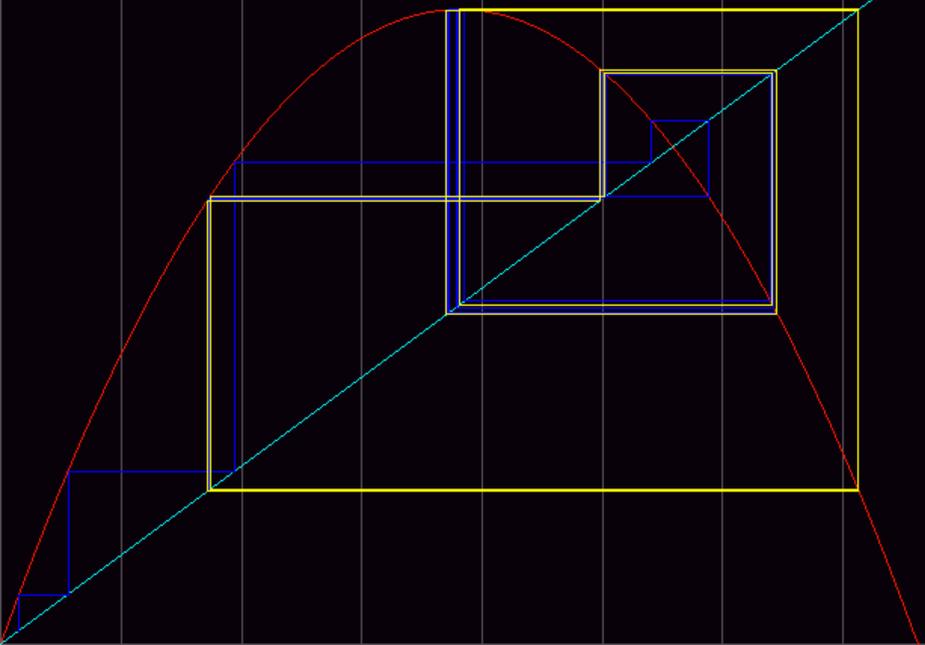
B.739



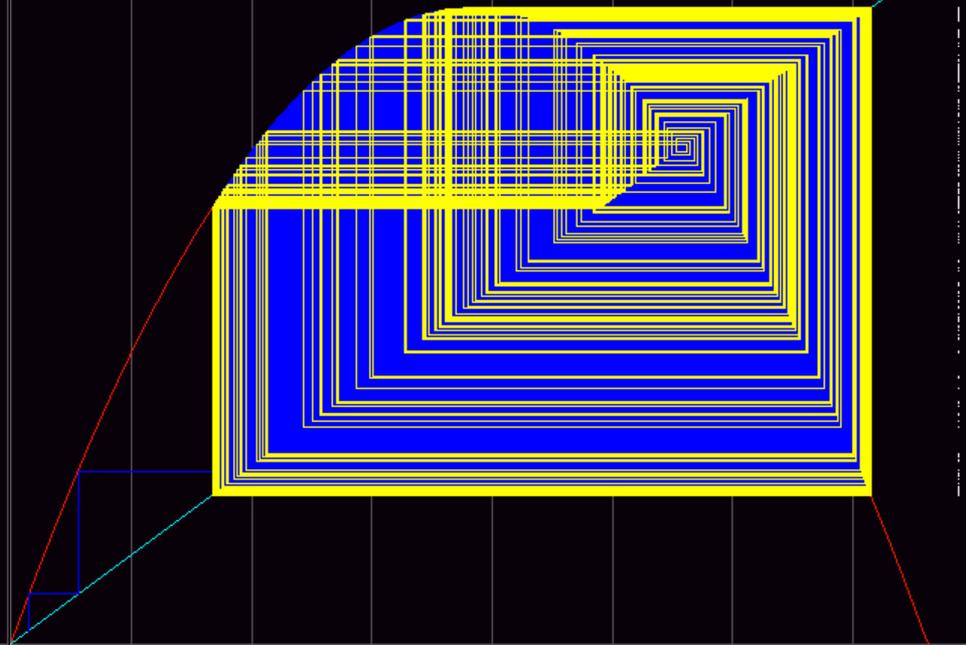
B.74



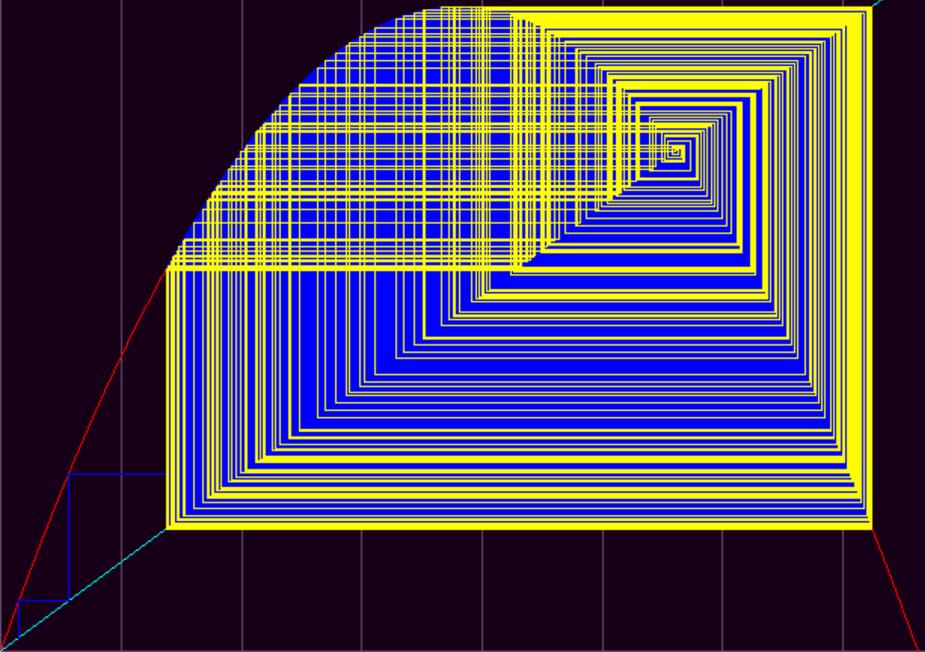
3.742



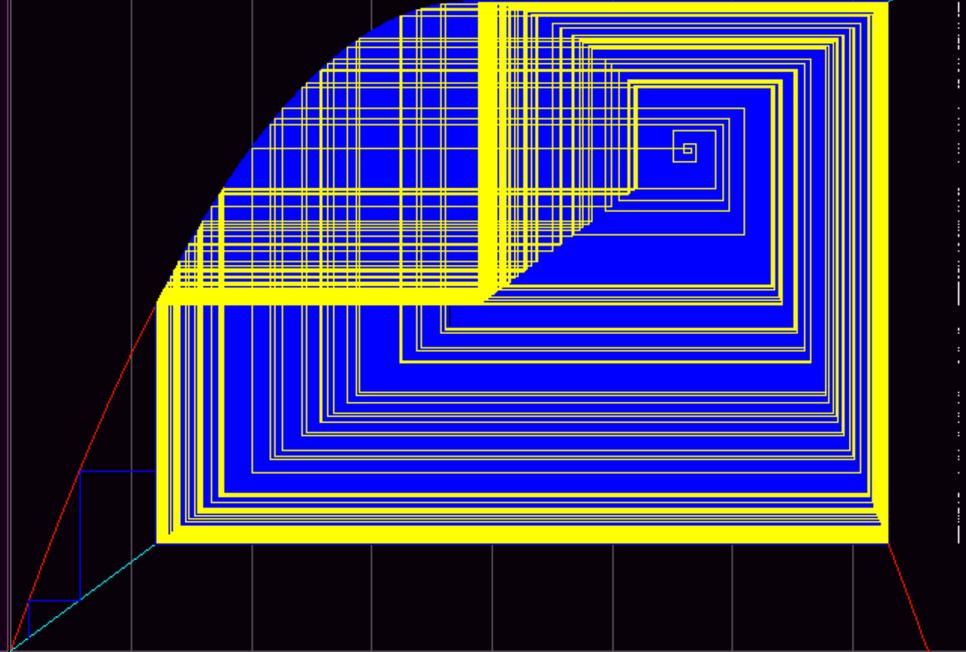
3.75



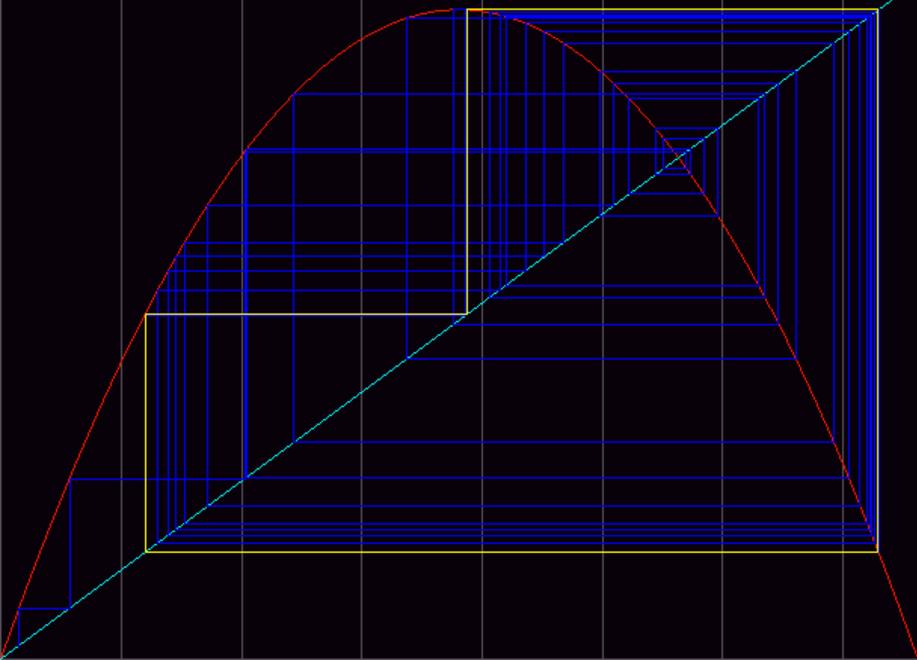
3.8



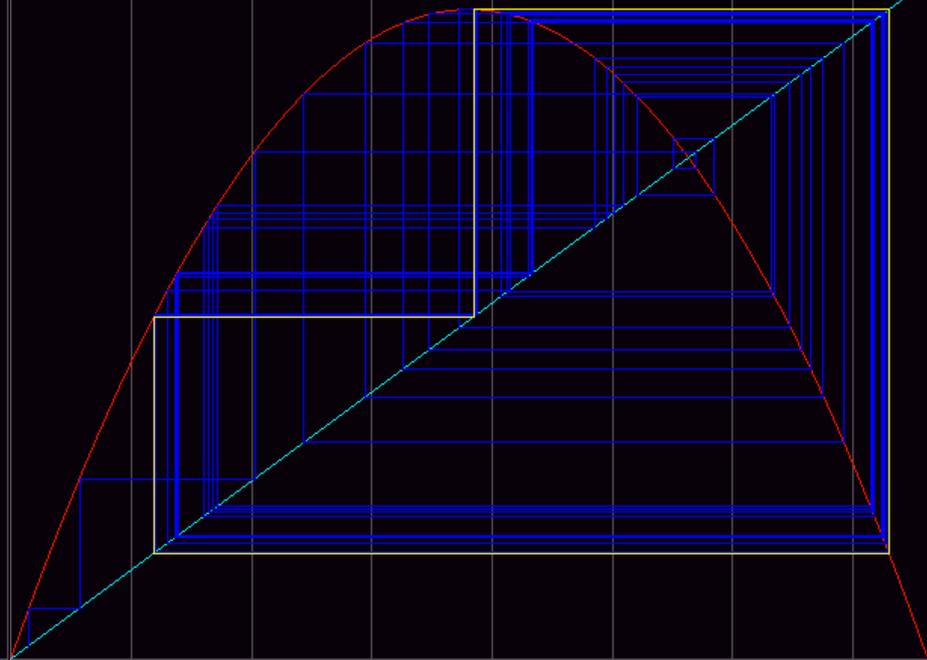
3.828



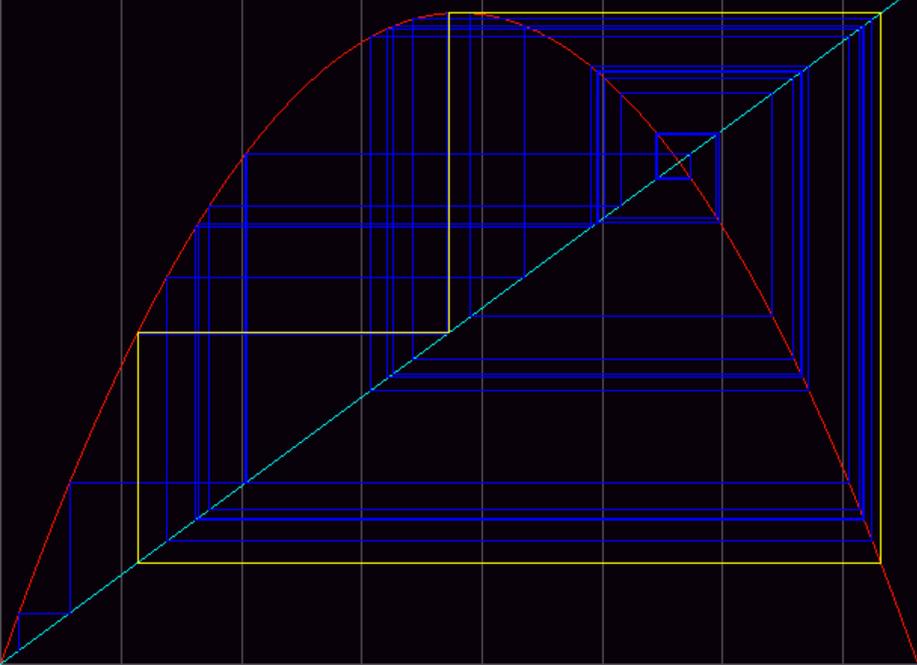
3.829



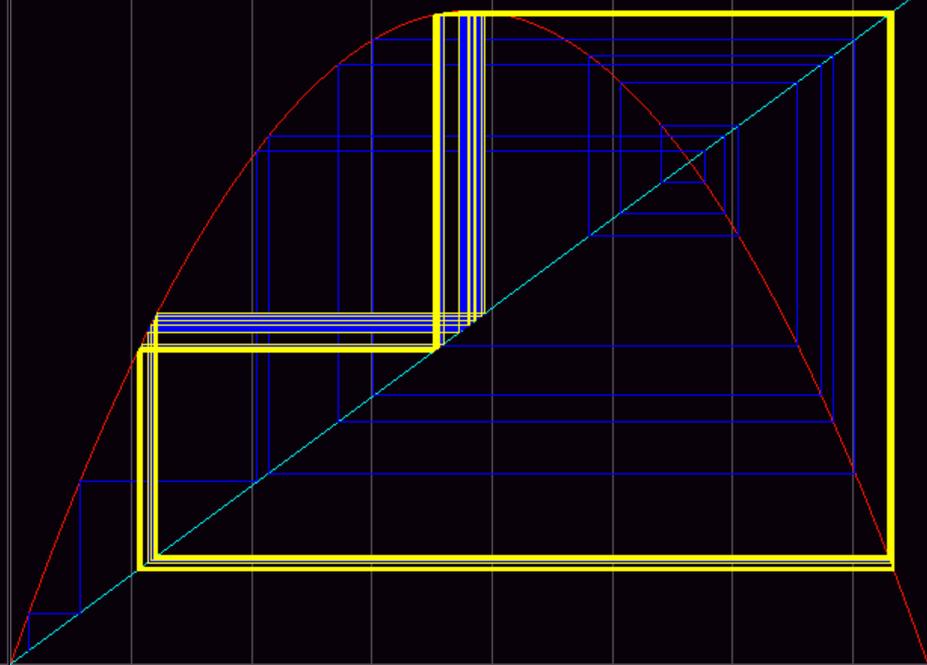
3.83

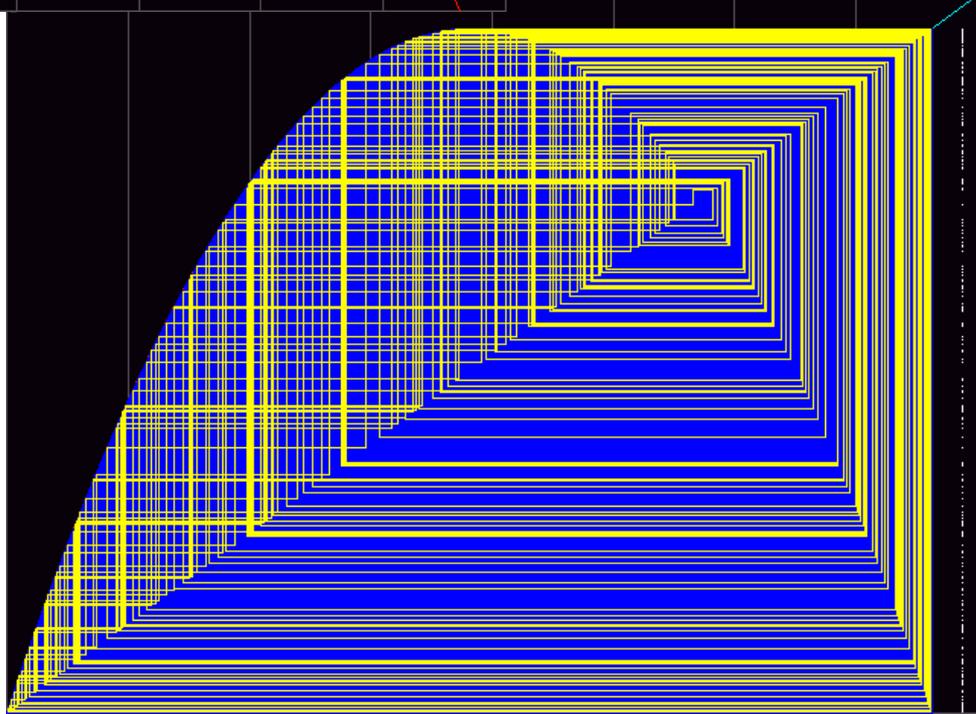
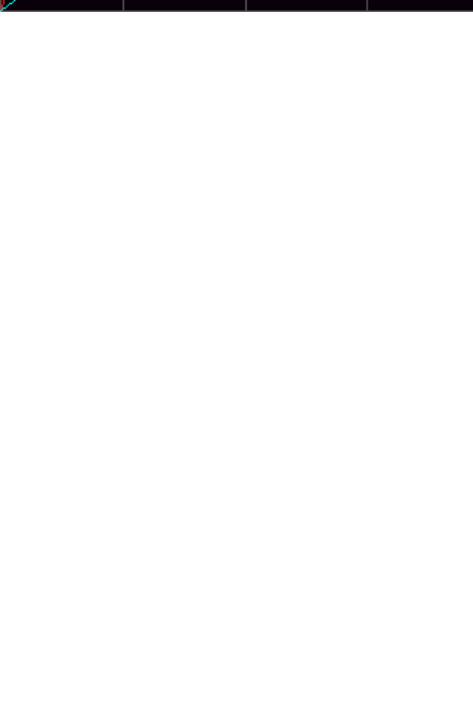
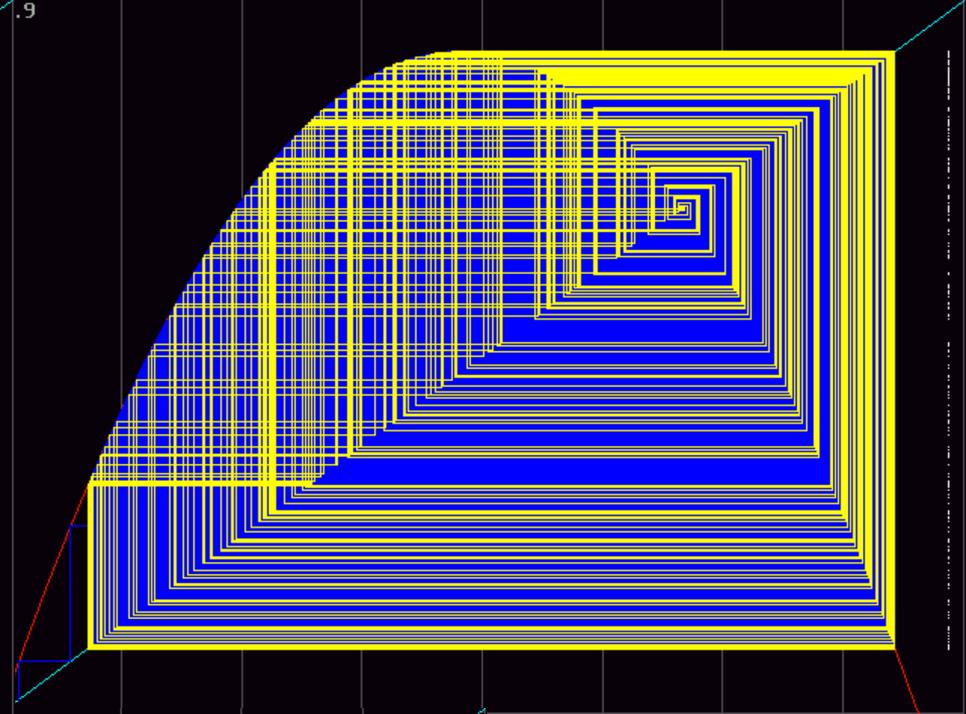
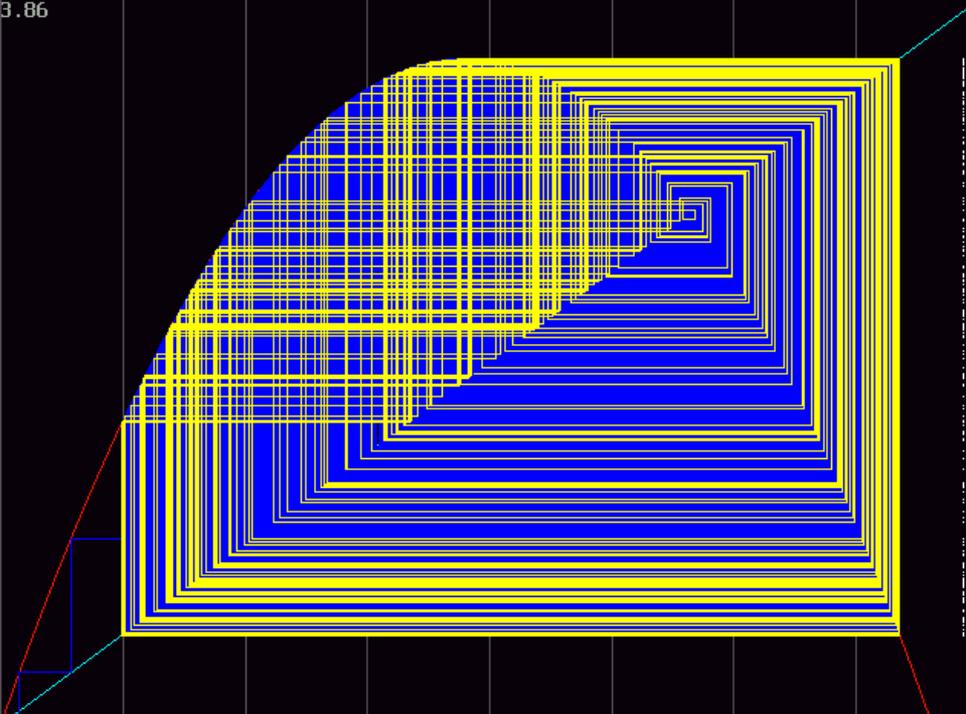


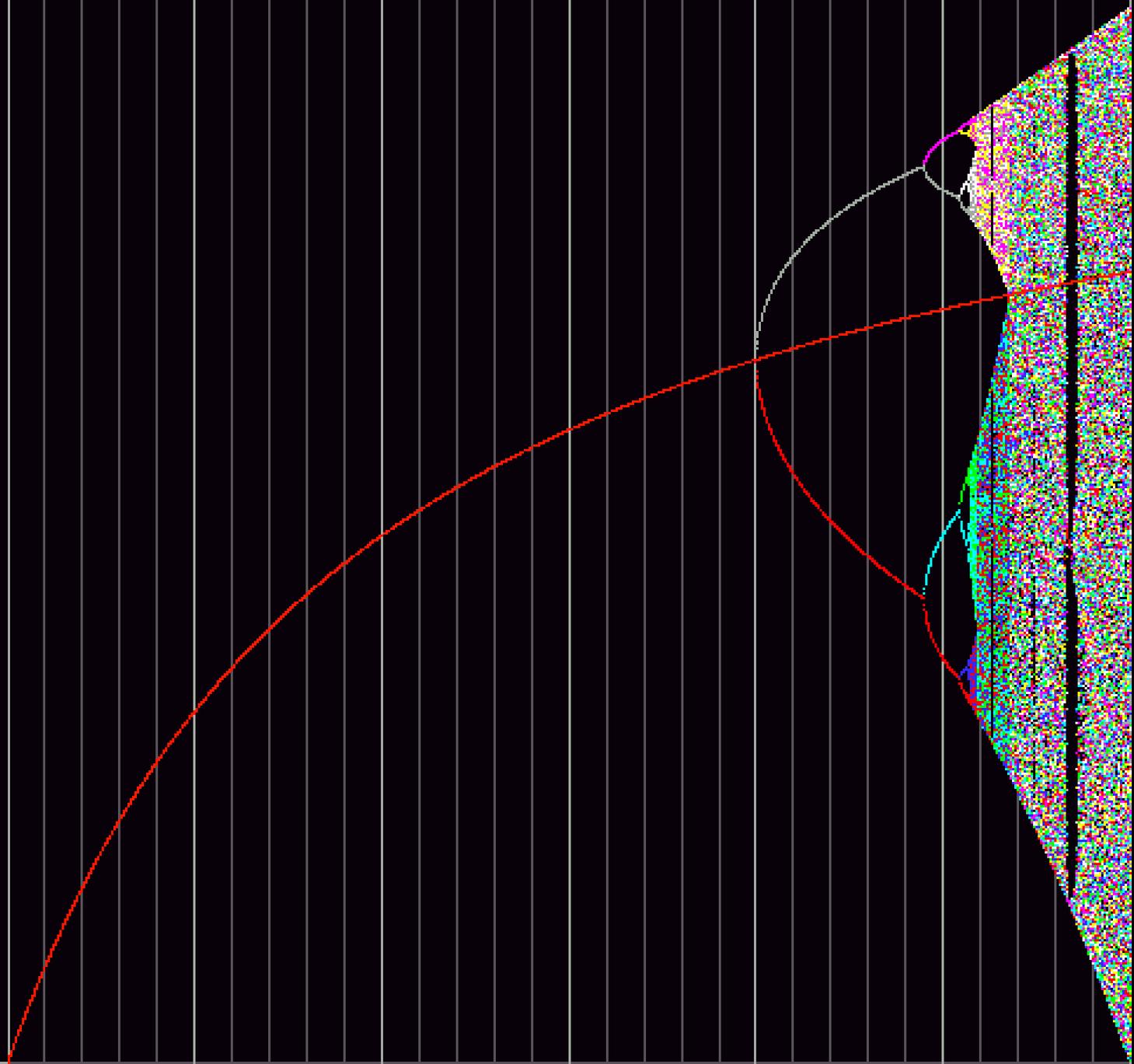
3.84

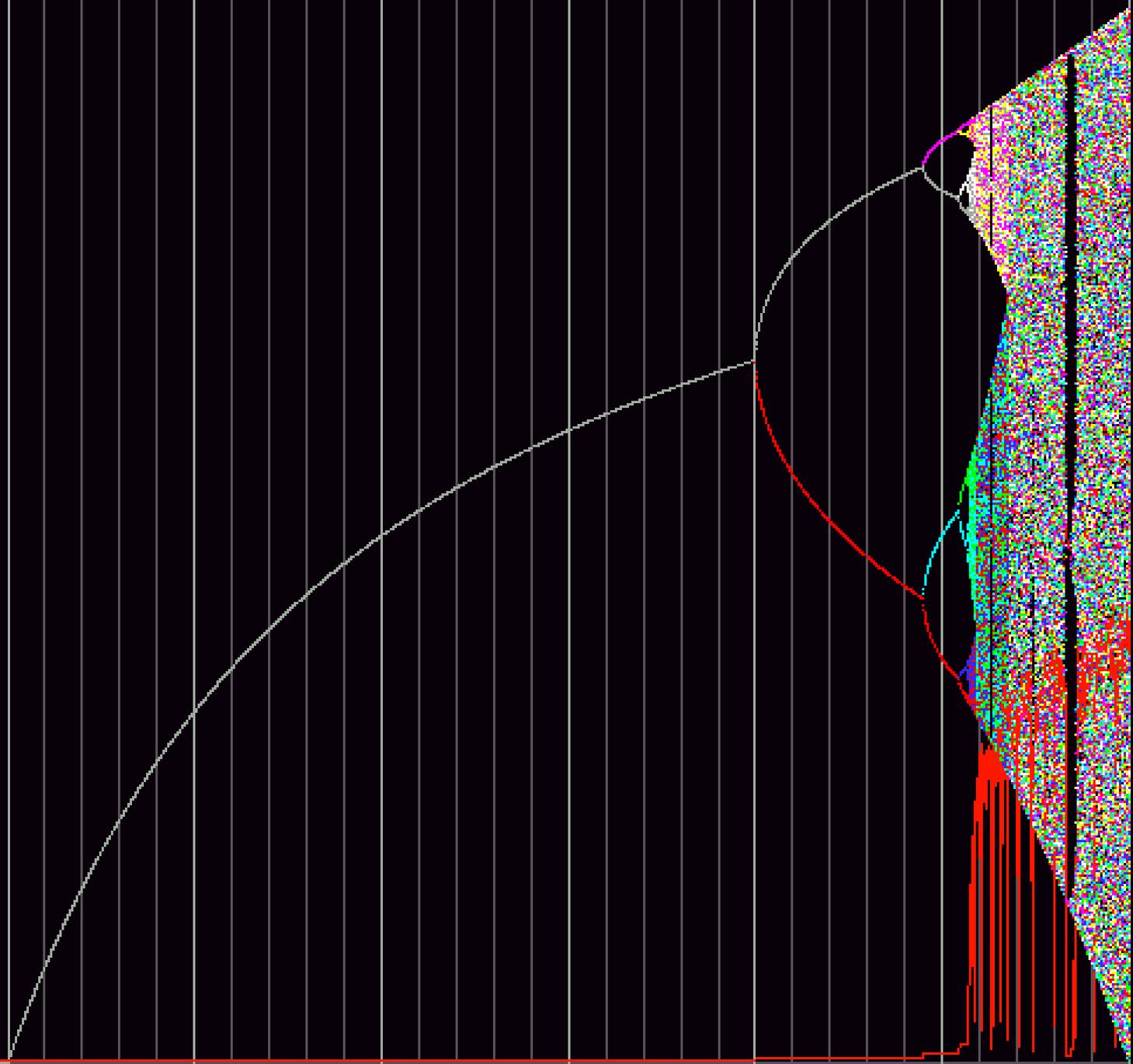


3.85









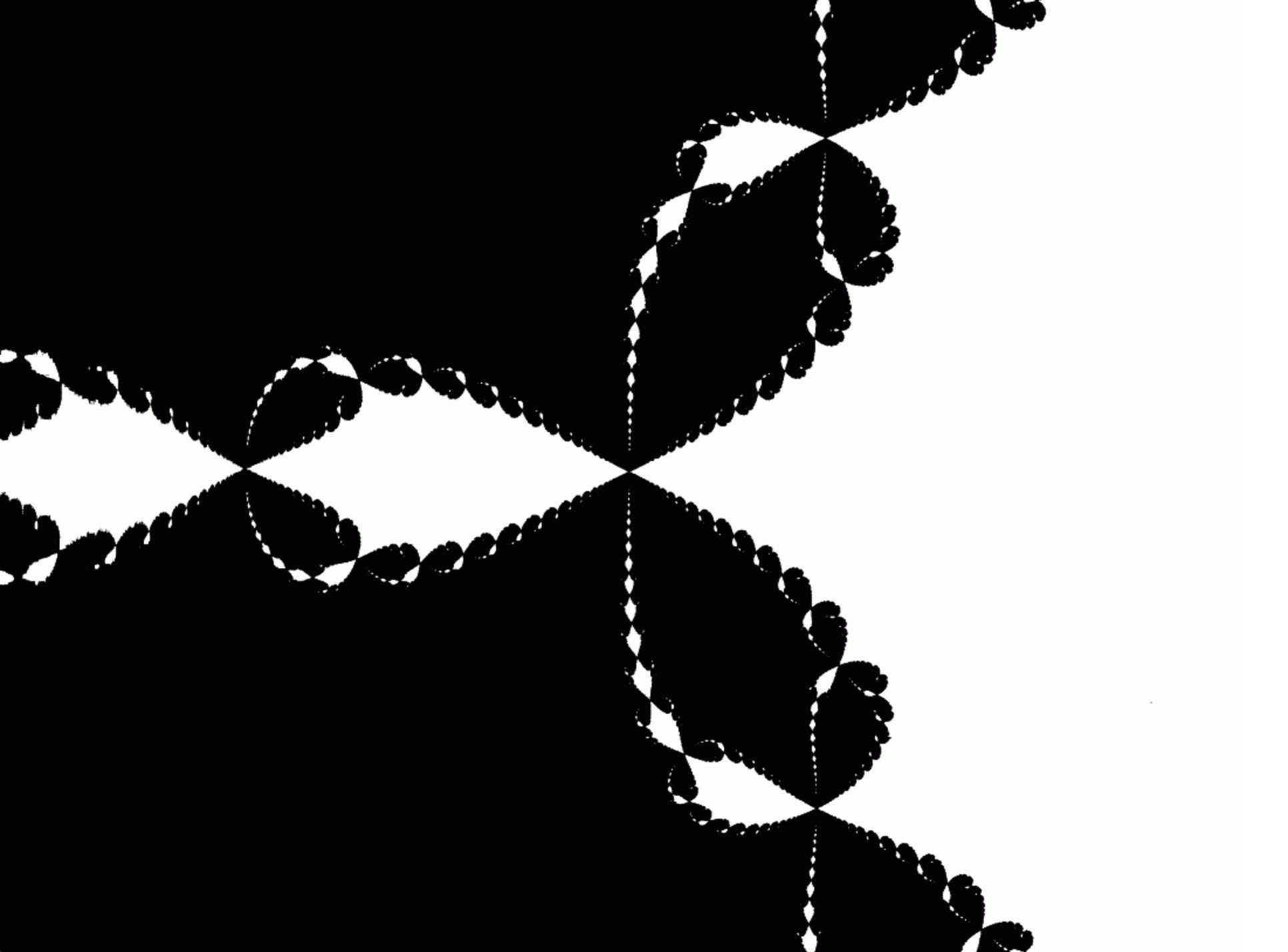
Один из методов построения фракталов

- Берём преобразование.
- Для каждой точки повторяем много раз.
- Смотрим куда эта точка в результате уходит.
- В зависимости от того, куда точка уходит, выбираем цвет.

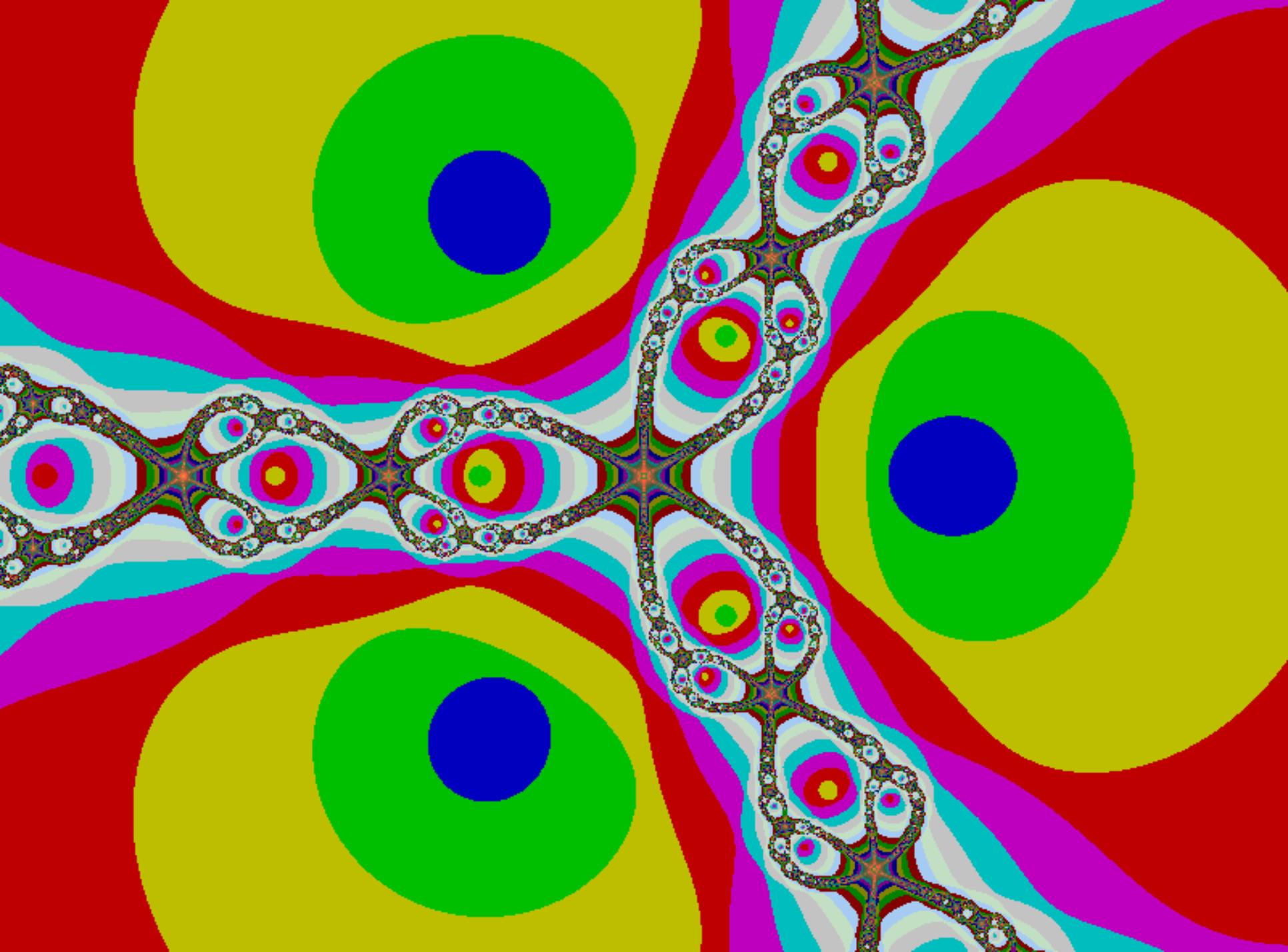
Решение уравнений методом Ньютона

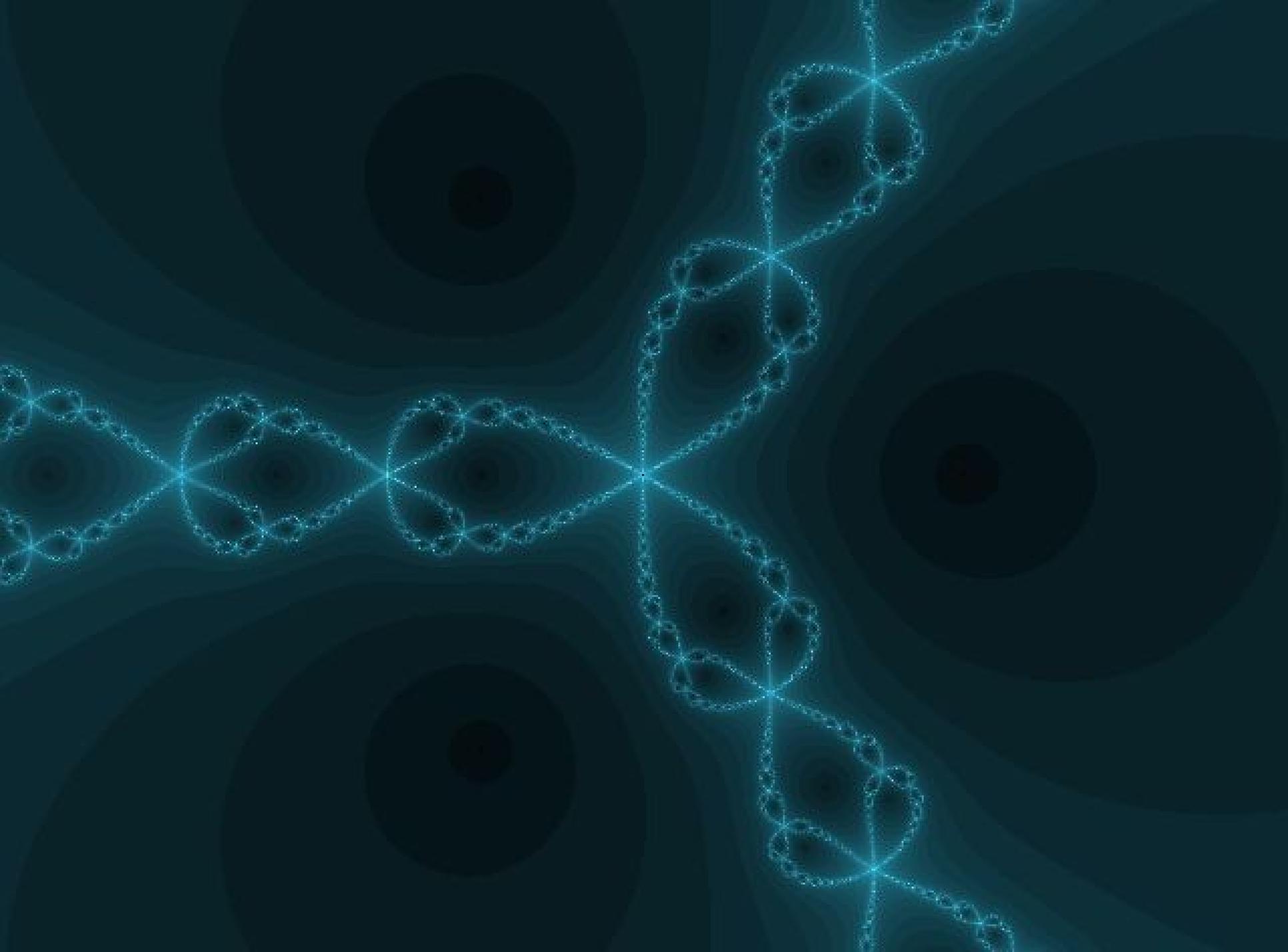
$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$

Далее $f(x) = x^3 - 1$







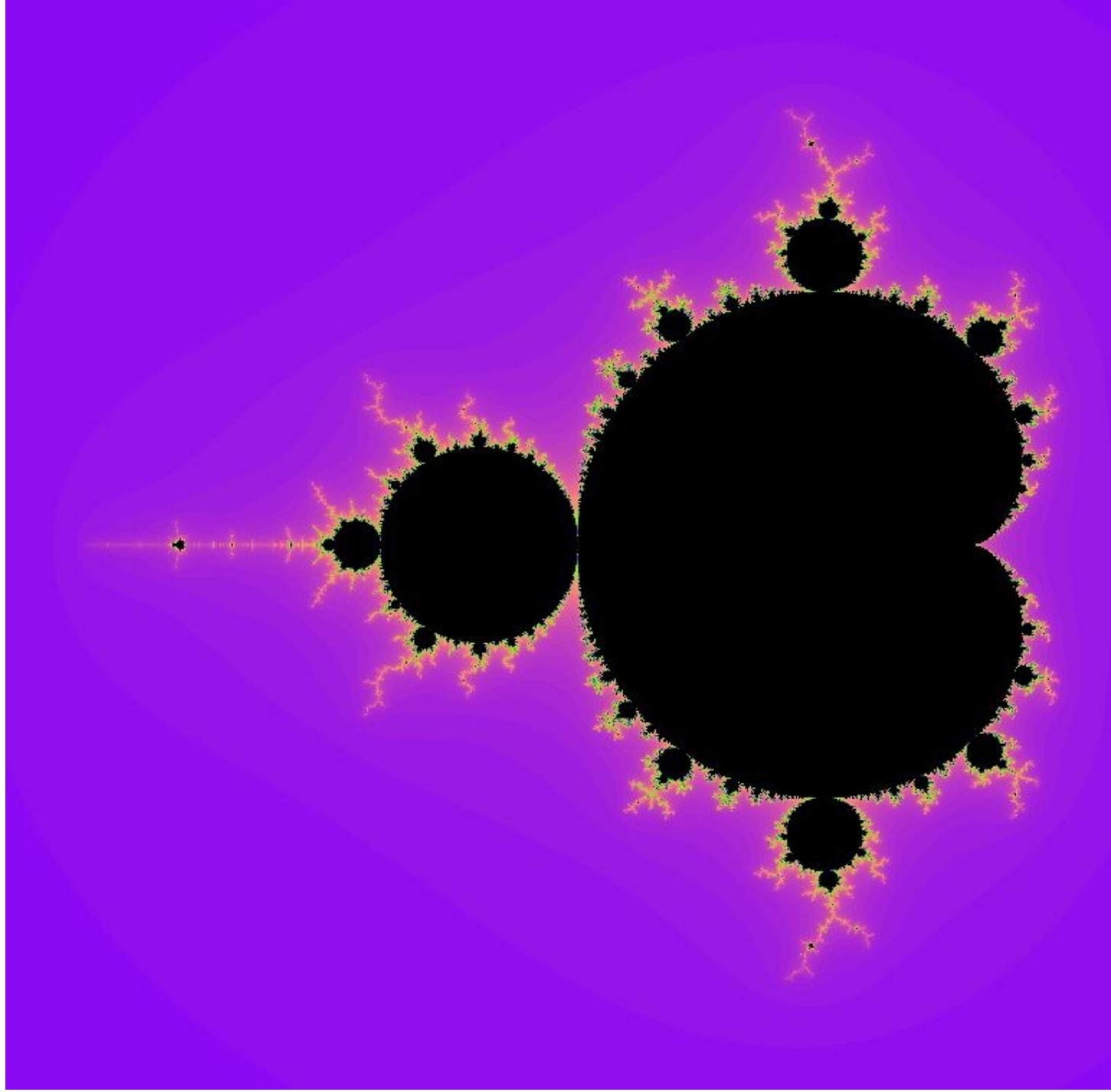


Множество Мандельброта.

$$z_{n+1} = z_n^2 + z_0$$

Множество
(чёрное) – точки
не убегаящие на
бесконечность

Цвет –
потенциал.



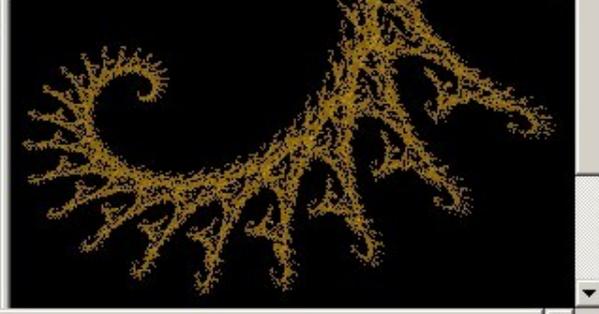
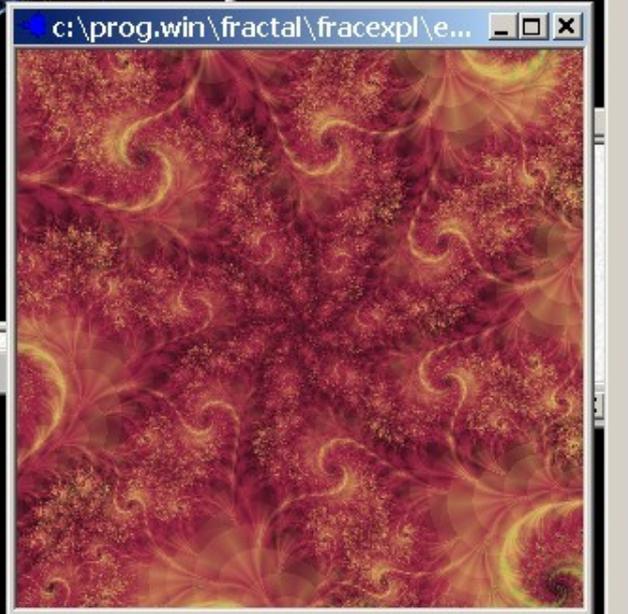
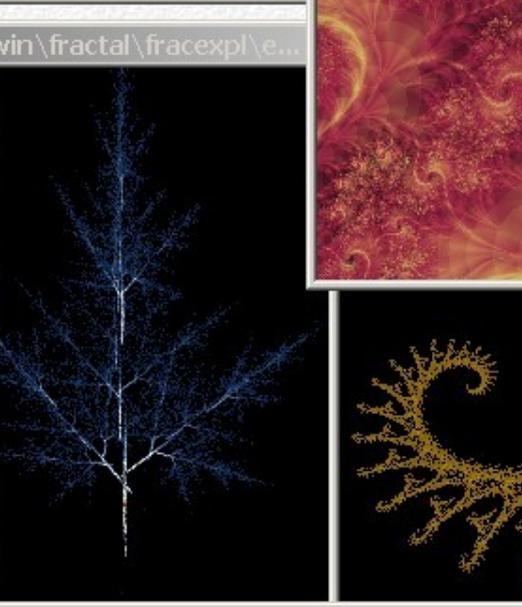
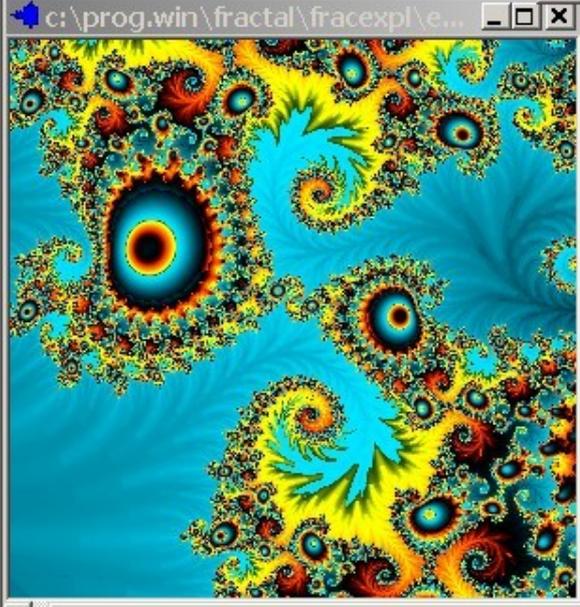
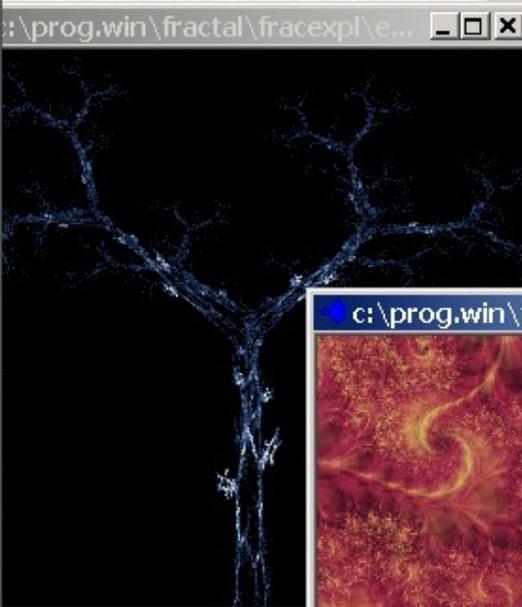
C:\prog.win\Fractal\FracExpl\Ex

- | Filename | Size |
|-----------------------|------|
| ifs_koch.fri | |
| ifs_lab_sierpinsky... | |
| ifs_maple.fri | |
| ifs_maple2.fri | |
| ifs_mecano.fri | |
| ifs_rameau.fri | |
| ifs_Sierpinsky.fri | |
| ifs_tab15.fri | |
| ifs_tab21.fri | |
| ifs_tam_sierpinsk... | |
| Polinom1.frs | |
| Polinom2.frs | |
| Polinom3.frs | |
| Polinom4.frs | |
| Polinom5.frs | |
| Polinom6.frs | |
| Polinom7.frs | |
| Polinom8.frs | |
| Polinom9.frs | |
| quaternion1.fr4 | |
| quaternion2.fr4 | |

39 files (64802 bytes) 3105b

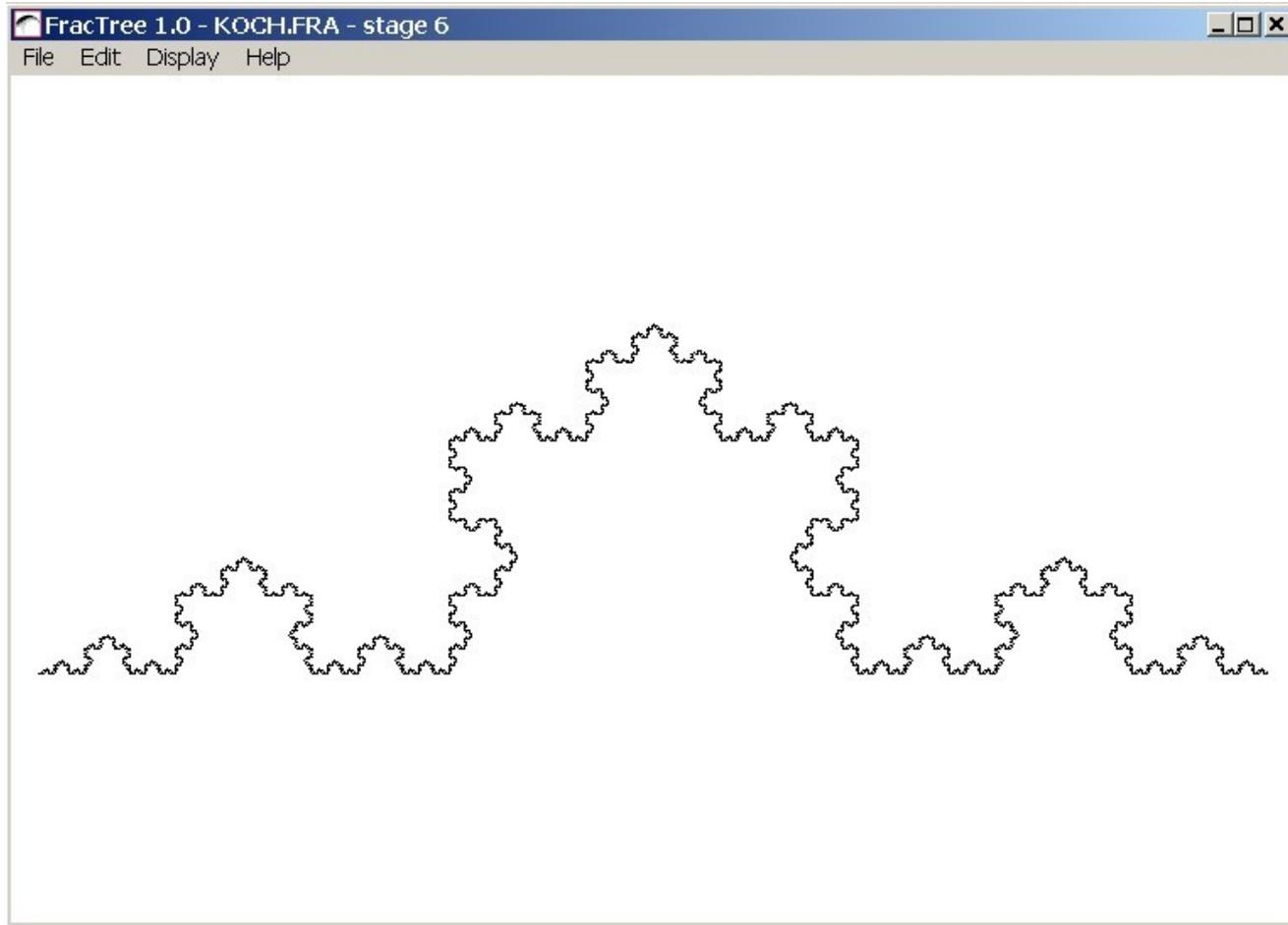


- c:\prog.win\fractal\fracexpl\...
- c:\prog.win\fractal\fracexpl\...
- c:\prog.win\fractal\fracexpl\...
- c:\prog.win\fractal\fracexpl\...

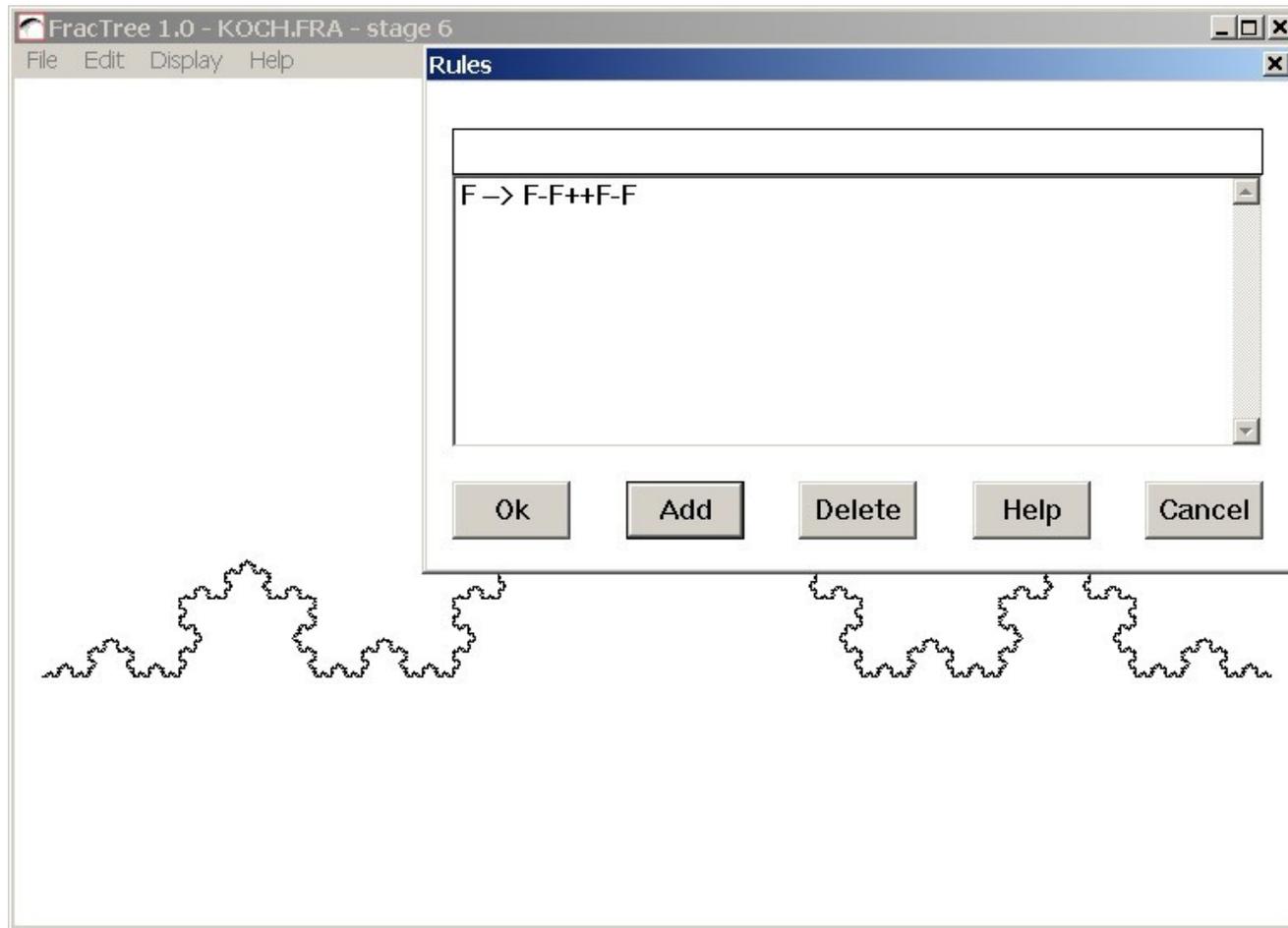




Кривая Коха



Как рисуется кривая Коха



Ещё один алгоритм

Current Settings ✕

Comments
Stylish tree

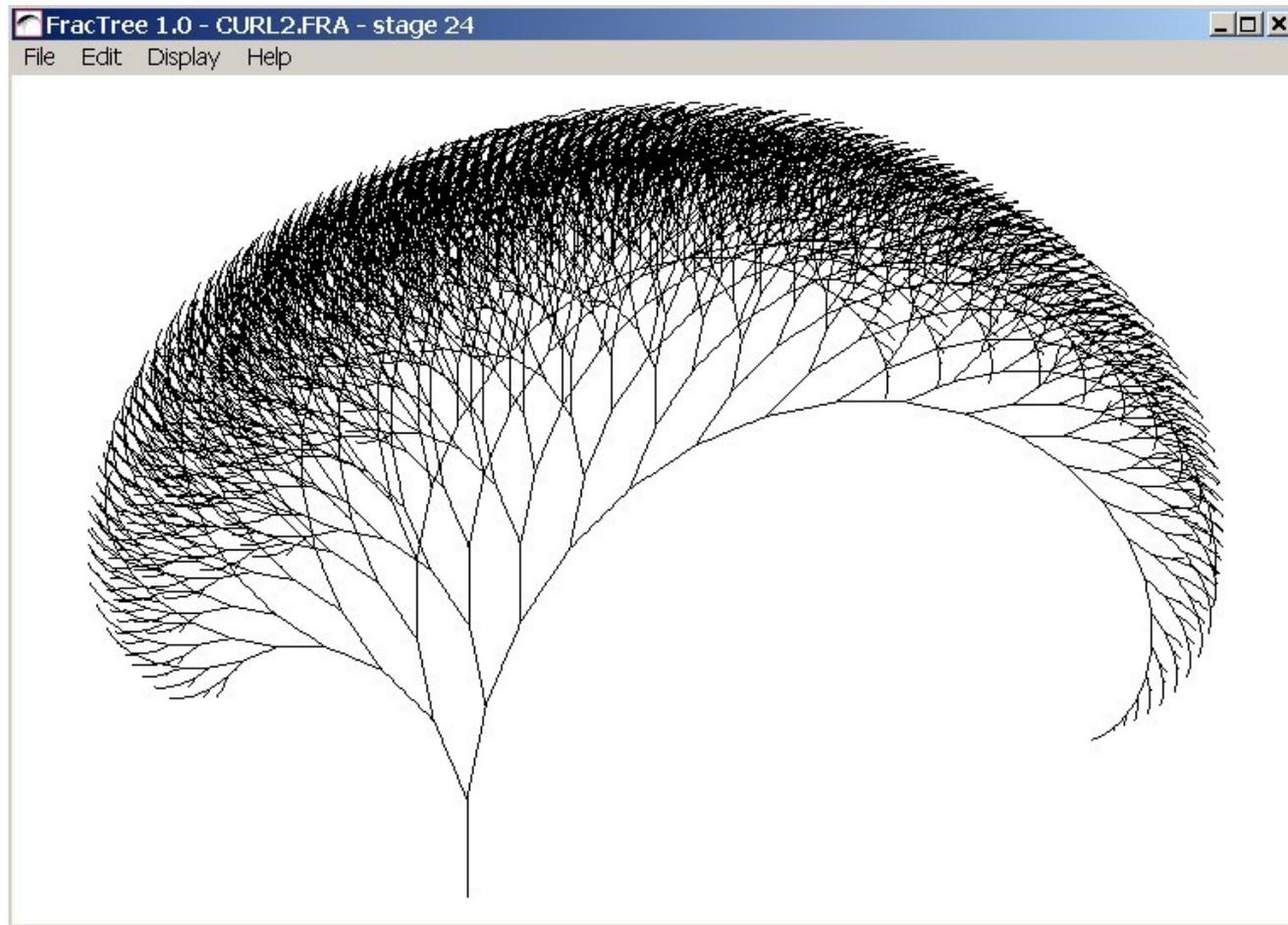
Number of directions
32

Axiom
—C

Rules
C → NF[-P]F+C
N → NFF
P → Q
Q → C

Ok

Результат



Вспомним ковёр Серпинского

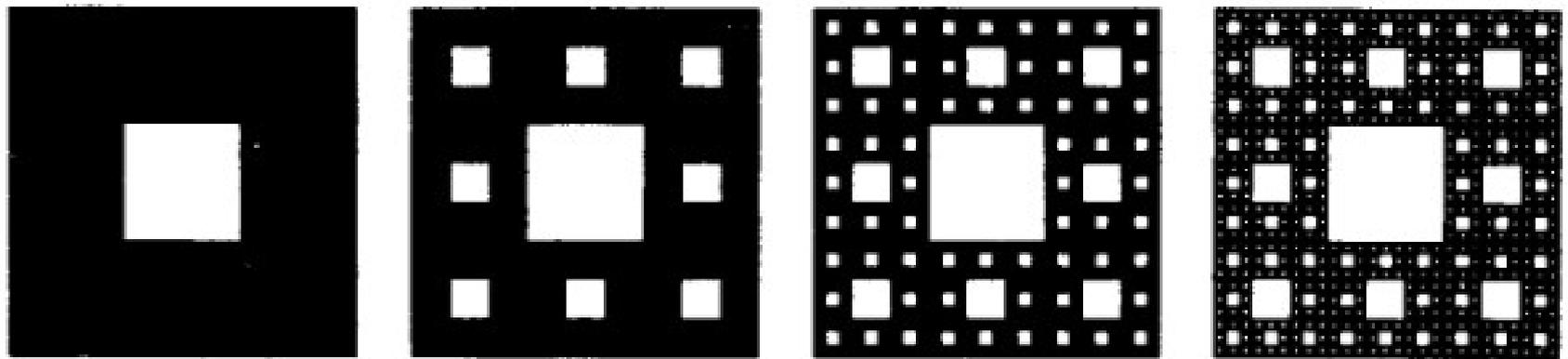


РИС. 2.16. Построение ковра Серпинского. Затравка — квадрат, а образующий элемент (*слева*) состоит из $N = 8$ квадратов, полученных из затравки преобразованием подобия (сжатием) с коэффициентом подобия $r = 1/3$. *Справа*: четвертый этап построения; размерность подобия $D = \ln 8 / \ln 3 = 1,89 \dots$

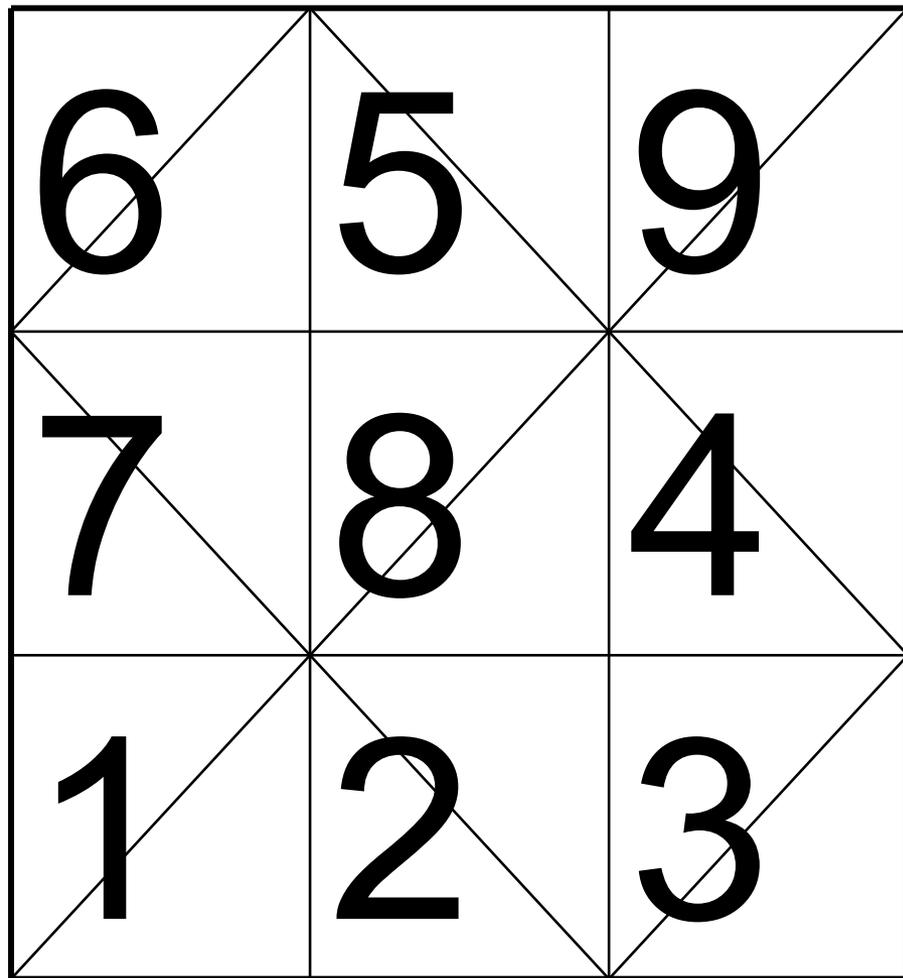
Другой способ рисования ковра Серпинского

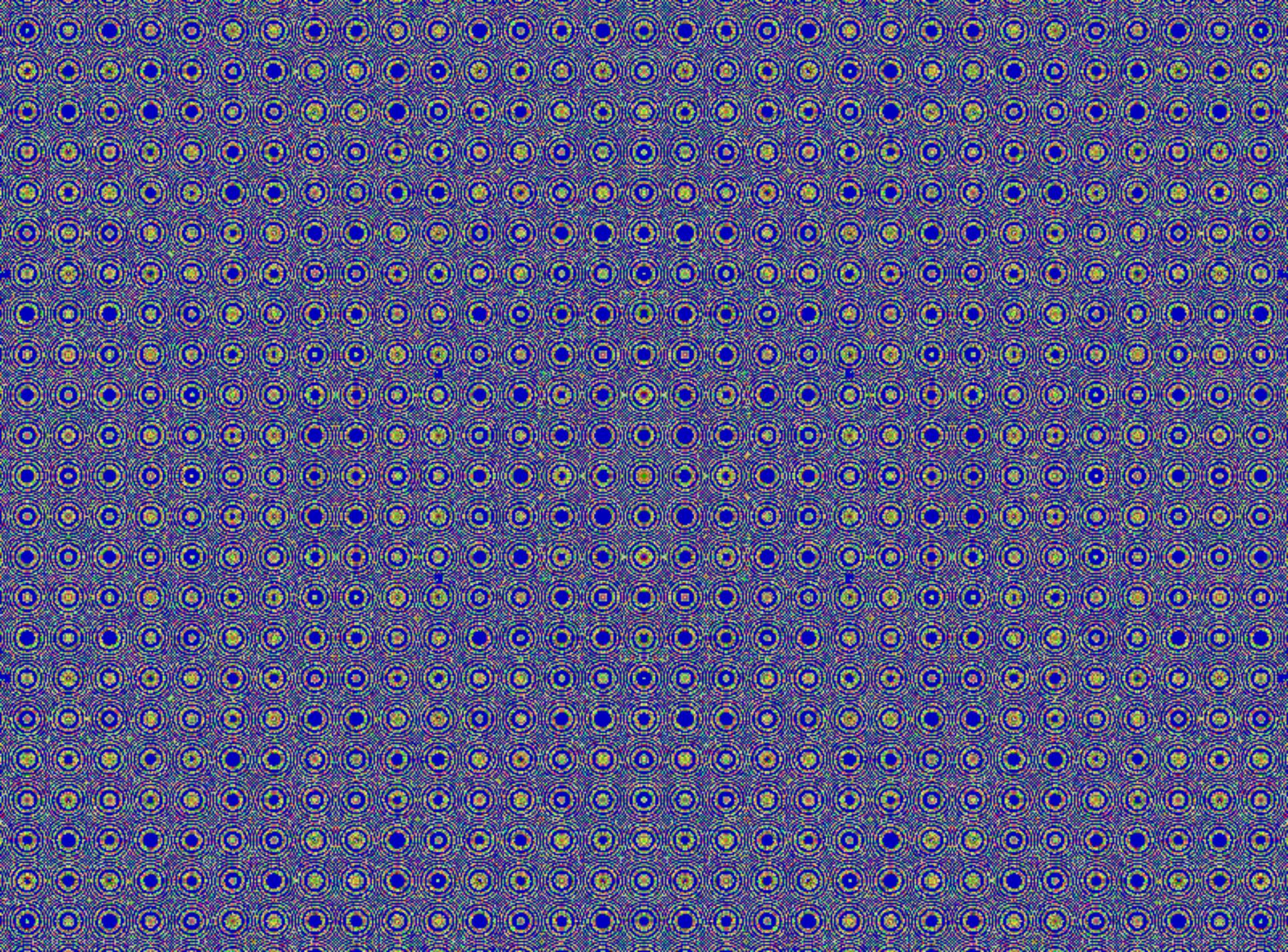
Начинаем с “-F”,
8 направлений

Правила:

F --> F++F--F--FF--F--F--fF

f --> fff

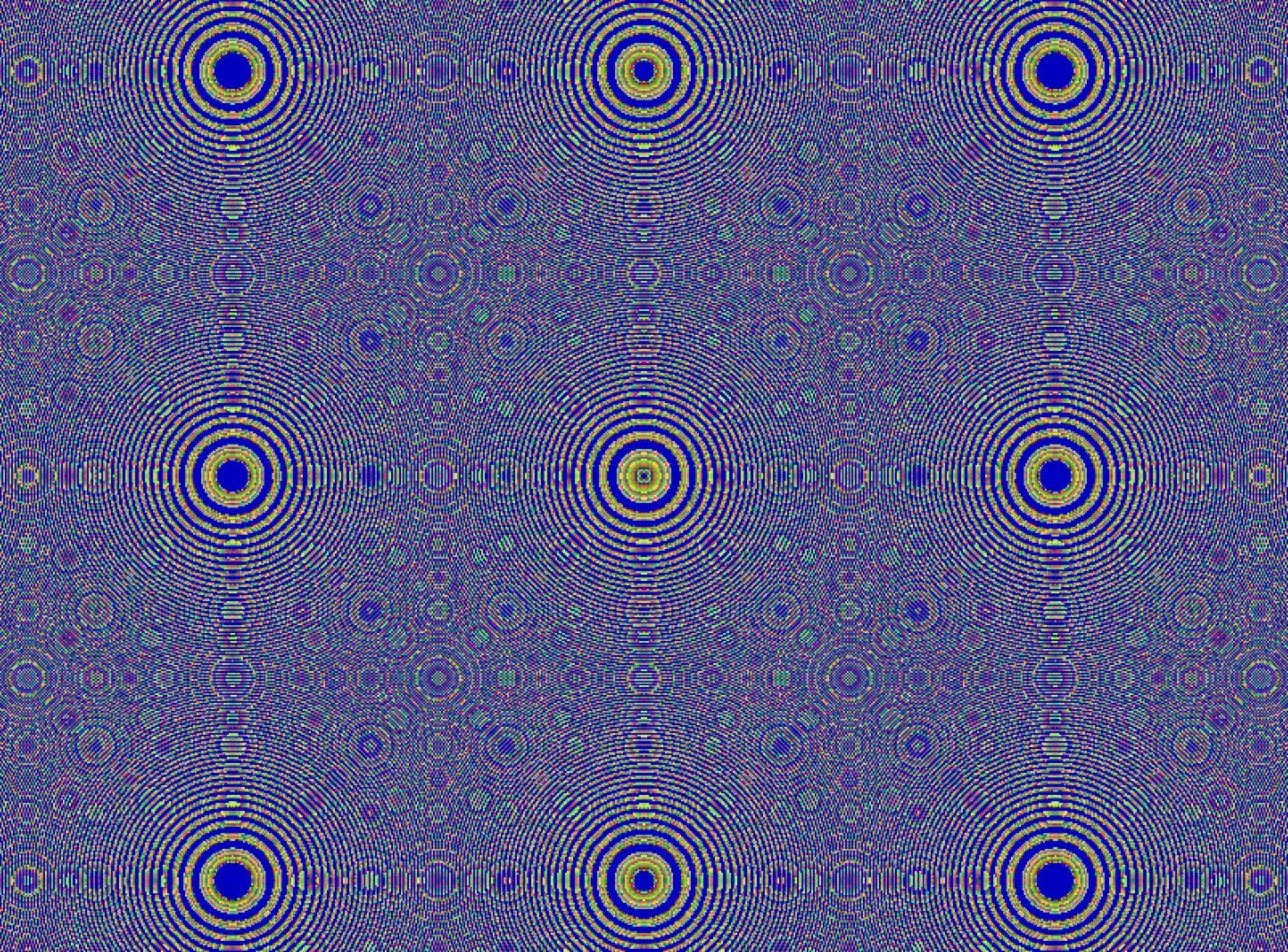




Рисование:

$$\text{Цвет} = a(x^2 + y^2)$$

mod (число цветов)



Меры Минковского и Хаусдорфа

- Мера клетки размера $R = R^D$
- Мера Минковского – предел при $R \rightarrow 0$
(все клетки одного размера)

[Аналог меры Жордана!!!]

- Мера Хаусдорфа – нижняя грань меры произвольного набора клеток, покрывающего множество.

[Аналог меры Лебега!!!]

Размерности Минковского и Хаусдорфа

- Если
 - при $D > D_0$ мера = 0,
 - при $D < D_0$ мера = бесконечности,
 - то D_0 – размерность множества.
- («чья» размерность зависит от того,
«чья» мера)

Пример

Множество, для которого размерности Минковского и Хаусдорфа не совпадают

$$A = \{0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots\}$$

$$\dim_H A = 0$$

$$1/(k-1) - 1/k = 1/[k(k-1)] < \varepsilon$$

Точки $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/(k-1)$ покрываются $(k-1)$ шаром радиуса ε , Точки $1/k, 1/(k+1), \dots$ требуют $1/(2k\varepsilon)$ шаров. Т.е. число шаров ведёт себя как $\varepsilon^{-1/2}$.

$$\dim_M A = 1/2$$