

Геометрия и тригонометрия на плоскости Минковского

М. Г. Иванов*

29 мая 2007 г.

УДК 531.18:530.12

Аннотация

В пособии рассмотрены преобразования Лоренца в двумерном пространстве Минковского и их геометрический смысл. При этом параллельно даётся описание преобразований Лоренца и поворотов на евклидовой плоскости, в процессе которого выявляется как сходство, так и различие этих преобразований. Пособие предназначено для студентов 2-3 курсов МФТИ, уже знакомых со специальной теорией относительности из курса общей физики и начинающих изучать курс теории поля.

Содержание

1. Алгебраическая точка зрения	2
2. Механическая (нерелятивистская) точка зрения	3
3. Расстояние и интервал	4
4. Базисные векторы и годографы	6
5. Поворот	7
6. Буст	8
7. Круговой угол	10
8. Гиперболический угол (быстрота)	10
9. Механическая (релятивистская) точка зрения	11
10. Сопутствующие системы отсчёта	13
11. Ускорение протяжённого тела	15
12. Неинерциальная система отсчёта	16

*e-mail: mgi@mi.ras.ru

Специальная теория относительности (СТО) — очень геометрическая теория. Мы обсудим часть этой геометричности, рассмотрев аналогию между обычной (круговой) и гиперболической тригонометрией. Ведь даже в обычной кинематике, прежде чем рассматривать повороты в пространстве, изучают плоские повороты, а геометрия в учебниках обычно предшествует стереометрии, так и мы, прежде чем переходить к пространству-времени Минковского, начнём с рассмотрения плоскости Минковского.

1. Алгебраическая точка зрения

Итак, у нас есть замечательная функция экспонента, производная от которой совпадает с самой экспонентой:

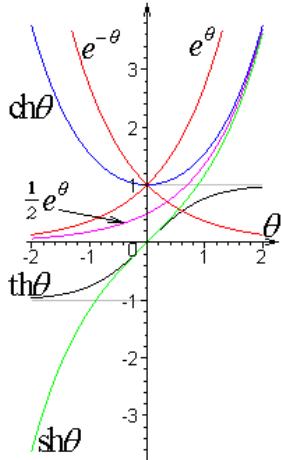


Рис. 1. Гиперболические функции и экспоненты

$$\frac{d}{d\theta} e^\theta = e^\theta. \quad (1)$$

Чётная часть экспоненты — гиперболический косинус, нечётная — гиперболический синус, их отношение — гиперболический тангенс:

$$\text{ch } \theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}, \quad \text{sh } \theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2},$$

$$\text{th } \theta = \frac{\text{sh } \theta}{\text{ch } \theta}.$$

При больших значениях аргумента гиперболические синус и косинус не различаются: $\text{ch } \theta - \text{sh } \theta \rightarrow 0$, $\text{ch } \theta \approx \text{sh } \theta \approx \frac{e^\theta}{2}$, $\text{th } \theta \rightarrow 1$ (см. рис. 1.).

Легко убедиться (используя (1)), что

$$\frac{d}{d\theta} \text{ch } \theta = \text{sh } \theta, \quad \frac{d}{d\theta} \text{sh } \theta = \text{ch } \theta.$$

Также легко проверить основное тождество гиперболической тригонометрии и формулы для гиперболических синуса и косинуса суммы:

$$\text{ch}^2 \theta - \text{sh}^2 \theta = 1, \quad (2)$$

$$\text{ch}(\theta + \psi) = \text{ch } \theta \text{ ch } \psi + \text{sh } \theta \text{ sh } \psi, \quad (3)$$

$$\text{sh}(\theta + \psi) = \text{ch } \theta \text{ sh } \psi + \text{sh } \theta \text{ ch } \psi. \quad (4)$$

Аналогично могут быть введены и обычные тригонометрические функции:

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \operatorname{Re} e^{i\varphi} = \text{ch}(i\varphi), \quad (5)$$

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \operatorname{Im} e^{i\varphi} = \frac{1}{i} \text{sh}(i\varphi), \quad (6)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = i \operatorname{th}(i\varphi),$$

$$\frac{d}{d\theta} \cos \varphi = -\sin \varphi,$$

$$\frac{d}{d\theta} \sin \varphi = \cos \varphi,$$

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad (7)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \quad (8)$$

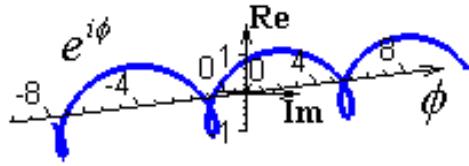


Рис. 2. Комплексная экспонента

2. Механическая (нерелятивистская) точка зрения

Тригонометрические функции (косинус и синус) можно представить как чётное и нечётное решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} R(\varphi) = -R(\varphi). \quad (9)$$

Если рассматривать φ как время, то это — уравнение движения (нерелятивистского движения, описываемого обычным 2-м законом Ньютона) гармонического осциллятора (грузика на пружинке) с единичной массой и единичной жёсткостью. В этом случае при отклонении грузика от устойчивого положения равновесия (от нуля) на него действует сила, равная величине отклонения и направленная в сторону положения равновесия. Эта возвращающая сила заставляет грузик колебаться около положения равновесия.

Аналогично гиперболические функции (гиперболические косинус и синус) можно представить как чётное и нечётное решения дифференциального уравнения

$$\frac{d^2}{d\theta^2} X(\theta) = X(\theta). \quad (10)$$

Если рассматривать θ как время, то это — уравнение движения (нерелятивистского движения, описываемого обычным 2-м законом Ньютона) «неправильного» гармонического осциллятора с единичной массой и единичной жёсткостью. В этом случае при отклонении грузика от неустойчивого положения равновесия (от нуля) на него действует сила, равная величине отклонения и направленная в сторону отклонения. Эта отталкивающая сила заставляет грузик экспоненциально увеличивать отклонение от положения равновесия.

В обоих случаях в силу линейности дифференциальных уравнений мы можем рассматривать $R(\varphi)$ и $X(\theta)$ как векторы в двухмерном пространстве (увеличение размерности больше 2 не даст ничего нового, т.к. движение всё равно будет проходить в одной плоскости). В обоих случаях сила направлена вдоль линии, проходящей через начало координат, т.е. момент силы равен нулю, и момент импульса сохраняется. Закон сохранения момента импульса для точки в центральном поле даёт закон равных площадей (аналог 2-го закона Кеплера).

Рассмотрим две параметрические кривые, являющиеся решениями уравнений (9) и (10) в двумерном случае:

$$x = \cos \varphi, \quad y = \sin \varphi \quad (11)$$

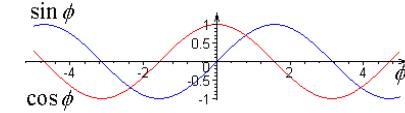


Рис. 3. Косинус – чётный, синус – нечётный

(единичная окружность, поскольку $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$) и

$$x = \operatorname{ch} \theta, \quad y = \operatorname{sh} \theta \quad (12)$$

(правая ветвь единичной гиперболы, поскольку $\operatorname{ch}^2 \theta - \operatorname{sh}^2 \theta = 1$ и $\operatorname{ch} \theta > 0$).

Когда круговой угол φ пробегает значения $(-\infty, +\infty)$, точка бесконечное число раз пробегает окружность против часовой стрелки. Когда гиперболический угол θ пробегает значения $(-\infty, +\infty)$, точка один раз снизу вверх пробегает по правой ветви гиперболы.

Из кривых (11) и (12) могут быть получены общие решения уравнений (9) и (10) (в силу их линейности) с помощью растяжений (сжатий) по x и y , поворота системы координат и сдвига по времени. Что такое семейство решений общее, легко убедиться, подсчитав параметры (2 уравнения 2-го порядка требуют для однозначного задания решения 4 параметра — 2 коэффициента сжатия, 1 угол поворота, 1 сдвиг по времени).

Закон равных площадей говорит, что приращение площади, заметаемой радиус-вектором, пропорционально приращению времени. В случае единичной окружности и единичной гиперболы легко видеть, что площадь между осью x , радиус-вектором и дугой кривой равна половине аргумента.

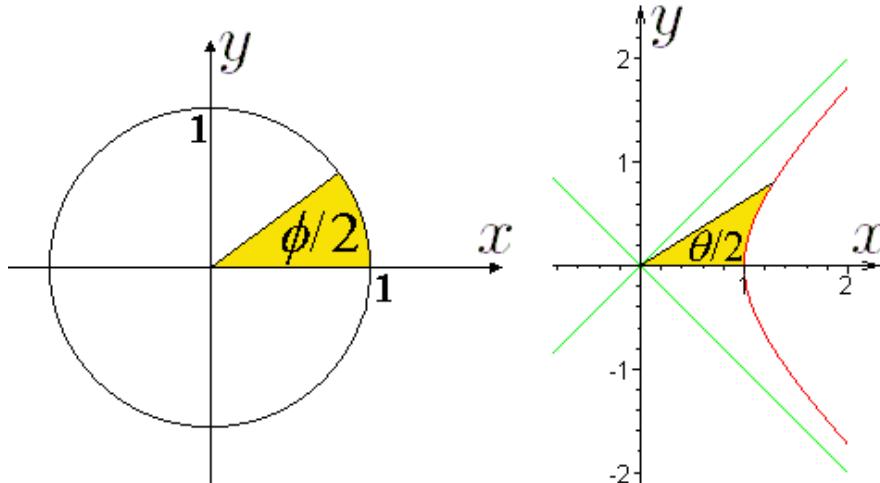


Рис. 4. Связь аргумента тригонометрической/гиперболической функции с площадью сектора

Коэффициент пропорциональности «между временем» и площадью можно вычислить, рассмотрев бесконечно малое приращение площади в любой (например, в нулевой) момент времени (ниже мы ещё к этому вернёмся и докажем подробнее):

$$dA = x dy/2,$$

$$\cos 0 = \operatorname{ch} 0 = \sin' 0 = \operatorname{sh}' 0 = 1, \quad \sin 0 = \operatorname{sh} 0 = 0,$$

$$dA = d\varphi/2, \quad \text{или} \quad dA = d\theta/2.$$

3. Расстояние и интервал

Ещё раз рассмотрим те же две параметрические кривые

$$x = \cos \varphi, \quad y = \sin \varphi$$

(единичная окружность) и

$$t = \operatorname{sh} \theta, \quad x = \operatorname{ch} \theta \quad (13)$$

(единичная гипербола). Только теперь для гиперболы мы ось y переименовали в ось t .

Уравнения этих кривых имеют вид

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{и} \quad x^2 - t^2 = 1. \quad (14)$$

Это уравнения кривых второго порядка. Главное отличие между ними — появление в уравнении гиперболы знака минус.

Уравнение окружности имеет хороший геометрический смысл: «геометрическое место точек, удалённых на равное расстояние от начала координат». Квадрат радиуса окружности меняется от нуля до бесконечности, при нулевом радиусе окружность сжимается в точку. Расстояние dl между двумя точками, координаты которых различаются на (dx, dy) , определяется по теореме Пифагора:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2. \quad (15)$$

Это уравнение задаёт на плоскости евклидову метрику. Такому определению длины соответствует скалярное произведение

$$(\vec{A}, \vec{B}) = A^x B^x + A^y B^y. \quad (16)$$

Аналогичным образом можно рассматривать и уравнение гиперболы, только вместо расстояния придётся ввести интервал. Интервал ds между двумя точками, координаты которых различаются на (dt, dx) , определяется как

$$ds^2 = dt^2 - dx^2. \quad (17)$$

Это уравнение задаёт на плоскости метрику Минковского. Такому определению интервала соответствует скалярное произведение

$$(\underline{U}, \underline{V}) = U^t V^t - U^x V^x. \quad (18)$$

Векторы в пространстве с таким скалярным произведением (в *пространстве Минковского*) мы будем обозначать подчёркнутыми буквами, в отличие от векторов с обычным скалярным произведением (в *евклидовом пространстве*), которые будем обозначать буквами со стрелками.

Квадрат расстояния между двумя различными точками всегда положителен, а квадрат интервала может иметь любое значение (положительное, отрицательное или нуль). Если квадрат интервала оказывается положительным, то интервал — это время, измеренное часами, которые двигались между точками по прямой. Мы не случайно обозначили одну из координат t — это время, измеренное часами, движение которых описывается осью t . (Нельзя забывать, что в СТО время, которое показывают часы, зависит от того, как они движутся.)

Чтобы формула для интервала была корректна, время t и координата x должны измеряться в одинаковых единицах. Это соответствует тому, что какая-то скорость объявляется универсальным коэффициентом перевода «секунд в метры» и считается равной единице. Ниже мы увидим, что эту роль выполняет скорость света в вакууме.

На рисунке 5а изображены концентрические окружности с квадратами радиусов $0^2, 0, 5^2, 1^2, 1, 5^2, 2^2$. На рисунке 5б — «концентрические гиперболы» (псевдоокружности) с квадратами радиусов $-2^2, -1, 5^2, -1^2, -0, 5^2, 0^2, 0, 5^2, 1^2, 1, 5^2, 2^2$.

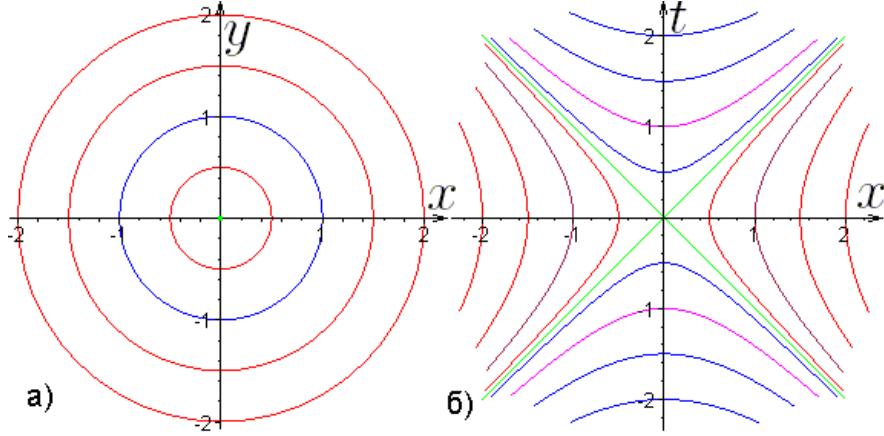


Рис. 5. Концентрические окружности и псевдоокружности

Мы видим, что вместо одной единичной окружности мы получили 2 плюс-минус единичных гипербол, состоящих в общей сложности из 4-х ветвей. Эти 4 ветви и будут в дальнейшем играть (иногда вместе, а иногда по очереди) роль единичной окружности.

4. Базисные векторы и годографы

Вернёмся к нашим параметрическим кривым. Изобразим теперь на рисунках радиус-векторы

$$\vec{R} = (\cos \varphi, \sin \varphi) \quad \text{и} \quad \underline{X} = (\operatorname{sh} \theta, \operatorname{ch} \theta) \quad (19)$$

и их производные по параметрам φ и θ («скорости»)

$$\vec{V} = (-\sin \varphi, \cos \varphi) \quad \text{и} \quad \underline{U} = (\operatorname{ch} \theta, \operatorname{sh} \theta). \quad (20)$$

Легко проверить явно, что векторы \vec{R} и \vec{V} являются единичными (в обычном евклидовом смысле), причём \vec{V} повёрнут относительно \vec{R} на $\frac{1}{4}$ оборота против часовой стрелки. Векторы \vec{R} и \vec{V} ортогональны (т.е. $(\vec{R}, \vec{V}) = 0$). Вектор \vec{R} единичен по построению, т.к. его конец лежит на единичной окружности. Вектор \vec{V} ортогонален \vec{R} , т.к. является производной от вектора постоянной длины и единичен, т.к. производная берётся по естественному параметру (длине) вдоль кривой.

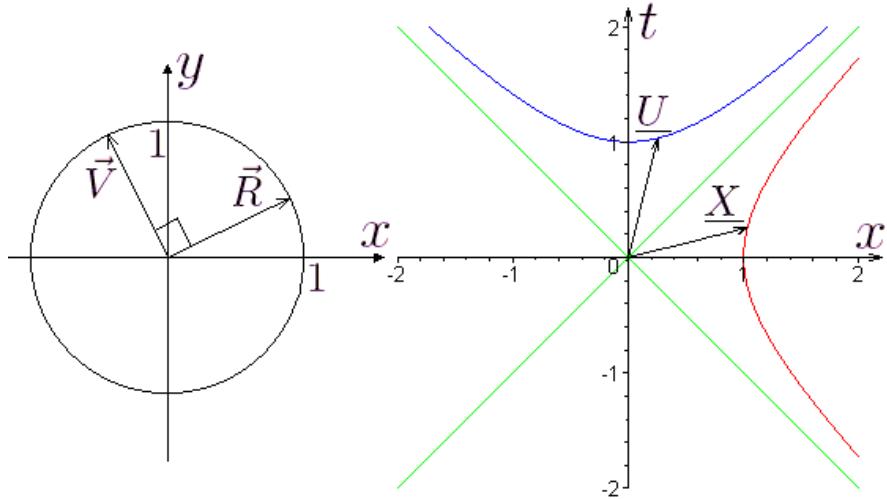


Рис. 6. Новые базисы

Легко проверить явно, что векторы \underline{U} и \underline{X} также являются единичными (в смысле метрики Минковского $\underline{U}^2 = 1$, а $\underline{X}^2 = -1$), причём \underline{U} связан с \underline{X} отражением относительно прямой $t = x$. Векторы \underline{X} и \underline{U} ортогональны (т.е. $(\underline{X}, \underline{U}) = 0$ в смысле метрики Минковского).

Вектор \underline{X} единичен по построению, т.к. его конец лежит на единичной псевдоокружности. Вектор \underline{U} ортогонален \underline{X} , т.к. является производной от вектора постоянной длины (в смысле метрики Минковского) и единичен, т.к. производная берётся по естественному параметру (интервалу) вдоль кривой.

Таким образом, по мере того как конец вектора \vec{R} движется по единичной окружности, конец вектора \vec{V} движется по той же окружности с опережением на $\frac{1}{4}$ оборота (т.е. годограф совпадает с самой единичной окружностью). По мере того как конец вектора \underline{X} движется по одной (правой) гиперболе снизу вверх, конец вектора \underline{U} симметрично движется по другой (верхней) гиперболе слева направо. Уравнение годографа (верхней гиперболы):

$$t^2 - x^2 = 1, \quad t \geq 1. \quad (21)$$

5. Поворот

Если взять векторы \vec{R} и \vec{V} в качестве базисных векторов новой системы координат, то новая система координат будет повёрнута относительно системы (x, y) на угол φ . Обратная матрица поворота оказывается составлена из компонент единичных векторов \vec{R} и \vec{V} :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Если мы возьмём $(x', y') = (1, 0)$, то получим, что первый столбец матрицы образован компонентами вектора \vec{R} (в новых, штрихованных координатах \vec{R} имеет компоненты $(1, 0)$), если мы возьмём $(x', y') = (0, 1)$, то получим, что второй столбец матрицы образован компонентами вектора \vec{V} (в новых, штрихованных координатах \vec{V} имеет компоненты $(0, 1)$).

В повёрнутой системе координат (x', y') формула (15) для длины по-прежнему справедлива (только со штрихами над координатами), это следует из того, что

скалярные произведения базисных векторов такие же, как и в исходной системе ($(\vec{R}, \vec{R}) = 1$, $(\vec{R}, \vec{V}) = 0$, $(\vec{V}, \vec{V}) = 1$). Поэтому все окружности с центром в начале координат после поворота задаются теми же уравнениями.

При последовательном выполнении двух поворотов в плоскости (x, y) , углы этих поворотов складываются. В этом можно легко убедиться из рисунка, или перемножая матрицы поворотов (и пользуясь формулами (7), (8) для косинуса и синуса суммы углов).

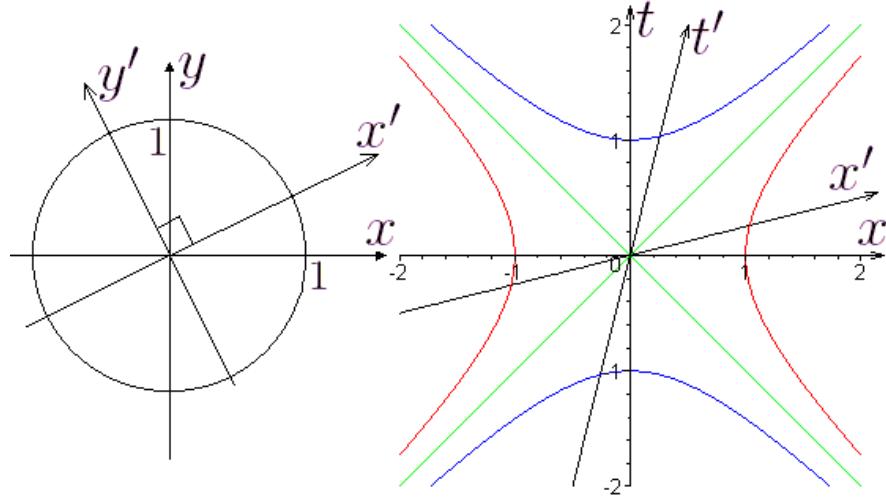


Рис. 7. На рисунках изображены системы координат, связанные друг с другом преобразованиями поворота и буста. Изображённые на рисунках единичная окружность и псевдоокружности (гиперболы) отсекают на осях координат плюс-минус единичные точки. Наклон оси t' задаётся значением скорости (вдоль оси t' $dx/dt = v$)

6. Буст

Если взять векторы \underline{U} и \underline{X} в качестве базисных векторов новой системы координат, то новая система координат будет связана с системой (t, x) преобразованием Лоренца (*бустом*), аналог угла θ называется *быстротой*.

Обратная матрица буста составлена из компонент единичных векторов \underline{U} и \underline{X} :

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \theta & \operatorname{sh} \theta \\ \operatorname{sh} \theta & \operatorname{ch} \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Если мы возьмём $(t'x') = (1, 0)$, то получим, что первый столбец матрицы образован компонентами вектора \underline{U} (в новых, штрихованных координатах \underline{U} имеет компоненты $(1, 0)$), если мы возьмём $(t'x') = (0, 1)$, то получим, что второй столбец матрицы образован компонентами вектора \underline{X} (в новых, штрихованных координатах \underline{X} имеет компоненты $(0, 1)$).

При последовательном выполнении двух бустов в плоскости (t, x) , быстроты этих бустов складываются. В этом можно убедиться из рисунка. Это не столь очевидно, как для круговых углов, но это можно увидеть, если вспомнить, что быстрота — удвоенная площадь гиперболического сектора, гипербола при бустах переходит в себя, а площади секторов при последовательных бустах складываются складываются. Или можно просто перемножить матрицы бустов (и воспользоваться формулами (3) (4) для гиперболических косинуса и синуса суммы).

Как определить, какой скорости соответствует это преобразование? Скорость системы отсчёта — это скорость точки, которая во все моменты времени имеет в этой (движущейся) системе отсчёта нулевые пространственные координаты. Т.е. траектория этой точки в пространстве-времени (мировая линия) — ось времени движущейся системы отсчёта. Дифференцируя вдоль направления новой оси времени (вдоль вектора \underline{U}) $\frac{dx}{dt}$, получаем скорость

$$v = \frac{\sinh \theta}{\cosh \theta} = \tanh \theta \quad \Rightarrow \quad 1 - v^2 = 1 - \frac{\sinh^2 \theta}{\cosh^2 \theta} = \frac{\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta}{\cosh^2 \theta} = \frac{1}{\cosh^2 \theta}. \quad (24)$$

Отсюда легко найти, что

$$\cosh \theta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad \sinh \theta = \tanh \theta \cdot \cosh \theta = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad (25)$$

и записать преобразование Лоренца в более привычном виде:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad t = \frac{t' + vx'}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (26)$$

Сравнивая эти формулы с привычными преобразованиями Лоренца видим, что единичная скорость — скорость света.

Напомним, что наличие времени в законе преобразования для координаты нет ничего нового по сравнению с классической механикой: как и в классике, наклон оси времени (мировой линии начала координат) соответствует скорости. Та к было и в преобразованиях Галилея:

$$x = x' + vt', \quad t = t'.$$

Присутствие координаты в законе преобразования времени интереснее, т.к. оно означает изменение наклона оси x , а ось x — множество событий, **одновременных** с событием в начале координат. «Относительность одновременности» — это наклон оси x .

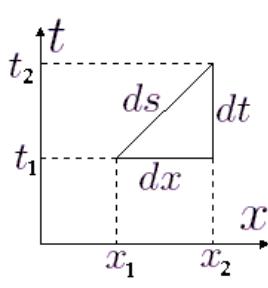


Рис. 8. Элемент интервала в старых координатах

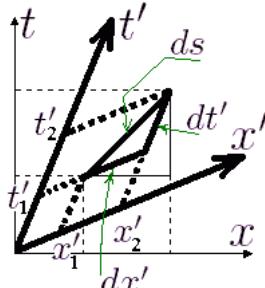


Рис. 9. Преобразование Лоренца

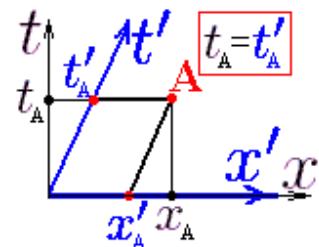


Рис. 10. Преобразование Галилея

В системе координат после буста (t', x') формула (17) для интервала по-прежнему справедлива (только со штрихами над координатами), это следует из того, что скалярные произведения базисных векторов такие же, как и в исходной системе: $(\underline{U}, \underline{U}) = 1$, $(\underline{U}, \underline{X}) = 0$, $(\underline{X}, \underline{X}) = -1$. Поэтому все псевдоокружности (гиперболы) с центром в начале координат после поворота задаются теми же уравнениями.

7. Круговой угол

Величина угла φ может быть геометрически интерпретирована как удвоенная площадь сектора между осью x , радиус-вектором \vec{R} и дугой окружности (закрашенный сектор на рисунке 11) или длина дуги окружности, ограничивающей этот сектор (выделена). Хотя эти факты и очевидны, докажем их (чтобы потом можно было сравнить это доказательство с аналогичным доказательством в гиперболическом случае).

Рассмотрим бесконечно малое приращение $d\varphi$ аргумента φ . Вектор \vec{R} при этом получит приращение $\vec{V} d\varphi$ (маленький вектор на рисунке). Площадь выделенного сектора возрастёт на площадь бесконечно малого треугольника (нарисован серым цветом). Приращение площади сектора равно половине векторного произведения векторов \vec{R} и $\vec{V} d\varphi$ (определителя, составленного из компонент этих векторов):

$$dA = \frac{1}{2} \vec{R} \times \vec{V} \cdot d\varphi = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} \cdot d\varphi = \frac{d\varphi}{2}. \quad (27)$$

Т.е. получился определитель обратной матрицы поворота, умноженный на $d\varphi$. Определитель матрицы поворота равен $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ (площадь квадрата, натянутого на векторы \vec{R} и \vec{V}), это связано с тем, что поворот сохраняет площадь.

Приращение длины дуги равно $d\varphi$, умноженному на длину вектора \vec{V} (т.е. на 1).

Таким образом, оба определения угла (через площадь сектора и через длину дуги) доказаны, причём доказательства показали связь этих свойств со свойствами поворота сохранять площадь и длину.

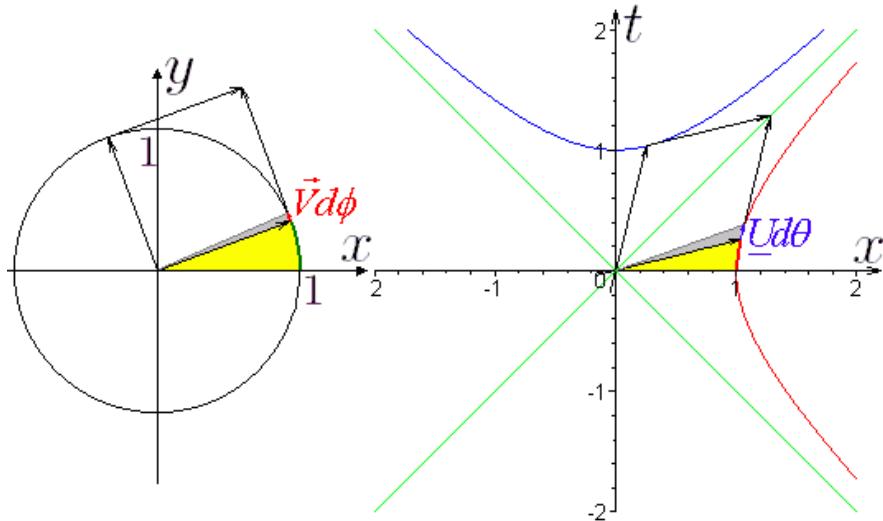


Рис. 11. Приращение сектора и дуги при бесконечно малом повороте/бусте

8. Гиперболический угол (быстрота)

Проделаем теперь аналогичные выкладки в гиперболическом случае.

Величина угла θ может быть геометрически интерпретирована как удвоенная площадь сектора между осью x , радиус-вектором \underline{X} и дугой гиперболы (закрашенный сектор на рисунке 11) или интервал вдоль дуги гиперболы,

ограничивающей этот сектор (выделен толстой линией). Эти факты уже не столь привычны, как в круговом случае.

Рассмотрим бесконечно малое приращение $d\theta$ аргумента θ . Вектор \underline{X} при этом получит приращение $\underline{U} \cdot d\theta$ (маленький вектор). Площадь выделенного сектора возрастёт на площадь бесконечно малого треугольника (нарисован серым цветом). Приращение площади сектора равно половине векторного произведения векторов $d\theta \cdot \underline{U}$ и \underline{X} (определителя, составленного из компонент этих векторов).

$$dA = \frac{1}{2} d\theta \cdot \underline{U} \times \underline{X} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \operatorname{ch} \theta & \operatorname{sh} \theta \\ \operatorname{sh} \theta & \operatorname{ch} \theta \end{vmatrix} \cdot d\theta = \frac{d\theta}{2}. \quad (28)$$

Т.е. получился определитель обратной матрицы буста, умноженный на $d\theta$. Определитель матрицы буста равен $\operatorname{ch}^2 \theta - \operatorname{sh}^2 \theta = 1$ (площадь ромба, натянутого на векторы \underline{U} и \underline{X}), это связано с тем, что буст сохраняет площадь.

Приращение интервала вдоль дуги равно $d\theta$ умноженному на интервал вдоль вектора \underline{U} (т.е. на 1).

Таким образом, оба определения гиперболического угла (через площадь сектора и через интервал вдоль дуги) доказаны, причём доказательства показали связь этих свойств со свойствами буста сохранять площадь и интервал.

9. Механическая (релятивистская) точка зрения

Рассмотрим те же самые кривые, изменив параметризацию и масштаб:

$$x = \cos(a_0 l)/a_0, \quad y = \sin(a_0 l)/a_0; \quad (29)$$

$$t = \operatorname{sh}(a_0 \tau)/a_0, \quad x = \operatorname{ch}(a_0 \tau)/a_0. \quad (30)$$

Здесь появился масштабный фактор a_0 и изменились параметры. Новые параметры l и τ — это длина вдоль траектории и интервал вдоль мировой линии. В правильности расстановки коэффициентов легко убедиться из соображений размерности: аргументы тригонометрических и гиперболических функций должны быть безразмерными, а координаты (включая время) имеют размерность длины (или времени, что то же самое). Мы можем обратить a_0 в единицу, если в качестве единицы измерения длины и времени выбрать $1/a_0$.

Запишем в обоих случаях радиус-векторы и первые две производные от них по параметрам l и τ :

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \frac{1}{a_0} \begin{pmatrix} \cos(a_0 l) \\ \sin(a_0 l) \end{pmatrix}, & \underline{X} &= \frac{1}{a_0} \begin{pmatrix} \operatorname{sh}(a_0 \tau) \\ \operatorname{ch}(a_0 \tau) \end{pmatrix}; \\ \vec{V} &= \frac{d\vec{R}}{dl} = \begin{pmatrix} -\sin(a_0 l) \\ \cos(a_0 l) \end{pmatrix}, & \underline{U} &= \frac{d\underline{X}}{d\tau} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(a_0 \tau) \\ \operatorname{sh}(a_0 \tau) \end{pmatrix}; \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{V}}{dl} = -a_0 \begin{pmatrix} \cos(a_0 l) \\ \sin(a_0 l) \end{pmatrix}, & \underline{W} &= \frac{d\underline{U}}{d\tau} = a_0 \begin{pmatrix} \operatorname{sh}(a_0 \tau) \\ \operatorname{ch}(a_0 \tau) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Геометрический смысл вектора \vec{V} — единичная касательная, а вектора \vec{a} — вектор кривизны, его длина a_0 — обратная величина к радиусу кривизны (\vec{a} всегда перпендикулярен \vec{V} , т.е. $(\vec{V}, \vec{a}) = 0$). Если двигаться по окружности так, чтобы параметр l задавал время, то \vec{V} — скорость, а \vec{a} — ускорение. (**Это движение по окружности мы рассматриваем как нерелятивистское!**).

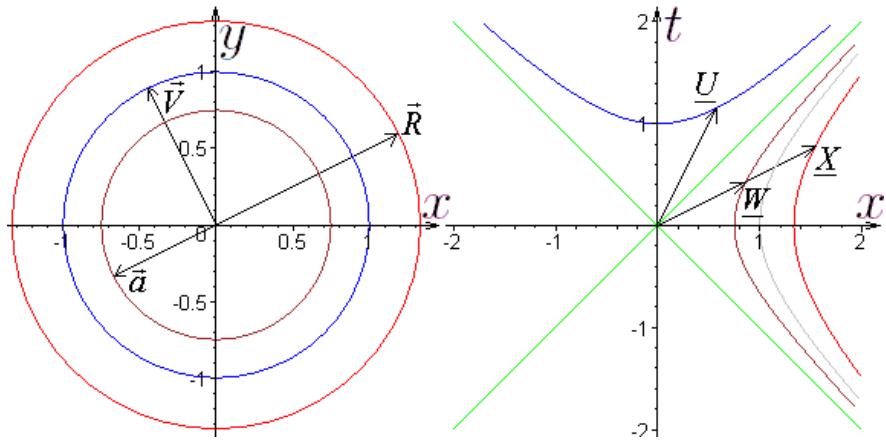


Рис. 12. Радиус-векторы, скорости и ускорения

Физический смысл вектора \underline{U} — релятивистская («четырёхмерная») скорость (тоже единичная касательная, но уже в смысле метрики Минковского), а вектора \underline{W} — релятивистское («четырёхмерное») ускорение (аналог вектора кривизны, \underline{W} тоже всегда перпендикулярно \underline{U} , но уже в смысле метрики Минковского, т.е. $(\underline{U}, \underline{W}) = 0$).

При $a_0 = 1$ имеем $\vec{a} = -\vec{R}$, а $\underline{W} = \underline{X}$. При этом все три окружности, на которых лежат концы векторов \vec{R} , \vec{V} , \vec{a} , сливаются в одну единичную окружность, а две гиперболы, на которых лежат концы векторов \underline{X} и \underline{W} , сливаются в одну единичную гиперболу (конец вектора \underline{U} оказывается на симметричной единичной гиперbole).

Домножив векторы скорости \vec{V} и \underline{U} на массу («массу покоя»), мы получим вектор импульса $\vec{P} = m_0 \vec{V}$ и вектор релятивистского импульса $\underline{p} = m_0 \underline{U}$. Компонентами релятивистского импульса являются энергия $E = p^t$ и обычный механический импульс по оси x :

$$p^x = m_0 \cdot \operatorname{sh}(a_0 \tau) = m_0 \cdot a_0 \cdot t. \quad (31)$$

Импульс оказался пропорциональным времени! Это означает, что движение происходит под действием постоянной силы:

$$F^x = \frac{dp^x}{dt} = m_0 \cdot a_0. \quad (32)$$

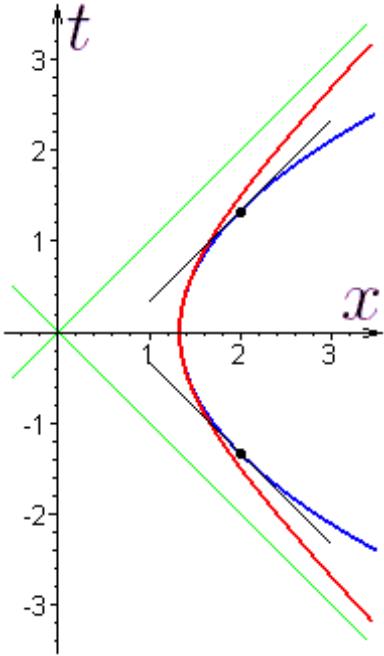


Рис. 13. Релятивистское и нерелятивистское движение под действием постоянной силы

по времени даёт изменение импульса (работу). Таким образом, при движении вдоль оси x под действием постоянной силы $\vec{F} = (F^x, 0, 0)$ в обоих случаях

$$E = F^x \cdot (x - x_0), \quad p^x = F^x \cdot (t - t_0). \quad (33)$$

Однако в релятивистском и нерелятивистском случаях между энергией, импульсом и массой выполняются разные соотношения:

$$m_0^2 = E^2 - \vec{P}^2 \quad \text{или} \quad E = \frac{\vec{P}^2}{2m_0}. \quad (34)$$

Подставив в эти соотношения выражения для энергии и импульса через силу, координату x и время, мы получаем уравнения движения под действием постоянной силы (релятивистское и классическое):

$$\left(\frac{m_0}{F^x}\right)^2 = (x - x_0)^2 - (t - t_0)^2 \quad \text{или} \quad x - x_0 = \frac{F^x(t - t_0)^2}{2m_0}. \quad (35)$$

10. Сопутствующие системы отсчёта

Как эти два движения (классическое круговое и релятивистское гиперболическое) выглядят с точки зрения наблюдателя, который эти движения совершают?

Если наблюдатель катается с единичной скоростью по кругу сидя на карусели, то на него всё время действует сила, направленная к центру круга, т.е. перпендикулярно скорости, поэтому если наблюдатель всё время сидит лицом по ходу движения, то все моменты времени для него эквивалентны: скорость

вперёд, а сила налево, абсолютные величины те же самые, а поворот векторов компенсируется поворотом самого наблюдателя. Для такого наблюдателя удобно в каждый момент времени брать новую систему отсчёта, повернутую так, чтобы наблюдатель оставался на оси x' (положительной полуоси). Тогда в любой момент времени в соответствующей системе отсчёта

$$\vec{R}' = (1/a_0, 0), \quad \vec{V}' = (0, 1), \quad \vec{a}' = (-a_0, 0). \quad (36)$$

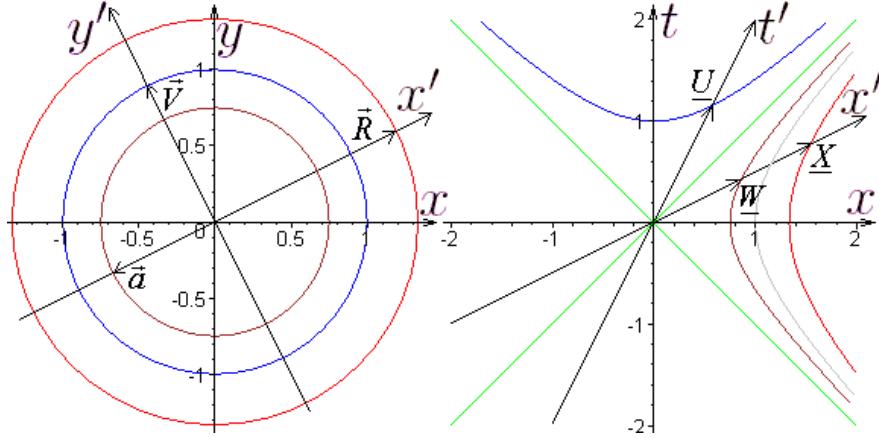


Рис. 14. Радиус-векторы, скорости и ускорения в сопутствующих системах координат

Если наблюдатель ускоряется под действием постоянной силы вдоль прямой, то удобно в каждый момент времени брать новую систему отсчёта, такую, чтобы наблюдатель оставался на оси x' (положительной полуоси), т.е. (в силу свойств гиперболы) имел нулевую скорость. Тогда в любой момент времени в соответствующей системе отсчёта

$$\underline{X}' = (0, 1/a_0), \quad \underline{U}' = (1, 0), \quad \underline{W}' = (0, a_0). \quad (37)$$

Напомним, что релятивистская скорость с компонентами $(1, 0)$ как раз соответствует нулевой обычной скорости, т.к. ненулевая компонента — временная (во времени нельзя остановиться).

Таким образом, для нашего равноускоренного наблюдателя все моменты времени тоже оказались равноценны, а значит, для него гиперболическое движение — равноускоренное.

11. Ускорение протяжённого тела

Пусть теперь наш наблюдатель ускоряется не сам по себе, а в ракете, которая имеет ненулевую длину. После того как двигатели ракеты начали работать, вошли в стабильный режим, в корпусе ракеты затихли все вибрации, мы можем вспомнить, что все моменты времени для равноускоренного наблюдателя равноправны, а значит, для него длина ракеты должна быть постоянна. Только длину эту надо откладывать вдоль оси x' системы, в которой наблюдатель сию секунду покоится (x' — линия одновременных событий для наблюдателя). А в качестве масштаба можно брать радиус-вектор \underline{X} . Вот и получается, что если наблюдатель сидит в хвосте ракеты, то мировая линия носа ракеты — «концентрическая» гипербола, получающаяся из мировой линии хвоста преобразованием подобия (гомотетии), с коэффициентом

$$k = \frac{L + 1/a_0}{1/a_0}, \quad (38)$$

где L — длина ракеты, а $1/a_0$ — длина радиус-вектора \underline{X} (т.к. $(\underline{X}, \underline{X}) = -(1/a_0)^2$).

При таком преобразовании

$$a_0 \rightarrow a_0/k, \quad \underline{X} \rightarrow k \cdot \underline{X}, \quad \underline{W} \rightarrow \underline{W}/k. \quad (39)$$

То же самое происходит при таком преобразовании подобия и с круговым движением:

$$a_0 \rightarrow a_0/k, \quad \vec{R} \rightarrow k \cdot \vec{R}, \quad \vec{a} \rightarrow \vec{a}/k. \quad (40)$$

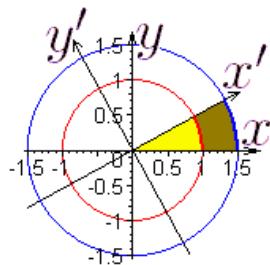


Рис. 16. Подобные сегменты

Как мы знаем, при гомотетии все длины растягиваются в одинаковое число раз (в k раз). То же самое справедливо и для интервалов. Таким образом, оси x и x' высекают в одном случае из гипербол, а в другом случае из окружностей подобные дуги, длины которых различаются в k раз.

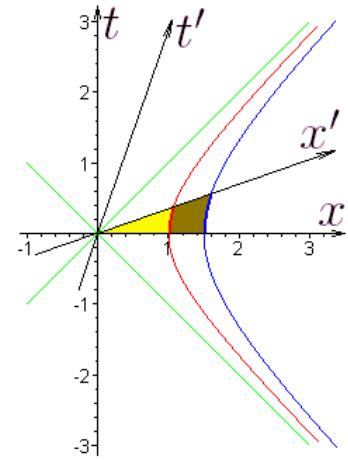


Рис. 15. Мировые линии носа и хвоста ракеты

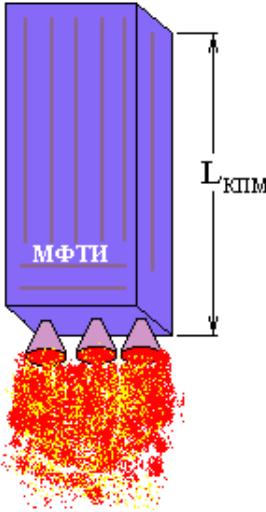


Рис. 17. КПМ ничуть не хуже ракеты!

Мы получили, что **нос ракеты движется с меньшим ускорением, чем хвост, и время на носу течёт быстрее!** Может ли мы проверить это «на подручных материалах», не имея под рукой ракеты? За неимением ракеты попробуем обойтись высоким зданием (возьмём, к примеру, КПМ). Согласно принципу эквивалентности (это уже из общей теории относительности (ОТО)) равномерно ускоренная система и система в однородном гравитационном поле на малых расстояниях ведут себя одинаково, поэтому КПМ в гравитационном поле Земли ничуть не хуже равноускоренной ракеты в космосе.

$$a_0 = g \approx 9,8 \text{ м/с}^2 = 1,3 \text{ с.год/год}^2,$$

$$\frac{1}{a_0} \approx 0,97 \text{ с.год} = 0,92 \cdot 10^{16} \text{ м},$$

$$L_{\text{КПМ}} \approx 35 \text{ м},$$

$$k \approx 1 + 4 \cdot 10^{-15}.$$

Удивительно, что столь ничтожное ускорение времени на крыше по сравнению с первым этажом экспериментаторы могут измерить.

12. Неинерциальная система отсчёта

Нарисуем теперь неинерциальную систему координат, связанную с наблюдателем, которая в каждый момент времени *по часам наблюдателя* совпадает с системой, относительно которой наблюдатель неподвижен. Т.е. от каждой мгновенной системы наблюдатель берёт лишь множество одновременных ему точек — ось x' . На рисунке 18 изображены линии постоянных значений координаты $x_{\text{неин.}}$ и времени $t_{\text{неин.}}$ для этой системы. Линии $x_{\text{неин.}} = \text{const}$ — дуги гипербол. $x_{\text{неин.}} \in (0, \infty)$, гиперболы на рисунке соответствуют значениям $+0,5, +1, +1,5, +2, +2,5$. Линии $t_{\text{неин.}} = \text{const}$ — лучи, выходящие из начала координат и имеющие коэффициент наклона от -1 до $+1$. Какое именно время прописать каждому из этих лучей, зависит от того, чему равна координата точки $x_{\text{неин.}}$, в которой находятся часы. На рисунке 18 предполагалось, что для часов $x_{\text{неин.}} = 1$. Лучи на рисунке соответствуют значениям времени по этим часам, равным $-2, -1, 5, -1, -0,5, 0, +0,5, +1, +1,5, +2$. $t_{\text{неин.}} \in (-\infty, +\infty)$.

Почему мы ограничили диапазон изменения $x_{\text{неин.}}$ положительной полуосью? Для этого есть два объяснения: 1) неинерциальную систему нельзя продолжить за пределы той $\frac{1}{4}$ плоскости, на которой мы её определили, т.к. на границе этой области система становится особой (при приближении к лучам $t = \pm x$ время наблюдателя $t_{\text{неин.}}$ стремится к $\pm\infty$), 2) область отрицательных $x_{\text{неин.}}$ ($\frac{1}{4}$ плоскости,

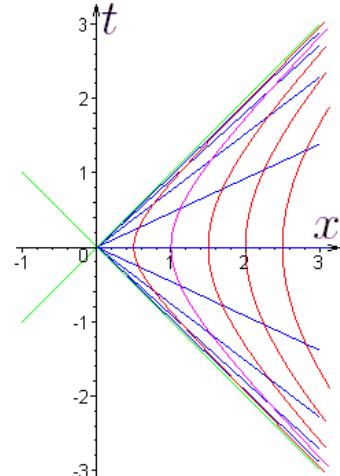


Рис. 18. Линии постоянных значений координат для неинерциальной системы отсчёта

симметричная к рассматриваемой) недоступна для наблюдения равноускоренного наблюдателя, а наблюдатель не в состоянии на неё повлиять, если влияние (сигнал) не может передаваться быстрее скорости света.

На этом стоит остановиться подробнее ещё и потому, что здесь снова прослеживается связь с ОТО. На этот раз мы сможем увидеть на том же рисунке некоторые свойства, похожие на те, что наблюдаются вблизи «поверхности» (на самом деле это не поверхность, а «горизонт событий») чёрной дыры. Чёрная дыра — это такая область пространства-времени, что никакой сигнал (включая световой) не может выйти из неё наружу (к удалённому наблюдателю). Граница этой области — *горизонт событий*. С точки зрения удалённого наблюдателя (который на дыру не падает) для того, чтобы достичь горизонта событий, любому предмету требуется бесконечное время, однако наблюдатель, который сам падает в чёрную дыру, обнаружит, что **по его часам** горизонт был достигнут за конечное время. В нашем случае горизонт событий — лучи $t = \pm x$, $x \geq 0$. На этих лучах $x_{\text{неин.}} = \pm\infty$, $x_{\text{неин.}} = 0$. По часам ускоренного наблюдателя если предмет, который он наблюдает, пытается пересечь линию $t = x$, $x \geq 0$, т.е. летит к точке $x_{\text{неин.}} = 0$, то для достижения этой точки ему потребуется бесконечное время, в то время как часы самого предмета при $x_{\text{неин.}} = 0$ покажут конечное время (см. рассматривавшийся выше эффект замедления времени в гравитационном поле). Как и в случае горизонта чёрной дыры, предмет, пересекший линию $t = x$, $x \geq 0$, не сможет передать нашему наблюдателю никакой сигнал, т.к. для этого потребовалась бы скорость передачи сигнала, превышающая скорость света.

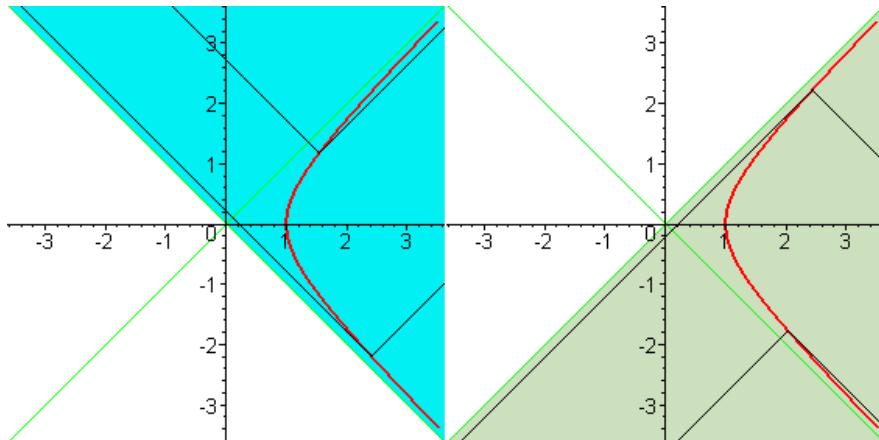


Рис. 19. На левом рисунке изображена мировая линия равноускоренного наблюдателя и закрашены все те события, на которые он может влиять. Для прояснения картины для двух точек мировой линии изображены световые сигналы, посланные наблюдателем в разные стороны (это позволяет легче понять, как послать сигнал в любую точку закрашенной области)

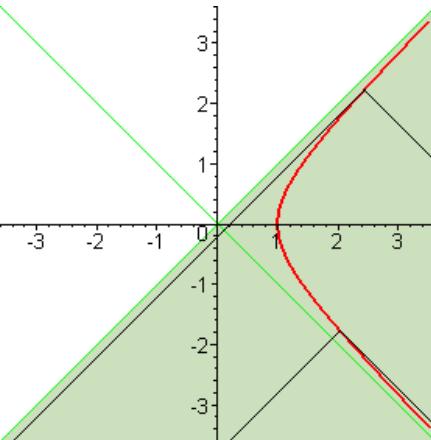


Рис. 20. На правом рисунке изображена мировая линия равноускоренного наблюдателя и закрашены все те события, которые могут влиять на наблюдателя. Для прояснения картины для двух точек мировой линии изображены световые сигналы, принятые наблюдателем с разных сторон (это позволяет легче понять, как принять сигнал из любой точки закрашенной области)

Из рисунков 19 и 20 видно, что на самом деле горизонтов не один, а два:

- 1) прямая $x = t$ является горизонтом будущего, можно уйти от наблюдателя за эту линию, но обратно вернуться нельзя,

- 2) прямая $x = -t$ является горизонтом прошлого, можно прийти к наблюдателю из-за этой линии, но обратно вернуться нельзя.

Такая же ситуация получается и при рассмотрении полного решения, описывающего чёрную дыру: там тоже два горизонта, один из которых — горизонт чёрной дыры, за который можно упасть, но откуда нельзя выбраться, а другой — горизонт белой дыры, откуда можно вылететь, но куда нельзя вернуться (впрочем, белые дыры считаются неустойчивыми). Что будет, если кто-то вылетев из белой дыры попробует вернуться обратно через горизонт событий? Вместо того чтобы вернуться в белую дыру, он упадёт в чёрную. Аналогично на нашем рисунке, вылетев из-под линии $x_{\text{нейн.}} = 0$ (пересекши линию $x = -t$), можно вернуться снова в точку, где $x_{\text{нейн.}} = 0$, но это будет уже линия $x = t$.



Рис. 21. Герман Минковский (1864, Алексоты, Минская губерния – 1909, Гёттинген) — немецкий математик немецкого, польского и еврейского происхождения. Минковский преподавал в университетах Бонна, Гёттингена, Кёнигсберга (ныне Калининград) и Цюриха. В Цюрихе он был одним из учителей Эйнштейна. В 1907 году Минковский предположил, что специальная теория относительности, сформулированная Планкаре и Эйнштейном, лучше всего может быть описана в четырёхмерном пространстве (известном сейчас как пространство Минковского), в котором время и пространство представляют собой не различные сущности, а являются измерениями пространства-времени. Это предположение помогло Гильберту и Эйнштейну в формулировании общей теории относительности. (По материалам Википедии.)