

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

Кафедра теоретической физики им. Л. Д. Ландау

М.Г. Иванов, В.П. Крайнов

**ПЛАСТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ
И УРАВНЕНИЕ СИНУС-ГОРДОНА
(МОДЕЛЬ ФРЕНКЕЛЯ – КОНТОРОВОЙ)**

Учебно-методическое пособие

Москва
МФТИ, Физтех
2024

УДК 538.913(075)

ББК 22.311

И20

Рецензент

Доктор физико-математических наук *И. Я. Палищук*

**Иванов, Михаил Геннадьевич,
Крайнов, Владимир Павлович**

И20 Пластические деформации и уравнение синус-Гордона (модель Френкеля – Конторовой): учеб.-метод. пособие / М. Г. Иванов, В. П. Крайнов ; М-во науки и высшего образования Рос. Федерации, Моск. физ.-техн. ин-т (нац. исслед. ун-т). – Москва : МФТИ, Физтех, 2024. – 40 с.

В пособии рассмотрена модель Френкеля – Конторовой, которая качественно описывает поведение цепочки ионов в кристаллической решётке на основе уравнения синус-Гордона. Обсуждаются солитонные решения уравнения синус-Гордона и их физический смысл в рамках данной модели.

Пособие предназначено для студентов 2–4 курсов МФТИ.

УДК 538.913(075)

ББК 22.311

© Иванов М.Г., Крайнов В.П., 2024

© Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)», 2024

Содержание

1. Описание модели	4
1.1. Фоновый потенциал	4
1.2. Потенциал взаимодействия ионов цепочки	5
1.3. Переход к непрерывному пределу	6
1.3..1 Дефекты решётки	6
1.3..2 От разностей к производным	6
1.4. Уравнение синус-Гордона	7
2. Звуковые волны	8
3. Обезразмеривание задачи	10
4. Синус-Гордон на резиновой ленте	10
5. Решения типа бегущей волны	11
6. Маятник делает оборот	13
7. Симметрии модели	14
8. Односолитонные решения	16
8.1. Неподвижный солитон	16
8.2. Бегущий солитон	17
8.3. Сверхзвуковой солитон	17
9. Тензор энергии-импульса	18
9.1. Неподвижный солитон	19
9.2. Бегущий солитон	20
10. Солитоны как квазичастицы	21
11. Двухсолитонные решения	22
11.1. Снова один солитон	22
11.2. Солитон+солитон	24
11.3. Солитон+антисолитон	30
11.4. Бризеры	34
12. Заключение	38

1. Описание модели

Рассмотрим одномерную цепочку ионов в толще кристалла. Пусть $x \in \mathbb{R}$ — координата вдоль цепочки, а $n \in \mathbb{Z}$ — номер иона вдоль цепочки. Каждый ион цепочки находится в некотором потенциале, создаваемом как другими ионами цепочки, так и остальными ионами кристалла (ионами окружения).

1.1. Фоновый потенциал

Для потенциала ионов окружения (фонового потенциала) мы примем приближение среднего поля, т.е. будем считать, что ионы окружения создают некоторый не зависящий от времени внешний потенциал $U(x)$, который является периодической функцией от x , с периодом, равным периоду решётки d . Такую функцию можно разложить в ряд Фурье:

$$U(x) = U(x + d) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi kx}{d}\right).$$

Мы считаем, что минимумы потенциала (потенциальные ямы) расположены в точках $d \cdot n$, $n \in \mathbb{Z}$, причём каждая потенциальная яма симметрична. Поэтому можно написать разложение Фурье только по чётным гармоникам (косинусам).

Из ряда Фурье отбросим все члены, кроме $k = 1$ (основной гармоники). Можно отбросить член с $k = 0$ (константу), так как потенциальная энергия определена с точностью до произвольной константы. Высшие гармоники ($k > 1$) отбросим чтобы упростить модель: для нас важно, что потенциал — это некоторая гладкая периодическая функция x , а её конкретный вид не слишком важен.

Таким образом, мы выбрали фоновый потенциал в виде

$$U(x) = a_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right).$$

Коэффициент a_1 должен быть отрицательным (чтобы получить минимум в нуле). Подберём его так, чтобы частота малых колебаний иона с массой M была равна ω :

$$a_1 = -\frac{M\omega^2 d^2}{(2\pi)^2},$$

$$U(x) = -\frac{M\omega^2 d^2}{(2\pi)^2} \cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right).$$

Для $x \ll d$

$$U(x) \approx -\frac{M\omega^2 d^2}{(2\pi)^2} + \frac{1}{2} M\omega^2 x^2.$$

Далее положение x_n иона номер n мы будем описывать с помощью его смещения:

$$u_n = x_n - d \cdot n.$$

В силу периодичности фонового потенциала его можно выразить через смещение

$$U(x_n) = U(u_n) = -\frac{M\omega^2 d^2}{(2\pi)^2} \cos\left(\frac{2\pi u_n}{d}\right).$$

Суммарный фоновый потенциал (для всех ионов цепочки):

$$U = -\frac{M\omega^2 d^2}{(2\pi)^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \cos\left(\frac{2\pi u_n}{d}\right).$$

Сила, действующая на ион номер n со стороны окружения:

$$f_n = -\frac{\partial U}{\partial u_n} = -\frac{M\omega^2 d}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi u_n}{d}\right).$$

1.2. Потенциал взаимодействия ионов цепочки

Потенциал взаимодействия ионов цепочки зависит от расстояния между ними. Поскольку потенциал взаимодействия быстро спадает с расстоянием, а также для упрощения модели, мы ограничимся взаимодействием ближайших соседей:

$$V = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v(u_n - u_{n-1}).$$

Для упрощения модели будем считать, что соседние ионы как бы соединены пружинками длины d с жёсткостью k :

$$V = \frac{k}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (u_n - u_{n-1})^2.$$

Сила, действующая на ион номер n со стороны соседей по цепочке:

$$F_n = -\frac{\partial V}{\partial u_n} = -k(u_n - u_{n-1}) - k(u_n - u_{n+1}) = k(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}).$$

1.3. Переход к непрерывному пределу

Уравнение движения иона номер n имеет вид

$$M \frac{d^2 u_n}{dt^2} = f_n + F_n = -\frac{M \omega^2 d}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi u_n}{d}\right) + k(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}). \quad (1)$$

В этом выражении для силы взаимодействия иона с соседями по цепочке легко узнать вторую разностную производную:

$\frac{1}{d}(u_n - u_{n-1})$ — первая разностная производная,

$\frac{1}{d}\left(\frac{1}{d}(u_{n+1} - u_n) - \frac{1}{d}(u_n - u_{n-1})\right) = \frac{1}{d^2}(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1})$ — вторая разностная производная.

Как правило, работать с непрерывными функциями и дифференциальными уравнениями удобнее, чем с дискретными функциями и разностными уравнениями, поэтому мы сделаем ещё одно приближение и будем рассматривать смещение как непрерывную функцию $u(x)$, такую, что

$$u(d \cdot n) = u_n.$$

Обратите внимание, здесь x — координата не самого иона, а его положения равновесия. Координата самого иона

$$x_n = x + u(x).$$

1.3..1 Дефекты решётки

Среднее число ионов на интервале (x_0, x_1) составляет $\frac{x_1 - x_0}{d}$. Число потенциальных ям на том же интервале — $\frac{x_1 + u(x_1) - x_0 - u(x_0)}{d}$. Разность числа ям и числа ионов — $\frac{u(x_1) - u(x_0)}{d}$. Это означает, что если на некотором интервале по x функция u выросла на d , то в этом интервале число ям на 1 превосходит число ионов, т.е. имеется 1 вакансия. Если на некотором интервале по x функция u уменьшилась на d , то число ям на 1 меньше, чем число ионов, т.е. имеется 1 избыточный ион.

В непрерывном пределе точно локализовать *дефект решётки* (вакансию или лишний ион) нельзя. Можно лишь указать, что на интервале (x_0, x_1) имеется n потенциальных ям, а число ионов отличается на n единицу и составляет $n+1$ (избыточный ион), или $n-1$ (вакансия).

1.3..2 От разностей к производным

Разностные производные мы заменим частными производными:

$$\frac{1}{d}(u_n - u_{n-1}) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{1}{d} \left(\frac{1}{d}(u_{n+1} - u_n) - \frac{1}{d}(u_n - u_{n-1}) \right) = \frac{1}{d^2} (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Тем самым мы предположили, что отклонения соседних ионов цепочки близки, u_n медленно меняется в зависимости от n : $|u_{n+1} - u_n| \ll d$, т.e.

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \ll 1. \quad (2)$$

Уравнение движения ионов цепочки приобретает вид

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{M\omega^2 d}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi u}{d}\right) + kd^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

1.4. Уравнение синус-Гордона

Полученное уравнение называется уравнением синус-Гордона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\omega^2 d}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi u}{d}\right) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (3)$$

где

$$c = \sqrt{\frac{kd^2}{M}}.$$

Вальтер Гордон — немецкий физик (1893–1939). Вместе с Оскаром Клейном он рассматривал близкое по виду уравнение (уравнение Клейна – Фока – Гордона) в релятивистской квантовой механике, которое содержало, однако, вместо синуса линейный член. Так что это название объясняется просто стремлением к укорочению названий. Выражение «уравнение синус-Гордона» — это шутка, ставшая математическим термином. Наша задача — обсуждение различных решений этого универсального нелинейного уравнения в частных производных и связь решений с разнообразными пластическими деформациями вещества.

В пределе малых амплитуд ($\left|\frac{2\pi u}{d}\right| \ll 1$) и высоких частот ($\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right| \gg \omega^2 u$) можно пренебречь синусом, и мы получаем волновое уравнение для волны со скоростью c .

В пределе длинных волн (u медленно меняется по x) можно пренебречь второй производной по x , и мы получаем уравнение математического маятника, угол отклонения которого $\frac{2\pi u}{d}$, а частота малых колебаний — ω .

2. Звуковые волны

В пределе малых амплитуд ($\frac{2\pi u}{d} \ll 1$) и произвольных частот мы можем разложить синус до линейного члена и получаем уравнение Клейна – Фока – Гордона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \omega^2 u - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (4)$$

Будем искать решения уравнения Клейна – Фока – Гордона в виде бегущей волны с циклической частотой Ω и волновым числом K :

$$u = u_0 \sin(\Omega t - Kx), \quad u_0 \ll \frac{d}{2\pi}. \quad (5)$$

Это волны малых упругих деформаций. Их амплитуда много меньше необходимой для того, чтобы ион перескочил в соседнюю потенциальную яму фонового потенциала.

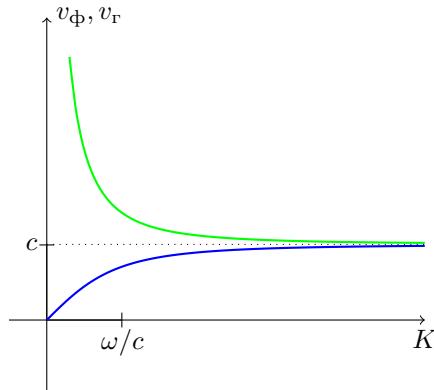
Подставив выражение (5) в уравнение (4), получаем дисперсионное соотношение, связывающее между собой Ω и K :

$$\Omega^2 = \omega^2 + c^2 K^2. \quad (6)$$

Отсюда легко находим фазовую и групповую скорости, которые оказываются обратно пропорциональны друг другу:

$$v_\Phi = \frac{\Omega}{K} = \frac{\sqrt{\omega^2 + c^2 K^2}}{K}, \quad v_r = \frac{\partial \Omega}{\partial K} = c^2 \frac{K}{\sqrt{\omega^2 + c^2 K^2}}, \quad (7)$$

$$v_\Phi v_r = \frac{k d^2}{M} = c^2.$$



Фазовая ($> c$) и групповая ($< c$) скорости

В силу линейности уравнения Клейна – Фока – Гордона любое решение может быть разложено по волнам вида (5).

При квантовании поля u каждому волновому числу K сопоставляется гармонический осциллятор с уровнями энергии $E_{K,N} = \hbar\Omega(K)(N_K + \frac{1}{2})$, при этом N_K — число элементарных возбуждений (фононов) с волновым числом K . Фононам можно присвоить энергию, импульс и «массу» как для релятивистской частицы:

$$E = \hbar\Omega, \quad p = \hbar K, \quad m_\Phi^2 c^4 = E^2 - p^2 c^2. \quad (8)$$

В роли скорости света выступает скорость высокочастотного звука $c = \sqrt{\frac{k d^2}{M}}$.

В терминологии твёрдого тела это — *оптические фононы*. Они имеют место для твёрдого тела, состоящего из двух сортов ионов. В таком теле возможны колебания, когда оба сорта ионов колеблются вместе (*акустические фононы*, они имеют нулевую частоту при $K = 0$), а также колебания, когда ионы разных сортов колеблются в разной фазе (*оптические фононы*, они имеют ненулевую частоту при $K = 0$).

Почему наша модель дала именно оптические фононы, ведь все ионы цепочки предполагались одинаковыми? Возвращающую силу при $K = 0$ обеспечивает фоновый потенциал, создаваемый ионами окружения. Дело в том, что мы предположили, что ионы окружения в среднем не колеблются (можно сказать, что ионы окружения предполагаются бесконечно тяжёлыми), они и выступали в роли второй разновидности ионов.

Для описания акустических фононов надо считать, что ионы окружения колеблются вместе с ионами цепочки, тогда ионы цепочки всё время остаются в минимуме фонового потенциала и уравнение Клейна – Фока – Гордона превращается в волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (9)$$

для которого дисперсионное соотношение линейно:

$$\Omega_{\text{ак.}} = cK.$$

Если бы мы заменили $\sin u \rightarrow u$ не в уравнении синус-Гордона, а в исходном разностном по координате уравнении (1), то дисперсионное соотношение приняло бы другой вид:

$$\Omega^2 = \omega^2 + 4 \frac{c^2}{d^2} \sin^2 \frac{Kd}{2}.$$

В пределе длинных волн $Kd \ll 1$ это дисперсионное соотношение переходит в (6), как и должно быть.

3. Образмеривание задачи

Вернёмся к уравнению синус-Гордона (3). Нам будет удобно в качестве единицы измерения для смещения u выбрать $\frac{d}{2\pi}$, а в качестве единицы скорости — скорость звука c . После этого в уравнении остался один параметр — ω . Кажется, что избавиться от него нельзя, но мы можем ввести разные единицы измерения для u и x .

Мы получаем следующую систему единиц:

$\frac{2\pi}{\omega}$ — единица времени,
 $c \frac{2\pi}{\omega}$ — единица расстояния для x ,
 $\frac{d}{2\pi}$ — единица расстояния для u .

В модели обнаруживается важный безразмерный параметр — отношение двух единиц длины:

$$\varepsilon = \frac{4\pi^2 c}{\omega d}.$$

Условие допустимости введения непрерывной координаты x (2) принимает вид

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \ll \varepsilon. \quad (10)$$

Теперь в уравнении синус-Гордона не осталось каких-либо параметров:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sin u - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (11)$$

4. Синус-Гордон на резиновой ленте

Наглядный образ для уравнения синус-Гордона — система связанных маятников: маятники подвешены вдоль горизонтальной оси x и могут колебаться в плоскостях, перпендикулярных x , маятники связаны (приклеены к резиновой ленте) так, что на маятник со стороны соседа действует момент силы, пропорциональный разности углов. В такой модели x — координата вдоль оси подвеса (номер маятника), $u(x, t)$ — угол отклонения маятника с номером x от направления вертикально вниз (от направления силы тяжести).

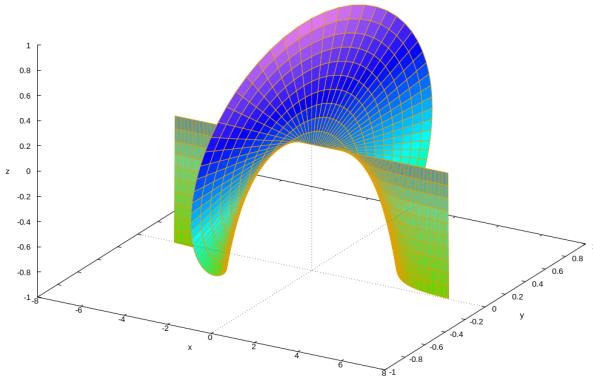


Рис. 1. Перекрученная один раз резиновая лента в положении равновесия (неподвижный солитон)

5. Решения типа бегущей волны

Будем искать решение уравнения синус-Гордона в виде

$$u(x, t) = f(t - x/V). \quad (12)$$

Можно сказать, что мы ищем *автомодельное решение* типа бегущей волны вида (12).

Если плотность энергии имеет вид бегущей волны, а полная энергия локализована и конечна (не путать с «энергией», см. раздел «Тензор энергии-импульса»), то такое решение называют *уединённой волной*. Если уравнение поля таково, что если при $t \rightarrow -\infty$ решение имеет вид суммы уединённых волн, то и при $t \rightarrow +\infty$ решение имеет вид суммы такого же набора уединённых волн (возможно испытавших сдвиг), то уединённые волны для такого уравнения называются *солитонами*¹.

Подставив это выражение в уравнение (11), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{f} + \frac{\sin f}{1 - V^{-2}} = 0. \quad (13)$$

¹В различии уединённых волн и солитонов в литературе есть разнобой в терминологии, порой даже в пределах одной книги.

Это уравнение при $V \neq 1$ совпадает с уравнением математического маятника.

Частота малых колебаний «маятника»:

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{|1 - V^{-2}|}}.$$

Эти малые колебания для случая $V = v_\phi > 1 > v_r = v_\phi^{-1}$ мы исследовали выше в разделе «Звуковые волны».

Назовём «энергией» сохраняющуюся величину:

$$E = \frac{1}{2} \dot{f}^2 - \frac{\cos f}{1 - V^{-2}}. \quad (14)$$

В зависимости от «энергии» возможно следующее поведение функции f :

- $E = \left| \frac{1}{1 - V^{-2}} \right|$ — маятник экспоненциально медленно уходит из верхней точки, после чего экспоненциально медленно возвращается в верхнюю точку, совершив ровно ± 1 оборот. «Угол» f меняется монотонно на $\pm 2\pi$. При этом у нас имеется ∓ 1 лишний ион на всей прямой. График имеет вид сглаженной ступеньки высотой 2π . Решение с нижним знаком называется *кинк*, а с нижним — *антикинк*. Такие решения являются солитонными.
- $E < \left| \frac{1}{1 - V^{-2}} \right|$ — периодические колебания маятника в окрестностях положения равновесия. Эти колебания являются упругими, поскольку размах колебаний не превышает периода решётки и каждый ион остаётся в пределах «своей» потенциальной ямы. Если амплитуда колебаний приближается к π (а размах — к 2π), то такое колебание можно рассматривать как периодическую последовательность чередующихся кинков и антикинков (лишних ионов и вакансий), движущихся с одинаковой скоростью. Чтобы периодическое колебание можно было рассматривать таким образом, надо, чтобы f долго задерживалась вблизи максимумов и минимумов, т.е. период колебаний T должен быть много больше, чем период малых колебаний $\frac{2\pi}{\Omega}$, т.е. $T \gg 2\pi\sqrt{|1 - V^{-2}|}$.
- $E > \left| \frac{1}{1 - V^{-2}} \right|$ — маятник проскаивает через верхнюю точку. «Угол» f (сдвиг иона) монотонно неограниченно нарастает. На каждый «оборот» (увеличение/уменьшение f на 2π) ион переходит в соседнюю яму. В результате при возрастающей функции f

на каждый период нам не хватает одного иона, по сравнению с правильной решёткой с периодом 2π , а при убывающей функции f на каждый период мы имеем один лишний ион, по сравнению с правильной решёткой. Такое решение при $\dot{f} < 0$ можно рассматривать как периодическую последовательность кинков (лишних ионов), а при $\dot{f} > 0$ — как периодическую последовательность антикинков (вакансий), движущихся с одинаковой скоростью.

Движение дефектов (кинков и антикинков — лишних ионов и вакансий) соответствуют уже пластическим деформациям.

Выбранная параметризация не очень удобна при рассмотрении случаев $V = 0$ и $V = \infty$.

6. Маятник делает оборот

Рассмотрим уравнение математического маятника, которое получается из уравнения синус-Гордона, если смещение зависит только от времени $u(x, t) = \varphi(t)$:

$$\ddot{\varphi} + \sin \varphi = 0. \quad (15)$$

Для такого уравнения имеется закон сохранения энергии

$$E = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \cos \varphi. \quad (16)$$

Это энергия, приходящаяся на одну частицу, так что полная энергия цепочки бесконечна.

Нас интересует случай, когда маятник делает один оборот от верхней точки до верхней точки, где останавливается. В этом случае $E = 1$.

$$\dot{\varphi} = \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} = 2 \cos \frac{\varphi}{2} \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{d\frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}}.$$

Уравнение легко интегрируется

$$\begin{aligned} t &= \int \frac{d\frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \int \frac{\cos \frac{\varphi}{2} d\frac{\varphi}{2}}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} = \int \frac{d \sin \frac{\varphi}{2}}{1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1 - \sin \frac{\varphi}{2}} + \frac{1}{1 + \sin \frac{\varphi}{2}} \right) d \sin \frac{\varphi}{2}, \\ t &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \frac{\varphi}{2}}{1 - \sin \frac{\varphi}{2}} + t_0. \end{aligned}$$

Положим $t_0 = 0$.

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \operatorname{th}(t).$$

Обозначим соответствующую функцию $\varphi_1(t)$, нам также понадобится её производная.

$$\varphi_1(t) = 2 \arcsin \operatorname{th}(t), \quad \dot{\varphi}_1 = 2 \cos \frac{\varphi_1}{2} = \frac{2}{\operatorname{ch}(t)}. \quad (17)$$

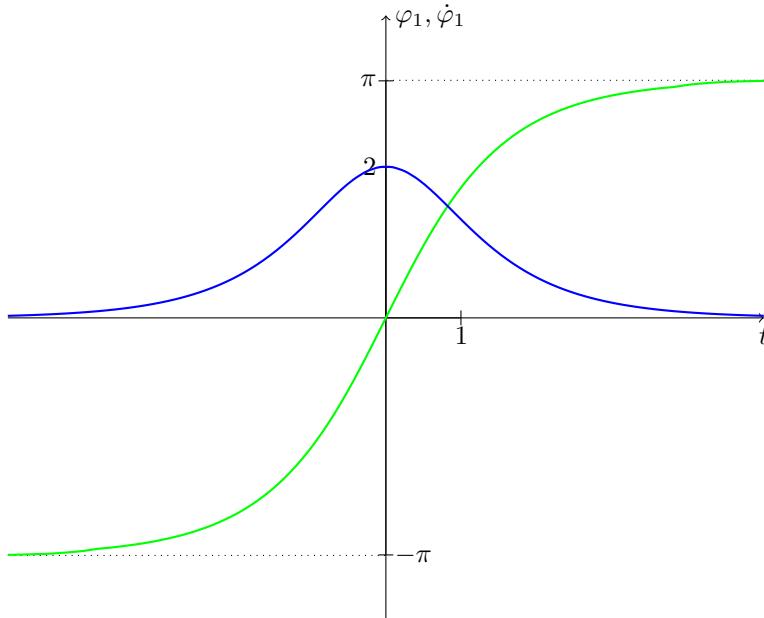


Рис. 2. $\varphi_1(t) = 2 \arcsin \operatorname{th}(t)$, $\dot{\varphi}_1 = 2 \cos \frac{\varphi_1}{2} = \frac{2}{\operatorname{ch}(t)}$

Мы получили глобальный солитон, который описывает, как все ионы цепочки одновременно скатываются с потенциальных горок, проходят каждый через свою яму, закатываются на следующие горки и там останавливаются.

7. Симметрии модели

Уравнение синус-Гордона можно записать через 2-мерную метрику Минковского:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i, \quad i, j, k = 0, 1. \quad (18)$$

$$g^{ij}\partial_i\partial_j u + \sin u = 0, \quad \partial_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}. \quad (19)$$

Очевидно, уравнение синус-Гордона переходит при преобразованиях координат t, x , сохраняющих метрику (18), т.е. при преобразованиях из группы Пуанкаре для 2-мерного пространства Минковского. Также добавляются некоторые симметрии, характерные для данного уравнения:

- преобразования Лоренца:

$$x = \frac{\tilde{x} + V\tilde{t}}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad t = \frac{\tilde{t} + V\tilde{x}}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad (20)$$

- сдвиги по t и по x , $x = \tilde{x} + x_0$, $t = \tilde{t} + t_0$,
- изменение знака t и/или x , $x = \pm\tilde{x}$, $t = \pm\tilde{t}$,
- комбинации перечисленных преобразований,
- у двумерного пространства Минковского появляется дополнительная симметрия — перестановка времени и единственной пространственной координаты меняет знак метрики (взаимно однозначно переставляет пространственно-подобные и времени-подобные объекты). Поскольку при этом меняется знак волнового оператора, для того чтобы при этом уравнение синус-Гордона переходило в себя, надо одновременно поменять знак $\sin(u)$:

$$t = \tilde{x}, \quad x = \tilde{t}, \quad u = \pi \pm \tilde{u}, \quad (21)$$

- изменение знака смещения $u = \pm\tilde{u}$,
- сдвиг смещения на целое число периодов решётки $u = \tilde{u} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Помимо перечисленных выше очевидных симметрий уравнение синус-Гордона имеет дополнительные симметрии, связанные с тем, что оно относится к *интегрируемым системам*. Это *преобразования Бэк-лунда*:

$$\partial_{x_2} \frac{u - \tilde{u}}{2} = -\lambda \sin \frac{u + \tilde{u}}{2}, \quad (22)$$

$$\partial_{x_1} \frac{u + \tilde{u}}{2} = -\frac{1}{\lambda} \sin \frac{u - \tilde{u}}{2}, \quad (23)$$

где введены координаты светового конуса:

$$x_1 = x - t, \quad \partial_{x_1} = \partial_x - \partial_t, \quad x_2 = x + t, \quad \partial_{x_1} = \partial_x + \partial_t.$$

Волновой оператор принимает вид

$$\partial_x^2 - \partial_t^2 = \partial_{x_1} \partial_{x_2}.$$

Если продифференцировать уравнение (22) по x_1 , а (23) по x_2 , то мы получаем

$$\begin{aligned}\partial_{x_1} \partial_{x_2} \frac{u - \tilde{u}}{2} &= -\lambda \cos \frac{u + \tilde{u}}{2} \partial_{x_1} \frac{u + \tilde{u}}{2} = \cos \frac{u + \tilde{u}}{2} \sin \frac{u - \tilde{u}}{2}, \\ \partial_{x_2} \partial_{x_1} \frac{u + \tilde{u}}{2} &= -\frac{1}{\lambda} \cos \frac{u - \tilde{u}}{2} \partial_{x_2} \frac{u - \tilde{u}}{2} = \cos \frac{u - \tilde{u}}{2} \sin \frac{u + \tilde{u}}{2}.\end{aligned}$$

Складывая и вычитая данные уравнения, получаем, что u и \tilde{u} удовлетворяют уравнению синус-Гордона:

$$\begin{aligned}\partial_{x_1} \partial_{x_2} u &= \sin u, \\ \partial_{x_1} \partial_{x_2} \tilde{u} &= \sin \tilde{u}.\end{aligned}$$

Преобразование Бэклунда позволяет по известному решению уравнения синус-Гордона $u(x, t)$ и произвольному ненулевому параметру λ получить новое решение уравнения синус-Гордона $\tilde{u}(x, t)$. В частности, при $u \equiv 0$ решение \tilde{u} оказывается односолитонным.

В данном пособии нас интересует в первую очередь физическая интерпретация решений уравнения синус-Гордона с точки зрения модели Френкеля – Конторовой. Поэтому мы не будем подробно рассматривать преобразования Бэклунда. Но мы не могли не включить эти преобразования в список симметрий уравнения синус-Гордона.

Уравнение синус-Гордона относится к числу *интегрируемых уравнений*. Оно может быть решено *методом обратной задачи рассеяния*, при этом его динамика сводится к динамике набора релятивистских частиц.

8. Односолитонные решения

8.1. Неподвижный солитон

Рассмотрим статические решения уравнения синус-Гордона, для которых $\partial_t u = 0$. Такое решение получается из решения (17) с помощью преобразования перестановки координаты и времени (21):

$$u(x, t) = \pm \varphi_1(x) + \pi = \pm 2 \arcsin \operatorname{th}(x) + \pi.$$

8.2. Бегущий солитон

С помощью преобразования Лоренца из неподвижного солитона можно получить солитон, бегущий с дозвуковой скоростью $V < 1$:

$$u(x, t) = \pm \varphi_1 \left(\frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2}} \right) + \pi = \pm 2 \arcsin \operatorname{th} \left(\frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2}} \right) + \pi.$$

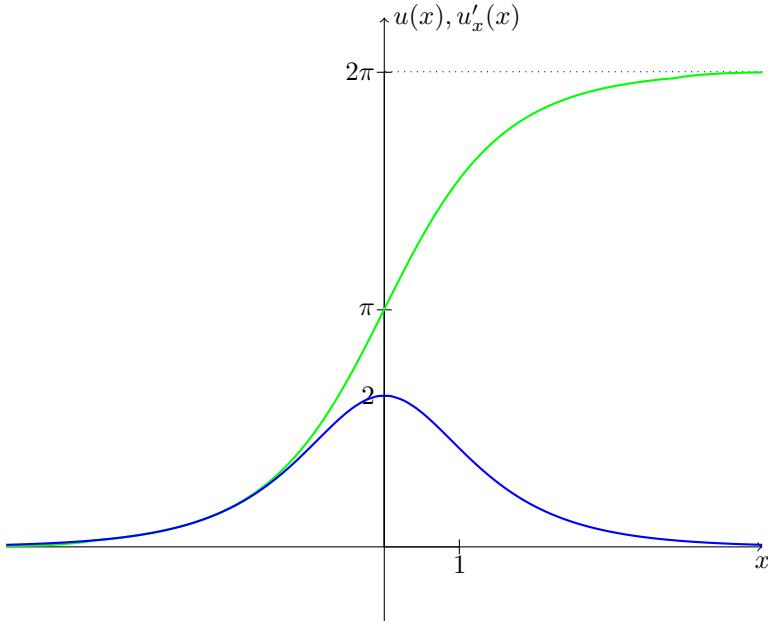


Рис. 3. $u(x, t) = 2 \arcsin \operatorname{th}(x) + \pi$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 2 \cos \frac{\varphi_1}{2} = \frac{2}{\operatorname{ch}(x)}$

8.3. Сверхзвуковой солитон

Солитон бегущий со сверхзвуковой скоростью $\frac{1}{V} > 1$, получается из решения (17), не зависящего от x , с помощью преобразования Лоренца, соответствующего скорости $V < 1$:

$$u(x, t) = \pm \varphi_1 \left(\frac{t - Vx}{\sqrt{1 - V^2}} \right) = \pm 2 \arcsin \operatorname{th} \left(\frac{t - Vx}{\sqrt{1 - V^2}} \right).$$

При $V = 0$ получаем солитон, бегущий с бесконечной скоростью, т.е. ранее полученное не зависящее от x решение (17).

Скорость передачи сигнала в модели ограничена скоростью звука, подобно тому, как в специальной теории относительности скорость передачи сигнала ограничена скоростью света.

Дозвуковые солитоны можно рассматривать как некий сигнал, распространяющийся вдоль цепочки, когда движение каждого следующего иона из одного устойчивого положения равновесия в следующее вызывается движением предыдущего. Для сверхзвуковых солитонов каждый ион должен быть заранее подготовлен в неустойчивом состоянии, из которого он независимо от соседей переходит в следующее неустойчивое положение на вершине соседней горки. Передачу сигнала со сверхзвуковой скоростью сверхзвуковой солитон не допускает.

9. Тензор энергии-импульса

Мы можем записать плотность функции Лагранжа как разность плотностей кинетической и потенциальной энергий:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_t u)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x u)^2 + \cos u - 1 = \frac{1}{2}g^{ij}(\partial_i u)(\partial_j u) + \cos u - 1. \quad (24)$$

Потенциальная энергия определена с точностью до константы, мы выбрали эту константу так, чтобы при $u \equiv 0$ потенциальная энергия обнулялась.

Действие имеет вид

$$S[u(x, t)] = \int \left(\frac{1}{2}g^{ij}(\partial_i u)(\partial_j u) + \cos u - 1 \right) dt dx. \quad (25)$$

Вариация действия даёт уравнение синус-Гордона:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left(g^{ij}(\partial_i \delta u)(\partial_j u) + \delta u \sin u \right) dt dx = \\ &= \int \delta u \left(-g^{ij} \partial_i \partial_j u - \sin u \right) dt dx. \end{aligned} \quad (26)$$

Зная плотность функции Лагранжа, мы можем стандартным образом ввести тензор энергии-импульса:

$$T^i{}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i u)} \partial_j u - \delta^i_j \mathcal{L} = (\partial^i u)(\partial_j u) - \delta^i_j \left(\frac{1}{2}g^{kl}(\partial_k u)(\partial_l u) + \cos u - 1 \right). \quad (27)$$

$$\begin{aligned} T^{ij} &= (\partial^i u)(\partial^j u) - g^{ij} \left(\frac{1}{2}g^{kl}(\partial_k u)(\partial_l u) + \cos u - 1 \right) = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\partial_t u)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x u)^2 + 1 - \cos u & -(\partial_t u)(\partial_x u) \\ -(\partial_t u)(\partial_x u) & \frac{1}{2}(\partial_t u^2) + \frac{1}{2}(\partial_x u)^2 + \cos u - 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (28)$$

Компоненты тензора энергии-импульса имеют следующий физический смысл:

- T^{00} — плотность энергии,
- T^{10} — плотность потока энергии,
- T^{01} — плотность импульса,
- T^{11} — давление (плотность потока импульса).

9.1. Неподвижный солитон

Энергия одиночного сверхзвукового солитона бесконечна, поэтому ниже мы рассматриваем дозвуковые солитоны.

Рассмотрим неподвижный солитон:

$$u(x, t) = \pm\varphi_1(x) + \pi = \pm 2 \arcsin \operatorname{th}(x) + \pi = 4 \operatorname{arctg}(\operatorname{e}^{\pm x}),$$

$$1 - \cos u = \frac{2}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad \partial_x u = \frac{\pm 2}{\operatorname{ch} x}, \quad \partial_t u = 0.$$

Соответствующая плотность энергии:

$$T^{00} = \frac{4}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

Остальные компоненты тензора энергии-импульса равны нулю.

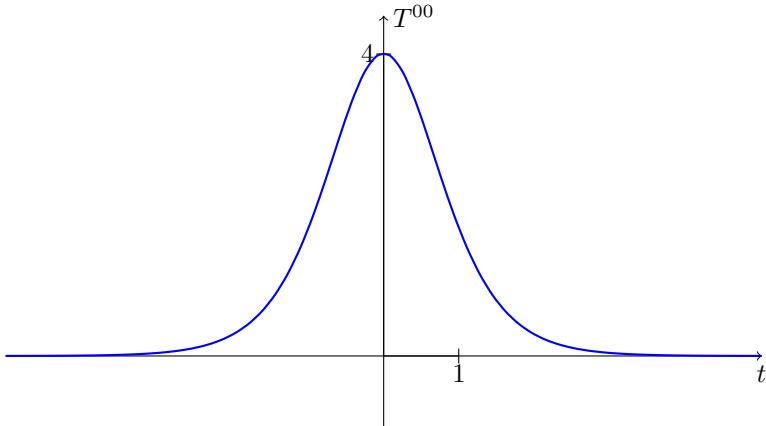


Рис. 4. $T^{00} = \frac{4}{\operatorname{ch}^2 x}$ — плотность энергии неподвижного солитона

Энергия покоящегося солитона, т.е. его масса:

$$m = \int_{\mathbb{R}} T^{00} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{4 dx}{\operatorname{ch}^2 x} = 4 \operatorname{th} x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 8. \quad (29)$$

9.2. Бегущий солитон

Характеристики бегущего солитона можно было бы получить с помощью преобразований Лоренца из характеристик неподвижного солитона, но мы вычислим их явно:

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \pm \varphi_1 \left(\frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2}} \right) + \pi = \pm 2 \arcsin \operatorname{th} \left(\frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2}} \right) + \pi = \\
 &= 4 \operatorname{arctg} \left[\exp \left(\pm \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2}} \right) \right], \\
 1 - \cos u &= \frac{2}{\operatorname{ch}^2 \left(\frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2}} \right)}, \\
 \partial_x u &= \frac{\pm 2}{\operatorname{ch} \left(\frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2}} \right)} \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad \partial_t u = \frac{\mp 2}{\operatorname{ch} \left(\frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2}} \right)} \frac{V}{\sqrt{1 - V^2}}, \\
 T^{00} &= \frac{1}{1 - V^2} \frac{4}{\operatorname{ch}^2 \left(\frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2}} \right)}, \\
 T^{01} = T^{10} &= \frac{V}{1 - V^2} \frac{4}{\operatorname{ch}^2 \left(\frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2}} \right)}, \\
 T^{11} &= \frac{V^2}{1 - V^2} \frac{4}{\operatorname{ch}^2 \left(\frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2}} \right)}.
 \end{aligned}$$

Проинтегрировав T^{00} по x , получаем полную энергию солитона, она совпадает с полной энергией, протекшей через произвольную точку $\int_{\mathbb{R}} T^{10} dt$:

$$\mathcal{E} = \int_{\mathbb{R}} T^{00} dx = \int_{\mathbb{R}} T^{10} dt = \frac{m}{\sqrt{1 - V^2}}.$$

Здесь m — масса солитона (29).

Проинтегрировав T^{01} по x получаем полный импульс, он совпадает с полным импульсом, протекшим через произвольную точку

$$p = \int_{\mathbb{R}} T^{01} dx = \int_{\mathbb{R}} T^{11} dt = \frac{mV}{\sqrt{1 - V^2}}.$$

Мы видим, что соотношение между энергией, импульсом и массой для одиночного солитона совпадает с таким отношением для релятивистской частицы (с заменой скорости света в вакууме на скорость звука).

10. Солитоны как квазичастицы

Одиночный солитон, как видно из рассмотрения тензора энергии-импульса, ведёт себя как частица конечного размера.

Для модели Френкеля – Конторовой эти частицы имеют ясный физический смысл: лишний ион (кинк) либо вакансия (антикинк). Причём и ион, и вакансию надо рассматривать как «одетые» частицы, т.е. частицы вместе с вызванными ими искажениями решётки («поляризацией вакуума»). Какой именно ион является «лишним» или в каком конкретно промежутке между ионами находится вакансия, определить невозможно: ионы в середине движущегося (анти)кинка последовательно меняются, как это обычно бывает в бегущей волне.

Не следует путать скорость солитона (V в формулах выше) и скорость отдельных ионов $\partial_t u$.

Естественно ожидать, что солитоны одного знака (два лишних атома, или две вакансии) должны отталкиваться друг от друга, а солитоны разных знаков — притягиваться.

По аналогии с законом Кулона, можно ожидать, что сила взаимодействия на малых расстояниях должна меняться обратно пропорционально площади сферы. В одномерном случае сфера состоит из двух точек, а значит, в случае одного пространственного измерения при сближении двух солитонов до нулевого расстояния можно ожидать, что сила останется конечной. Это позволяет предположить, что солитонам ничто не мешает проходить друг сквозь друга. Такое рассуждение, очевидно, не является строгим и может рассматриваться только как эвристическое соображение (способ предварительного угадывания ответов). Далее мы увидим, что для уравнения синус-Гордона эти соображения оправдываются.

На больших расстояниях солитонное решение экспоненциально выходит на константу $2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$), что соответствует тому, что на больших расстояниях решётка почти не возмущена. Можно ожидать, что на больших расстояниях сила взаимодействия между солитонами стремится к нулю.

Суммируя сделанные предположения у уравнения синус-Гордона можно попытаться искать решения следующего вида:

- 1) два солитона одного знака движутся навстречу друг другу с бесконечностями, замедляются, проходят друг сквозь друга и, ускоряясь до исходных скоростей, расходятся на бесконечности;
- 2) два солитона разного знака движутся навстречу друг другу с бесконечностями, ускоряются, проходят друг сквозь друга и, замедляясь до исходных скоростей, расходятся на бесконечности;

3) два солитона разного знака движутся навстречу друг другу с конечного расстояния, ускоряются, проходят друг сквозь друга и, замедляясь, расходятся на прежнее расстояния, после чего цикл повторяется.

Такие решения мы представим далее. (Эти решения не исчерпывают всех интересных решений уравнения синус-Гордона.)

11. Двухсолитонные решения

Для рассмотрения солитонных решений в уравнении синус-Гордона (11)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sin u - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

полезно сделать следующую параметризацию:

$$u = 4 \operatorname{arctg} w \Leftrightarrow w = \operatorname{tg} \frac{u}{4}.$$

В такой параметризации уравнение синус-Гордона принимает вид

$$(1 + w^2) (\partial_x^2 w - \partial_t^2 w) - 2w([\partial_x w]^2 - [\partial_t w]^2) = w(1 - w^2). \quad (30)$$

Решение (30) будем искать в виде

$$w(x, t) = \frac{f(x)}{g(t)}. \quad (31)$$

Подставив (31) в (30), находим

$$\begin{aligned} & f^2 \left\{ f'' - 2 \frac{(f')^2}{f} + f + f \frac{\ddot{g}}{g} \right\} + \\ & + g^2 \left\{ f'' - f + f \frac{\ddot{g}}{g} - 2f \frac{(\dot{g})^2}{g^2} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Далее мы будем исследовать разные частные решения уравнения (32).

11.1. Снова один солитон

Из уравнения (32) видно, что если входящая в него функция $g(t)$ совпадают с точностью до постоянных множителей со своими производными \dot{g} , \ddot{g} , то выражения в фигурных скобках будут зависеть только от x .

Если предположить то же самое про функцию f , то уравнение легко решается.

Таким образом, берём

$$f(x) = \exp(x/a), \quad g(t) = \exp(Vt/a).$$

Такая подстановка приводит к двум алгебраическим уравнениям, обращающим в нуль обе фигурные скобки в уравнении (32):

$$\begin{aligned} (V^2 + a^2 - 1) \exp\left(\frac{3x}{a}\right) &= 0, \\ (V^2 + a^2 - 1) \exp\left(\frac{x+2Vt}{a}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Уравнение (32) превращается в тождество при условии

$$a = \pm \sqrt{1 - V^2}.$$

Решение для смещения атома решётки принимает вид

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[\exp \left(\pm \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2}} \right) \right], \quad \partial_t u = \mp \frac{\frac{2V}{\sqrt{1 - V^2}}}{\operatorname{ch} \left(\frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2}} \right)}. \quad (33)$$

Это решение воспроизводит найденный нами ранее солитон, бегущий со скоростью $V < 1$.

Решение с верхним знаком называется *кинк*, а с нижним — *антикинк*. С течением времени все ионы смещаются на конечное расстояние $u_{\max} = 2\pi d$ вдоль направления деформации. Оно одинаково для всех ионов. Только такое смещение для разных ионов сдвинуто по времени.

Согласно (33) характерное время пластической деформации имеет оценку:

$$T = \frac{\sqrt{1 - V^2}}{V}.$$

Оно меняется от нуля до бесконечности при изменении V от 1 до нуля. В обычных единицах скорость имеет оценку wd .

В отличие от линейного уравнения, кинки не зависят от начальных условий. Но, конечно, для их возбуждения нужно какое-то ненулевое малое начальное возмущение. При повторении этого малого возмущения каждый раз имеет место пластический сдвиг на величину постоянной решётки, так что результирующая пластическая деформация будет много больше постоянной решётки, и тогда она будет носить

макроскопический характер. Отметим, что фактор 2π в смещении, полученный выше, связан с обозначениями величин. Начальное возмущение может быть создано, например, лишним атомом в кристаллической решетке, скажем, в начале координат. В результате этот атом переходит в соседнюю ячейку решетки. Значение $V = 0$ соответствует сепаратрисе, когда такой переход требует бесконечного времени.

11.2. Солитон+солитон

Помимо экспоненциальных функций, уравнению (32) удовлетворяют и гиперболические функции. Возьмем

$$f(x) = b \operatorname{sh} \frac{x}{a}, \quad g(t) = \operatorname{ch} \frac{Vt}{a}.$$

После подстановки в (32) подставляем $\operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} = 1 - \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}$, собираем члены при $\operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}$ и получаем

$$-1 + a^2 + V^2 = 0.$$

Далее подставляем $\operatorname{sh}^2 \frac{Vt}{a} = \operatorname{ch}^2 \frac{Vt}{a} - 1$, члены при $\operatorname{sh} \frac{x}{a} \cdot \operatorname{ch}^2 \frac{Vt}{a}$ дают то же соотношение между параметрами. Наконец члены при $\operatorname{sh} \frac{x}{a}$ приводят к соотношению $b = V$.

Итак, следующее возможное соотношение для поля смещения атомов решётки имеет вид

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left\{ \pm \frac{V \operatorname{sh} \left(\frac{x}{\sqrt{1-V^2}} \right)}{\operatorname{ch} \left(\frac{Vt}{\sqrt{1-V^2}} \right)} \right\}, \quad (34)$$

$$\partial_t u = \mp \frac{4V^2}{\sqrt{1-V^2}} \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{x}{\sqrt{1-V^2}} \right) \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{Vt}{\sqrt{1-V^2}} \right)}{V^2 \operatorname{sh}^2 \left(\frac{x}{\sqrt{1-V^2}} \right) + \operatorname{ch}^2 \left(\frac{Vt}{\sqrt{1-V^2}} \right)}.$$

Из (34) видно, что при $x = 0$ смещение отсутствует. Оно исчезает и при больших временах, в отличие от односолитонного решения (33).

При больших аргументах $|X| \gg 1$ гиперболические синус и косинус приближаются экспонентой:

$$\operatorname{ch} X \approx \frac{1}{2} \exp(|X|), \quad \operatorname{sh} X \approx \frac{\operatorname{sgn} X}{2} \exp(|X|). \quad (35)$$

При $\left| \frac{x}{\sqrt{1-V^2}} \right| \gg 1$ и $\left| \frac{Vt}{\sqrt{1-V^2}} \right| \gg 1$ получаем

$$u(x, t) \approx 4 \operatorname{arctg} \left\{ \pm \operatorname{sgn}(x) V \exp \left(\frac{|x| - |Vt|}{\sqrt{1-V^2}} \right) \right\}. \quad (36)$$

Сравнивая выражение (36) со случаем единичного солитона (33), мы видим, что на больших отрицательных временах два солитона симметрично сближаются навстречу друг другу, а на больших положительных временах — симметрично разлетаются. С помощью преобразования Лоренца легко получить и несимметричное столкновение.

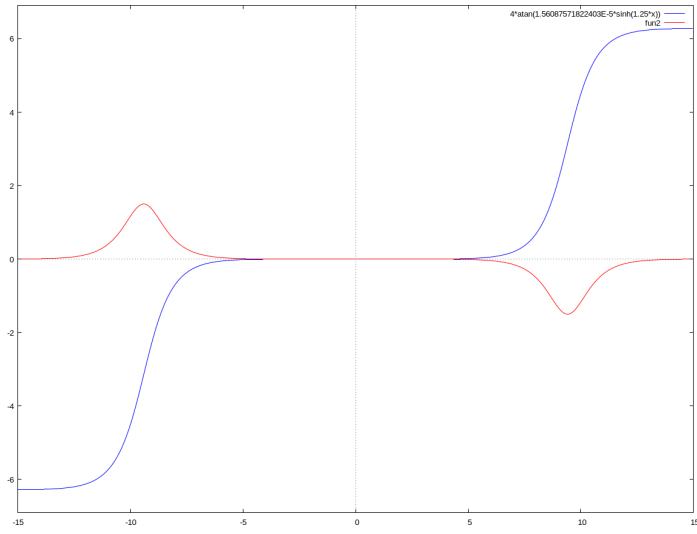


Рис. 5. Два кинка далеко друг от друга: $u(x, t)$ и $\partial_t u(x, t)$, $v = 0,6$, $t = -10$

Из рисунков 5–7 видно, что два солитона сталкиваются, проходят друг сквозь друга и уходят на бесконечность. На языке деформаций это означает, что два дефекта (например, две вакансии) возникают на бесконечности, движутся навстречу друг другу с уменьшением скорости, при $t = 0$ проходят друг сквозь друга с нулевой скоростью и затем уходят на бесконечность, увеличивая свою скорость.

При больших временах высота бегущих солитонов становится постоянной и равной

$$h(t \rightarrow \pm\infty) = \pm \frac{2V}{\sqrt{1 - V^2}}.$$

При меньших временах высота солитонов уменьшается по закону

$$h(t) = \frac{2V}{\sqrt{1 - V^2}} \left(\frac{Vt}{\sqrt{1 - V^2}} \right).$$

При $t = 0$ высота солитонов равна нулю, когда они проходят друг через друга.

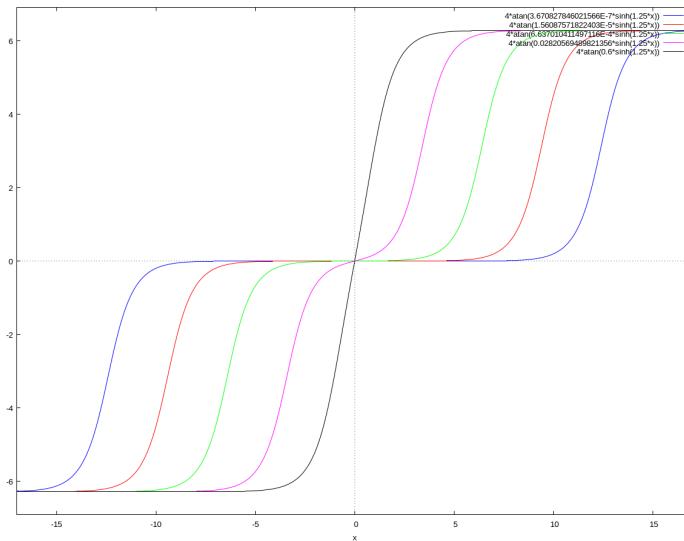


Рис. 6. $u(x, t)$ при $v = 0,6$, $t = -20; -15; -10; -5; 0$. Функция чётна по времени, при положительных временах графики идентичны

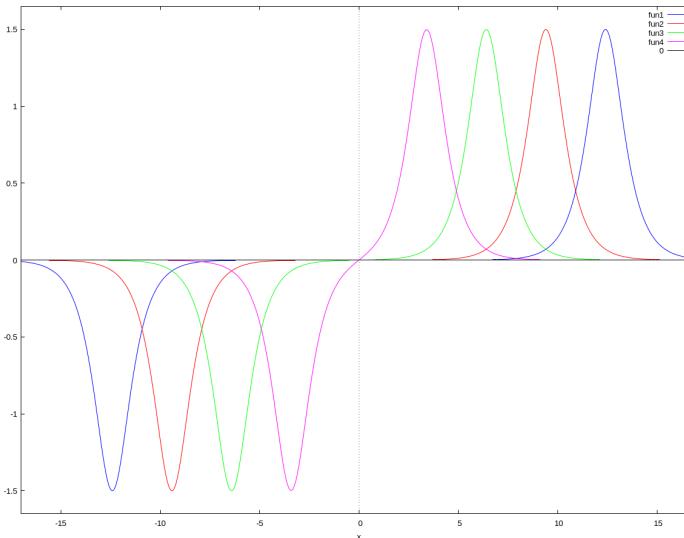


Рис. 7. $\partial_t u(x, t)$ при $v = 0,6$, $t = -20; -15; -10; -5; 0$. Функция нечётна по времени и при положительных временах меняет знак

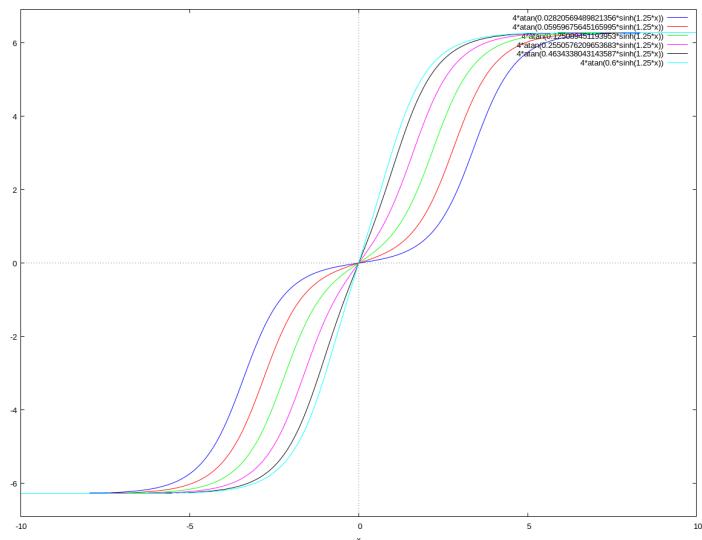


Рис. 8. $u(x, t)$ при $v = 0,6$, $t = -5; -4; -3; -1; -0,8; -0,6; -0,4; -0,2; 0$

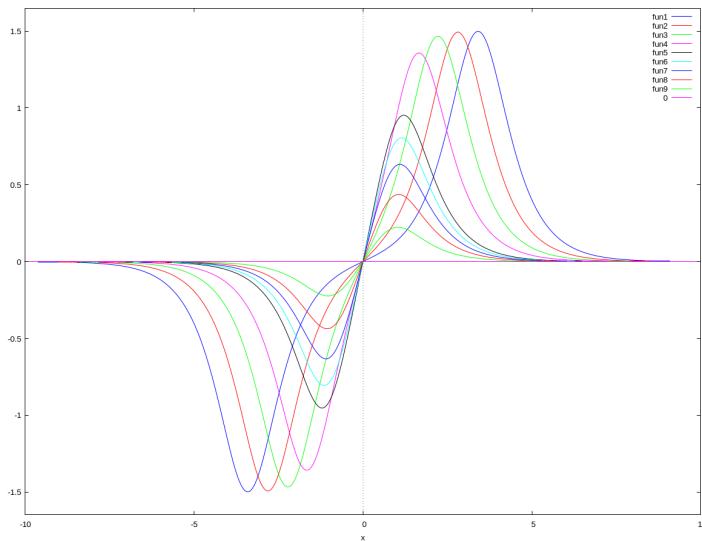


Рис. 9. $\partial_t u(x, t)$ при $v = 0,6$, $t = -5; -4; -3; -1; -0,8; -0,6; -0,4; -0,2; 0$

Function

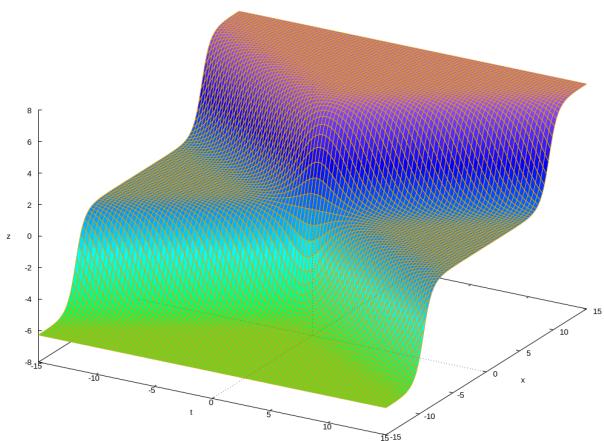


Рис. 10. $u(x, t)$ при $v = 0,6$, $t, x \in (-15, 15)$

Function

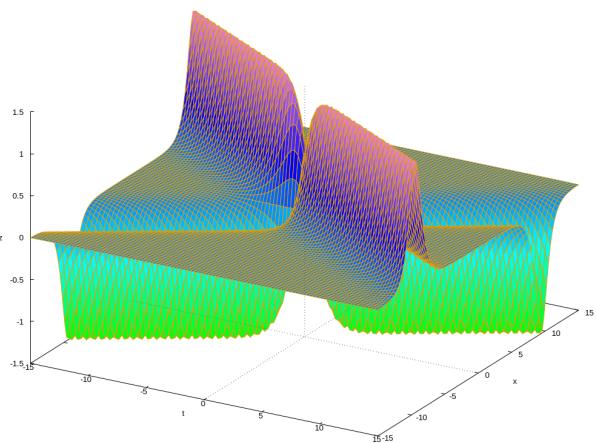


Рис. 11. $\partial_t u(x, t)$ при $v = 0,6$, $t, x \in (-15, 15)$

Кинк+кинк на резиновой ленте

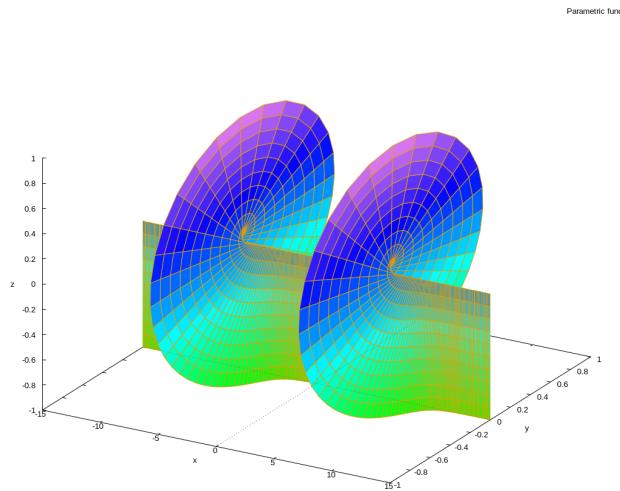


Рис. 12. $u(x, t)$ при $v = 0,6$, $t = -10$

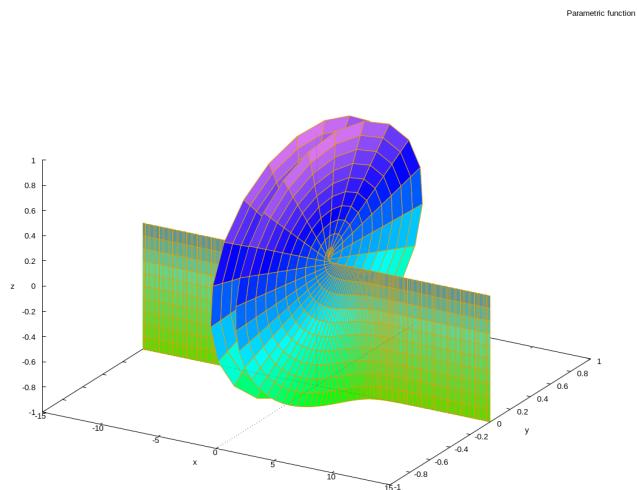


Рис. 13. $u(x, t)$ при $v = 0,6$, $t = 0$

11.3. Солитон+антисолитон

Подвергнем решение (34) преобразованию $u \rightarrow 2\pi - u$ и сдвинем x и t на константы, теперь

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 4 \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left\{ \pm \frac{V \operatorname{sh} \left(\frac{x}{\sqrt{1-V^2}} + \alpha \right)}{\operatorname{ch} \left(\frac{Vt}{\sqrt{1-V^2}} + \beta \right)} \right\} \right] = \\ &= 4 \operatorname{arctg} \left\{ \pm \frac{\operatorname{ch} \left(\frac{Vt}{\sqrt{1-V^2}} + \beta \right)}{V \operatorname{sh} \left(\frac{x}{\sqrt{1-V^2}} + \alpha \right)} \right\}. \end{aligned}$$

Пусть $\alpha = \beta = i\frac{\pi}{2}$, поскольку

$$\operatorname{ch}(x + i\frac{\pi}{2}) = e^{i\pi/2} \operatorname{sh} x, \quad \operatorname{sh}(x + i\frac{\pi}{2}) = e^{i\pi/2} \operatorname{ch} x,$$

получаем ещё одно решение уравнения синус-Гордона, похожее на предыдущее решение (34), только время и координата меняются местами:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 4 \operatorname{arctg} \left\{ \pm \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{Vt}{\sqrt{1-V^2}} \right)}{V \operatorname{ch} \left(\frac{x}{\sqrt{1-V^2}} \right)} \right\}, \\ \partial_t u &= \pm \frac{4V^2}{\sqrt{1-V^2}} \frac{\operatorname{ch} \left(\frac{x}{\sqrt{1-V^2}} \right) \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{Vt}{\sqrt{1-V^2}} \right)}{V^2 \operatorname{ch}^2 \left(\frac{x}{\sqrt{1-V^2}} \right) + \operatorname{sh}^2 \left(\frac{Vt}{\sqrt{1-V^2}} \right)}. \end{aligned} \quad (37)$$

Из вида $\partial_t u$ следует, что солитон и антисолитон симметрично сближаются, усиливаясь по амплитуде, затем сливаются в один пик вблизи $t = 0$. Через некоторое время вновь образованный пик распадается на солитон и антисолитон, которые затем уходят на бесконечность, ослабляясь по амплитуде. Это отражено на последующих рисунках.

При больших аргументах $\left| \frac{x}{\sqrt{1-V^2}} \right| \gg 1$ и $\left| \frac{Vt}{\sqrt{1-V^2}} \right| \gg 1$ снова используем приближение (35) и получаем

$$u(x, t) \approx 4 \operatorname{arctg} \left\{ \pm \operatorname{sgn}(t) \frac{1}{V} \exp \left(\frac{|Vt| - |x|}{\sqrt{1-V^2}} \right) \right\}. \quad (38)$$

Отсюда ясно, что решение описывает симметричное столкновение кинка и антикинка. С помощью преобразования Лоренца легко получить несимметричное столкновение.

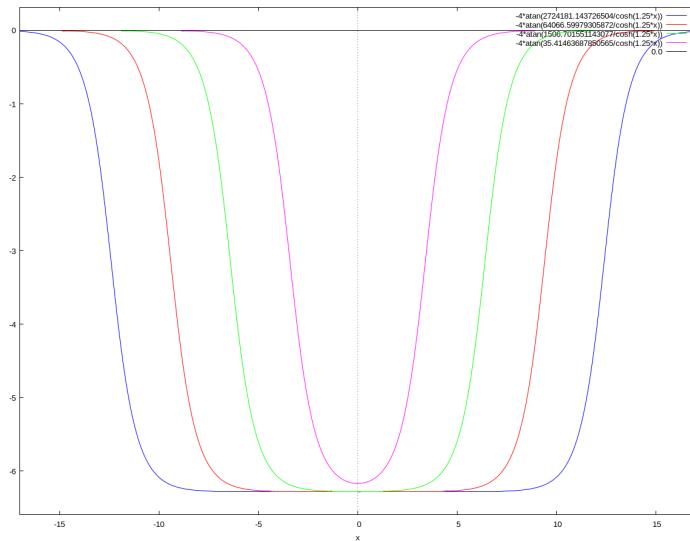


Рис. 14. $u(x, t)$ при $v = 0,6$, $t = -20; -15; -10; -5; 0$. Функция **нечётна** по времени, при положительных временах меняет знак

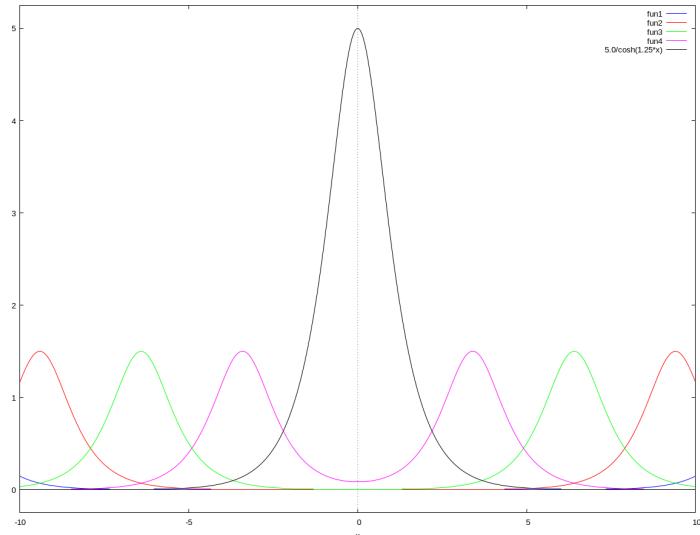


Рис. 15. $\partial_t u(x, t)$ при $v = 0,6$, $t = -20; -15; -10; -5; 0$. Функция **чётна** по времени, при положительных временах графики идентичны

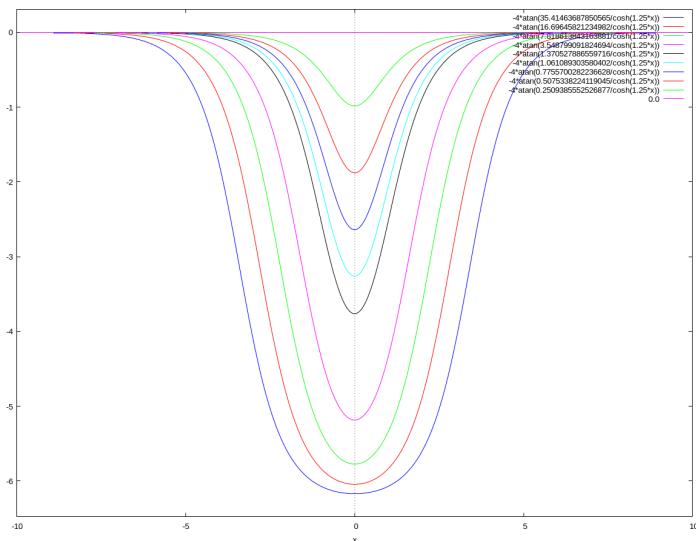


Рис. 16. $u(x, t)$ при $v = 0,6$, $t = -5; -4; -3; -1; -0,8; -0,6; -0,4; -0,2; 0$

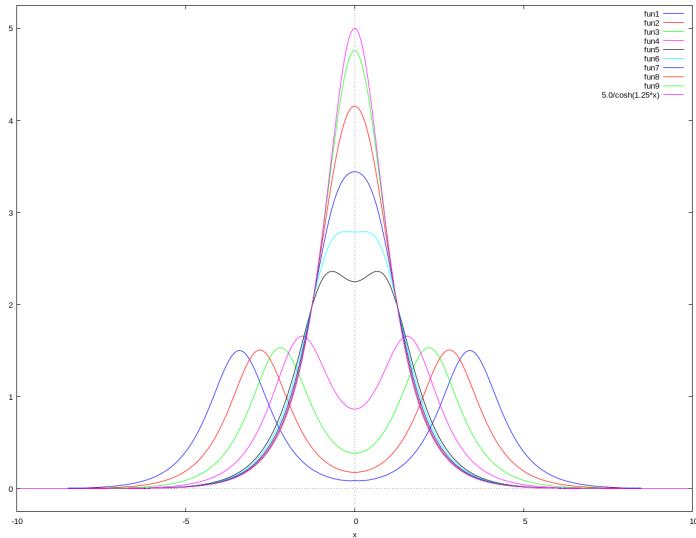


Рис. 17. $\partial_t u(x, t)$ при $v = 0,6$, $t = -5; -4; -3; -1; -0,8; -0,6; -0,4; -0,2; 0$

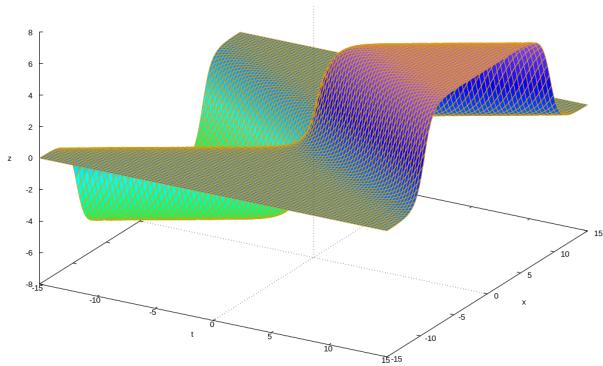


Рис. 18. $u(x,t)$ при $v = 0.6$, $t,x \in (-15,15)$

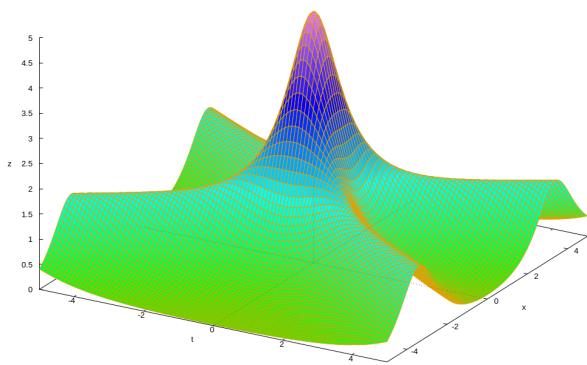


Рис. 19. $\partial_t u(x,t)$ при $v = 0.6$, $t,x \in (-5,5)$

Кинк+антикинк на резиновой ленте

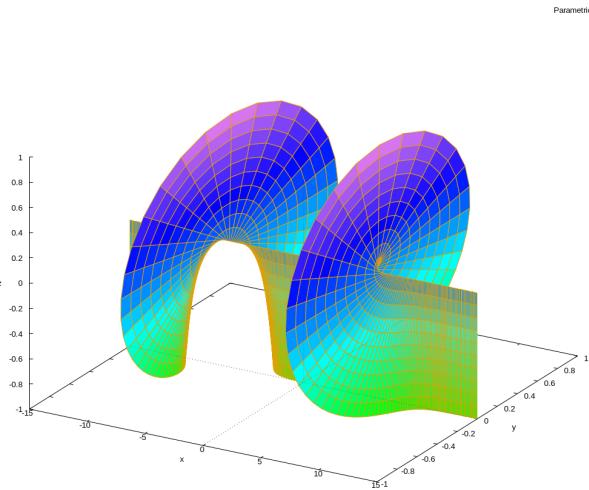


Рис. 20. $u(x, t)$ при $v = 0,6$, $t = -10$

11.4. Бризеры

Еще один тип решения уравнения синус-Гордона получается из предыдущего решения солитон+антисолитон (37) путем замены $V \rightarrow iV$:

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left\{ \pm \frac{\sin \left(\frac{Vt}{\sqrt{1+V^2}} \right)}{V \operatorname{ch} \left(\frac{x}{\sqrt{1+V^2}} \right)} \right\}, \quad (39)$$

$$\partial_t u = \frac{4V^2}{\sqrt{1+V^2}} \frac{\operatorname{ch} \left(\frac{x}{\sqrt{1+V^2}} \right) \cdot \cos \left(\frac{Vt}{\sqrt{1+V^2}} \right)}{V^2 \operatorname{ch}^2 \left(\frac{x}{\sqrt{1+V^2}} \right) + \sin^2 \left(\frac{Vt}{\sqrt{1+V^2}} \right)}.$$

Из этого решения видно, что в системе центра инерции бризер представляет собой стоячую ангармоническую волну (с помощью преобразования Лоренца легко получить движущийся бризер, но в системе центра инерции лучше видны симметрии решения). При $V < 1$ один положительный горб сменяется со временем двумя горбами, затем они меняют знак и, наконец, образуется один отрицательный горб. А при $V > 1$ имеется только один горб, который периодически меняет знак.

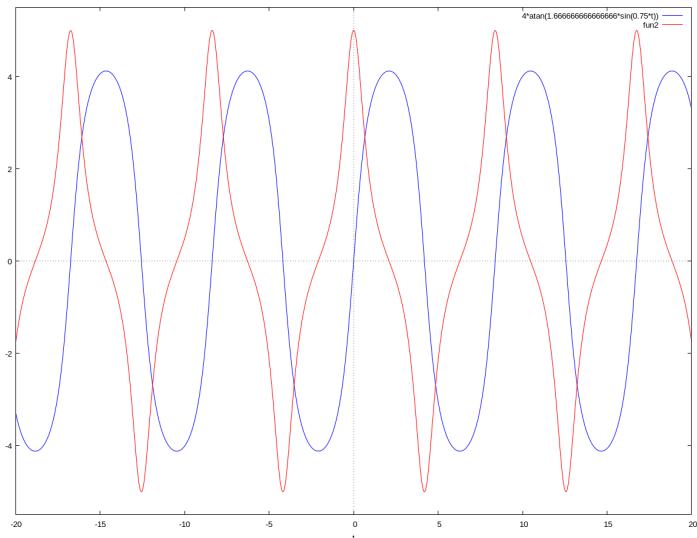


Рис. 21. $u(0, t)$ (более низкая кривая) и $\partial_t u(0, t)$ при $v = 0,6$

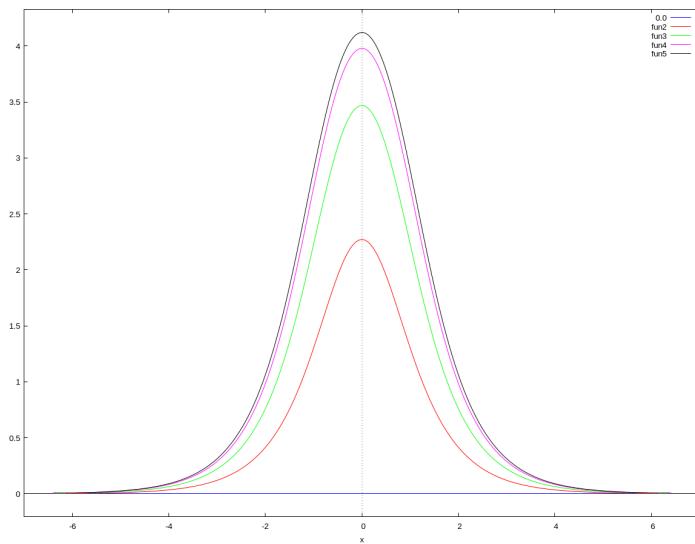


Рис. 22. $u(x, t)$ при $v = 0,6$, $t = 0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}$ ($\frac{1}{4}$ периода, отклонение нарастает). Функция нечётна по времени

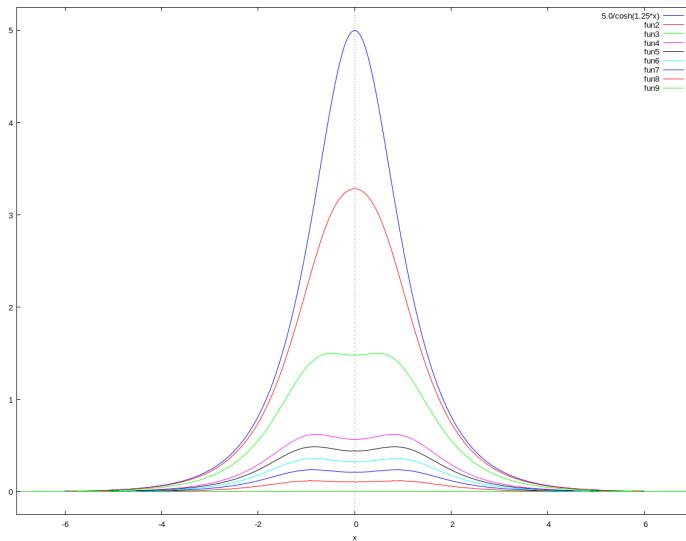


Рис. 23. $\partial_t u(x, t)$ при $v = 0,6$, $t = 0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{8\pi}{15}; \frac{17\pi}{30}; \frac{9\pi}{15}; \frac{2\pi}{3}$ ($\frac{1}{4}$ периода, скорость падает). Функция чётна по времени

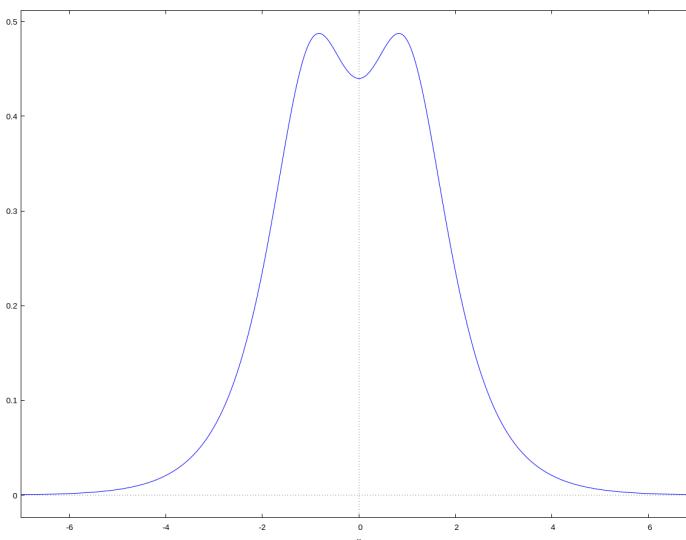


Рис. 24. $\partial_t u(x, t)$ при $v = 0,6$, $t = \frac{8\pi}{15}$

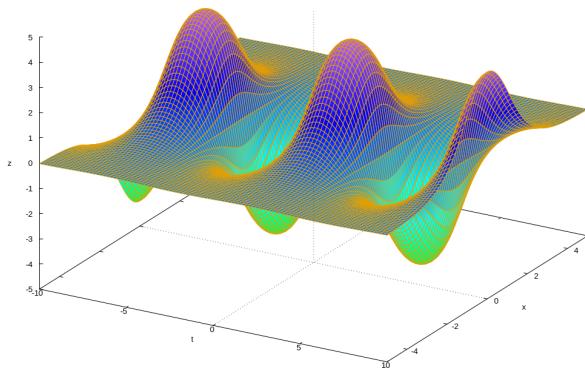


Рис. 25. $u(x, t)$ при $v = 0,6$, $t \in (-10, 10)$, $x \in (-5, 5)$

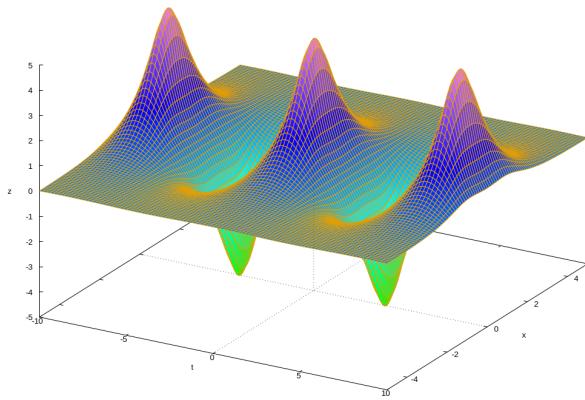


Рис. 26. $\partial_t u(x, t)$ при $v = 0,6$, $t \in (-10, 10)$, $x \in (-5, 5)$

Бризер на резиновой ленте

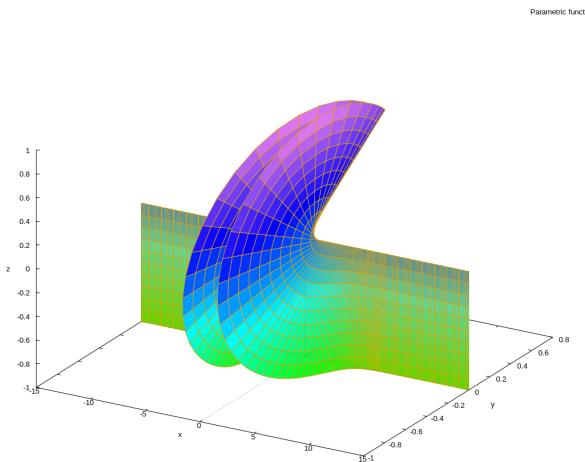


Рис. 27. $u(x, t)$ при $v = 0,6$, $t = -10$

12. Заключение

- В случае дефектов в кристалле солитон представляет собой вакансию (отсутствие атома в элементарной ячейке), а антисолитон — ячейку кристалла с лишним атомом. Уравнение синус-Гордона описывает пластическую деформацию в таком кристалле. Оно описывает вакансию, которая может перемещаться по кристаллу. Перемещение затрудняется тем, что для переброса какого-нибудь соседнего атома на пустое место нужно сначала его сильно «раскачать», чтобы он мог оторваться от окружающих его атомов. Гораздо легче перемещается вакансия, если атомы вокруг нее также сильно смещены.
- Простейшая модель дислокации выглядит следующим образом. Представим себе периодическую последовательность горок и ложбинок. Она имитирует синусоидальное слагаемое в правой части уравнения второго закона Ньютона (1). В ложбинах лежат шарики, связанные друг с другом упругими пружинами. Эти пружины имитируют два линейных слагаемых в правой части уравнения (1). Горки изображают взаимодействие между данной линейной цепочкой и соседними цепочками, где атомы считаются

неподвижными. Шарик может перескочить горку и уйти вправо, если его притянет пружина соседнего правого шарика и оттолкнет пружина соседнего левого шарика. Конечно, это возможно, только если соседние шарики тоже движутся в направлениях, близких друг к другу.

- Понятие дефекта по Френкелю включает пару — вакансию и ячейку с лишним атомом. Эта пара может разойтись, и тогда можно говорить отдельно о вакансии или лишнем атоме в ячейке.
- Любое начальное возмущение распадается на бегущие волны, вакансию и лишние атомы (дислокации).
- Два кинка напоминают две одинаково заряженные частицы — они отталкиваются друг от друга.
- Кинк и антикинк похожи на разноименно заряженные частицы: при столкновении они взаимоуничтожают друг друга.
- Бризеры представляют собой повторяющийся процесс рождения-взаимоуничтожения кинка и антикинка;
- Такие деформации означают текучесть кристалла, приближая его свойства к жидкости при сильных нагрузках.

Список литературы

- [1] *Браун О.М.* Модель Френкеля – Конторовой. Концепции, методы, приложения. Москва : Физматлит, 2008. — 536 с.
- [2] *Филиппов А.Т.* Многоликий солитон. Москва : Наука, 1986. — 224 с.
- [3] *Кившарь Ю.С., Агравал Г.П.* Оптические солитоны. Москва : Физматлит, 2005. — 648 с.
- [4] *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Москва : Физматлит, 2006. — 356 с.
- [5] *Скотт Э.* Нелинейная наука: рождение и развитие когерентных структур. Москва : Физматлит, 2007. — 560 с.
- [6] *Новоженов В.Ю.* Введение в теорию солитонов. Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2002. — 96 с.

Учебное издание

Иванов Михаил Геннадьевич

Крайной Владимир Павлович

**ПЛАСТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ И УРАВНЕНИЕ СИНУС-ГОРДОНА
(МОДЕЛЬ ФРЕНКЕЛЯ – КОНТОРОВОЙ)**

Учебно-методическое пособие

Редактор *И.А. Волкова*. Корректор *Н.Е. Кобзева*

Подписано в печать 15.10.2024. Формат 60×84 $\frac{1}{16}$. Усл. печ. л. 2,5.
Уч.-изд. л. 2,1. Тираж 20 экз. Заказ № 197.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22. E-mail: rio@mail.mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-84-30. E-mail: polygraph@mipt.ru