

Основные формулы по годовому курсу «Механика и теория поля»

М. Г. Иванов

19 июня 2023 г.

1 Тензоры

Везде в курсе подразумевается, что все функции достаточно гладкие, а все необходимые для вычислений теоремы существования и единственности выполнены.

Закон преобразования тензора типа (n, m) при замене координат $x^M \rightarrow x^{M'}$

$$T^{M'_1 \dots M'_n}_{K'_1 \dots K'_m}(x') = T^{M_1 \dots M_n}_{K_1 \dots K_m}(x(x')) \frac{\partial x^{M'_1}}{\partial x^{M_1}}(x(x')) \dots \frac{\partial x^{M'_n}}{\partial x^{M_n}}(x(x')) \frac{\partial x^{K_1}}{\partial x^{K'_1}}(x') \dots \frac{\partial x^{K_m}}{\partial x^{K'_m}}(x').$$

При указании типа тензора кроме валентности (число верхних и нижних индексов) *следует указывать класс преобразований координат*, по отношению к которым объект ведёт себя как тензор.

Появление в одном члене двух одноимённых индексов подразумевает суммирование (свёртку) по всему диапазону изменения индекса. Такие индексы называются немymi. Один из индексов такой пары должен быть верхним, а другой — нижним. В декартовых координатах можно не различать верхние и нижние индексы.

Индекс, который в каждом члене выражения встречается ровно один раз называется свободным. Свободный индекс во всех членах должен быть в одном (верхнем или нижнем) положении. Свободный индекс (одновременно во всех членах) можно заменять конкретным значением.

Если в каком-то члене одноимённый индекс встретился более двух раз, то в выражении допущена ошибка.

Если аргумент функции или функционала несёт индексы, то подразумевается, что функция зависит от всех компонент, например, пусть $\alpha, \beta = 1, \dots, d$, а $\alpha' \beta' = 1', \dots, d'$, тогда

$$f(x^\alpha) \equiv f(x^\beta) \equiv f(x^1, x^2, \dots, x^d) \equiv f(x) \neq f(x^{\alpha'}) \equiv f(x^{\beta'}) \equiv f(x^{1'}, x^{2'}, \dots, x^{d'}) \equiv f(x')$$

Роль индекса у аргумента — показать число компонент и (если аргумент тензор) валентность тензора, к какой системе координат относится индекс. Имя индекса у аргумента при этом не важно.

Далее по повторяющим индексам везде подразумевается суммирование, если явно не оговорено обратное.

Для 3-мерного евклидова пространства в декартовых координатах

$$e_{\alpha\beta\gamma} = -e_{\alpha\gamma\beta} = -e_{\beta\gamma\alpha} = -e_{\gamma\beta\alpha}, \quad e_{123} = e_{xyz} = +1.$$

$$e_{\alpha\beta\gamma} e_{\mu\beta\gamma} = 2\delta_{\alpha\mu}, \quad e_{\alpha\beta\gamma} e_{\mu\nu\gamma} = \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu}.$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_\alpha b_\alpha, \quad [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_\gamma = e_{\alpha\beta\gamma} a_\alpha b_\beta.$$

$$\nabla_\alpha = \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \quad \nabla_\alpha x_\beta = \nabla_\alpha r_\beta = \delta_{\alpha\beta}, \quad \operatorname{div} \mathbf{a} = (\nabla, \mathbf{a}) = \nabla_\alpha a_\alpha, \quad \operatorname{rot} \mathbf{a} = [\nabla \times \mathbf{a}], \quad (\operatorname{rot} \mathbf{a})_\gamma = e_{\alpha\beta\gamma} \nabla_\alpha a_\beta.$$

$$\operatorname{grad} \varphi = \nabla \varphi, \quad (\operatorname{grad} \varphi)_\alpha = \nabla_\alpha \varphi, \quad (\nabla, \nabla) = \nabla_\alpha \nabla_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} = \Delta.$$

2 Лагранжев формализм

Действие — функционал от траектории системы $x^\alpha(t)$ в конфигурационном пространстве:

$$S[x^\alpha(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(x^\alpha, \dot{x}^\alpha, t) dt$$

Функция Ларганжа $L(x, \dot{x}, t)$ часто (но не всегда) в классической механике — разность кинетической и потенциальной энергий.

Вариация действия — функционал от траектории системы $x^\alpha(t)$ и вариации траектории $\delta x^\alpha(t)$ с граничными условиями $\delta x^\alpha(t_{0,1}) = 0$:

$$\delta S[x^\alpha(t), \delta x^\alpha(t)] = \left. \frac{d}{d\varepsilon} S[x^\alpha(t) + \varepsilon \delta x^\alpha(t)] \right|_{\varepsilon=0} = S[x^\alpha(t) + \delta x^\alpha(t)] - S[x^\alpha(t)] + o(\delta x).$$

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} \delta x^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \delta \dot{x}^\alpha \right) dt = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \delta x^\alpha \Big|_{t_0}^{t_1}}_0 + \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right)}_{\frac{\delta S}{\delta x^\alpha(t)}} \delta x^\alpha dt.$$

Выражение в скобках в последнем интеграле называется вариационной производной. Условие экстремальности действия — условие, что $\delta S = 0$ для произвольной вариации $\delta x^\alpha(t)$ (при условии $\delta x^\alpha(t_{0,1}) = 0$) требует обращения вариационной производной в нуль. Это даёт нам уравнения движения в форме уравнений Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\delta S}{\delta x^\alpha(t)} \equiv \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = 0.$$

Также через функцию Лагранжа L определяются обобщённые импульсы $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}$ (компоненты ковектора), обобщённые силы $F_\alpha = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha}$ (компоненты ковектора только для линейных преобразований), энергия $\mathcal{E} = \dot{x}^\alpha p_\alpha - L$ (скаляр).

Пусть имеется некоторая замена обобщённых координат и времени, непрерывно зависящая от параметра s :

$$t' = T(x^\alpha, t, s), \quad x'^\alpha = X^\alpha(x^\alpha, t, s),$$

причём эта замена оставляет неизменным действие, или (что эквивалентно) подынтегральное выражение в действии (включая dt !)

$$L(x^\alpha, \dot{x}^\alpha, t) dt = L(x'^\alpha, \dot{x}'^\alpha, t') dt'.$$

Такая замена называется *симметрией действия*. Согласно теореме Э.Нётер, симметрии действия соответствует закон сохранения некоторой величины p_s

$$\frac{dp_s}{dt} = 0, \quad p_s = \left(p_\alpha \frac{\partial X^\alpha}{\partial s} - \mathcal{E} \frac{\partial T}{\partial s} \right)_{s=0}.$$

3 Гамильтонов формализм

Если выполняется условие

$$\det \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial \dot{x}^\beta} \right) \equiv \det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^\alpha \partial \dot{x}^\beta} \right) \neq 0,$$

то функция Лагранжа называется невырожденной. В этом случае локально обобщённые скорости \dot{x}^α могут быть выражены через обобщённые импульсы

$$\dot{x}^\alpha = V^\alpha(x^\alpha, p_\alpha, t)$$

и с помощью преобразования Лежандра по функции Лагранжа может быть построена функция Гамильтона — энергия как функция обобщённых координат, обобщённых импульсов и времени:

$$H(x^\alpha, p_\alpha, t) = p_\beta V^\beta(x^\alpha, p_\alpha, t) - L(x^\alpha, V^\alpha(x^\alpha, p_\alpha, t), t).$$

Функция Гамильтона позволяет записать уравнения динамики как уравнения первого порядка — уравнения Гамильтона, которые в канонических переменных (обобщённых координатах и импульсах) имеют вид

$$\dot{x}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}.$$

Переход от функции Гамильтона к функции Лагранжа выполняется аналогично. Условие того, что обобщённые импульсы могут быть выражены через обобщённые скорости как $p_\alpha = P_\alpha(x^\alpha, \dot{x}^\alpha, t)$ (условие невырожденности функции Гамильтона)

$$\det \left(\frac{\partial \dot{x}^\alpha}{\partial p_\beta} \right) \equiv \det \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \right) \neq 0,$$

$$L(x^\alpha, \dot{x}^\alpha, t) = \dot{x}^\beta P_\beta(x^\alpha, \dot{x}^\alpha, t) - H(x^\alpha, P_\alpha(x^\alpha, \dot{x}^\alpha, t), t)$$

Функция от обобщённых координат, обобщённых импульсов и времени называется *наблюдаемой величиной* или просто *наблюдаемой* $F(x^\alpha, p_\alpha, t)$. Для пары наблюдаемых F, G определяется *скобка Пуассона*, которая в канонических переменных имеет вид

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial x^\alpha} \frac{\partial G}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \frac{\partial G}{\partial x^\alpha} = \sum_\alpha \left(\frac{\partial F}{\partial x^\alpha} \frac{\partial G}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \frac{\partial G}{\partial x^\alpha} \right).$$

Для канонических переменных (необходимое и достаточное условие каноничности)

$$\{x^\alpha, p_\beta\} = \delta_\beta^\alpha, \quad \{x^\alpha, x^\beta\} = \{p_\alpha, p_\beta\} = 0.$$

Для произвольной наблюдаемой $F = F(x, p, t)$ и функции Гамильтона $H(x, p, t)$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}.$$

4 Уравнение Гамильтона-Якоби

В уравнении Гамильтона-Якоби действие является не функционалом, а функцией от конечного момента времени и конечной точки траектории, при этом траектория удовлетворяет уравнениям Эйлера Лагранжа

$$S(t_1, x_1^\alpha) = \int_{t_1}^{t_1} L(x, \dot{x}, t) dt, \quad x^\alpha(t_1) = x_1^\alpha, \quad \frac{\delta S}{\delta x^\alpha(t)} \equiv \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = 0.$$

Производные от действия по конечной точке оказываются связанными с импульсами и энергией

$$\frac{\partial S(t, x)}{\partial t} = -\mathcal{E}, \quad \frac{\partial S(t, x)}{\partial x^\alpha} = p_\alpha.$$

Поскольку энергия выражается через импульсы с помощью функции Гамильтона получаем дифференциальное уравнение на функцию $S(t, x)$ — уравнение Гамильтона-Якоби

$$\mathcal{E} = H(x, p, t) \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial t} + H \left(x^\alpha, \frac{\partial S}{\partial x^\alpha}, t \right) = 0.$$

Если вам повезло найти полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби, т.е. его решение $S(t, x^\alpha, a_\alpha)$ с параметрами a_α , число которых равно числу степеней свободы, причём

$$\det \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial a_\beta} \right) = \det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^\alpha \partial a_\beta} \right) \neq 0,$$

то следующие величины будут сохраняться (не зависеть от времени): $a_\alpha, \frac{\partial S}{\partial a_\alpha}$. Этого достаточно для решения уравнений динамики исходной гамильтоновой системы.

5 Движение твёрдого тела и неинерциальные системы отсчёта

Скорость вращения вокруг начала координат с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$: $\mathbf{v} = [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}]$.

Момент инерции

$$I_{\alpha\beta} = \sum_a m_a (r_a^2 \delta_{\alpha\beta} - x_{a\alpha} x_{a\beta}) = \begin{pmatrix} \sum m(y^2 + z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(x^2 + z^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2 + y^2) \end{pmatrix}.$$

Момент инерции относительно оси \mathbf{n}

$$I_{\mathbf{n}} = I_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = \int (r^2 - (\mathbf{r}, \mathbf{n})^2) dm = \int r_\perp^2 dm, \quad \mathbf{r}_\perp = \mathbf{r} - \mathbf{n}(\mathbf{n}, \mathbf{r}).$$

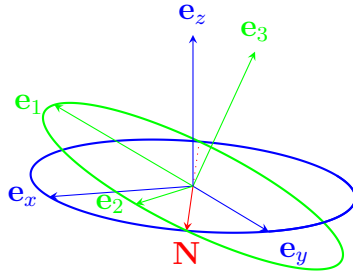
Момент импульса и момент силы

$$\mathbf{L} = \sum_a [\mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a], \quad L_\alpha = I_{\alpha\beta} \Omega^\beta, \quad \dot{\mathbf{L}} \equiv \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{K} \equiv \sum_a [\mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_a].$$

Энергия вращения

$$\mathcal{E}_{\text{вр.}} = \frac{1}{2} I_{\alpha\beta} \Omega^\alpha \Omega^\beta = \frac{1}{2} (\mathbf{\Omega}, \mathbf{L}) = \frac{1}{2} (I^{-1})^{\alpha\beta} L_\alpha L_\beta.$$

Углы Эйлера (как в теоретической физике)



Переход от неподвижной системе к подвижной определяется следующим образом:

- * Поворот вокруг \mathbf{e}_z на угол φ (*угол прецессии*) совмещает ось y' с линией узлов \mathbf{N} .
- * Поворот вокруг \mathbf{N} на угол θ (*угол нутации*) совмещает ось z' с осью x^3 .
- * Поворот вокруг \mathbf{e}_3 на угол ψ (*угол собственного вращения*) совмещает оси x'' и y'' с x^1 и x^2 .

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_3 &= \cos \theta \mathbf{e}_z + \sin \theta (\cos \varphi \mathbf{e}_x - \sin \varphi \mathbf{e}_y) \end{aligned}$$

Вектор угловой скорости твёрдого тела имеет компоненты $(\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ если его разложить по векторам $\mathbf{e}_z, \mathbf{N}, \mathbf{e}_3$. получаем

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_z + \dot{\theta} \mathbf{N} + \dot{\psi} \mathbf{e}_3.$$

Введём неинерциальную систему отсчёта, начало отсчёта которой задаётся радиус-вектором $\mathbf{R}(t)$ и движется со скоростью $\mathbf{V}(t) = \dot{\mathbf{R}}(t)$ и ускорением $\mathbf{W}(t) = \dot{\mathbf{V}}(t)$. Также неинерциальная система вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}(t)$. Производные от \mathbf{R} , \mathbf{V} и $\boldsymbol{\Omega}$ мы определим по отношению к невращающейся системе отсчёта, но разлагать их будем по вращающемуся базису. Векторы с двумя штрихами относятся к неинерциальной системе. Силы инерции, действующие на частицу имеют вид

$$\mathbf{F}_{\text{инерц.}} = -m\mathbf{W}'' - m[\dot{\boldsymbol{\Omega}}'' \times \mathbf{r}''] + m[\boldsymbol{\Omega}'' \times [\mathbf{r}'' \times \boldsymbol{\Omega}'']] + 2m[\mathbf{v}'' \times \boldsymbol{\Omega}''].$$

Эти четыре члена называются соответственно: *сила инерции поступательного движения*, *сила инерции вращения*, *центробежная сила*, *сила Кориолиса*.

6 Специальная теория относительности

Здесь и далее при употреблении двойных знаков \pm, \mp верхний знак соответствует соглашениям принятым в лекциях и конспекте, а нижний — 2-му тому курса теоретической физики Ландау и Лифшица.

Пространство-время Минковского — 4-мерное пространство (время $x^0 = ct$ и 3 пространственных координаты $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$), в котором введена метрика Минковского

$$g_{ij} = \pm \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} = g^{ij}.$$

Метрика Минковского переходит в себя при сдвигах, отражениях, поворотах пространственных координат, преобразованиях Лоренца (бустах) и их комбинациях.

Преобразование Лоренца от условно неподвижной (нештрихованной) системы к системе движущейся со скоростью $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ (штрихованной) имеет вид (обратная матрица отличается знаком скорости)

$$x^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} x^i, \quad \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} = \Lambda_{x, v}^{i'} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v/c & 0 & 0 \\ -\gamma v/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Удобно параметризовать преобразования Лоренца через *быстроту* θ :

$$v = c \operatorname{th} \theta, \quad \gamma = \operatorname{ch} \theta, \quad \gamma v/c = \operatorname{sh} \theta.$$

При преобразованиях Лоренца в одном направлении быстроты (в отличие от скоростей) складываются.

С помощью метрики Минковского определяются аналог расстояния — *интервал* s и собственное время вдоль мировой линии τ

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = \pm(-c dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) = \mp c^2 d\tau^2.$$

Метрика и обратная метрика g^{ij} ($g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i$) позволяет поднимать и опускать индексы и определить скалярное произведение 4-мерных векторов.

$$a_i = g_{ij} a^j, \quad b^i = g^{ij} b_j, \quad F^i{}_j = F_{kj} g^{ik} = F^{ik} g_{kj}, \quad (a, b) = a^i b_i = a_i b^i = g_{ij} a^i b^j = g^{ij} a_i b_j.$$

4-мерный вектор можно записывать через компоненты, причём пространственные компоненты часто объединяют в 4-мерный вектор

$$A^i = (A^0; \underbrace{A^1; A^2; A^3}_{\mathbf{A}=\mathbf{A}^\alpha}) = (A^0; \mathbf{A}) = (A^0; A^\alpha), \quad A^i B_i = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 = \pm(-A^0 B^0 + (\mathbf{A}\mathbf{B})).$$

Для безмассовой частицы $\tau = 0$ и соответствующие 4-мерные величины не определены.

Кинематические 4-мерные величины определяются с помощью дифференцирования по собственному времени частицы:

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = (\gamma c; \gamma \mathbf{v}) \text{ — 4-скорость, } u^i u_i = \mp c^2,$$

$$w^i = \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = (\gamma^4(\mathbf{v}, \mathbf{w})/c; \gamma^4(\mathbf{v}, \mathbf{w})\mathbf{v}/c^2 + \gamma^2 \mathbf{w}) \text{ — 4-ускорение, } w^i u_i = 0$$

$$p^i = m u^i = (\mathcal{E}/c, \mathbf{p}) \text{ — 4-импульс (определён и для безмассовой частицы, для которой } u^i \text{ не определена!)}, \mp p^i p_i = \mathcal{E}^2/c^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2 \text{ (позволяет вычислить эффективную массы системы и функцию Гамильтона свободной частицы)},$$

$$f^i = \frac{dp^i}{d\tau} \text{ — 4-сила,}$$

$$m \text{ — масса не зависит от системы отсчёта, связана с энергией в системе центра инерции } E_0 = m c^2,$$

$$L^{ij} = x^i p^j - x^j p^i \text{ — 4-мерный момент импульса.}$$

В качестве коэффициента пропорциональности между 3-мерной скоростью и 3-мерным импульсом выступает не масса, а энергия: $\mathbf{p} = \mathcal{E} \mathbf{v}/c^2$.

Для всех 4-мерных величин мы используем единицы измерения, соответствующие единицам измерения соответствующих 3-мерных величин. Это позволяет класть $c = 1$, а потом восстанавливать c из соображений размерности.

7 Электромагнитное поле

4-потенциал $A^i = (\varphi; \mathbf{A})$, φ — скалярный потенциал, \mathbf{A} — векторный потенциал.

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

При калибровочном (градиентном) преобразовании потенциалов

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f \quad \Leftrightarrow \quad A_i \rightarrow A'_i = A_i \pm \nabla_i f$$

поля \mathbf{E} и \mathbf{H} не меняются.

Тензор электромагнитного поля

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j}, \quad A_i = \pm(-\varphi; \mathbf{A}),$$

$$F_{ij} = \pm \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & H_z & -H_y \\ E_y & -H_z & 0 & H_x \\ E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}, \quad F^i{}_j = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & H_z & -H_y \\ E_y & -H_z & 0 & H_x \\ E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}$$

Дуальный тензор электромагнитного поля:

$$\tilde{F}_{ik} = \frac{1}{2} e_{iklm} F^{lm}, \quad e_{0123} = -e^{0123} = 1.$$

Инварианты электромагнитного поля:

$$F^{ik} F_{ik} = 2(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2), \quad F^{ik} \tilde{F}_{ik} = 4(\mathbf{E} \mathbf{H}).$$

4-потенциал и тензор электромагнитного поля преобразуются при замене координат так, как полагается тензорам соответствующей валентности. В частности при преобразовании Лоренца со скоростью $(v, 0, 0)$ получаем

$$F_{i'j'} = F_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}},$$

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & E'_y &= \gamma(E_y - \frac{v}{c}H_z), & E'_z &= \gamma(E_z + \frac{v}{c}H_y), \\ H'_x &= H_x, & H'_y &= \gamma(H_y + \frac{v}{c}E_z), & H'_z &= \gamma(H_z - \frac{v}{c}E_y). \end{aligned}$$

Уравнение движения заряженной частицы (импульс не обобщённый, а кинематический: $\mathbf{p} = \mathcal{E}\mathbf{v}/c^2$, в нерелятивистском пределе $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$)

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]$$

В 4-мерном виде

$$m\dot{w}^i = \frac{q}{c}F^i_j u^j.$$

Для релятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле в 4-мерной записи (l — произвольный монотонный параметр вместо времени) действие имеет вид

$$S[x^i(l)] = \int_{t_0}^{t_1} \left(-mc^2 \sqrt{\mp g_{ij} \frac{dx^i}{dl} \frac{dx^j}{dl}} \pm \frac{q}{c} A_i(x) \frac{dx^i}{dl} \right) dl$$

Действие для нерелятивистской и релятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле

$$S[\mathbf{r}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - q\varphi(\mathbf{r}, t) + \frac{q}{c}(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)) \right) dt, \quad S[\mathbf{r}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \left(-mc^2 \sqrt{1 - \dot{\mathbf{r}}^2/c^2} - q\varphi(\mathbf{r}, t) + \frac{q}{c}(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)) \right) dt$$

Обобщённый импульс \mathbf{P} отличается от кинематического на векторный потенциал

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} \text{ (нерелятивистский случай)}, \quad \mathbf{p} = \mathcal{E}\mathbf{v}/c^2 \text{ (релятивистский случай)}.$$

Функции Гамильтона имеют вид который очевиден, если помнить, что выражение $\mathbf{P} - \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ — это просто кинематический импульс

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{P}, t) = \underbrace{\frac{(\mathbf{P} - \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2}{2m}}_{\text{кинетическая энергия } \frac{mv^2}{2}} + q\varphi(\mathbf{r}, t), \quad H(\mathbf{r}, \mathbf{P}, t) = \sqrt{m^2c^4 + c^2 \left(\mathbf{P} - \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right)^2} + q\varphi(\mathbf{r}, t).$$

Из параметризации полей через потенциалы следуют следующие тождества

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \end{cases} \Leftrightarrow \partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} + \partial_k F_{ij} = 0$$

— 1-я пара уравнений Максвелла.

2-я пара уравнений Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \end{cases} \Leftrightarrow \nabla_k F^{ik} = \pm \frac{4\pi}{c} j^i, \quad j^i = (c\rho; \mathbf{j})$$

получается вариацией действия для электромагнитного поля

$$S[A_i(\underline{x})] = \int \left(-\frac{F^{ij}F_{ij}}{16\pi c} \pm \frac{1}{c^2} j^i(\underline{x}) A_i(\underline{x}) \right) d^4\underline{x}.$$

Член, описывающий взаимодействия поля с частицами здесь записан через 4-мерную плотность тока $j^i = (c\rho; \mathbf{j})$, здесь ρ — объёмная плотность заряда, \mathbf{j} — 3-мерная плотность тока

$$\pm \sum_a \frac{e_a}{c} \int A_i(\underline{X}_a(l_a)) \frac{dX_a^i}{dl_a} dl_a = \pm \frac{1}{c^2} \int_U A_i(\underline{x}) j^i(\underline{x}) d^4\underline{x}.$$

Уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

Микроскопические плотности заряда и тока

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \mathbf{v}(t) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)).$$

8 Преобразование Фурье

Функция одной переменной:

$$\tilde{f}(\omega) = F[f](\omega) = \int \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} f(t) dt, \quad f(t) = \int \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f}(\omega) d\omega,$$

Функция на пространстве Минковского

$$\tilde{A}_i(k_j) = \int \frac{e^{\mp i x^j k_j}}{(2\pi)^2} A_i(x^k) d^4 x, \quad A_i(x^j) = \int \frac{e^{\pm i x^j k_j}}{(2\pi)^2} \tilde{A}_i(k_k) d^4 k.$$

Здесь $k^j = (\frac{\omega}{c}; \mathbf{k})$ — 4-мерный волновой вектор, $x^j = (ct; \mathbf{r})$ — 4-мерный радиус-вектор, $x^j k_j = \pm(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$ — их скалярное произведение.

9 Дельта-функция

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} f(x_0), & a < x_0 < b, \\ 0, & x_0 < a, x_0 > b; \end{cases}$$

$$\delta(\alpha x) = \frac{\delta(x)}{|\alpha|}, \quad \delta(f(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|f'(x_n)|}, \quad f(x_n) = 0,$$

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \frac{dk}{2\pi}.$$

Формула Сохотского: $\lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{x - i\delta} = \mathcal{P} \frac{1}{x} + i\pi \delta(x).$

$$\delta^3(\mathbf{r}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z), \quad \delta^4(\underline{x}) = \delta(ct) \delta(x) \delta(y) \delta(z).$$

10 Электро- и магнито-статика

Дипольный момент системы зарядов:

$$\text{электрический } \mathbf{d} = \sum_a e_a \mathbf{r}_a,$$

$$\text{магнитный } \boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c} \sum_a e_a [\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a].$$

Тензор квадрупольного момента

$$Q_{\alpha\beta} = \sum_a e_a (3x_{a\alpha} x_{a\beta} - (\mathbf{r}_a)^2 \delta_{\alpha\beta}).$$

Разложение потенциалов по мультипольным моментам ($\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$)

$$\varphi = \frac{e}{r} + \frac{(\mathbf{d}, \mathbf{n})}{r^2} + \frac{Q_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta}{2r^3} + \dots$$

Поле магнитного диполя (черта — усреднение по времени)

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{[\bar{\boldsymbol{\mu}} \times \mathbf{r}]}{r^3}, \quad \bar{\mathbf{H}} = \frac{3(\bar{\boldsymbol{\mu}}, \mathbf{n})\mathbf{n} - \bar{\boldsymbol{\mu}}}{r^3}.$$

Система зарядов во внешнем поле

$$U_e = e\varphi - (\mathbf{d}, \mathbf{E}) + \frac{1}{6} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} Q_{\alpha\beta} + \dots;$$

$$\bar{U}_m = -(\bar{\boldsymbol{\mu}}, \mathbf{H}), \quad \bar{\mathbf{F}} = (\bar{\boldsymbol{\mu}}, \nabla)\mathbf{H}, \quad \bar{\mathbf{M}}_F = [\bar{\boldsymbol{\mu}} \times \mathbf{H}].$$

11 Волновые уравнения

$$-\square A^i \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A^i}{\partial t^2} - \Delta A^i = \frac{4\pi}{c} j^i.$$

Калибровка Лоренца:

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0.$$

Запаздывающие потенциалы:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \iiint \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}';$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \iiint \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}'.$$

Плотность W и поток \mathbf{S} энергии электромагнитного поля

$$W = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{8\pi}, \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}].$$

Плотность импульса \mathbf{g} и тензор напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$ электромагнитного поля

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = \frac{\mathbf{S}}{c^2}, \quad \sigma_{\alpha\beta} = W\delta_{\alpha\beta} - \frac{E_\alpha E_\beta + H_\alpha H_\beta}{4\pi}.$$

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

$$T^{ik} = \mp \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{4} g^{ik} F_{lm} F^{lm} - F^{il} F^k_l \right);$$

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} W & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ S_y/c & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ S_z/c & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W & \mathbf{S}/c \\ \mathbf{S}/c & \sigma_{\alpha\beta} \end{pmatrix}.$$

Баланс энергии-импульса электромагнитного поля

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} + \frac{1}{c} F^{ik} j_k = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} + (\mathbf{j}, \mathbf{E}) = 0, \\ \frac{\partial g_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \rho E_\alpha + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{H}]_\alpha = 0. \end{cases}$$

12 Плоская монохроматическая волна

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \} = \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}_0 e^{\pm i k^m x_m} \} = (\operatorname{Re} \mathbf{E}_0) \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}) + (\operatorname{Im} \mathbf{E}_0) \sin(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}).$$

$$k^m = (\omega/c, \mathbf{k}), \quad k_m k^m \equiv \mp \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \mathbf{k}^2 \right) = 0.$$

$$\mathbf{H} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}], \quad (\mathbf{n}, \mathbf{H}) = 0, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{k}, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Вектор поляризации

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{E}_0}{|\mathbf{E}_0|} = e_1 \mathbf{e}^{(1)} + e_2 \mathbf{e}^{(2)}, \quad (\mathbf{e}^{(1)} \mathbf{e}^{(2)*}) = 0, \quad (\mathbf{e}^{(1,2)}, \mathbf{n}) = 0, \quad |\mathbf{E}_0| = \sqrt{\mathbf{E}_0^* \mathbf{E}_0}.$$

Линейный базис: $\mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{e}^{(x)}$, $\mathbf{e}^{(2)} = \mathbf{e}^{(y)}$, $(\mathbf{n} \parallel z)$,
циркулярный базис

$$\mathbf{e}^{(+1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}^{(x)} + i \mathbf{e}^{(y)}), \quad \mathbf{e}^{(-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}^{(x)} - i \mathbf{e}^{(y)}).$$

Усреднение по времени

$$\frac{\operatorname{Re} \{ \mathbf{A}_0 e^{-i\omega t} \} \operatorname{Re} \{ \mathbf{B}_0 e^{-i\omega t} \}}{\operatorname{Re} \{ \mathbf{A}_0 e^{-i\omega t} \} \operatorname{Re} \{ \mathbf{B}_0 e^{-i\omega t} \}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0^*).$$

Усреднение по поляризации $\langle e_\alpha e_\beta^* \rangle = \frac{1}{2} (\delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta)$.

13 Излучение и рассеяние электромагнитных волн

Интенсивность мультипольного излучения

$$dI_d = \frac{1}{4\pi c^3} [\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]^2 d\Omega, \quad d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi,$$

$$I_d = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2; \quad I_m = \frac{2}{3c^3} \ddot{\boldsymbol{\mu}}^2; \quad I_q = \frac{1}{180c^5} \ddot{Q}_{\alpha\beta} \ddot{Q}_{\alpha\beta}.$$

Сила радиационного трения

$$\mathbf{F}_{fr} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}.$$

«Классический радиус», сечение рассеяния э.м. волны на свободной частице (σ_T) и осцилляторе

$$r_0 = \frac{e^2}{mc^2}; \quad \sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_0^2; \quad \sigma = \sigma_T \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}.$$