# Квантование марковских процессов

Quantization of Markov process

М.Г. Иванов

M.G. Ivanov

21 июня 2019 г.

June 21, 2019

# Предупреждение

Иногда в литературе квантованием марковского процесса называют его дискретизацию, т.е. дискретизацию времени и/или пространства состояний. Такое отождествление квантовости с дискретностью широко распространено, но, с точки зрения квантовой теории, должно рассматриваться как поверхностная аналогия, не основанная на существенных свойствах теории (вульгаризация).

квантование≠дискретизация

quantization≠discretization

## Аннотация

Исследуется аналогия между марковскими случайными процессами и унитарной квантовой эволюцией. Переход от унитарной квантовой эволюции к марковскому процессу за счёт повторяющихся измерений. Обратная задача — построение квантовой эволюции по заданному марковскому процессу.

## Abstract

The analogy between Markov processes and unitary quantum evolution is studied. The transition from unitary quantum evolution to the Markov process due to repeated measurements is considered. The inverse problem of reconstruction of quantum evolution from a given Markov process is also considered.

# Содержание

# Квантовые и классические вероятности

Классические вероятности

$p(n) = |\psi(n)|^2$

Умножение вероятностей

$$p(a \to b \to c) = p(a \to b) \cdot p(b \to c)$$

Сложение вероятностей

$$p(\to c) = p(b \to c) + p(b' \to c)$$

**Марковский процесс**

$$p(n, t+\delta t) = \sum_{n'} V(n' \to n) \cdot p(n', t)$$

Квантовые амплитуды

$\psi(n)$

Умножение амплитуд

$$\psi(a \to b \to c) = \psi(a \to b) \cdot \psi(b \to c)$$

Сложение амплитуд

$$\psi(\to c) = \psi(b \to c) + \psi(b' \to c)$$

**Унитарная эволюция**

$$\psi(n, t+\delta t) = \sum_{n'} U(n' \to n) \cdot \psi(n', t)$$

[1] (раздел 3.1.6. «Марковский процесс и квантовая эволюция*»)

# Марковский процесс и унитарная эволюция (непрерывное время)

**Марковский процесс**

$$p(n, t + \delta t) = p(n, t) + \delta t \cdot \sum_{n'} m(n' \to n) \cdot p(n', t), \quad \delta t \to 0.$$

$$\frac{\partial p(n, t)}{\partial t} = \sum_{n'} m(n' \to n) \cdot p(n', t)$$

**Унитарная эволюция**

$$\frac{\partial \psi(n, t)}{\partial t} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar} \sum_{n'} H(n' \to n) \cdot \psi(n', t)$$

# Условия сохранения и положительности вероятностей

Для Марковского процесса

$$\sum_n M(n' \to n) = 0, \quad M(n' \to n \neq n') \geqslant 0, \quad M(n \to n) \leqslant 0.$$

Для унитарной эволюции условия сохранения вероятностей

$$\hat{U}^{-1} = \hat{U}^{\dagger},$$

$$H(n' \to n) = H^*(n \to n').$$

Условий положительности нет!

# Важное физическое различие

Классический марковский процесс либо тривиален ($M(n,n') \equiv 0$, или $V(n,n') \in \{0,1\}$), либо необратим, т. к. при изменении знака времени матрица $M(n,n')$ должна менять знак, что запрещено условиями положительности.

Уравнение Шрёдингера (квантовый аналог марковского процесса) наоборот, всегда обратимо, т. к. условие обратимости (самосопряжённости) сохраняется при изменении знака времени.

# Унитарная эволюция $\to$ марковский процесс

Чередуем периоды унитарной эволюции длины $\delta t$ и проективные измерения.

$t \in \big((N-1)\delta t, N\delta t\big)$ $(N \in \mathbb{Z})$ — унитарная эволюция.

$t = N\delta t$ $(N \in \mathbb{Z})$ — проективное измерение.

$$\psi(n, N\delta t - 0) = \sum_{n'} U_{n,n'}\, \psi(n', (N-1)\delta t + \delta t + 0).$$

$$p(n, Nt + \delta t + 0) = \sum_{n'} |U_{n,n'}|^2\, p(n', (N-1)\delta t + 0).$$

Получился марковский процесс

$$V(n, n') = |U_{n,n'}|^2.$$

# Обратная задача — квантование марковского процесса

Восстановить по марковскому процессу унитарную эволюцию.

1. При каких условиях (условия квантуемости) унитарная эволюция может быть получена из марковского процесса?
2. Как по матрице марковской эволюции $M(n, n')$ восстановить оператор унитарной эволюции $\hat{U}(M)$?
3. Какие произвольные параметры присутствуют в восстановленном операторе эволюции $\hat{U}(M)$?
4. Какие из произвольных параметров соответствуют неоднозначности описания квантовой системы (выбор калибровки), а какие физически значимы?

# Дискретное время, дискретный базис

$$p(n, t + \delta t) = \sum_{n' \in \mathbf{N}} V(n, n')\, p(n', t).$$

$$U_{n,n'} = \sqrt{V(n, n')}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_{n,n'}}, \qquad \alpha_{n,n'} \in \mathbb{R}.$$

$$\hat{U}^{-1} = \hat{U}^{\dagger}.$$

# Произвольные параметры ($2D-1$ параметр)

$2D-1$ фазовый множитель:

Каждую строку оператора эволюции $\hat{U}$ можно умножить на произвольный фазовый множитель $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_n}$, а каждый столбец — на $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_n}$. Можно считать, что

$$\sum_n \alpha_n = \sum_n \beta_n = 0,$$

что даёт $2D-2$ независимых параметра.

Ещё один параметр — фазовый множитель $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu}$, на который умножаются все элементы оператора $\hat{U}$.

**Является ли этот список параметров исчерпывающим в общем случае пока не ясно.**

# Выбор калибровки ($D$ параметров)

- Сдвиг нулевого уровня энергии вверх на произвольную величину $\mu \frac{\hbar}{\delta t}$ (умножение всех компонент $\hat{U}$ на $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu}$) — 1 параметр.
- Умножение каждого состояния $|n\rangle$ на фазовый множитель $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_n}$ (каждого $\langle n|$ на фазовый множитель $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma_n}$) приводит к умножению элементов оператора эволюции на отношение фазовых множителей $U_{n_2,n_1} \to U_{n_2,n_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\gamma_{n_2}-\gamma_{n_1})}$ — $D-1$ независисмый параметр.

# Физически значимые параметры ($D-1$ параметр)

Из описанных $2D-1$ параметров $D$ параметров приходятся на выбор калибровки, остаётся $D-1$ физически значимых параметров $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_{\boldsymbol{n}}-\beta_{\boldsymbol{n}})}$.

# Необходимые условия квантуемости (1)

**Нормированность столбцов** (выполняется для всех марковских процессов)

$$\forall n' \in \mathbf{N}: \sum_{n \in \mathbf{N}} V(n, n') = 1.$$

**Нормированность строк**

$$\forall n \in \mathbf{N}: \sum_{n' \in \mathbf{N}} V(n, n') = 1.$$

# Необходимые условия квантуемости (2)

**Неравенство многоугольника**

Строки/столбцы унитарной матрицы с разными номерами должны быть взаимно ортогональны

$$\forall n_1 \neq n_2 \in \mathbf{N}: \quad \sum_{n' \in \mathbf{N}} \sqrt{V(n_1, n') \cdot V(n_2, n')}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_{n_2,n'} - \alpha_{n_1,n'})} = 0.$$

Необходимое условие ортогональности — неравенство многоугольника

$$\forall n \in \mathbf{N}: \quad \sqrt{M(n_1, n) \cdot M(n_2, n)} \leqslant \sum_{n' \neq n} \sqrt{M(n_1, n') \cdot M(n_2, n')}.$$

Аналогичное условие должно выполняться для столбцов матрицы $V$

$$\forall n \in \mathbf{N}: \quad \sqrt{M(n, n_1) \cdot M(n, n_2)} \leqslant \sum_{n' \neq n} \sqrt{M(n', n_1) \cdot M(n', n_2)}.$$

# Следствия неравенства многоугольника

- Для любой пары строк $n_1 \neq n_2$ должно быть либо нуль, либо не менее двух «общих ненулевых ячеек», т.е. либо нуль, либо не менее двух $n'$, для которых $M(n_1, n') \cdot M(n_2, n') \neq 0$.
- Если для строк $n_1 \neq n_2$ имеется ровно две общих ненулевых ячейки $n', n''$, то должно выполняться равенство $M(n_1, n') \cdot M(n_2, n') = M(n_1, n'') \cdot M(n_2, n'')$.
- Если для строк $n_1 \neq n_2$ имеется ровно три общих ненулевых ячейки $n', n'', n'''$, то должно выполняться неравенство треугольника $\sqrt{M(n_1, n')M(n_2, n')} \leqslant \sqrt{M(n_1, n'')M(n_2, n'')} + \sqrt{M(n_1, n''')M(n_2, n''')}$

# Пример: марковский процесс с двумя состояниями

Условия нормировнности столбцов и строк требуют

$$V = \begin{pmatrix} \cos^2\phi & \sin^2\phi \\ \sin^2\phi & \cos^2\phi \end{pmatrix}.$$

Соответствующий оператор эволюции

$$\hat{U} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda}\cos\phi & -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}\sin\phi \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma}\sin\phi & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda}\cos\phi \end{pmatrix}.$$

Произвольные параметры $\gamma, \mu$ — калибровочные.

Произвольный параметр $\lambda$ — физический.

# Пример: блуждание на 1-мерной решётке неквантуемо!

$$V_{\text{блужд.}} = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ddots & a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & a & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad a, b > 0, \quad a + 2b = 1.$$

Строки с номером отличающимся на 2 не могут быть сделаны ортогональными никаким выбором фазовых множителей.

# Конечный шаг по непрерывному времени

$$\frac{dp(n,t)}{dt} = \sum_{n'} m(n,n')p(n',t), \quad \sum_{n} m(n,n') = 1, \quad \text{if } n \neq n',\ m(n,n') \geqslant 0.$$

$$p(n,t+\delta t) = p(n,t) + \delta t \sum_{n'} m(n,n')p(n',t) + o(\delta t^2)$$

$$\frac{d\psi(n,t)}{dt} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar} \sum_{n'} H_{n,n'}\psi(n',t)$$

$$\psi(n,t+\delta t) = \psi(n,t) + \delta t \sum_{n'} H_{n,n'}\psi(n',t) + o(\delta t^2)$$

# Квантовый эффект Зенона и перенормировка времени

Для недиагональных элементов $n_1 \neq n_2$ при квантовании

$$m(n, n') \cdot \delta t = |H_{\mathbf{n_2}, \mathbf{n_1}}|^2 \frac{\delta t^2}{\hbar^2} + o(\delta t^2).$$

Вероятность перехода в единицу времени для марковского процесса стремится к нулю при $\delta t \to 0$

$$m(n_2, n_1) = |H_{\mathbf{n_2}, \mathbf{n_1}}|^2 \frac{\delta t}{\hbar^2} + o(\delta t) \to 0.$$

Это соответствует квантовому эффекту Зенона, согласно которому непрерывное измерение замораживает квантовую эволюции.

Чтобы получить нетривиальную эволюцию наобходима **перенормировка времени**

$$t_{Markov} = \frac{t_{quantum}}{\delta t}.$$

# Марковский процесс с непрерывным временем в дискретном пространстве

$$\frac{dp(n,t)}{dt} = \sum_{n'} m(n,n')p(n',t), \quad \sum_{n} m(n,n') = 1, \quad \text{if } n \neq n',\ m(n,n') \geqslant 0.$$

$$t_{Markov} = \frac{t_{quantum}}{\delta t} \quad \text{— перенормировка времени.}$$

iff $m(n,n') = m(n',n)$ — условие квантуемости (**н. и д.!**)

$$H_{n,n'} = \hbar\sqrt{m(n,n')}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_{n,n'}}, \quad \alpha_{n,n'} = -\alpha_{n',n} \in \mathbb{R}, \quad n \neq n'.$$

$\frac{D(D+1)}{2}$ произвольных параметров ($\frac{D(D-1)}{2}$ фазовых множителей, $D$ диагональных элементов).

$D$ калибровочных параметров ($D-1$ относительных фаз для $|n\rangle$, 1 сдвиг нулевого уровня энергии).

# Физически значимые параметры

После фиксации калибровки остаётся $\frac{D(D-1)}{2}$ независимых параметров.

- $D-1$ параметр задаёт разности между диагональными элементами оператора Гамильтона.
- Остаётся $\frac{(D-1)(D-2)}{2}$ независимых параметров, связанных с матрицей фаз (одна строка матрицы фаз может быть выбрана произвольно за счёт калибровки). **Как раз столько параметров мы недосчитались в случае дискретного времени.**

# Пример: марковский процесс с двумя состояниями

Условия сохранения вероятности и симметричности столбцов и строк допускает квантование только матриц марковской эволюции вида

$$m = \begin{pmatrix} -a^2 & a^2 \\ a^2 & -a^2 \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Соответствующий гамильтониан имеет вид

$$\hat{H} = \hbar \begin{pmatrix} \mathcal{E}_0 + \delta\mathcal{E} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} a \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} a & \mathcal{E}_0 - \delta\mathcal{E} \end{pmatrix} =$$

$$= \hbar \left( \mathcal{E}_0 \cdot \hat{1} + \cos\alpha \cdot a \cdot \hat{\sigma}_x + \sin\alpha \cdot a \cdot \hat{\sigma}_y + \delta\mathcal{E} \cdot \hat{\sigma}_z \right).$$

# Непрерывное время и непрерывная координата (**гипотезы**)

Марковский процесс

$$\frac{\partial\rho(t,x)}{\partial t} = \int m(x,x')\,\rho(x')\,dx' = m[\rho](x).$$

$m(x,x')$ — «обычная функция», то как для дискретной координаты:

$$U(x,x') = \sqrt{m(x,x')}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(x,x')}, \quad \alpha(x,x') = -\alpha(x',x), \quad t_{Markov} = \frac{t_{quantum}}{\delta t}$$

Если $m$ — оператор дифференцирования $m(x,x') = \delta^{(k)}(x-x')$, корень $\sqrt{m(x,x')}$ не существует.

$$m(x,x') = \delta^{(k)}(x-x') \sim a^{-(k+1)},$$

где $a \to 0$ — ширина пика $\delta$-функции.

$$\sqrt{m(x,x')} \sim a^{-(k+1)/2},$$

можно предположить, что

$$\sqrt{m(x,x')} = a^{(k+1)/2}\,\delta^{(k)}(x-x').$$

Множитель $a^{(k+1)/2}$ можно убрать перерастянув время

$$t_{Markov} = \frac{t_{quantum}}{\delta t} a^{(k+1)/2}.$$

Легко видеть, что для случая $m = \frac{\partial}{\partial x}$, т.е. $m(x - x') = \delta'(x - x')$, $\hat{H} = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x} + e\hbar A(x,t)$ (можно ещё добавить векторный потенциал)

$$k = 1, \quad t_{Markov} = t_{quantum} \quad \Rightarrow \quad a = \delta t.$$

Таким образом, перерастяжение времени должно зависеть от порядка производной

$$t_{Markov} = t_{quantum} \cdot \delta t^{(k-1)/2}.$$

**Но это пока гипотезы!**

## Bibliography

*М.Г. Иванов*, Как понимать квантовую механику. 2-е издание. — М., Ижевск: РХД, 2015.

Спасибо за внимание!

Thank you for your attention!

Михаил Геннадьевич Иванов,
доцент
кафедры теоретической физики,
Московский физико-технический институт (МФТИ)

Mikhail G. Ivanov
Associate Professor of the
Department of Theoretical Physics,
Moscow Institute of Physics and Technology (MIPT)

e-mail: ivanov.mg@mipt.ru