

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

«Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования “Московский Физико-Технический институт” (Национальный Исследовательский Университет)»

Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Факультет общей и прикладной физики

Кафедра инновационной педагогики

Межпредметные связи на примере избранных глав курсов линейной алгебры и общей физики

Бакалаврская квалификационная работа

Выполнил:
Черских Дмитрий Александрович

Научный руководитель:
кандидат физ.-мат. наук, доцент
Иванов Михаил Геннадьевич

Москва, 2021

Содержание

1	Введение	3
2	Задача о цепочке распадов	5
2.1	Введение	5
2.2	Условие задачи	5
2.3	Решение	5
2.4	Интерпретация результатов	6
2.4.1	Физический смысл собственных значений	6
2.4.2	Физический смысл собственных векторов	6
2.4.3	Физический смысл отрицательной компоненты	7
2.5	Обсуждение	7
3	Обобщения задачи о цепочке распадов	9
3.1	Постановка задачи	9
3.2	Собственные и присоединенные векторы	10
3.3	Переход от диагоналируемой матрицы к недиагоналируемой	11
3.4	Пример матрицы 2×2	11
3.5	Индукционный переход	13
3.6	Обсуждение	15
4	Характеристическое уравнение ОДУ, как вековое уравнение	16
4.1	Задача о движении заряженной частицы	18
4.2	Решение	18
4.3	Обсуждение	19
5	Моменты инерции и квадрупольные моменты	20
5.1	Момент инерции	20
5.2	Квадрупольный момент	20
5.3	Задача про момент инерции молекулы CH_4	21
5.3.1	Физическая постановка задачи	21
5.3.2	Математическая постановка задачи	21
5.3.3	Решение	22
5.4	Задача про квадрупольный момент молекулы CH_4	22
5.4.1	Физическая постановка задачи	22
5.4.2	Математическая постановка задачи	22
5.4.3	Решение	23
5.5	Задача про момент инерции молекулы C_{60}	23
5.6	Задача про квадрупольный момент молекулы C_{60}	23
5.7	Обсуждение	24
6	Заключение	25
	Список Литературы	26

1 Введение

Линейная алгебра используется в линейном программировании, эконометрике, в естественных науках и во многих других областях науки. В высших учебных заведениях линейная алгебра, как правило, изучается на первом-втором курсах [1], [7] и активно используется в большинстве предметов естественно-научного цикла, но оказывается одним из самых недооценённых у студентов младших курсов, которым он кажется слишком абстрактным.

Большинство курсов линейной алгебры избегают прикладных задач за исключением примеров из аналитической геометрии, таким образом, создание задачника, ориентированного на приложение представляется новой актуальной задачей. Данная работа направлена на наработку материала для такого задачника.

Более того, практика преподавания курсов общей и теоретической физики [4], [6], а также рядов других курсов, связанных с прикладной математикой показывает, что преподавателям систематически приходится проводить ликбез по тем или иным элементам курса линейной алгебры. Своевременная демонстрация приложений вводимых методов могла бы способствовать лучшему усвоению и запоминанию материала.

В данной работе освещается использование линейной алгебры в курсе общей физики. Также активно используются связи с курсом обыкновенных дифференциальных уравнений. Наполнение задач явным физическим смыслом станет дополнительной мотивацией студентов к их решению.

Основной целью данной работы является облегчение усвоения студентами линейной алгебры и методов линейной алгебры, применяющихся в других отраслях. Для её достижения формируются физически осмысленные задачи и примеры, выявляющие и строящие межпредметные связи линейной алгебры, механики и ядерной физики [2], представляющие результаты в доступной форме. При этом представленные задачи должны способствовать развитию у студентов навыков составления математических моделей физических процессов, работы с ними и их интерпретации.

Также проводится выявление межпредметных связей, присутствующих в соответствующих курсах, но недостаточно явно представленных. Проводится построение межпредметных связей, отсутствующих в соответствующих курсах по причине якобы тривиальности или недостаточного внимания к приложениям.

Содержание работы

Межпредметные связи устанавливаются на примере некоторых сложных для студентов тем. Одна из них — приведение матрицы к жордановой форме и свойства соответствующих линейных дифференциальных уравнений. Одна из причин сложности заключается в том, что данная тема недостаточно иллюстрируется хорошими физически осмысленными примерами. Студентам кажется, что это исключительный случай, представляющий чисто математический интерес. На самом деле приведение матрицы к жордановой форме часто связано с вырожденным или переходным случаями. Им посвящены отдельные главы.

В главе 2 рассмотрена задача о цепочке радиоактивных распадов, в которой каждый следующий изотоп получается радиоактивным распадом предыдущего. Записана соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих изменение числа атомов изотопов во времени. Эта система описывается нижнетреугольной матрицей. Для матрицы найдены собственные числа и собственные векторы и для случая, когда все собственные числа разные (случай общего положения), найдено общее решение системы дифференциальных уравнений, для которого обсужден физический смысл.

В главе 3 для той же задачи рассмотрен предельный переход к вырожденному случаю. В вырожденном случае два собственных числа матрицы совпадают, что соответствует совпадению скоростей распада двух изотопов в цепочке. Также записано общее решение си-

стемы дифференциальных уравнений. Показано, как случай общего положения переходит в жорданов случай, обсужден физический смысл.

В главе 4 демонстрируется сведение характеристического уравнения ОДУ к вековому уравнению системы ОДУ. Кратные корни характеристического уравнения соответствуют жорданову случаю, то есть помимо собственных векторов могут возникать и присоединенные векторы.

Глава 5, посвящена квадрупольным моментам и моментам инерции, их сходствам и различиям, которые подчеркиваются на примере задач про молекулы метана и фуллерена, при решении которых вместо подсчета «в лоб» используются соображения симметрии.

Апробация работы

Основные положения работы докладывались на LXIII Всероссийской научной конференции МФТИ (г. Москва, 2020г.). По решению членов жюри доклад был признан лучшим в секции педагогики и информационных технологий. Результаты работы опубликованы в сборнике «Труды 63-й Всероссийской научной конференции МФТИ» [8].

2 Задача о цепочке распадов

2.1 Введение

Продемонстрируем межпредметную связь линейной алгебры [7] и ядерной физики [2] на примере задачи о собственных числах и собственных векторах треугольной матрицы и задачи о многоступенчатом радиоактивном распаде. В качестве примера возьмем распад U-238.

2.2 Условие задачи

Есть радиоактивный изотоп номер 1, который распадается в какой-то другой радиоактивный изотоп номер 2, тот распадается в номер 3 и далее по цепочке до стабильного изотопа номер K ($\gamma_K = 0$). Время жизни изотопа с номером k : $\tau_k = 1/\gamma_k$. Если можно пренебречь реакциями, вызванными продуктами распада (в пределе малых концентраций), то количество атомов N_k изотопа с номером k зависит от времени следующим образом:

$$\frac{dN_k}{dt} = \sum_{l=1}^K \Gamma_{kl} N_l. \quad (1)$$

- 1) Записать матрицу Γ .
- 2) Найти для матрицы Γ собственные числа.
- 3) Найти для матрицы Γ собственные векторы (в качестве условия нормировки положить первую ненулевую компоненту равной 1).
- 4) Каков физический смысл собственных чисел?
- 5) Каков физический смысл собственных векторов? (Рассмотреть отдельно физический смысл положительных и отрицательных компонент собственных векторов.)
- 6) Что можно сказать про концентрации изотопов в минерале, который *давно* не обменивался веществом с окружением? Что значит «давно» в предыдущем вопросе? (Сформулируйте критерий.)

2.3 Решение

- 1) Матрица Γ имеет вид:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} -\gamma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \gamma_1 & -\gamma_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & -\gamma_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\gamma_{K-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma_{K-1} & -\gamma_K \end{pmatrix} \quad (2)$$

Все значения γ_K попарно различны.

- 2) Найдем собственные значения:

$$\begin{vmatrix} -\gamma_1 - \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \gamma_1 & -\gamma_2 - \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & -\gamma_3 - \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\gamma_{K-1} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma_{K-1} & -\gamma_K - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-\gamma_1 - \lambda)(-\gamma_2 - \lambda)\dots(-\gamma_K - \lambda) = 0$$

Тогда, $\lambda_1 = -\gamma_1$, $\lambda_2 = -\gamma_2$, ..., $\lambda_K = -\gamma_K$.

3) Теперь найдем собственные векторы. Будем искать их для матрицы размером 5×5 (обобщение на произвольный размер матрицы тривиально), результат представим сразу в виде матрицы из собственных векторов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\frac{\gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1}}{\gamma_1 \gamma_2} & \frac{\gamma_2}{\gamma_3 - \gamma_2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\frac{\frac{\gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1}}{\gamma_1 \gamma_2}}{(\gamma_2 - \gamma_1)(\gamma_3 - \gamma_1)} & \frac{\frac{\gamma_2}{\gamma_3 - \gamma_2}}{\gamma_2 \gamma_3} & \frac{\gamma_3}{\gamma_4 - \gamma_3} & 1 & 0 \\ \frac{\frac{\frac{\frac{\gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1}}{\gamma_1 \gamma_2}}{(\gamma_2 - \gamma_1)(\gamma_3 - \gamma_1)(\gamma_4 - \gamma_1)}}{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4} & \frac{\frac{\frac{\gamma_2}{\gamma_3 - \gamma_2}}{\gamma_2 \gamma_3}}{(\gamma_3 - \gamma_2)(\gamma_4 - \gamma_2)} & \frac{\frac{\gamma_3}{\gamma_4 - \gamma_3}}{\gamma_3 \gamma_4} & \frac{\gamma_4}{\gamma_5 - \gamma_4} & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда общее решение системы (1):

$$\begin{aligned} \vec{N}(t) = & C_1 e^{-\gamma_1 t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1} \\ \frac{\frac{\gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1}}{\gamma_1 \gamma_2} \\ \frac{\frac{\frac{\gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1}}{\gamma_1 \gamma_2}}{(\gamma_2 - \gamma_1)(\gamma_3 - \gamma_1)} \\ \frac{\frac{\frac{\frac{\gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1}}{\gamma_1 \gamma_2}}{(\gamma_2 - \gamma_1)(\gamma_3 - \gamma_1)(\gamma_4 - \gamma_1)}}{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4} \end{pmatrix} + C_2 e^{-\gamma_2 t} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\gamma_2}{\gamma_3 - \gamma_2} \\ \frac{\frac{\gamma_2}{\gamma_3 - \gamma_2}}{\gamma_2 \gamma_3} \\ \frac{\frac{\frac{\gamma_2}{\gamma_3 - \gamma_2}}{\gamma_2 \gamma_3}}{(\gamma_3 - \gamma_2)(\gamma_4 - \gamma_2)} \end{pmatrix} + \\ & + C_3 e^{-\gamma_3 t} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{\gamma_3}{\gamma_4 - \gamma_3} \\ \frac{\frac{\gamma_3}{\gamma_4 - \gamma_3}}{\gamma_3 \gamma_4} \end{pmatrix} + C_4 e^{-\gamma_4 t} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{\gamma_4}{\gamma_5 - \gamma_4} \end{pmatrix} + C_5 e^{-\gamma_5 t} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 — произвольные константы.

В силу отсутствия кратных собственных чисел, число собственных векторов совпадает с размерностью задачи, присоединенные векторы отсутствуют.

2.4 Интерпретация результатов

2.4.1 Физический смысл собственных значений

Собственные значения, взятые со знаком минус, равны постоянным распада, то есть вероятностям радиоактивного распада за единицу времени.

$$\tau_k = \int_0^{\infty} t \underbrace{d(-e^{-\gamma_k t})}_{dp([t, t+dt])} = \frac{1}{\gamma_k} \text{ — среднее время жизни изотопа номер } k.$$

Здесь $dp([t, t + dt])$ — вероятность распада за период времени $[t, t + dt]$.

2.4.2 Физический смысл собственных векторов

Каждый собственный вектор описывает цепочку распадов, начинающихся с некоторого изотопа, которому соответствует первая ненулевая компонента данного собственного вектора.

Все компоненты собственного вектора могут быть выбраны неотрицательными, если цепочка начинается с самого долгоживущего изотопа (т.е. с изотопа с наименьшей константой γ). Если проследить цепочку от самого долгоживущего изотопа (из числа изотопов с

$\gamma \neq 0$) вплоть до стабильного изотопа, для которого $\gamma = 0$, в нашем примере $\gamma_5 = 0$, то все компоненты собственного вектора кроме последней компоненты оказываются положительными. Ясно, что количество стабильного изотопа должно расти.

Количество ядер каждого изотопа должно быть неотрицательным, поэтому решение, пропорциональное соответствующему собственному вектору не имеет физического смысла, но это можно исправить, добавив к нему положительное постоянное количество стабильного изотопа, заканчивающего цепочку, т.е. вектор h_0 , умноженный на константу.

Если цепочка начинается не с самого долгоживущего изотопа, то в описывающем её собственном векторе могут встречаться отрицательные компоненты, что также означает накопление соответствующих изотопов в цепочке.

2.4.3 Физический смысл отрицательной компоненты

Положительное решение системы имеет следующий вид:

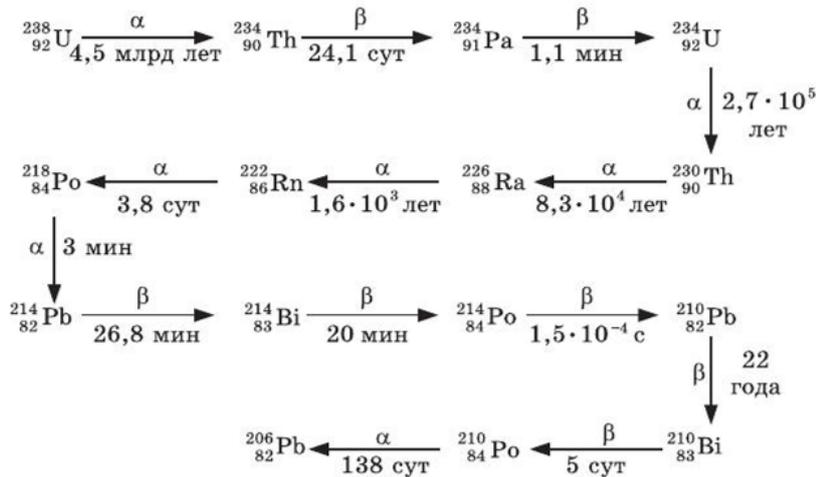
$$n = c_1 h_1 e^{-\gamma_1 t} + c_0 h_0.$$

Отсюда видно, что отрицательную компоненту у h_0 компенсирует положительная у h_1 :

$$\gamma_1 < \gamma_k, \quad \text{при } k \neq 1.$$

$$h_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad h_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -c_0 \end{pmatrix}.$$

Примером такого распада является распад урана-238:



Начиная с U-238, количество изотопа пропорционально времени жизни, так как период полураспада U-238 больше периодов полураспада последующих изотопов в цепочке.

2.5 Обсуждение

Мы рассмотрели задачу о многоступенчатом распаде радиоактивного изотопа и выяснили, что собственные значения нижнетреугольной матрицы распада, взятые со зна-

ком минус, равны постоянным распада, а каждый собственный вектор описывает цепочку распадов, начинающихся с некоторого изотопа, которому соответствует первая ненулевая компонента собственного вектора.

Если два собственных числа совпадают, то в приведенных формулах получается деление на ноль. Однако, мы можем перенормировать наши собственные векторы, в результате чего у нас исчезнет деление на ноль и станет видно, что кратные собственные числа дают совпадающие собственные векторы:

$$\begin{pmatrix} \frac{(\gamma_2 - \gamma_1)(\gamma_3 - \gamma_1)(\gamma_4 - \gamma_1)(\gamma_5 - \gamma_1)}{(\gamma_3 - \gamma_1)(\gamma_4 - \gamma_1)(\gamma_5 - \gamma_1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4}{(\gamma_4 - \gamma_1)(\gamma_5 - \gamma_1)} & \frac{(\gamma_3 - \gamma_2)(\gamma_4 - \gamma_2)(\gamma_5 - \gamma_2)}{(\gamma_4 - \gamma_2)(\gamma_5 - \gamma_2)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma_2 \gamma_3 \gamma_4}{(\gamma_4 - \gamma_1)(\gamma_5 - \gamma_1)} & \frac{\gamma_2 \gamma_3 \gamma_4}{(\gamma_4 - \gamma_2)(\gamma_5 - \gamma_2)} & \frac{(\gamma_4 - \gamma_3)(\gamma_5 - \gamma_3)}{(\gamma_4 - \gamma_3)(\gamma_5 - \gamma_3)} & 0 & 0 \\ \frac{\gamma_3 \gamma_4}{\gamma_5 - \gamma_1} & \frac{\gamma_3 \gamma_4}{\gamma_5 - \gamma_2} & \frac{\gamma_3 \gamma_4}{\gamma_5 - \gamma_3} & \frac{\gamma_5 - \gamma_4}{\gamma_4} & 0 \\ \gamma_4 & \gamma_4 & \gamma_4 & \gamma_4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Данная задача может быть полезна при преподавании линейной алгебры, как пример физического приложения. Задача допускает дальнейшие обобщения, связанные с приведением матрицы к жордановой форме и свойствами марковских случайных процессов. При этом интерпретации полученных результатов могут быть связаны не только с ядерной физикой, но и с химией, биологией, экономикой и информатикой.

Кроме того, для данной задачи можно проследить построение математических моделей физических процессов, их изучение и интерпретацию полученных результатов, что позволяет использовать задачу для воспитания у студентов культуры математического моделирования.

Некоторые обобщения данной задачи мы рассмотрим ниже.

3 Обобщения задачи о цепочке распадов

Ранее мы рассмотрели простейшую задачу о радиоактивном распаде. При её обсуждении полезно поставить задачу в более общем виде.

3.1 Постановка задачи

Рассмотрим процесс радиоактивного распада некоторого набора изотопов в пределе низкой концентрации (когда можно пренебречь взаимодействием распадающихся атомных ядер друг с другом). Пусть $k \in \{1, \dots, K\}$ — номер изотопа. $N_k(t)$ — среднее число атомов изотопа k в момент времени $t \in \mathbb{R}_+$.

Процесс описывается системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\frac{dN_k}{dt} = \sum_{l=1}^K \Gamma_{kl} N_l. \quad (3)$$

Диагональные элементы неположительны, их можно выразить через среднее время жизни изотопа τ_k как $\Gamma_{kk} = -\frac{1}{\tau_k}$. $\Gamma_{kk} = 0$ означает, что изотоп стабилен.

Недиагональные элементы неотрицательны, Γ_{kl} назовём скоростью распада в канале $k \rightarrow l$.

Недиагональные элементы матрицы Γ задают на множестве изотопов структуру ориентированного графа, в котором наличие ребра (k, l) означает отличие от нуля элемента Γ_{kl} .

В общем случае рассматриваемый процесс (3) не является марковским, поскольку возможны распады, когда одно ядро разваливается на несколько ядер. Т.е. возможна ситуация, когда $\sum_l \Gamma_{kl} > 0$, которая соответствует увеличению количества ядер.

Самопроизвольные распад атомного ядра всегда порождает ядра с меньшей массой. Это является проявлением закона сохранения энергии, т.к. радиоактивный распад всегда происходит с превращением части энергии покоя атомного ядра в кинетическую энергию продуктов распада.

Поскольку ядер одинаковой массы не бывает, мы можем упорядочить все изотопы по массе их ядер, т.е. на множестве состояний можно ввести линейный порядок:

$$k > l \Leftrightarrow m_k > m_l.$$

В силу этого цепочки взаимопревращений атомных ядер при радиоактивном распаде не содержат циклов, т.е. если изотоп k может в результате некоторой последовательности распадов превратиться в изотоп l , то обратное превращение невозможно.

При упорядочении изотопов по массе матрица Γ оказывается треугольной.

В реальных задачах времена жизни изотопов не совпадают, так что кратные собственные числа отсутствуют. Такое совпадение имеет нулевую вероятность, если не обеспечивается какой-либо симметрией. В силу отсутствия кратных собственных чисел число собственных векторов совпадает с размерностью задачи, присоединенные векторы отсутствуют.

Мы рассмотрим случай, когда каждый изотоп может распадаться только одним способом и порождает при этом ровно одно атомное ядро. (Если при этом рождаются, например, альфа-частицы, то мы их не учитываем, считая, что они быстро покидают исследуемый

образец.) Таким образом, мы рассмотрим распад по цепочке $A \rightarrow B \rightarrow \dots \rightarrow X$. Соответствующая матрица является bidiagonalной.

Хотя времена жизни изотопов (и соответствующие собственные числа) в реальных задачах не могут совпадать точно, они могут совпадать приближенно. Более того, возможна ситуация, когда собственные числа совпадают с точностью до погрешности измерений. Это вынуждает нас рассмотреть предельный переход от диагонализуемой матрицы к матрице, которая может быть приведена к жордановой форме [1].

3.2 Собственные и присоединенные векторы

Приведем без выводов некоторую общую информацию о собственных и присоединенных векторах и жордановой форме матриц для дальнейших ссылок и удобства чтения.

Собственным вектором линейного преобразования Γ , отвечающим собственному значению λ , называется такой ненулевой вектор $\vec{x}_0 \in L$, для которого: $\Gamma \vec{x}_0 = \lambda \vec{x}_0$.

Вектор \vec{x}_k называется **присоединенным вектором** k -го порядка преобразования Γ , отвечающим собственному значению λ , если вектор $\vec{y} = (\Gamma - \lambda E)^k \vec{x}_k$ является собственным вектором преобразования Γ . Если вектор \vec{x}_k — присоединенный, то можно его отнормировать так, что $\Gamma \vec{x}_k = \vec{x}_{k-1} + \lambda \vec{x}_k$.

Жорданова форма — это квадратная блочно-диагональная матрица, состоящая из блоков вида:

$$K = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Блоки вида K называют жордановыми клетками.

Рассмотрим случай, когда жорданова форма состоит только из одной клетки K . Заметим, что

$$K \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{h}_0} = \lambda \vec{h}_0; \quad K \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{h}_1} = \vec{h}_0 + \lambda \vec{h}_1; \quad K \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{h}_k} = \vec{h}_{k-1} + \lambda \vec{h}_k.$$

Получается, что \vec{h}_0 — собственный вектор, а $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \dots, \vec{h}_k$ — присоединенные. Векторы $\vec{h}_0, \dots, \vec{h}_k$ образуют базис.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\vec{x}} = K \vec{x}.$$

1) Если начальные данные задаются собственным вектором \vec{h}_0 :

$$\vec{x}(0) = \vec{h}_0,$$

то решение уравнения вида (1) будет следующим:

$$\vec{x}(t) = \vec{h}_0 e^{\lambda t}.$$

2) В случае если начальные данные задаются присоединенным вектором \vec{h}_1 , то есть $\vec{x}(0) = \vec{h}_1$, решение имеет вид:

$$\vec{x}(t) = \vec{h}_1 e^{\lambda t} + \vec{h}_0 t e^{\lambda t}.$$

Сделаем проверку:

$$\dot{\vec{x}} = \lambda \vec{h}_1 e^{\lambda t} + \vec{h}_0 e^{\lambda t} + \lambda \vec{h}_0 t e^{\lambda t} = \underbrace{\lambda \vec{h}_0}_{K \vec{h}_0} t e^{\lambda t} + \underbrace{(\lambda \vec{h}_1 + \vec{h}_0)}_{K \vec{h}_1} e^{\lambda t} = K \vec{h}_0 t e^{\lambda t} + K \vec{h}_1 e^{\lambda t}.$$

3) Если начальные данные задаются присоединенным вектором с номером k :

$$\vec{x}(0) = \vec{h}_k,$$

то решение уравнения (1) имеет следующий вид:

$$\vec{x}(t) = \frac{\vec{h}_k e^{\lambda t}}{0!} + \frac{\vec{h}_{k-1} t e^{\lambda t}}{1!} + \dots + \vec{h}_0 \frac{t^k}{k!} e^{\lambda t}. \quad (4)$$

Также сделаем проверку:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(t) &= \left(\frac{\lambda \vec{h}_k e^{\lambda t}}{0!} + \frac{\vec{h}_{k-1} e^{\lambda t}}{1!} \right) + \left(\frac{\lambda \vec{h}_{k-1} t e^{\lambda t}}{1!} + \frac{\vec{h}_{k-2} t e^{\lambda t}}{1!} \right) + \dots + \left(\frac{\lambda \vec{h}_1 t^{k-1} e^{\lambda t}}{(k-1)!} + \frac{\vec{h}_0 t^{k-1} e^{\lambda t}}{(k-1)!} \right) + \\ &+ \frac{\lambda \vec{h}_0 t^k e^{\lambda t}}{k!} = \frac{K \vec{h}_k e^{\lambda t}}{0!} + \frac{K \vec{h}_{k-1} t e^{\lambda t}}{1!} + \dots + \frac{K \vec{h}_1 t^{k-1} e^{\lambda t}}{(k-1)!} + \frac{K \vec{h}_0 t^k \lambda e^{\lambda t}}{k!}. \end{aligned}$$

3.3 Переход от диагонализуемой матрицы к недиагонализуемой

При рассмотрении системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида: $\frac{d\vec{f}}{dt} = M\vec{f}$ матрица может быть диагонализирована, либо приведена к жордановой форме. На первый взгляд различие между этими случаями представляется удивительным, потому что, как мы показали выше, для недиагонализуемой матрицы решение имеет существенно иной вид, при этом мы можем предельным переходом перейти от диагонализуемой матрицы к недиагонализуемой. В этой связи для выработки математической интуиции представляет интерес подробное рассмотрение такого предельного перехода.

Нам удобно рассмотреть матрицу bidiagonalного вида, которая при предельном переходе превращается в одну жорданову клетку. Более общие случаи сводятся к выбору базиса и ограничению задачи на соответствующее подпространство.

Встречающиеся ниже в разделах 3.4 и 3.5, матрицы можно рассматривать как матрицу Γ (или её блок) из задачи про радиоактивный распад, переписанную в другом базисе. Все приведенные выкладки можно повторить и в исходном базисе.

3.4 Пример матрицы 2×2

1) Возьмем матрицу размером 2×2 :

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

И запишем вековое уравнение:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 1 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0.$$

Получаем следующие собственные значения: λ_1 и λ_2 .

Теперь найдем собственные векторы:

- Для λ_1 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$.

Собственный вектор: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Для λ_2 : $A - \lambda E = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$x_1 + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot x_2 = 0$, где x_1, x_2 — компоненты собственного вектора \vec{v}_2 ;

$x_1 = \frac{-1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot x_2$;

$x_2 = x_2$.

Собственный вектор: $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) Перенормируем собственные векторы:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1}; \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_2} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{h}_1}; \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 - \lambda_1 \end{pmatrix}}_{\vec{h}_2}.$$

3) Мы рассмотрели предельный переход $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$. Для рассмотрения этого перехода удобно ввести следующие обозначения:

$$\vec{h}_+ = \frac{\vec{h}_2 + \vec{h}_1}{2}; \quad \vec{h}_- = \frac{\vec{h}_2 - \vec{h}_1}{2}; \quad \frac{\vec{h}_2 - \vec{h}_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \vec{k} = \frac{h_-}{\lambda_-};$$

$$\lambda_- = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}; \quad \lambda_+ = \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{2}.$$

В пределе остаётся один собственный вектор \vec{h}_1 , а вектор $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ становится присоединённым.

$$M\vec{k} = \frac{M(\vec{h}_2 - \vec{h}_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\lambda_2\vec{h}_2 - \lambda_1\vec{h}_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{(\lambda_+ + \lambda_-)\vec{h}_2 - (\lambda_+ - \lambda_-)\vec{h}_1}{2\lambda_1} = \frac{\lambda_+(\vec{h}_2 - \vec{h}_1)}{2\lambda_-} + \frac{\vec{h}_1 + \vec{h}_2}{2}.$$

Следовательно, $M\vec{k} = \lambda_+\vec{k} + \vec{h}_+$.

Это означает, что λ_+ — единственное собственное число, \vec{h}_+ — единственный собственный вектор, а \vec{k} — присоединённый вектор.

Мы видим, как происходит предельный переход к жорданову случаю с точки зрения собственных векторов:

$$\lambda_2, \lambda_+ \rightarrow \lambda_1 = \lambda,$$

$$\begin{aligned}\vec{h}_2, \vec{h}_+ &\rightarrow \vec{h}_1 = \vec{h}, \\ \frac{\vec{h}_2 - \vec{h}_1}{\lambda_2 - \lambda_1} &\rightarrow \frac{d\vec{h}_2}{d\lambda_2} = \vec{k}.\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим, что происходит с вкладом сливающихся собственных векторов в решение системы дифференциальных уравнений.

4) Разложим начальное состояние $\vec{f}(0)$ по \vec{h}_1, \vec{h}_2 :

$$\vec{f}(0) = \vec{k} = \frac{\vec{h}_2 - \vec{h}_1}{2\lambda_-}.$$

Распишем зависимость $\vec{f}(t)$ с учетом того, что $\vec{h}_2 = \vec{h}_+ + \vec{h}_-, \vec{h}_1 = \vec{h}_+ - \vec{h}_-$:

$$\begin{aligned}\vec{f}(t) &= \frac{e^{\lambda_2 t} \vec{h}_2 - e^{\lambda_1 t} \vec{h}_1}{2\lambda_-} = \frac{e^{\lambda_2 t} (\vec{h}_+ + \vec{h}_-) - e^{\lambda_1 t} (\vec{h}_+ - \vec{h}_-)}{2\lambda_-} = \frac{\vec{h}_+ (e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}) + \vec{h}_- (e^{\lambda_2 t} + e^{\lambda_1 t})}{2\lambda_-} = \\ &= e^{\lambda_+ t} \frac{\vec{h}_+ (e^{\lambda_- t} - e^{-\lambda_- t}) + \vec{h}_- (e^{\lambda_- t} + e^{-\lambda_- t})}{2\lambda_-} = e^{\lambda_+ t} \frac{\vec{h}_+ \operatorname{sh}(\lambda_- t) + \vec{h}_- \operatorname{ch}(\lambda_- t)}{\lambda_-} = \\ &= e^{\lambda_+ t} \left(\vec{h}_+ \frac{\operatorname{sh}(\lambda_- t)}{\lambda_-} + \vec{k} \cdot \operatorname{ch}(\lambda_- t) \right).\end{aligned}$$

В предельном случае, когда $\lambda_i \rightarrow \lambda$, получаем:

$$|\lambda_- t| = \frac{|\lambda_2 - \lambda_1|}{2} |t| \ll 1, \quad \frac{\operatorname{sh}(\lambda_- t)}{\lambda_-} \approx t, \quad \operatorname{ch}(\lambda_- t) \approx 1$$

Для произвольных начальных условий в предельном случае получаем:

$$\vec{f}(0) = C_0 \vec{h} + C_1 \vec{k}.$$

Общее решение:

$$M \vec{f} = e^{\lambda t} (C_1 \lambda \vec{h} t + C_1 \lambda \vec{k} + C_0 \vec{h}).$$

Мы можем пользоваться этим приближением на временах:

$$|t| \ll \frac{2}{|\lambda_2 - \lambda_1|}.$$

Задача

Для нижеуказанной матрицы вида (2) исследовать поведение собственных векторов и решения системы ОДУ вида (1) при $\mu \rightarrow \gamma$:

$$M = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ -\gamma & \mu \end{pmatrix}.$$

3.5 Индукционный переход

Выше мы рассмотрели предельный переход, приводящий к возникновению жордановой клетки размером 2×2 . Рассмотрим теперь образование жордановой клетки больших размеров. Это будет индукционный переход от жордановой клетки $N \times N$ ($N = 1, 2, \dots$) к клетке $(N + 1) \times (N + 1)$.

Возьмём на рассмотрение следующую матрицу размером $(N + 1) \times (N + 1)$:

$$K = \left(\begin{array}{cccccc|c} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu \end{array} \right).$$

Мы обсудим предельный переход, когда μ будет стремиться к λ , в этом случае матрица перейдет в жорданову клетку.

$$\vec{h}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{h}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{f}_\mu = \begin{pmatrix} f_N \\ f_{N-1} \\ \vdots \\ f_1 \\ f_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

\vec{h}_0 — собственный вектор с собственным числом λ ;

\vec{h}_k — присоединенный вектор порядка k с единицей в k -ой строке, где $k = 0, \dots, N$;

\vec{f}_μ — собственный вектор с собственным числом μ , который необходимо найти.

Найдем компоненты собственного вектора $\vec{f}(\mu)$:

$$f_0\lambda + 1 = \mu f_0, \quad f_0 = \frac{1}{\mu - \lambda},$$

$$f_1\lambda + f_0 = \mu f_1, \quad f_1 = \frac{f_0}{\mu - \lambda},$$

...

Тогда новый собственный вектор: $\vec{f}_\mu = \begin{pmatrix} (\mu - \lambda)^{-N-1} \\ (\mu - \lambda)^{-N-2} \\ \vdots \\ (\mu - \lambda)^{-2} \\ (\mu - \lambda)^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ \mu - \lambda \\ (\mu - \lambda)^2 \\ \vdots \\ (\mu - \lambda)^N \\ (\mu - \lambda)^{N+1} \end{pmatrix}.$

Когда $\mu = \lambda$ новый собственный вектор совпадает со старым. Будущий присоединенный вектор:

$$\vec{h}_{N+1} = \vec{f}_\mu - \vec{h}_0(\mu - \lambda)^{-N-1} - \vec{h}_1(\mu - \lambda)^{-N} - \dots - \vec{h}_N(\mu - \lambda)^{-1}.$$

Пусть $\vec{x}_\mu(0), \vec{x}_k(0) = \vec{h}_k$, причём $\vec{x}_\mu(t), \vec{x}_k(t)$ — решения системы обыкновенных дифферен-

циальных уравнений $\dot{\vec{x}} = K\vec{x}$. Тогда:

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= \underbrace{\left(\vec{h}_{N+1} + \frac{\vec{h}_N}{\mu - \lambda} + \frac{\vec{h}_{N-2}}{(\mu - \lambda)^2} + \dots + \frac{\vec{h}_0}{(\mu - \lambda)^{N+1}} \right)}_{\vec{f}_\mu} \underbrace{e^{\mu t}}_{e^{\lambda t} e^{(\mu - \lambda)t}} = \\ &= e^{\lambda t} \left(1 + (\mu - \lambda)t + \frac{(\mu - \lambda)^2 t^2}{2} + \dots + \frac{(\mu - \lambda)^{N+1} t^{N+1}}{(N+1)!} + o((\mu - \lambda)^{N+1} t^{N+1}) \right) \times \\ &\times \left(\vec{h}_{N+1} + \frac{\vec{h}_N}{\mu - \lambda} + \frac{\vec{h}_{N-1}}{(\mu - \lambda)^2} + \dots + \frac{\vec{h}_0}{(\mu - \lambda)^{N+1}} \right).\end{aligned}$$

Разложение справедливо при $|(\mu - \lambda)t| \ll 1$.

Пусть

$$\vec{x}_{N+1}(0) = \vec{h}_{N+1},$$

$$\vec{h}_{N+1}(t) = \vec{x}_\mu(t) - \vec{x}_0(t)(\mu - \lambda)^{-N-1} - \vec{x}_1(t)(\mu - \lambda)^{-N} - \dots - \vec{x}_N(t)(\mu - \lambda)^{-1}.$$

Используя формулу (4) для $x_k(t)$ ($k = 0, \dots, N$) получаем:

$$\begin{aligned}\vec{x}_{N+1}(t) &= \frac{\vec{h}_{N+1} e^{\lambda t}}{0!} (1 + o((\mu - \lambda)^{N+1} t^{N+1})) + \frac{\vec{h}_N t e^{\lambda t}}{1!} (1 + o((\mu - \lambda)^N t^N)) + \\ &+ \frac{\vec{h}_{N-1} t^2 e^{\lambda t}}{2!} (1 + o((\mu - \lambda)^{N-1} t^{N-1})) + \dots + \frac{\vec{h}_0 t^{N+1} e^{\lambda t}}{(N+1)!} (1 + o(1)).\end{aligned}$$

3.6 Обсуждение

Мы показали, что жорданов случай можно рассмотреть как предельный. Причём для близких по величине собственных чисел $\lambda_1 \approx \lambda_2$ формулы для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений в жордановом случае работают как приближение на временах $|t| \ll \frac{2}{|\lambda_2 - \lambda_1|}$.

4 Характеристическое уравнение ОДУ, как вековое уравнение

Для системы линейных однородных дифференциальных уравнений (ЛОДУ) 1-го порядка [5] мы получаем решение, содержащие члены пропорциональные $t^k e^{\lambda t}$ в случаях, когда матрица приводится к жордановой форме. Однако, похожие решения $t^k e^{\lambda t}$ нам встречались при решении ЛОДУ порядка n вида:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y^{(1)} + a_n y = 0. \quad (5)$$

Поскольку мы всегда можем свести дифференциальное уравнение степени n к n дифференциальным уравнениям первой степени, то введя в качестве новых неизвестных функций производные $x(t)$, мы можем ожидать, что в такой записи, при наличии кратных корней характеристического уравнения, у нас тоже появится матрица, сводимая к жордановой форме.

Для начала рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение (5):

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y^{(1)} + a_n y = 0,$$

где a_1, \dots, a_n — некоторые действительные числа.

$$y^{(k)} = x_k, \quad \text{где } k = 0, \dots, n-1.$$

По теореме о структуре общего решения линейного ОДУ его общее решение задается формулой:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

где $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ — фундаментальный набор решений уравнения (5).

Будем искать решение уравнения (5) в виде $y = e^{\lambda x}$, где $\lambda = \text{const}$ (метод Эйлера). Тогда

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, \quad \dots, \quad y^{(n-1)} = \lambda^{n-1} e^{\lambda x}, \quad y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}.$$

Подставим функции $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ в уравнение (5). Имеем

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{(n-1)} e^{\lambda x} + \dots + a_n e^{\lambda x} = 0.$$

Сократив данное уравнение на $e^{\lambda x} \neq 0$, получаем характеристическое уравнение ОДУ:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (6)$$

С другой стороны, мы можем свести однородное дифференциальное уравнение порядка n к системе из n однородных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = x_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-2} = x_{n-1} \\ \dot{x}_{n-1} = -a_1 x_{n-1} - a_2 x_{n-2} - \dots - a_{n-1} x_1 - a_n x_0 \end{cases}. \quad (7)$$

Система имеет вид (1), матрица её коэффициентов:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Вековое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & (-a_1 - \lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

Расписав определитель, получаем вековое уравнение, которое с точностью до общего знака совпадает с характеристическим уравнением (6) исходного ОДУ (5):

$$(-1)^n(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0).$$

Для матрицы коэффициентов системы ОДУ:

$$h_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_k \\ \lambda_k^2 \\ \vdots \\ \lambda_k^{n-1} \end{pmatrix} \text{ — собственный вектор, } \lambda_k \text{ — собственное число.}$$

Как мы знаем из теории ОДУ вида (5), в случаях, когда возникает кратный корень характеристического уравнения, следует искать решения вида $e^{\lambda t}$, $te^{\lambda t}$, $t^2e^{\lambda t}$ и т.д.

Таким образом, мы доказали, что кратные корни характеристического уравнения соответствуют жорданову случаю, то есть помимо собственных векторов могут возникать и присоединенные векторы. Рассмотрим это подробнее:

Пусть,

$$\begin{aligned} x(t) &= te^{\lambda t} \\ \dot{x}(t) &= t\lambda e^{\lambda t} + e^{\lambda t} \\ \ddot{x}(t) &= \underbrace{t\lambda^2 e^{\lambda t}}_{te^{\lambda t}\vec{h}} + \underbrace{\lambda e^{\lambda t}}_{e^{\lambda t}\vec{k}_1} \end{aligned}$$

Тогда, $\vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \end{pmatrix}$ — собственный вектор; $\vec{k}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \lambda \\ \vdots \end{pmatrix}$ — единственный присоединенный вектор.

Аналогично,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{t^m e^{\lambda t}}{m!} \\ \dot{x}(t) &= \frac{t^m \lambda e^{\lambda t}}{m!} + \frac{mt^{m-1} e^{\lambda t}}{m!} \\ \ddot{x}(t) &= \frac{t^m \lambda^2 e^{\lambda t}}{m!} + \frac{mt^{m-1} \lambda e^{\lambda t}}{m!} + \frac{m(m-1)t^{m-2} e^{\lambda t}}{m!} + \dots \\ \dddot{x}(t) &= \underbrace{\frac{t^m \lambda^3 e^{\lambda t}}{m!}}_{\frac{t^m e^{\lambda t} \vec{h}}{m!}} + \underbrace{\frac{mt^{m-1} \lambda^2 e^{\lambda t}}{m!}}_{\frac{t^{m-1} e^{\lambda t} \vec{k}_1}{(m-1)!}} + \underbrace{\frac{m(m-1)t^{m-2} \lambda e^{\lambda t}}{m!}}_{\frac{t^{m-2} e^{\lambda t} \vec{k}_2}{(m-2)!}} + \dots \end{aligned}$$

Тогда,

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ — собственный вектор; } \vec{k}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ — первый присоединенный вектор;}$$

$$\vec{k}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ — второй присоединенный вектор.}$$

Отсюда легко видеть общий вид присоединенных векторов порядка l .

Проиллюстрируем это на физически осмысленном примере. Возьмем уравнение второго порядка, то есть простейший, но нетривиальный случай.

4.1 Задача о движении заряженной частицы

Рассмотрим движение электрически заряженной частицы в потенциале $U(r) = -\frac{m\omega^2 r^2}{2}$ («перевернутый осциллятор») на плоскости под действием магнитного поля, перпендикулярного плоскости.

4.2 Решение

Запишем уравнение движения частицы:

$$m\ddot{\vec{r}} = \frac{q}{c}[\dot{\vec{r}} \times \vec{B}] + m\omega^2 \vec{r}.$$

Распишем уравнение по координатам:

$$\begin{cases} \ddot{x} - \frac{qB}{mc}\dot{y} - \omega^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \frac{qB}{mc}\dot{x} - \omega^2 y = 0 \end{cases} . \quad (8)$$

Введём новые обозначения:

$$\xi = x + iy; \quad \Omega = \frac{qB}{2mc}.$$

Сложим первое уравнение системы (8) со вторым, домноженным на i :

$$\ddot{\xi} + 2i\Omega\dot{\xi} - \omega^2 \xi = 0. \quad (9)$$

Для уравнения (9) соответствующая система первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \eta \\ \dot{\eta} = -2i\Omega\eta + \omega^2 \xi \end{cases} .$$

Будем искать решение уравнение в виде $\xi \sim e^{\lambda t}$:

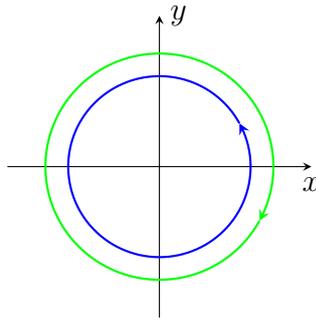
$$\lambda^2 + 2i\Omega\lambda - \omega^2 = 0.$$

Тогда

$$\lambda = -i\Omega \pm \sqrt{-\Omega^2 + \omega^2}.$$

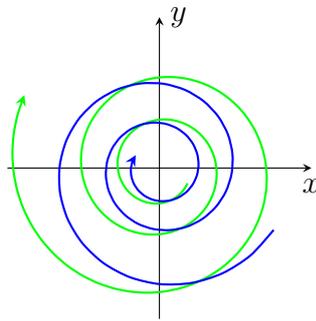
Рассмотрим все три возможных случая:

1)



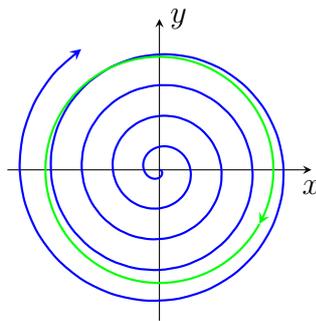
В случае $\Omega > \omega$ собственные колебания — вращения против и по часовой стрелки с угловыми скоростями $\omega_{1,2} = -\Omega \pm \sqrt{\Omega^2 - \omega^2}$.

2)



В случае $\Omega < \omega$ собственные «колебания» — движения с угловой скоростью Ω по часовой стрелки по скручивающейся и раскручивающейся логарифмическим спиральям $r = e^{-i\Omega t \pm \sqrt{\omega^2 - \Omega^2} t}$.

3)



В переходном случае $\Omega = \omega$ собственные «колебания» — движения с угловой скоростью Ω против часовой стрелки окружности и раскручивающейся спирали Архимеда $r = t \cdot e^{-i\Omega t}$.

4.3 Обсуждение

Данная задача — частный случай задачи о собственных колебаниях в присутствии гироскопических сил (таких как сила Лоренца и сила Кориолиса). Мы видим, что в присутствии гироскопических сил возможна переходная ситуация между устойчивым и неустойчивым динамическими режимами, когда вместо вектора собственной амплитуды возникает «вектор присоединенной амплитуды». Такая ситуация возможна только в том случае, когда без гироскопических сил положение равновесия становится неустойчивым.

5 Моменты инерции и квадрупольные моменты

Рассмотрим параллельно две темы: моменты инерции и квадрупольные моменты. В курсе общей физики эти темы рассматриваются в разных разделах, моменты инерции изучают в механике, а квадрупольные моменты [6] — в электродинамике. В связи с этим, полезно подчеркнуть с одной стороны их сходства, а с другой стороны различия, но для начала вспомним их определения, формулы и свойства.

5.1 Момент инерции

Момент инерции I — матрица, характеризующая массу тела и её характер распределения относительно начала координат.

Определение момента инерции:

$$I_{\alpha\beta} = \sum_k m_k \cdot (\delta_{\alpha\beta} r_k^2 - r_{k\alpha} r_{k\beta}).$$

Основные свойства:

$$I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}, \quad \text{tr } I = 2 \sum_k m_k r_k^2,$$

где $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ — номер координаты; k — номер частицы; m_k — масса частицы с номером k ; $r_{k\alpha}, r_{k\beta}$ — α - и β -компоненты соответственно радиус-вектора частицы с номером k ; $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера. Напомним, что

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha = \beta \\ 0, & \text{если } \alpha \neq \beta \end{cases}.$$

5.2 Квадрупольный момент

Квадрупольный момент Q — величина, характеризующая отклонение распределения электрического заряда во втором порядке по r от сферически симметричного.

Определение квадрупольного момента:

$$Q_{\alpha\beta} = \sum_k e_k \cdot (3r_{k\alpha} r_{k\beta} - r_k^2 \delta_{\alpha\beta}),$$

где e_k — заряд частицы с номером k ; $r_{k\alpha}, r_{k\beta}$ — α - и β -компоненты соответственно радиус-вектора частицы с номером k .

Основные свойства:

$$Q_{\alpha\beta} = Q_{\beta\alpha}, \quad \text{tr } Q = 0.$$

Как мы видим, квадрупольный момент и момент инерции очень похожи, как по свойствам, так и по способам вычисления, но между ними существует одно очень важное отличие. $I_{\alpha\beta}$ можно параметризовать шестью параметрами, а $Q_{\alpha\beta}$ — пятью. Эти моменты реализуют разные представления группы $SO(3)$:

$$I_{\alpha\beta} = \underbrace{\left(I_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} \frac{\text{tr } I}{3} \right)}_{5D} + \underbrace{\delta_{\alpha\beta} \frac{\text{tr } I}{3}}_{1D}$$
 — сумма двух неприводимых представлений (5-мерное + 1-мерное);

$$Q_{\alpha\beta} = \underbrace{Q_{\alpha\beta} - \underbrace{\delta_{\alpha\beta} \frac{\text{tr } Q}{3}}_0}_{5D} \text{ — одно неприводимое представление (5-мерное).}$$

Для момента инерции есть нетривиальные инвариантные подпространства в 6-мерном пространстве, которые соответствуют 5-мерному неприводимому представлению (симметричной матрице с нулевым следом) и 1-мерному неприводимому представлению (матрице пропорциональной единичной), а для квадрупольного момента нет.

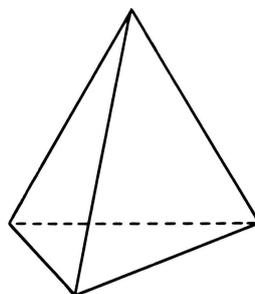
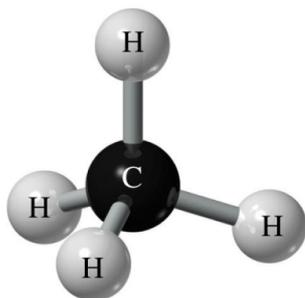
Можно придумать много частных примеров на вычисление квадрупольных моментов и моментов инерции, которые сводятся к диагонализации симметричной матрицы 3×3 , но мы рассмотрим две задачи в которых вместо счета «в лоб» используются соображения симметрии:

- 1) Задача про молекулу метана CH_4 .
- 2) Задача про молекулу фуллерена C_{60} .

5.3 Задача про момент инерции молекулы CH_4

Найти момент инерции для молекулы метана CH_4 .

5.3.1 Физическая постановка задачи



Молекула метана состоит из четырёх атомов водорода и одного атома углерода. Атом углерода расположен в центре правильного тетраэдра, а атомы водорода — в вершинах.

Сами атомы в свою очередь состоят из атомных ядер и электронов. Электроны при этом «размазаны» в пространстве, причем характерный размер электронных облаков соответствует длине химических связей.

Задачу облегчает то, что электроны легкие по сравнению с атомными ядрами: $\frac{m_e}{m_n} \approx 2 \cdot 10^{-3}$. Соответственно вкладом электронов в момент инерции можно пренебречь.

Ядро по сравнению с длиной химической связи маленькое $\frac{r_b}{r_c} \sim 10^5$. Соответственно мы можем считать, что есть 5 точечных частиц, одна из которых (атом углерода) находится в начале координат и не дает вклада в момент инерции, а остальные 4 (атомы водорода) расположены в вершинах правильного тетраэдра.

Найти момент инерции для молекулы метана CH_4 .

5.3.2 Математическая постановка задачи

Найти момент инерции системы пяти материальных точек, одна из которых располагается в центре правильного тетраэдра и четыре в вершинах. Масса углерода $m_C \approx 2 \cdot 10^{-26}$

кг, а масса водорода $m_H \approx 1.7 \cdot 10^{-27}$ кг.

5.3.3 Решение

Из соображений симметрии все векторы, направленные вдоль химических связей, будут собственными. Более того, из соображений симметрии собственные числа, соответствующие этим собственным векторам, будут одинаковыми.

Мы получили четыре различных собственных вектора с одинаковыми собственными числами. Можно выбрать из этих векторов любые три (они будут линейно независимыми) и по этим трем векторам разложить произвольный вектор в нашем трехмерном пространстве. Линейная комбинация собственных векторов с одинаковыми собственными числами снова дает собственный вектор.

Таким образом, оказывается, что все векторы в нашей задаче являются собственными, причем с одинаковыми собственными числами. Такое возможно только, если матрица момента инерции пропорциональна единичной матрице.

Получаем, что

$$I_{\alpha\beta} = \left(I_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} \frac{\text{tr} I}{3} \right) + \delta_{\alpha\beta} \frac{\text{tr} I}{3} = \delta_{\alpha\beta} \frac{\text{tr} I}{3}.$$

Так как

$$\text{tr} I = 2 \sum_k m_k r_k^2 = 8m_H r^2,$$

то

$$I_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \cdot \frac{8m_H r^2}{3}.$$

5.4 Задача про квадрупольный момент молекулы CH_4

Найти квадрупольный момент для молекулы метана CH_4 .

5.4.1 Физическая постановка задачи

Отрицательный электрический заряд размазан по электронному облаку, характерный размер которого порядка длины химической связи и равен 1 \AA . Положительный заряд сосредоточен в ядрах.

Из данных эксперимента, мы знаем, что все атомы водорода молекулы метана равноправны. Соответственно все химический связи также равноправны. Из этого следует, что в отсутствие внешних возмущений наша молекула образует правильный тетраэдр, для которого атомы водорода локализованы в вершинах, а атом углерода локализован строго по центру. Таким образом, молекула имеет симметрию тетраэдра.

Требуется найти квадрупольный момент для данной молекулы.

5.4.2 Математическая постановка задачи

Распределение заряда в молекуле метана описывается плотностью заряда $\rho(\vec{r})$, которая инвариантна относительно действия преобразований группы симметрии тетраэдра. Найти квадрупольный момент молекулы метана.

5.4.3 Решение

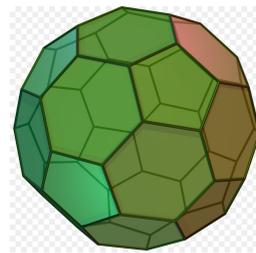
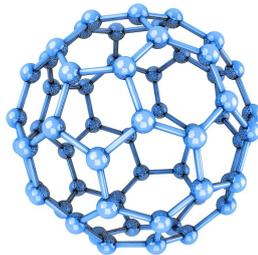
По аналогичным пункту 4.3.3 соображениям квадрупольный момент будет пропорционален единичной матрице:

$$Q_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \frac{\text{tr } Q}{3},$$

$$\text{tr } Q = 0 \Rightarrow Q_{\alpha\beta} = 0.$$

5.5 Задача про момент инерции молекулы C_{60}

Найти момент инерции для молекулы фуллерена C_{60} .



Молекула фуллерена состоит из шестидесяти атомов углерода, которые расположены в вершинах усеченного икосаэдра.

Аналогично случаю с метаном пренебрегаем вкладами электронов. Мы можем угадать 6 равноправных собственных векторов по направлениям, соединяющих центры противоположных пятиугольных граней (или можно взять 10 векторов в направлениях, соединяющих противоположные шестиугольники).

Ответ

Так как

$$\text{tr } I = 2 \sum_k m_k r_k^2 = 120m_C r^2,$$

то

$$I_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \cdot \frac{120m_C r^2}{3} = \delta_{\alpha\beta} \cdot 40m_C r^2.$$

5.6 Задача про квадрупольный момент молекулы C_{60}

Найти квадрупольный момент для молекулы фуллерена C_{60} .

Задача решается полностью аналогично случаю с метаном, только вместо группы симметрии тетраэдра возникает группа симметрии икосаэдра (фуллерен имеет форму усеченного икосаэдра, который имеет общую группу симметрий с додекаэдром и икосаэдром).

Ответ

$$Q_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \frac{\text{tr } Q}{3},$$

$$\text{tr } Q = 0 \Rightarrow Q_{\alpha\beta} = 0.$$

5.7 Обсуждение

В задачах про момент инерции и квадрупольный момент мы столкнулись с неприводимыми представлениями группы $SO(3)$ с размерностями 1 и 5. Знакомство с другими неприводимыми представлениями группы $SO(3)$ возможно на примере мультипольных моментов. В стандартном курсе линейной алгебры (не включающем тензоры) можно рассмотреть дипольный момент (3-мерное неприводимое представление группы $SO(3)$). В расширенных вариантах курса (включающих тензоры хотя бы в декартовых координатах) можно рассмотреть случай 2^l -польного момента ($2l+1$ -мерное неприводимое представление группы $SO(3)$).

Неприводимые представления группы $SO(3)$ имеют большое практическое значение для прикладной математики (сферические гармоники [9]), физики (квантовый момент импульса [4]) и химии (электронные орбитали [3]).

6 Заключение

В данной работе установлены межпредметные связи между линейной алгеброй и некоторыми темами, связанными с собственными и присоединёнными векторами и приведением матрицы к жордановой форме и свойствами соответствующих дифференциальных уравнений.

Матрицы, возникающие во многих задачах физики всегда диагонализуются. Таковы матрицы моментов инерции и квадрупольных моментов, которыми мы закончили наше рассмотрение. Это, а также то, что недиагонализуемая матрица представляет собой некоторый переходный или вырожденный случай приводит к тому, что студенты-физики часто осваивают их недостаточно.

В связи с этим мы рассмотрели два сюжета, приводящих к возникновению в матрице жордановых клеток. Это задачи о цепочке радиоактивных распадов и об однородном дифференциальном уравнении степени n . В обоих случаях нам удалось рассмотреть предельный переход к жорданову случаю и подобрать интересные физически осмысленные примеры.

Рассмотренные нами задачи представляют интерес с точки зрения теории колебаний, а также с точки зрения иллюстрации теории случайных процессов и ее физических приложений.

Результаты могут использоваться студентами младших курсов, которые хотят лучше разобраться с материалом и познакомиться с будущими предметами, а также преподавателями линейной алгебры, которые могут выносить на рассмотрение темы и задачи из данной работы, заменяя или дополняя некоторые задачи существующей программы по линейной алгебре. Работа может помочь сделать преподавание линейной алгебры более практико-ориентированным.

Также рассмотренные задачи и аналогичные им могут быть включены в качестве одной или двух глав в задачник по линейной алгебре с физически осмысленными задачами, важность создания которого упоминалась во Введении. Это показывает нам перспективы дальнейшей работы в данном направлении.

Список литературы

- [1] Беклемишев Д.В., Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учеб. — 7-е изд., стер. — М: Высш. шк., 1998. — 320с.
- [2] Бронштейн М.П., Атомы и электроны. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980. — 152 с.
- [3] Кузьменко Н.Е., Еремин В.В., Попков В.А., Начала химии: для поступающих в вузы / — 16-е изд., доп. и перераб. — М.: Лаборатория знаний, 2016. — 704 с.
- [4] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. 3. Квантовая механика (нерелятивистская теория) — 4-е изд., испр. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 768 с. ISBN 5-02-014421-5 (т. III)
- [5] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.
- [6] Терлецкий Я. П., Рыбаков Ю. П. Электродинамика: Учеб. пособие для студентов физ. спец. университетов. — 2-е изд., перераб. — М.: Высш. шк., 1990.—352 с.
- [7] Умнов, А. Е. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: учеб. пособие / — 3-е изд., испр. и доп. — ISBN 978-5-7417-0378-6
- [8] Черских Д.А., Иванов М.Г., Межпредметные связи на примере курсов линейной алгебры и ядерной физики / — Труды 63-й Всероссийской научной конференции МФТИ 23–29 ноября 2020 года. Гуманитарные науки и педагогика. — Москва : МФТИ, 2020.— 18 с.
- [9] Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции: Формулы, графики, таблицы М.: Наука, 1964. — 344 с.