

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»

*Кафедра теоретической физики им. Л. Д. Ландау*

М. Г. Иванов, Л. П. Суханов

**ЧАСТИЦА В ДВУХ ЯМАХ  
(ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ МОДЕЛИ)**

Учебно-методическое пособие

Москва  
МФТИ, Физтех  
2025

УДК 530.145(075)

ББК 22.314я73

И20

Рецензент

Доктор физико-математических наук *В. П. Крайнов*

**Иванов, Михаил Геннадьевич,  
Суханов, Леонид Павлович**

И20 Частица в двух ямах (физический смысл модели): учеб.-метод. пособие / М. Г. Иванов, Л. П. Суханов ; М-во науки и высшего образования Рос. Федерации, Моск. физ.-техн. ин-т (нац. исслед. исслед. ун-т). – Москва : МФТИ, Физтех, 2025. – 32 с.

В пособии рассмотрена модель квантовой частицы в одномерном двухъямном потенциале. Рассмотрены разные физические интерпретации данной модели, похожие модельные задачи, а также аналогии исходной задачи из разных разделов физики.

Пособие предназначено для студентов 2–4 курсов МФТИ.

**УДК 530.145(075)  
ББК 22.314я73**

© Иванов М.Г., Суханов Л.П., 2025  
© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», 2025

# Содержание

<b>1. О задаче</b>	<b>4</b>
<b>2. Случай одной ямы как предельный</b>	<b>5</b>
<b>3. Несколько одинаковых ям</b>	<b>6</b>
<b>4. Стационарные состояния для двух ям</b>	<b>7</b>
4.1. Достаточно удалённые ямы . . . . .	10
4.2. Близкие ямы . . . . .	10
4.3. Далёкие ямы . . . . .	11
<b>5. Молекулярный ион водорода</b>	<b>12</b>
<b>6. Осцилляции частицы между ямами</b>	<b>14</b>
<b>7. Похожие модельные задачи</b>	<b>16</b>
7.1. Потенциал «мексиканская шляпа» . . . . .	17
7.2. Две прямоугольные ямы . . . . .	17
7.3. Потенциальный колодец, разделённый $\delta$ -стенкой . . . . .	18
<b>8. Оптическая аналогия</b>	<b>20</b>
<b>9. Механическая аналогия</b>	<b>20</b>
9.1. Струна с грузиком посередине . . . . .	20
9.2. Квантовая эволюция на языке классических осцилляторов	20
9.3. Два связанных осциллятора . . . . .	21
<b>10. Молекула аммиака</b>	<b>22</b>
<b>11. Квантовый эффект Зенона</b>	<b>24</b>
11.1. При чём тут Зенон . . . . .	24
11.2. Немного квантовой теории измерений . . . . .	25
11.3. Эффект Зенона в простейшем случае . . . . .	26
11.4. Эффект Зенона для селективных и неселективных изме- рений . . . . .	27
11.5. Почему левая перчатка не превращается в правую? . . . . .	28
<b>12. Что (не)важно в этой задаче?</b>	<b>29</b>

# 1. О задаче

Задача, которую мы рассматриваем, в МФТИ традиционно входит в программу по квантовой механике (см. задачник<sup>1</sup> [1]). Её решение обычно разбирается на семинаре, но при этом обсуждение контекста, в котором задача возникает, неизбежно даётся в сильно сокращённом виде. Между тем задача эта идеально очень богатая, и обсуждение её выводит на многие интересные вопросы квантовой физики и теории колебаний.

Эта задача недавно рассматривалась в учебно-методическом пособии [2] с точки зрения методов её решения. Мы рассмотрим эту же задачу с точки зрения физического смысла, т.е. обсудим физические интерпретации данной модели, похожие модельные задачи и аналогии из разных разделов физики.

Сформулируем условия задачи в том виде, в котором она обычно встречается в программе первого задания первого семестра курса квантовой механики.

## Условия задачи

Частица массы  $m$  совершает финитное движение в одномерном потенциальном поле вида

$$U(x) = -\frac{\hbar^2\alpha}{m} [\delta(x - a) + \delta(x + a)], \quad (1)$$

где  $\alpha$  — параметр потенциала. Найти энергии уровней и волновые функции стационарных состояний. Как зависит число связанных состояний от параметров  $a$  и  $\alpha$ ?

Рассматривая эту задачу как модель молекулярного иона водорода  $\text{H}_2$ , исследуйте зависимость энергий уровней от  $a$  при фиксированном  $\alpha$ .

Покажите, что в случае  $\alpha a \gg 1$  связанные состояния представляют собой дублет близко расположенных уровней. В этом же пределе  $\alpha a \gg 1$  найдите вероятность нахождения частицы в момент  $t$  в правой яме ( $x = a$ ), если при  $t = 0$  она находилась в левой яме ( $x = -a$ ). Обсудите связь со структурой низколежащих уровней молекулы аммиака  $\text{NH}_3$ .

---

<sup>1</sup> Данная ссылка на наш кафедральный задачник и соответствующий пункт в библиографии отсутствуют в бумажной версии данного учебно-методического пособия.

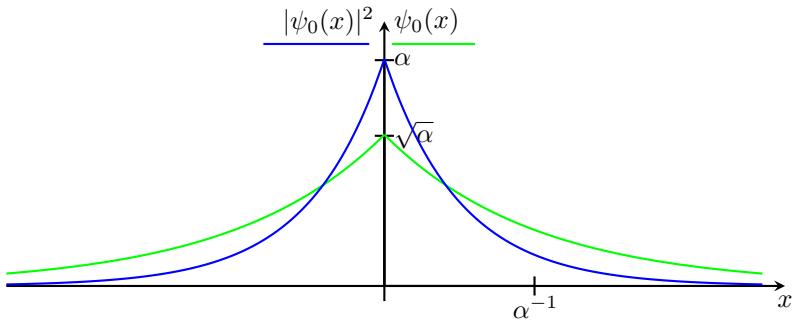


Рис. 1. Графики волновой функции  $\psi_0(x)$  и плотности вероятности  $|\psi_0(x)|^2$

## 2. Случай одной ямы как предельный

Если у нас имеется одна  $\delta$ -яма с потенциалом

$$U_0(x) = -\frac{\hbar^2 \alpha}{m} \delta(x), \quad (2)$$

то система имеет только одно связанное состояние с энергией

$$E_0 = -\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} \quad (3)$$

и нормированной волновой функцией

$$\psi_0(x) = \sqrt{\alpha} e^{-\alpha|x|}. \quad (4)$$

Слова «частица находится в яме» (точнее говорить «частица локализована в окрестности ямы») в этом случае естественно интерпретировать как «частица находится в состоянии  $\psi_0$ ».

Мы видим, что в состоянии  $\psi_0$  частица локализована в окрестности ямы с характерной шириной распределения  $\alpha^{-1}$ .

В пределе  $a = 0$  задача о двух ямах сводится к задаче об одной яме двойной глубины с потенциалом, который получается из  $U_0$  заменой  $\alpha \rightarrow \alpha_1 = 2\alpha$ :

$$U_0(x) \rightarrow U_1(x) = -2 \frac{\hbar^2 \alpha}{m} \delta(x) = 2U_0(x), \quad E_0 \rightarrow E_1 = 4E_0, \quad (5)$$

$$\psi_0(x) \rightarrow \psi_1(x) = \sqrt{2} \psi_0(2x).$$

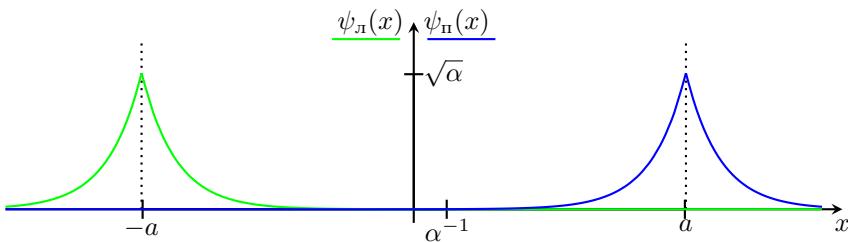


Рис. 2. Графики  $\psi_l(x)$  и  $\psi_n(x)$  для  $\alpha a = 8$

В пределе большого расстояния между ямами<sup>2</sup> влияние ям друг на друга<sup>3</sup> должно быть слабым и волновые функции

$$\psi_l = \psi_0(x + a), \quad \psi_n = \psi_0(x - a) \quad (6)$$

могут рассматриваться как «почти стационарные состояния» с энергией  $E_0$  для потенциала (1), в которых «частица локализована в левой яме» ( $\psi_l$ ) и «частица локализована в правой яме» ( $\psi_n$ ).

Что означает выражение «почти стационарные состояния», мы обсудим ниже.

### 3. Несколько одинаковых ям

В одномерном случае дискретный спектр всегда невырожден<sup>4</sup>, поскольку стационарное уравнение Шрёдингера при любой энергии имеет два линейно-независимых решения, но условие квадратичной интегрируемости волновой функции (условие конечности полной вероятности) на каждой бесконечности накладывает одно однородное граничное условие. Поэтому число линейно независимых квадратично интегрируемых решений при данной энергии не больше одного. Если  $N$

<sup>2</sup>Что значит «большое расстояние»? Для состояния  $\psi_0$  характерный масштаб по координате —  $\alpha^{-1}$ , так что большие расстояния — это значит  $a \gg \alpha^{-1}$  или в безразмерных величинах  $\alpha a \gg 1$ .

<sup>3</sup>Точнее, влияние второй ямы на частицу, локализованную в окрестностях первой ямы.

<sup>4</sup>Если стационарное уравнение Шрёдингера является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка и если выполнены условия применимости для него теоремы о существовании и единственности задачи Коши. Если не брать экзотических гамильтонианов, то физически это обычно означает, что на прямой не должно быть бесконечно высоких потенциальных барьеров конечной ширины.

одинаковых потенциальных ям расположено на прямой, то в пределе большого расстояния между ямами кратность вырождения дискретных уровней равна числу ям: частица с одним и тем же уровнем энергии может быть локализована в любой яме. Если расстояние между ямами достаточно велико, то размерность пространства связанных состояний остаётся равной  $N$ . Поскольку одномерные связанные уровни должны быть не вырождены, уровень расщепляется на  $N$  близких подуровней.

Ниже мы увидим, как расщепление уровней проявляется в случае двух потенциальных ям.

## 4. Стационарные состояния для двух ям

Вернёмся к двухъямному потенциалу (1):

$$U(x) = -\frac{\hbar^2\alpha}{m} \{ \delta(x-a) + \delta(x+a) \}.$$

Уровни энергии параметризуем следующим образом:

$$E_{\pm} = -\frac{\hbar^2\kappa_{\pm}^2}{2m}. \quad (7)$$

Знак  $\pm$  соответствует чётности волновой функции ( $+$  — чётная,  $-$  — нечётная).

Условия спаривания дают на параметры  $\kappa_{\pm}$  уравнения

$$1 \pm e^{-2\kappa_{\pm}a} = \frac{\kappa_{\pm}a}{\alpha a}. \quad (8)$$

Нормированные на 1 волновые функции имеют вид

$$\psi_{+} = C_{+} \cdot \begin{cases} \frac{\text{ch}(\kappa_{+}x)}{\text{ch}(\kappa_{+}a)}, & |x| < a \\ e^{-\kappa_{+}(|x|-a)}, & |x| > a \end{cases}, \quad (9)$$

$$C_{+}^{-2} = \frac{1}{\kappa_{+}} \left( 1 + \text{th}(\kappa_{+}a) + \frac{\kappa_{+}a}{\text{ch}^2(\kappa_{+}a)} \right) \rightarrow \frac{2}{\kappa_{+}} \text{ при } \kappa_{+}a \rightarrow +\infty. \quad (10)$$

$$\psi_{-} = C_{-} \cdot \begin{cases} \frac{\text{sh}(\kappa_{-}x)}{\text{sh}(\kappa_{-}a)}, & |x| < a \\ \text{sgn}(x) e^{-\kappa_{-}(|x|-a)}, & |x| > a \end{cases}, \quad (11)$$

$$C_{-}^{-2} = \frac{1}{\kappa_{-}} \left( 1 + \text{cth}(\kappa_{-}a) - \frac{\kappa_{-}a}{\text{sh}^2(\kappa_{-}a)} \right) \rightarrow \frac{2}{\kappa_{-}} \text{ при } \kappa_{-}a \rightarrow +\infty. \quad (12)$$

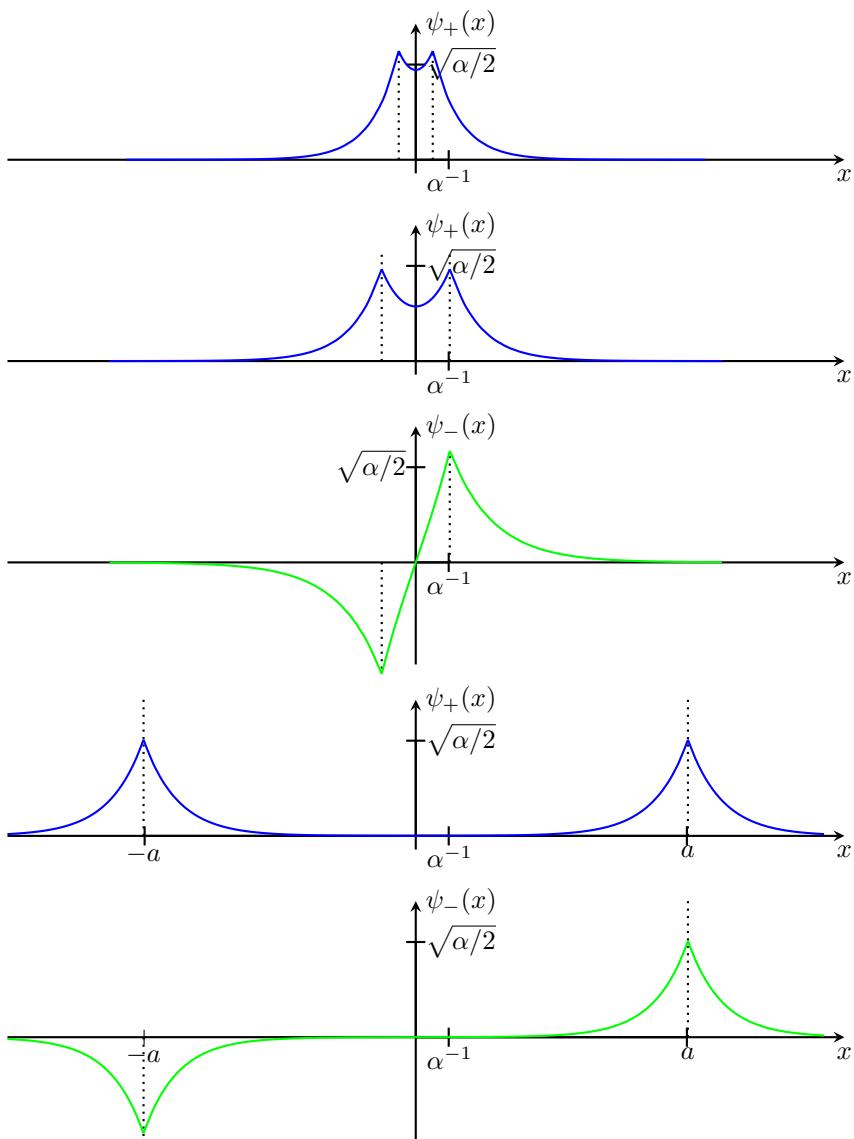


Рис. 3. Графики  $\psi_{\pm}(x)$  для  $\alpha a = 1/2$ ,  $\alpha a = 1$  и  $\alpha a = 8$

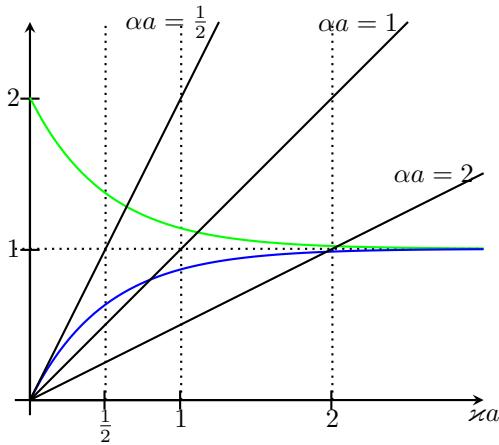


Рис. 4. Графическое решение уравнений (8). Верхняя и нижняя кривая соответствуют верхнему и нижнему знакам в левой части уравнений  $1 \pm e^{-2\varkappa a}$ . Наклонные прямые соответствуют правой части уравнений  $\frac{\varkappa a}{\alpha a}$  при разных значениях  $\alpha a$  ( $\frac{1}{2}, 1, 2$ )

Выражения для волновых функций имеют смысл при  $\varkappa_{\pm} > 0$ .

Уравнения (8) не решаются аналитически, проанализируем их графически (рис. 4).

Прямая  $\frac{\varkappa a}{\alpha a}$  при  $\alpha a > 0$  всегда пересекает кривую  $1 + e^{-2\varkappa a}$  при положительном значении  $\varkappa_+$ . По мере уменьшения  $a$  от бесконечности до нуля параметр  $\varkappa_+$  растёт от  $\alpha$  до  $2\alpha$  (см. рис. 5), а энергия чётного уровня уменьшается от  $E_0 = -\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m}$  до  $4E_0$  (см. рис. 6). Уменьшение энергии по мере сближения ям означает, что частица в чётном связанным состоянии создаёт между ямами притягивающую силу.

Прямая  $\frac{\varkappa a}{\alpha a}$  пересекает кривую  $1 - e^{-2\varkappa a}$  при положительном значении  $\varkappa_-$ , только если прямая выходит из нуля ниже кривой, т.е. при  $\alpha a > \frac{1}{2}$ . По мере уменьшения  $a$  от бесконечности до  $\frac{1}{2\alpha}$  параметр  $\varkappa_-$  убывает от  $\alpha$  до 0 (см. рис. 5), а энергия чётного уровня увеличивается от  $E_0 = -\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m}$  до 0 (см. рис. 6). Увеличение энергии по мере сближения ям означает, что частица в нечётном связанным состоянии создаёт между ямами отталкивающую силу.

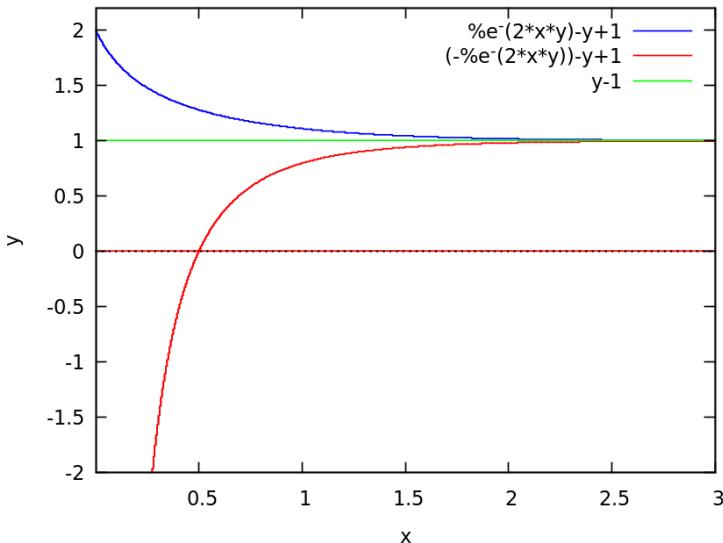


Рис. 5. Зависимость  $\frac{x_{\pm}}{\alpha}$  от  $\alpha a$ . Нижний график ( $\frac{x_-}{\alpha}$ ) при  $\alpha a \leq \frac{1}{2}$  уходит в нефизическую область

#### 4.1. Достаточно удалённые ямы

Из рисунка 4 видно, что при любых значениях  $\alpha a > \frac{1}{2}$

$$0 < \varkappa_- < \alpha < \varkappa_+ \Rightarrow 0 > E_- > E_0 > E_+.$$

Мы видим из графика, что по мере сближения ям единственный уровень энергии  $E_0$ , который имел место для одной ямы или в пределе  $\alpha a \rightarrow \infty$  (см. (6)), расщепляется на дублет  $E_{\pm}$ . Расщепление нарастает вплоть до  $\alpha a = \frac{1}{2}$ , когда нечётный уровень  $E_-$  достигает нуля и исчезает, слившись непрерывным спектром ( $E \geq 0$ ).

#### 4.2. Близкие ямы

При  $0 < \alpha a \leq \frac{1}{2}$  получаем  $\varkappa_- \leq 0$ , таким значениям соответствуют ненормируемые волновые функции, и мы их отбрасываем как нефизические. В этом случае у нас остаётся одно связанное состояние (чётное), для которого

$$0 < \alpha < \varkappa_+ \Rightarrow 0 > E_0 > E_+.$$

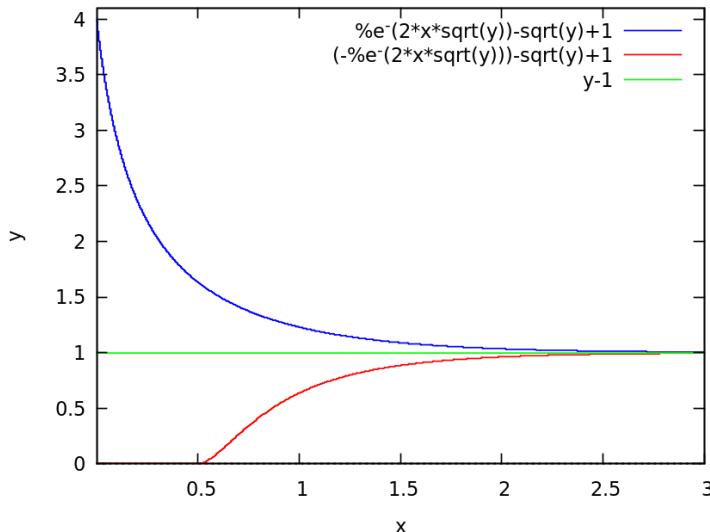


Рис. 6. Зависимость  $\frac{E_+}{E_0}$  от  $\alpha a$  ( $E_0 < 0$ ). Нижний график ( $\frac{E_-}{E_0}$ ) определён только при  $\alpha a > \frac{1}{2}$

В пределе  $\alpha a \rightarrow 0$  получаем, в соответствии с тем, что мы и ожидали для ямы двойной глубины (5):

$$\varkappa_+ = 2\alpha, \quad \Rightarrow \quad E_+ = 4E_0,$$

Можно сказать, что при  $0 < \alpha a \leq \frac{1}{2}$ , т.е. когда расстояние между  $\delta$ -ямами становится меньше характерного расстояния  $2a \leq \frac{1}{\alpha}$ , частица воспринимает две ямы как одну.

### 4.3. Далёкие ямы

Как видно из чертежа, при больших значениях  $\alpha a \gg 1$  значения  $\alpha$  и  $\varkappa_{\pm}$  неограниченно сближаются. При этом убывающая экспонента в уравнении (8) меняется всё медленнее и медленнее (её производная стремится к нулю). Это позволяет заменить в показателе экспоненты  $\varkappa_{\pm}$  на  $\alpha$ . После такой замены уравнение (8) даёт приближительное аналитическое решение

$$\varkappa_{\pm} \approx \alpha \left( 1 \pm e^{-2\alpha a} \right). \quad (13)$$

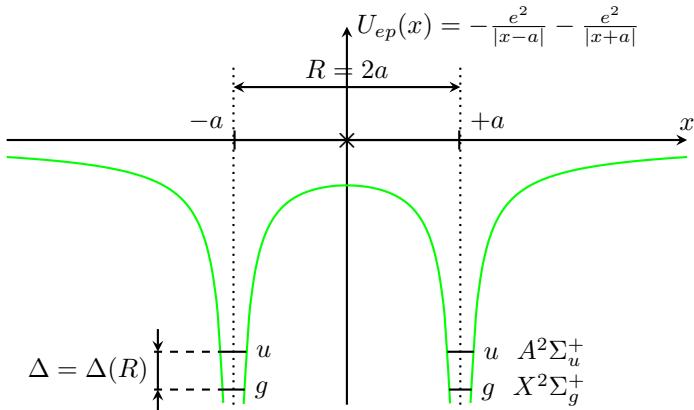


Рис. 7. Движение электрона в поле двух кулоновских ям

Соответствующие приближённые значения энергии имеют вид

$$E_{\pm} = -\frac{\hbar^2 \kappa_{\pm}^2}{2m} \approx \underbrace{-\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m}}_{E_0} (1 \pm e^{-2\alpha a})^2 \approx E_0 (1 \pm 2e^{-2\alpha a}) = E_0 \mp \frac{\delta E}{2}, \quad (14)$$

$$\delta E = -4e^{-2\alpha a} E_0 = \frac{2\hbar^2 \alpha^2}{m} e^{-2\alpha a}. \quad (15)$$

## 5. Молекулярный ион водорода

Молекулярный ион водорода  $\text{H}_2^+$  состоит из двух протонов (ядер водорода) и одного электрона. Поскольку протон примерно в 1836 раз тяжелее электрона, то в нулевом приближении мы можем считать, что протоны неподвижны и тогда получаем задачу об электроне в поле двух кулоновских ям (см. рис. 7).

Потенциальный рельеф движения электрона в поле двух ядер иона  $\text{H}_2^+$  подобен (обладает теми же симметриями) потенциальному рельефу движения частицы в одномерном потенциале двух  $\delta$ -ям. Значит, относительно центра инверсии, отмеченного на рис. 7 крестиком, электронная волновая функция иона  $\text{H}_2^+$  может быть чётной “*g*” и нечётной “*u*”. При этом энергия электрона параметрически зависит от расстояния  $R = 2a$  между протонами.

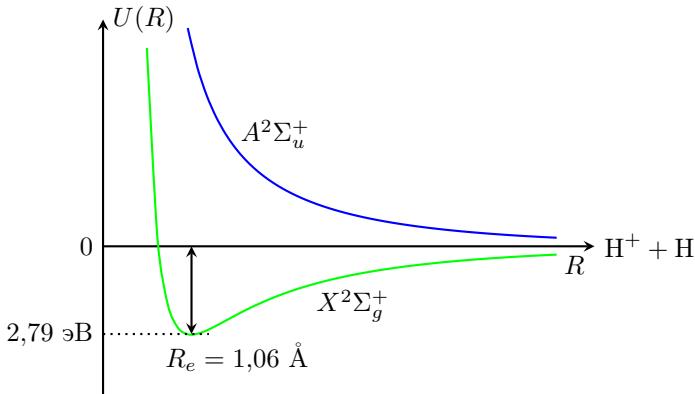


Рис. 8. Потенциальные кривые (эскиз) основного и первого возбуждённого электронных состояний молекулярного иона  $\text{H}_2^+$  по данным молекулярной спектроскопии [3]

В молекулярной спектроскопии стационарные уровни энергии как функции от  $R$  принято называть термами. Терм основного электронного состояния двухатомной молекулы обозначается буквой  $X$ , а первого возбуждённого состояния — буквой  $A$ . В записи терма  $\Sigma$  означает, что проекция орбитального момента электрона на ось молекулы равна нулю,  $2 = 2s + 1$  — спиновая мультиплетность электрона, а верхний “+” означает, что при отражении в плоскости, проходящей через ось молекулы, знак электронной волновой функции не меняется.

Полная энергия молекулы  $\text{H}_2^+$  как функция расстояния  $R$  между ядрами (кривая потенциальной энергии) получается суммированием трёх слагаемых

$$U(R) = T_e(R) + U_{ep}(R) + U_{pp}(R), \quad (16)$$

где  $T_e(R) = \frac{\mathbf{p}_e^2}{2m_e}$  — кинетическая энергия электрона,  $U_{ep}(R) = -\frac{e^2}{r_{ep_1}} - \frac{e^2}{r_{ep_2}}$  — потенциальная энергия притяжения электрона к ядрам,  $U_{pp}(R) = \frac{e^2}{R}$  — энергия отталкивания протонов. Сумма энергии первых двух слагаемых соответствует энергии уровней в задаче о движении электрона в поле двух кулоновских ям, эту энергию мы приближаем энергией уровней модельной задачи о движении частицы в поле двух  $\delta$ -ям.

Как мы уже видели (см. рис. 6), энергия симметричного состояния

уменьшается с расстоянием, а антисимметричного состояния растёт. Таким образом, симметричное состояние даёт в потенциал (16) притягивающий вклад, а антисимметричное — отталкивающий.

Заметим, что параметрически зависит от  $R = 2a$  и величина туннельного расщепления термов  $\Delta = \Delta(R)$  в молекуле  $\text{H}_2^+$ . В диссоционном пределе при  $R = 2a \rightarrow \infty$  или, следуя модельной задаче, при  $\alpha a \gg 1$  имеем  $\Delta(R) \rightarrow 0$ , что соответствует началу отсчёта энергии  $\text{H}^+ + \text{H}$  на кривой  $U(R)$  (см. рис. 8). По данным молекулярной спектроскопии [3], терм основного электронного состояния молекулы  $\text{H}_2^+$  — связанный по  $R$  терм с глубиной потенциальной ямы  $D_e(\text{H}_2^+) = 2,79$  эВ при равновесном расстоянии между ядрами  $R_e(\text{H}_2^+) = 1,06$  Å.

Тогда как у молекулы водорода  $\text{H}_2$  соответствующие величины:  $D_e(\text{H}_2) = 4,75$  эВ и  $R_e(\text{H}_2) = 0,74$  Å. У молекулярного иона  $\text{H}_2^+$  первому возбуждённому состоянию соответствует отталкивателльный по  $R$  терм (см. рис. 8).

## 6. Осцилляции частицы между ямами

Мы можем описать частицу, локализованную в окрестности правой/левой ямы, с помощью состояний  $\psi_{\text{п/л}}$ :

$$\psi_{\text{п}} = \frac{\psi_+ + \psi_-}{\sqrt{2}}, \quad \psi_{\text{л}} = \frac{\psi_+ - \psi_-}{\sqrt{2}}. \quad (17)$$

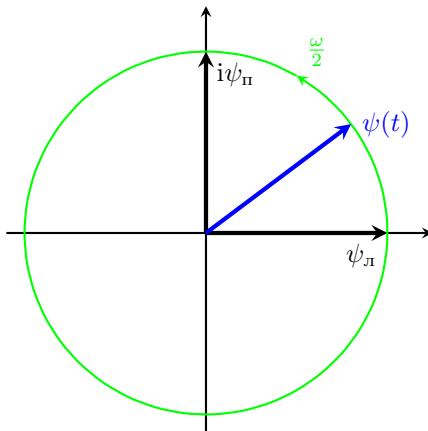


Рис. 9. Вектор состояния  $\psi(t)$  вращается с угловой скоростью  $\frac{\omega}{2}$

Если в момент времени  $t = 0$  по условию задачи «частица находится в левой яме», то начальное состояние близко в  $\psi_{\text{л}}$ . В принципе состояние  $\psi_{\text{л}}$  можно скомбинировать с комбинацией состояний непрерывного спектра:

$$\psi_{\text{л}} = c_1 \psi_{\text{л}} + c_2 \psi_{\text{непр.}}, \quad |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1.$$

Например, мы можем таким образом добиться того, чтобы частица была локализована в окрестностях левой ямы с точностью лучше, чем  $\alpha^{-1}$ . Но добавка  $\psi_{\text{непр.}}$  соответствует движению частицы в неограниченной области, её вклад будет со временем неограниченно расплываться по координате и в результате с вероятностью  $|c_2|^2$  частица уйдёт на бесконечность.

Если нас интересует финитное движение частицы, то следует ограничиться комбинациями состояний дискретного спектра. Тем самым мы ограничиваемся рассмотрением двумерного подпространства состояний  $\mathcal{H}_{2d}$ , натянутого на векторы состояний  $\psi_{\pm}$ . Ограничение на такое подпространство векторов состояний даст двумерные комплексные векторы (кет-векторы — столбцы, бра-векторы — строки), а ограничение операторов даст матрицы  $2 \times 2$ .

Оператор Гамильтона и вектор состояния, ограниченные на подпространство состояний дискретного спектра в базисе стационарных состояний, имеют следующие матричные представления:

$$\hat{H}_{2d} = \begin{pmatrix} E_+ & 0 \\ 0 & E_- \end{pmatrix}, \quad \psi = c_+ \psi_+ + c_- \psi_- \Rightarrow \psi_{2d} = \begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix}.$$

Поскольку если  $\psi(t = 0) = \psi_{\text{л}}$ , то сразу получаем временну́ю эволюцию вектора состояния, которую легко переписать через состояния  $\psi_{\text{л/п}}$ :

$$\psi(t) = \frac{\psi_+ e^{-\frac{iE_+}{\hbar}t} - \psi_- e^{-\frac{iE_-}{\hbar}t}}{\sqrt{2}} = e^{-\frac{iE_0}{\hbar}t} [\psi_{\text{л}} \cos(\frac{\delta E}{2\hbar}t) + i\psi_{\text{п}} \sin(\frac{\delta E}{2\hbar}t)]. \quad (18)$$

Общий фазовый множитель  $e^{-\frac{iE_0}{\hbar}t}$  не влияет на матричные элементы в момент времени  $t$  и не имеет физического смысла. Его можно убрать, сдвинув нулевую точку на шкале энергии  $E \rightarrow E - E_0$ . После этого мы получаем, что эволюция волновой функции сводится к вращению с угловой скоростью  $\frac{\omega}{2} = \frac{\delta E}{2\hbar}$  в плоскости, натянутой на векторы  $\psi_{\text{л}}$  и  $i\psi_{\text{п}}$ :

$$\psi'(t) = \psi_{\text{л}} \cos(\frac{\delta E}{2\hbar}t) + i\psi_{\text{п}} \sin(\frac{\delta E}{2\hbar}t). \quad (19)$$

Вероятности нахождения частицы в момент времени  $t$  в состояниях  $\psi_{\text{л/п}}$  осциллируют от 0 до 1 с частотой  $\omega = \frac{\delta E}{\hbar}$ :

$$p_{\text{л}}(t) = |\langle \psi_{\text{л}} | \psi(t) \rangle|^2 = \cos^2\left(\frac{\delta E}{2\hbar}t\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\delta E}{\hbar}t\right), \quad (20)$$

$$p_{\text{п}}(t) = |\langle \psi_{\text{п}} | \psi(t) \rangle|^2 = \sin^2\left(\frac{\delta E}{2\hbar}t\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\delta E}{\hbar}t\right). \quad (21)$$

## 7. Похожие модельные задачи

Можно рассматривать другие модельные двухъямные потенциалы. При этом сходство с поведением частицы в потенциале (1) следует искать рассматривая не спектр в целом, а пары (дублеты) близко расположенных уровней, нижний из которых чётный (аналог состояний  $\psi_+$ ), а верхний — нечётный (аналог состояния  $\psi_-$ ).

Рассмотрим некоторые наиболее простые модели.

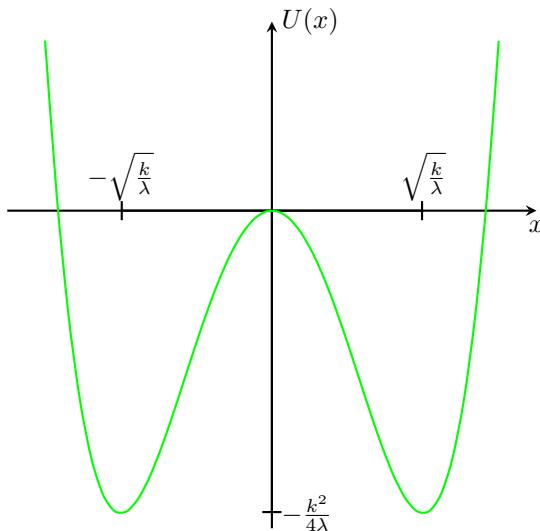


Рис. 10. Потенциал «мексиканская шляпа»  $U(x) = \frac{\lambda x^4}{4} - \frac{kx^2}{2}$

## 7.1. Потенциал «мексиканская шляпа»

Данный потенциал удобен тем, что задаётся простой аналитической формулой, а также тем, что это очень популярный и хорошо исследованный модельный потенциал. В частности, такой потенциал часто рассматривается для моделирования спонтанного нарушения симметрии:

$$U(x) = \frac{\lambda x^4}{4} - \frac{kx^2}{2}, \quad \lambda, k > 0. \quad (22)$$

Для данного потенциала  $U(\pm\infty) = +\infty$ , частица с любой энергией не может уйти на бесконечность, а значит, непрерывный спектр отсутствует. В зависимости от параметров  $\lambda, k$  частица в потенциале может иметь уровни энергии ниже, чем потенциальный барьер между половинками ямы ( $E < 0$ ).

Достаточно глубокие уровни  $E < 0$  при этом образуют дублеты, аналогичные  $\psi_{\pm}$ . В каждом таком дублете чётное состояние (аналог  $\psi_+$ ) имеет меньшую энергию, чем нечётное состояние (аналог  $\psi_-$ ). К каждому из таких дублетов относятся многие из рассуждений, приведённых нами для состояний  $\psi_{\pm}$ .

В силу чётности потенциала все стационарные состояния будут либо чётными, либо нечётными, причём основное состояние — всегда чётное. При этом в силу осцилляторной теоремы по мере роста энергии чётные и нечётные состояния чередуются. Так что в диапазоне энергий  $E \in (-\frac{k^2}{4\lambda}, 0)$  у нас будет некоторое количество пар, состоящих из чётного и нечётного уровней. Если самый высокий уровень в этом диапазоне окажется чётным, то он останется без пары.

Потенциал «мексиканская шляпа» удобен для демонстрации расщепления уровней методом инстантонов.

## 7.2. Две прямоугольные ямы

Другая по-своему естественная модель: две симметричные прямоугольные ямы, разделённые прямоугольным потенциальным барьером (рис. 11):

$$U(x) = \begin{cases} U_{\infty}, & |x| > b \\ U_1, & b > |x| > a \\ U_0, & |x| < a \end{cases} . \quad (23)$$

Дублеты чётного и нечётного уровней, аналогичные  $\psi_{\pm}$ , могут быть в диапазоне энергий  $E \in (U_1, U_{\infty})$ . При  $E > U_{\infty}$  частица может уйти на бесконечность и имеет место непрерывный спектр.

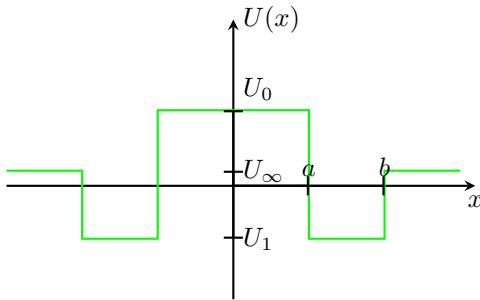


Рис. 11. Потенциал двух прямоугольных ям

Потенциал (23) не очень удобен, так как содержит слишком много параметров.

Наш исходный потенциал (1) является предельным случаем данного потенциала с меньшим числом параметров, если положить

$$U_{\infty} = U_0 = 0, \quad b \rightarrow a + 0, \quad (b - a)U_1 = -\frac{\hbar^2\alpha}{m}.$$

### 7.3. Потенциальный колодец, разделённый $\delta$ -стенкой

$$U(x) = \begin{cases} +\infty, & |x| > L \\ \frac{\hbar^2\alpha}{m} \delta(x), & |x| < L \end{cases}, \quad \alpha, m > 0. \quad (24)$$

Данный потенциал также является предельным случаем предыдущего потенциала (23) с меньшим числом параметров, если положить

$$a \rightarrow 0, \quad b = L, \quad U_{\infty}, U_0 \rightarrow +\infty, \quad 2aU_0 = \frac{\hbar^2\alpha}{m}.$$

Нечётные состояния в данном потенциале не чувствуют  $\delta$ -барьер, чётные состояния чувствуют барьер тем сильнее, чем меньше энергия. Безразмерный параметр, определяющий силу взаимодействия левой и правой ям, здесь зависит от энергии и имеет вид

$$\frac{\alpha}{k}, \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}.$$

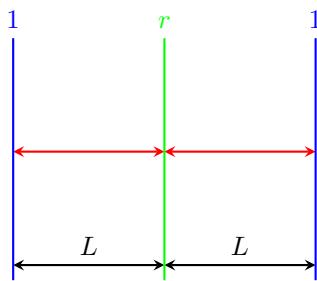


Рис. 12. Связанные интерферометры Фабри – Перо

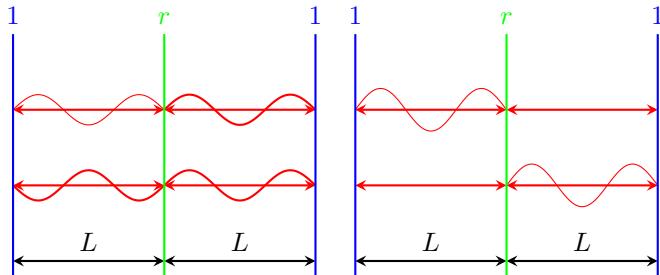


Рис. 13. Стоячие волны в связанных резонаторах Фабри – Перо, аналогичные  $\psi_{\pm}$  и  $\psi_{l/n}$ , отвечающие моде номер 3 стоячих волн в одиночном резонаторе

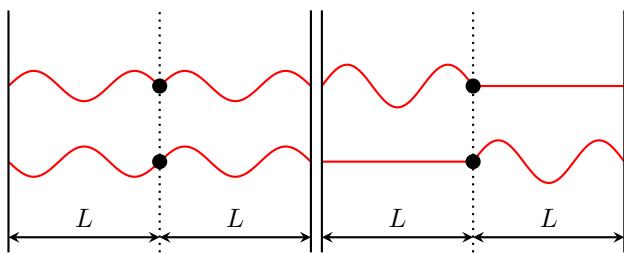


Рис. 14. Стоячие волны на струне с грузиком посередине, аналогичные  $\psi_{\pm}$  и  $\psi_{l/n}$ , отвечающие моде номер 3 стоячих волн на половине струны

Можно в качестве такого параметра взять коэффициент отражения волны с волновым числом  $k$  от  $\delta$ -барьера  $\frac{\hbar^2 \alpha}{m} \delta(x)$ :

$$r = \frac{\alpha^2}{k^2 + \alpha^2} = \frac{\left(\frac{\alpha}{k}\right)^2}{1 + \left(\frac{\alpha}{k}\right)^2}.$$

Параметр  $r$  удобен при сравнении поведения частицы в потенциале (24) с поведением связанных резонаторов Фабри – Перо (см. ниже раздел 8 «Оптическая аналогия»).

## 8. Оптическая аналогия

Рассмотрим два связанных резонатора Фабри – Перо (рис. 12, 13): три параллельных зеркала на равных расстояниях друг от друга, крайние зеркала с коэффициентом отражения 1, а среднее зеркало с коэффициентом отражения  $r$  и коэффициентом пропускания  $1 - r \ll 1$ .

В случае  $r = 1$  можно было бы возбудить моду колебаний, локализованную в одном интерферометре. При  $1 - r \ll 1$  собственное колебание охватывает оба интерферометра, причём частоты чётной и нечётной моды колебаний расщепляются.

## 9. Механическая аналогия

### 9.1. Струна с грузиком посередине

Аналогом рассмотренной выше пары связанных резонаторов Фабри – Перо является закреплённая с двух концов струна, на середине которой закреплён грузик, который выступает в роли полупрозрачного зеркала (рис. 14). Чем массивнее грузик, тем точнее можно считать его неподвижным и тем ближе к 1 коэффициент отражения волны бегущей по струне от грузика.

Далее мы считаем грузик «достаточно тяжёлым», что соответствует тому, что коэффициент отражения близок к 1 ( $1 - r \ll 1$ ).

### 9.2. Квантовая эволюция на языке классических осцилляторов

Эволюция квантовой системы с дискретным энергетическим спектром описывается следующим образом:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_k C_k(t) |\phi_k\rangle, \quad C_k(t) = e^{i\omega_k t} C_k(0). \quad (25)$$

Здесь

$$\omega_k = \frac{E_k}{\hbar}, \quad \hat{H}|\phi_k\rangle = E_k|\phi_k\rangle, \quad \langle\phi_l|\phi_k\rangle = \delta_{lk}. \quad (26)$$

Обозначим

$$q_k = \sqrt{2\hbar} \operatorname{Re} C_k, \quad p_k = \sqrt{2\hbar} \operatorname{Im} C_k. \quad (27)$$

Запишем среднюю энергию квантовой системы как функцию от  $q_k, p_k$ :

$$H(q, p) = \langle E \rangle = \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = \sum_k \frac{\omega_k(p_k^2 + q_k^2)}{2}. \quad (28)$$

Если принять  $H(q, p)$  как функцию Гамильтона некоторой классической системы (системы невзаимодействующих классических осцилляторов с частотами  $\omega_k$ ), мы получаем классические уравнения Гамильтона, которые воспроизводят нашу квантовую динамику:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} = \omega_k p_k, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\omega_k q_k. \quad (29)$$

умножив первое уравнение на  $\frac{1}{\sqrt{2\hbar}}$ , а второе на  $\frac{i}{\sqrt{2\hbar}}$  и складывая их между собой, получаем

$$\dot{C}_k = -i\omega_k C_k, \quad (30)$$

т.е. воспроизводим уравнение Шрёдингера в базисе стационарных состояний.

Как мы знаем из классической механики, в других системах координат осцилляторы могут оказаться линейно взаимодействующими, но число классических степеней свободы (конечное или бесконечное) от выбора системы координат не зависит и всегда соответствует размерности комплексного пространства чистых квантовых состояний.

### 9.3. Два связанных осциллятора

В квантовой задаче для нас важны два близких уровня энергии и соответствующее им двумерное пространство чистых квантовых состояний  $\mathbb{C}^2$ . В классической аналогии нам вместо двух линейно независимых состояний нужны две степени свободы. Струна (в пределе сплошной среды) имеет бесконечное число степеней свободы, так что эта модель оказывается избыточно сложной.

Ограничимся двумя связанными осцилляторами.

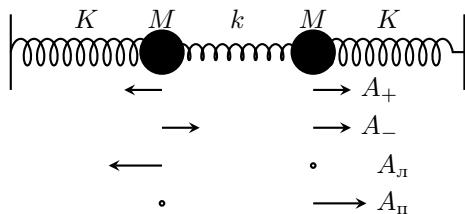


Рис. 15. Амплитуды собственных колебаний  $A_{\pm}$ , аналогичные  $\psi_{\pm}$ , и амплитуды колебаний  $A_{l/n}$ , аналогичные  $\psi_{l/n}$

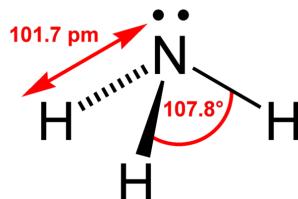


Рис. 16. Молекула аммиака  $\text{NH}_3$  имеет форму трёхгранной пирамиды с азотом в вершине и тремя атомами водорода в основании

Колебания левого/правого грузика соответствуют нахождению частицы в левой/правой потенциальной яме. В пределе  $k = 0$  (средняя пружинка отсутствует) грузики не взаимодействуют и можно возбудить колебания только одного грузика  $A_{l/n}$ , при конечной жёсткости  $k$  собственные колебания имеют вид  $A_{\pm}$  (см. рис. 15).

## 10. Молекула аммиака

Молекула аммиака  $\text{NH}_3$  имеет форму трёхгранной пирамиды с азотом в вершине и тремя атомами водорода в основании (см. рис. 16). Поскольку азот более сильный окислитель, чем водород, он частично оттягивает на себя электронное облако. Таким образом атом азота несёт отрицательный заряд, а три атома водорода — положительный. Это должно приводить к возникновению у молекулы аммиака дипольного момента, направленного по высоте пирамидки.

Действительно, некоторые эксперименты надёжно показывают, что молекула аммиака имеет ненулевой дипольный момент. Но другие экс-

perimentы не менее надёжно показывают, что дипольный момент молекулы аммиака строго равен нулю.

На рисунке 17 изображены зонтичные колебания молекулы  $\text{NH}_3$  и их колебательные уровни энергии в вдухъямном потенциале  $U(x)$ , найденном по данным эксперимента [4].  $\text{NH}_3$  — первая молекула, колебательно-инверсионный спектр которой наблюдался в 1934 году в микроволновом (МВ) диапазоне. При зонтичных колебаниях молекулы  $\text{NH}_3$  изменяется высота  $x$  пирамиды.  $x = 0$  соответствует плоская конфигурация  $\text{NH}_3$  без дипольного момента  $\vec{d} = 0$ . Тогда как два эквивалентных минимума на потенциальной кривой  $U(x)$  соответствуют пирамидальному строению  $\text{NH}_3$ . Структурный переход из одного минимума в другой через плоскую структуру  $\text{NH}_3$  сопровождается изменением знака у дипольного момента  $\vec{d}$ . При этом основной колебательный уровень, по данным МВ-спектроскопии [4], испытывает туннельное расщепление  $\omega_{n=0} \sim 1 \text{ см}^{-1}$ .

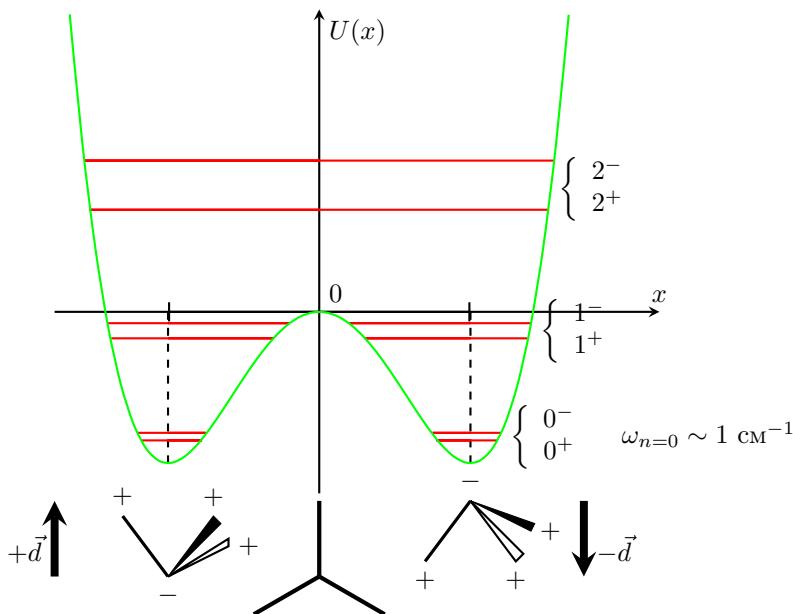


Рис. 17. Зонтичные колебания молекулы  $\text{NH}_3$  и их колебательные уровни энергии

Что такое в молекулярной спектроскопии  $1 \text{ см}^{-1}$ ? Если длина волны  $\lambda$  связана с периодом колебаний  $T$  посредством скорости света  $c$   $\lambda = cT = \frac{c}{\nu}$ , то частота колебаний

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{см}}{\text{с}} \cdot 1 \text{ см}^{-1} = 3 \cdot 10^{10} \text{ Гц.}$$

МВ-диапазон соответствует длинам волн

$$\lambda \sim 0,03 \div 30 \text{ см} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\lambda} \sim 0,03 \div 33 \text{ см}^{-1},$$

т.е.

$$\nu \sim 10^9 \div 10^{12} \text{ Гц} \quad (1 \div 10^3 \text{ ГГц}).$$

Согласно решению модельной задачи о движении частицы в одномерном потенциальном поле двух  $\delta$ -я姆

$$U(x) = -\frac{\hbar^2 \alpha}{m} \{ \delta(x - a) + \delta(x + a) \},$$

время туннелирования в молекуле  $\text{NH}_3$  составляет

$$\tau = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{1 \cdot 3 \cdot 10^{10}} \approx 10^{-10} \text{ с} = 0,1 \text{ нс.}$$

Много это или мало? Всё познаётся в сравнении с характерным временем  $T$  физического метода исследования строения молекулы. Например, для ИК-спектроскопии  $T \sim 10^{-13} \div 10^{-12} \text{ с} \ll \tau \sim 10^{-10} \text{ с}$ , что позволяет получить информацию о пирамидальном строении молекулы  $\text{NH}_3$ , обладающей дипольным моментом  $d = 1,5 \text{ D}$  [5]. Тогда как при исследованиях в молекулярных пучках  $T \sim 10^{-6} \text{ с} \gg \tau \sim 10^{-10} \text{ с}$ , в результате чего осцилирующий со временем дипольный момент эффективно зануляется [5] и молекула  $\text{NH}_3$  ведёт себя как неполярная молекула.

## 11. Квантовый эффект Зенона

### 11.1. При чём тут Зенон

Квантовый эффект Зенона состоит в замораживании (или замедлении) эволюции системы, подвергающейся частым и точным измерениям. Изложение квантового эффекта Зенона основывается на книге одного из авторов [6].

Впервые квантовый эффект Зенона был предсказан в 1958 году советским физиком Леонидом Александровичем Халфиным [7]. Имя

древнегреческого философа Зенона Элейского эффекту дали Байдья-нат Мизра и Джордж Сударшан в 1978 году. Эффект для вероятности переходов между атомными уровнями был экспериментально подтверждён в 1989 году [8].

Имя Зенона связано с апорией «стрела», в которой Зенон в очередной раз доказывал своё любимое утверждение о невозможности движения. В апории «стрела» невозможность движения доказывается примерно следующим образом: *летящая стрела в каждый момент времени где-то находится/покоится, но стрела не может одновременно лететь и покоиться, а значит, движение невозможно*. Невозможности движения это рассуждение, конечно, не доказывает, но оно доказывает невозможность движения, когда это движение каждый момент времени точно измеряют: *если очень точно измерить положение летящей частицы, то её волновая функция склоняется в очень узкий волновой пакет, для которого неопределенность координаты мала, а неопределенность импульса очень велика, после этого летела частица или покоилась будет уже не важно*. Более того, если повторять измерение очень часто, так, чтобы волновой пакет не успел расплыться и сдвинуться, то измерение скомпенсирует эволюцию волновой функции и частица каждый раз будет обнаруживаться в одном и том же месте (т. е. *перестанет двигаться*).

## 11.2. Немного квантовой теории измерений

Для описания квантового измерения нам понадобятся не только вероятности всех возможных исходов (*правило Борна для вероятностей*), но и изменение вектора состояний при каждом из исходов (*проекционный постулат*).

Мы ограничимся квантовой теорией измерений в простейшем случае измерения наблюдаемой  $\hat{A}$  с дискретным невырожденным спектром. Для такой наблюдаемой имеется базис собственных векторов  $\phi_a$ , элементы которого нумеруются собственными числами наблюдаемой  $a$ . Эксперимент, отвечающий на вопрос «Чему равно  $A$ ?», в этом случае можно переформулировать как «В каком из состояний  $\phi_a$  находится система?»

*Правило Борна* гласит, что если система находится в состоянии  $\psi$ , а мы ищем её в состоянии  $\phi$ , то вероятность того, что мы её там найдём

$$p(\phi|\psi) = \frac{|\langle\phi|\psi\rangle|^2}{\langle\phi|\phi\rangle\langle\psi|\psi\rangle}.$$

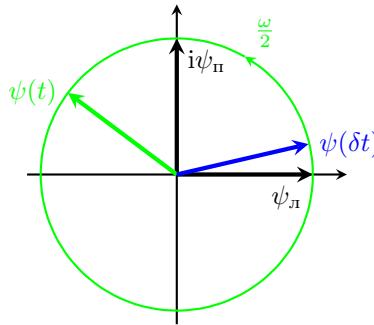


Рис. 18. Вектор состояния  $\psi(t)$  вращается с угловой скоростью  $\frac{\omega}{2}$

Если состояния  $\psi$  и  $\phi$  нормированы на 1 ( $\langle \phi | \phi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle = 1$ ), то формула ещё проще:

$$p(\phi | \psi) = |\langle \phi | \psi \rangle|^2.$$

*Проекционный постулат* гласит, что если система была в состоянии  $\psi$ , а мы нашли её в состоянии  $\phi$ , то она действительно оказывается в состоянии  $\phi$ .

### 11.3. Эффект Зенона в простейшем случае

Наша задача позволяет рассмотреть квантовый эффект Зенона на простейшем примере квантовой системы с двумерным пространством состояний (в нашем случае это пространство связанных состояний частицы в двух  $\delta$ -ямах).

Временная эволюция частицы, осциллирующей между двумя ямами, описывается уравнением (19):

$$\psi'(t) = \psi_l \cos\left(\frac{\omega}{2}t\right) + i\psi_n \sin\left(\frac{\omega}{2}t\right), \quad \omega = \frac{\delta E}{\hbar}. \quad (31)$$

В момент времени  $\delta t \ll \frac{1}{\omega}$

$$\psi'(t) = \psi_l \cos\left(\frac{\omega}{2}\delta t\right) + i\psi_n \sin\left(\frac{\omega}{2}\delta t\right) \approx \psi_l \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{2}\delta t\right)^2\right] + i\psi_n \left(\frac{\omega}{2}\delta t\right) + o\left(\frac{\omega}{2}\delta t\right)^2. \quad (32)$$

В момент времени  $\delta t$  проведём измерение, которое должно ответить на вопрос: Осталась ли система в состоянии  $\psi_l$ ? (Осталась ли частица

в левой яме?) Соответствующая наблюдаемая имеет вид

$$\hat{A} = a_{\text{л}}|\psi_{\text{л}}\rangle\langle\psi_{\text{л}}| + a_{\text{п}}|\psi_{\text{п}}\rangle\langle\psi_{\text{п}}|, \quad a_{\text{л}} \neq a_{\text{п}}, \quad a_{\text{л}}, a_{\text{п}} \in \mathbb{R}. \quad (33)$$

Вероятности положительного ответа ( $A = a_{\text{л}}$ ) и отрицательного ответа ( $A = a_{\text{п}}$ ):

$$p_{\text{л}} = \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\delta t\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\delta t\right) \approx 1 - \left(\frac{\omega}{2}\delta t\right)^2 + o\left(\frac{\omega}{2}\delta t\right)^2, \quad (34)$$

$$p_{\text{п}} = \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\delta t\right) \approx \left(\frac{\omega}{2}\delta t\right)^2 + o\left(\frac{\omega}{2}\delta t\right)^2. \quad (35)$$

Обратите внимание, что вероятность того, что частица ушла из левой ямы в правую  $p_{\text{п}}$ , оказывается квадратичной по времени.

Пусть на протяжении времени  $t$  мы делаем  $n$  измерений, разделённых временными интервалами  $\delta t = \frac{t}{n} \ll \frac{1}{\omega}$ . Суммарная вероятность того, что одно из измерений обнаружит частицу в правой яме, стремится к нулю по мере роста  $n$ :

$$P_{\text{п}} \approx n \cdot p_{\text{п}} \approx n \cdot \left(\frac{\omega}{2} \frac{t}{n}\right)^2 = \frac{\left(\frac{\omega}{2}t\right)^2}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, чем чаще мы подвергаем систему измерению «Не ушла ли система из исходного состояния  $\psi_{\text{л}}$ ?», тем ближе к единице вероятность того, что система осталась в исходном состоянии. Достаточно частыми измерениями мы можем удержать систему в исходном состоянии сколь угодно долго со сколь угодно малой вероятностью случайного скачка в другое состояние<sup>5</sup>, что и даёт нам *эффект Зенона*.

#### 11.4. Эффект Зенона для селективных и неселективных измерений

Для замораживания эволюции квантовой системы не важно, известны ли наблюдателю результаты измерения или «у прибора отломалась стрелка» и происходит *неселективное измерение*, результат которого неизвестен наблюдателю. Более того, вместо измерения часто может выступать неконтролируемое взаимодействие системы с окружением. Так, для молекулы аммиака в роли измерения положения азота в одной или другой потенциальной яме может выступать столкновение между молекулами. Если время свободного пробега много меньше, чем период осцилляций, то состояния  $\psi_{\text{л/п}}$  можно считать стационарными.

---

<sup>5</sup> Для всякого времени  $t > 0$  и вероятности  $p_0 > 0$  найдётся такое число измерений  $n$ , что за время  $t$  система останется в состоянии  $\psi_{\text{л}}$  с вероятностью большей, чем  $1 - p_0$ .

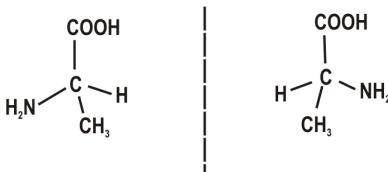


Рис. 19. Левый и правый изомеры аланина

### 11.5. Почему левая перчатка не превращается в правую?

Наша модель описывает осцилляции, при которых атом азота в молекуле аммиака туннелирует из одной потенциальной ямы в другую, а потом обратно. Можно сказать, что сама молекула аммиака туннелирует между двумя конфигурациями.

Понятно, что аналогичным образом мы можем рассматривать зеркальные изомеры какой-либо молекулы (см. рис. 19) как два состояния одной и той же квантовой системы.

Эти изомеры (состояния  $\psi_{л/п}$ ) очевидно являются состояниями с одинаковой энергией, если пренебречь их возможным взаимопревращением. А если учесть возможность их взаимопревращения, то стационарными состояниями становятся  $\psi_{\pm} = \frac{\psi_{л} \pm \psi_{п}}{\sqrt{2}}$ . А состояние  $\psi_{л}$  будет туннелировать в  $\psi_{п}$ , а потом обратно в соответствии с уравнением (31).

Более того, даже правая и левая перчатки могут рассматривать как зеркальные изомеры одной и той же квантовой системы. И мы должны ожидать, что состояния перчатки с определённой энергией будут суперпозициями правой и левой перчаток. А если у нас есть перчатка некоторой хиральности (например, левая), то она будет периодически превращаться (туннелировать) в состояние с противоположной хиральностью (в состояние правой перчатки) и обратно.

Почему мы этого не наблюдаем? Причём мы этого не наблюдаем не только для перчаток, но даже для зеркальных изомеров. В этих случаях характерное время взаимодействия системы с окружением много меньше, чем период колебаний. Вспомните, что  $\delta E$  (а вместе с ней и частота  $\omega = \frac{\delta E}{\hbar}$ ) экспоненциально убывает с ростом расстояния между ямами. Так что если для аммиака, где туннелировать приходится частице с эффективной массой 2,5 а.е.м. на расстояние порядка ангстрема, явление удаётся наблюдать<sup>6</sup>, то для более крупных молекул

<sup>6</sup>Для молекулы аммиака следует рассматривать туннелирование частицы с мас-

(а тем более для макрообъектов) частота туннелирования оказывается слишком малой.

Можно сказать, что перчатки и зеркальные изомеры удерживаются в состояниях с определённой хиральностью квантовым эффектом Зенона.

## 12. Что (не)важно в этой задаче?

Понятно, что рассматриваемая задача является модельной, можно даже сказать «игрушечной». И одномерное движение частицы, и ямы являются некоторой идеализацией. Тем не менее ряд свойств рассматриваемой модели являются общими для более широкого класса моделей, в число которых входят модели, важные для приложений.

Что не важно в условиях задачи?

- Одномерность задачи.
- Конкретная форма потенциальных ям.

Что важно в условиях задачи?

- Однаковость формы обеих потенциальных ям.
- Выход потенциала ямы на константу на больших расстояниях.
- Наличие в одиночной яме хотя бы одного дискретного уровня энергии (связанного состояния).

Какие свойства модели представляют для нас интерес?

- Расщепление уровня энергии одиночной потенциальной ямы на несколько подуровней, число которых совпадает с числом потенциальных ям (при достаточно большом расстоянии между ямами).
- Чётное решение имеет энергию ниже, чем энергия нерасщеплённого уровня, а нечётное — выше.

---

сой  $m_{\text{эфф}} = \left( \frac{1}{m_N} + \frac{1}{3m_H} \right)^{-1}$ , что соответствует сведению задачи двух тел (атом азота + 3 атома водорода) к задаче одного тела.

- Осцилляция между потенциальными ямами частицы, первона-чально помещённой в одну из ям.
- Экспоненциальная малость по расстоянию между ямами расщепления уровней и частоты осцилляций при большом расстоянии между ямами.
- Исчезновение расщепления уровней энергии при очень большом расстоянии между ямами. Частица, локализованная вблизи одной ямы, перестаёт чувствовать другие. Точность, с которой можно пренебречь расщеплением уровней, зависит от характерного времени наблюдения системы и от периода осцилляций. (Квантовый эффект Зенона.)
- Квантовый эффект Зенона убирает (сравнительно медленные) квантовые осцилляции между макроскопически различными состояниями квантовых систем.
- Исчезновение расщепления уровней энергии при достаточно малом расстоянии между ямами. С точки зрения частицы ямы «сливаются», причём «слияние» ям определяется не только их геометрическим размером, но и характерным расстоянием, на котором затухает волновая функция.

Свойства каких систем иллюстрируются данной задачей?

- Квантовый бит (любая квантовая система, для которой существенны только два линейно независимых состояния).
- Слабо взаимодействующие одинаковые колебательные системы
  - Связанные осцилляторы.
  - Связанные резонаторы.
- Квантовая система в двух одинаковых слабо связанных потенциальных ямах (резонаторах)
  - Частица в двух ямах.
  - Система в двух симметричных устойчивых состояниях.

## Список литературы

- [1] Белоусов Ю. М., Бурмистров С. Н., Тернов А. И., Задачи по теоретической физике. — Москва : МЦНМО, 2026. — 618 с.
- [2] Ахмедов Э. Т., Новосельцев В.В., Элементы квантовой механики на примере частицы в потенциале одной и двух дельта-ям : учеб.-метод. пособие. — Москва : МФТИ, 2024. — 26 с., [https://old.mipt.ru/upload/medialibrary/01b/final\\_zakaz\\_63\\_akhmedov\\_novoseltsev\\_blok.pdf](https://old.mipt.ru/upload/medialibrary/01b/final_zakaz_63_akhmedov_novoseltsev_blok.pdf)
- [3] Хьюбер К.-П., Герцберг Г., Константы двухатомных молекул. В 2-х ч. Ч. 1. / Пер. с англ. — Москва : Мир, 1984. С. 270
- [4] Cleeton C. E., Williams N. H. // Phys. Rev., **45**, 234 (1934)
- [5] Набиев Ш. Ш., Суханов Л. П. Эффекты структурной нежёсткости в молекулярных системах (авторский обзор) // Изв. АН. Сер. хим. 1999. № 8. С. 1415–1441.
- [6] Иванов М. Г. Как понимать квантовую механику. — Изд. 2-е, испр. и доп. — Москва ; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2015. — 552 с. <https://mipt.ru/students/organization/mezhpr/biblio/q-ivanov.php>
- [7] Халфин Л. А. // ДАН СССР. — 1957. — Т. 115. — С. 277; ЖЭТФ. — 1958. — Т. 33. — С. 1371; Квантовая теория распада физических систем : Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук. — ФИАН СССР, 1960.
- [8] Pool R. Quantum Pot Watching. // Science, 1989. V. 246. N 4932, P. 888–888.

*Учебное издание*

**Иванов** Михаил Геннадьевич  
**Суханов** Леонид Павлович

**ЧАСТИЦА В ДВУХ ЯМАХ  
(ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ МОДЕЛИ)**

Учебно-методическое пособие

Редактор *И. А. Волкова*. Корректор *В. А. Дружинина*

Подписано в печать 15.05.2025. Формат 60×84 1/16. Усл. печ. л. 2,0.  
Уч.-изд. л. 1,7. Тираж 20 экз. Заказ № 96.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»  
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9  
Тел. (495) 408-58-22. E-mail: [rio@mail.mipt.ru](mailto:rio@mail.mipt.ru)

---

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»  
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9  
Тел. (495) 408-84-30. E-mail: [polygraph@mail.mipt.ru](mailto:polygraph@mail.mipt.ru)