УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2026 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Квантовая механика**
по направлению подготовки:
03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ФРКТ**

кафедра: **теоретической физики им. Л.Д. Ландау**
курс: 3
семестр: 6

лекции – 30 часов
Дифф. зачет – 6 семестр
практические (семинарские)
занятия – 30 часов

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60
Самостоятельная работа – 30 часов

Программу и задание составил к.ф.-м.н., доцент
М. Г. Иванов

Программа принята на заседании
кафедры теоретической физики им Л.Д.Ландау
20 декабря 2025 года

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н.
Э. Т. Ахмедов

После тем в скобках указаны номера разделов из книги М.Г. Иванов «Как понимать квантовую механику» и ссылки на отдельные задачи и упражнения из задания. Звёздочками помечены разделы для дополнительного чтения. Полной однозначности в ссылках не получилось, поскольку в книге порядок изложения материала существенно иной.

1. Введение (1*, 2*, **3**, частично **4, 5**)

Явления, указывающие на необходимость квантовой механики. Атомный масштаб физических величин. Волна де Бройля. Состояние и наблюдаемая — основные понятия квантовой кинематики. Амплитуда вероятности. Принцип суперпозиции. Теория измерений (проекционный постулат и правило Борна, **5.3**, 8.1*). Операторы наблюдаемых и симметрий (упражнения 1–11). Среднее наблюдаемой (**4.7.5**). Эволюция замкнутой системы (**5.1**).

2. Уравнение Шредингера

Операторы координаты, импульса (**4.10**) и энергии (гамильтониан, **5.1**). Каноническое квантование. Плотность вероятности и плотность потока вероятности. Уравнение непрерывности (**13.6**). Оператор производной наблюдаемой по времени. Коммутаторы и скобки Пуассона (**5.2.7**). Интегралы движения. Теоремы Эренфеста (**13.3**). Стационарные состояния и стационарное уравнение Шредингера. Вариационный принцип (**4.11**).

3. Квантовая кинематика (4)

Базис в гильбертовом пространстве. Понятия вектора состояния и пространства состояний. Обозначения Дирака (**4.3**). Система собственных векторов оператора физической величины. Нормировка собственных векторов дискретного и непрерывного спектра. Условие полноты (разложение единичного оператора). Унитарные преобразования (11*, 14*). Координатное, импульсное и энергетическое представления. Условие одновременной измеримости физических величин. Полный набор коммутирующих операторов (4.1.1). Соотношение неопределенности (**7.2.1, 7.2.2**).

4. Динамика замкнутой системы (частично **5**)

Общее решение задачи Коши для уравнения Шредингера в случае, когда гамильтониан системы не зависит от времени. Оператор эволюции. Представления Шредингера и Гейзенберга (частично **5.2**). Уравнение Гейзенберга для операторов физических величин.

5. Одномерное движение (**6**)

Общие свойства одномерного движения (задачи 1–5). Невырожденность дискретного спектра, осцилляционная теорема. Движение свободной частицы, волновой пакет. Отражение от потенциальной стенки. Прохождение через и отражение от потенциального барьера, унитарность. Движение в периодическом потенциале, зонный спектр (задача 7).

6. Гармонический осциллятор (**12**, кроме 12.8, 12.9)

Повышающий $\hat{b}^+$ и понижающий $\hat{b}$ операторы. Нахождение энергетического спектра и векторов стационарных состояний гармонического осциллятора исходя из коммутационных соотношений. Когерентные состояния (**12.7**, задача 12).

7. Орбитальный момент импульса (**15.1, 15.2**)

Операторы орбитального момента импульса частицы $\hat{\mathbf{l}}$ и его квадрата $\hat{\mathbf{l}}^2$ в декартовых и сферических координатах. Оператор конечных вращений. Коммутационные соотношения для операторов момента. Сферические гармоники, их чётность.

8. Собственные значения и собственные функции операторов момента импульса (**15.2, 15.3, 15.4**)

Нахождение собственных значений и построение общей системы собственных векторов операторов $\hat{j}_z$ и $\hat{\mathbf{j}}^2$ исходя из коммутационных соотношений. Целые и полуцелые значения момента. Переход к координатному представлению (построение сферических гармоник) для целых j. Спин частицы. Матрицы Паули (упражнения 17–19).

9. Задача двух тел (**16**)

Разделение переменных в квантово-механической задаче двух тел. Гамильтониан в сферических координатах. Разделение радиальной и угловых переменных в стационарном уравнении Шредингера. Уравнение для радиальной функции. Граничные условия для связанных состояний. Полный набор коммутирующих операторов. Радиальное и орбитальное квантовые числа и квантовое число проекции момента. Кратность вырождения уровней.

10. Атом водорода (**16.4**)

Атомная система единиц. Энергии и волновые функции стационарных состояний дискретного спектра водородоподобного атома. Главное квантовое число. Кулоновское вырождение.

11. Квазиклассическое приближение (**13.5**)

Волновая функция, описывающая одномерное движение в квазиклассическом приближении (13.5.1, 13.5.2). Критерий применимости квазиклассического приближения (13.5.1). Принцип соответствия (**2.4**). Классически разрешенная и запрещенная области, точки поворота

(13.5.3). Условие сшивки квазиклассических решений по разные стороны от точки поворота (13.5.3). Условие квантования Бора–Зоммерфельда (13.5.4). Фазовый объем, приходящийся на одно состояние, и плотность состояний (задача 1). Вероятность туннелирования через потенциальный барьер (13.5.7).

12. Квантовые корреляции (частично **7, 10**)

Описание объединения двух квантовых систем (**4.1.1, 4.4.3**). Измерение без взаимодействия (**7.3**). Теорема о невозможности клонирования квантового состояния (**7.6**). Протокол квантового распределения криптографических ключей BB84 (**10.1**). Неравенство Белла и его нарушение в квантовой механике (**7.5.6**). Квантовая телепортация (**7.7**). Квантовое вычисление на примере алгоритма Гровера (**10.7**).

Список литературы

Основная

1. Ландау Л. Д. Теоретическая физика : в 10 томах. Том 3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория : учебник / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц ; под редакцией Л. П. Питаевского6-е изд., стереотип. Москва : Физматлит, 2021.

2. Мессиа А. Квантовая механика. В 2 т. Т. 1 — Москва : Наука, 1978.

3. Мессиа А. Квантовая механика. В 2 т. Т. 2 — Москва : Наука, 1979.

4. Белоусов Ю. М. Задачи по теоретической физике : учебное пособие / Ю. М. Белоусов, С. Н. Бурмистров, А. И. Тернов, 2-е изд. Долгопрудный : Интеллект, 2022.

5. Галицкий В. М. Задачи по квантовой механике : в 2 ч. Ч. 1 : учеб. пособие для вузов / В. М. Галицкий, Б. М. Карнаков, В. И. Коган, 3-е изд., испр. и доп. М. : Едиториал УРСС, 2001.

Дополнительная

1. Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики : учеб. пособие для вузов / Д. И. Блохинцев, 7-е изд., стереотип. СПб. : Лань, 2004.
2. Давыдов А. С. Квантовая механика : учеб. пособие для вузов / А. С. Давыдов, 3-е изд., стереотип. СПб. : БХВ-Петербург, 2011.
3. Релятивистская квантовая теория. В 2 т. Т. 1. Релятивистская квантовая механика / Дж. Д. Бьеркен, С. Д. Дрелл ; пер. с англ. Б. О. Кербикова ; под ред. В. Б. Берестецкого. Новокузнецк : НФМИ, 2000.

4. Шифф Л. Квантовая механика = Quantum mechanics / Л. Шифф ; пер. с англ. Г. А. Зайцева, 2-е изд. М. : Изд-во иностранной лит., 1959.
5. Дирак П. А. М. Принципы квантовой механики = Principles of quantum mechanics / П. А. М. Дирак ; пер. с 4-го англ. изд. Ю. Н. Демкова, Г. Ф. Друкарева ; под ред. и с предисл. В. А. Фока. М. : Наука, 1979.
6. Елютин П. В. Квантовая механика с задачами : учеб. пособие для вузов / П. В. Елютин, В. Д. Кривченков ; под ред. Н. Н. Боголюбова, 2-е изд., перераб. М. : Физматлит : УНЦ довуз. образования МГУ, 2001.
7. Флюгге З. Задачи по квантовой механике. Т. 2 : [учеб. пособие для вузов] / З. Флюгге ; пер. с англ. Б. А. Лысова ; под ред. и с предисл. А. А. Соколова, 3-е изд. М. : ЛКИ, 2010.
8. Белоусов Ю. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория : [учебное пособие] / Ю. М. Белоусов. Москва : МЦНМО, 2023.
9. Аллилуев С. П. Квантовая теория сложного атома и квантовая теория излучения : учеб. пособие для вузов / С. П. Аллилуев ; М-во высш. и сред. спец. обр. РСФСР ; Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) М. : МФТИ, 1984.
10. Тернов А. И. Основы релятивистской квантовой механики : [учебное пособие] / А. И. ТерновМосква : МЦНМО, 2024.
11. Белоусов Ю. М. Практическая математика. Руководство для начинающих изучать теоретическую физику : [учеб. пособие для вузов] / Ю. М. Белоусов, В. П. Кузнецов, В. П. Смилга, 2-е изд. Долгопрудный : Интеллект, 2014.

Методически рекомендованная

1. Барабанов А.Л. Лекции по квантовой механике: учеб. пособие : В 2-х частях. — Москва : МФТИ, 2015. `https://old.mipt.ru/education/chair/theoretical_physics/biblio/qm-barabanov.php`
2. Иванов М.Г. Как понимать квантовую механику. — Москва, Ижевск : РХД, 2015. `https://mgivanov.ru/knigi/q-ivanov.pdf`
3. Иванов М.Г., Суханов Л.П. Частица в двух ямах (физический смысл задачи). — Москва : МФТИ, Физтех, 2025. `https://mgivanov.ru/metodichki/dve-yamy-2025-05-14.pdf`
4. Иванов М.Г. Квантовая механика. Часть 2. (Электронный конспект) `https://mgivanov.ru/quant.html`
5. Абрикосов А.А. мл. «Кванты» за ночь? Конспект–справочник версия 0.2. `https://old.mipt.ru/education/chair/theoretical_physics/biblio/kvanty-za-noch-abrikosov/`

Упражнения

Первое задание

1–5. Сдвиг и отражение

1.$^{\mathbf{C}}$ Найти эрмитово сопряженные и обратные операторы для операторов пространственной инверсии $\hat{I}$ (11.4.1) и трансляции $\hat{T}_a$ (11.3.2).

2.$^{\mathbf{C}}$ Найти собственные значения и собственные функции операторов пространственной инверсии $\hat{I}$ и трансляции $\hat{T}_a$.

3.$^{\mathbf{C}}$ Вычислить действие на волновую функцию оператора $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{I}\varphi}$.

4.$^{\mathbf{C}}$ Выразить оператор трансляции $\hat{T}_a$ через оператор импульса $\hat{p}$.

5.* В каких задачах и упражнениях могут использоваться операторы $\hat{I}$ и $\hat{T}_a$?

6. Пространственный сдвиг потенциала. Вычислить действие на волновую функцию оператора

$$\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{a}\hat{\boldsymbol{p}}}\,V(\hat{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{a}\hat{\boldsymbol{p}}}.$$

7. Показать, что $\hat{A}\hat{A}^+$ — эрмитов оператор и $\langle\hat{A}\hat{A}^+\rangle \geqslant 0$.

8. Правило Лейбница для коммутатора. Доказать равенство коммутаторов

$$[\hat{A},\hat{B}\hat{C}] = [\hat{A},\hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A},\hat{C}].$$

Доказать с помощью полученного равенства правило Лейбница для производной от произведения операторов $\frac{d(\hat{B}\hat{C})}{dt}$.

9. Вычислить $[U(\hat{x}),\hat{p}]$, $\qquad [U(\hat{x}),\hat{p}^2]$, $\qquad [\hat{x}, f(\hat{p})]$.

10.* Доказать справедливость разложения

$$\mathrm{e}^{\xi\hat{A}}\,\hat{B}\,\mathrm{e}^{-\xi\hat{A}} = \hat{B} + \xi[\hat{A},\hat{B}] + \frac{1}{2!}\,\xi^2[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] + \ldots$$

11.$^{\mathbf{C}}$ **Теорема Гельмана–Фейнмана.** Эрмитов оператор с дискретным спектром $\hat{f}(\lambda)$ зависит от параметра λ. Собственные значения $f_n(\lambda)$ и собственные векторы $|\psi_n(\lambda)\rangle$ этого оператора также зависят от λ. Доказать теорему Гельмана–Фейнмана:

$$\frac{\partial f_n(\lambda)}{\partial\lambda} = \left\langle \psi_n(\lambda) \middle| \frac{\partial \hat{f}(\lambda)}{\partial\lambda} \middle| \psi_n(\lambda) \right\rangle.$$

12–15. Осциллятор

12.* Вычислить коммутатор $[\hat{b}, f(\hat{b}^\dagger)]$.

13.$^{\mathbf{C}}$ Пользуясь операторами рождения и уничтожения, вычислить средние значения и дисперсии координаты и импульса, а также средние значения операторов $\hat{x}^4$ и $\hat{x}^{2k+1}$, $\hat{p}^4$ и $\hat{p}^{2k+1}$ в n-м стационарном состоянии гармонического осциллятора. Обсудите величину $\langle \hat{x}^2 \rangle \langle \hat{p}^2 \rangle$ в связи с соотношением неопределенностей.

14.$^{\mathbf{C}}$ Найти операторы рождения и уничтожения для гармонического осциллятора в представлении Гейзенберга.

15.* Для каких гамильтонианов $\langle x(t) \rangle$ и $\langle p(t) \rangle$ точно описываются классическими уравнениями Гамильтона?

Второе задание (моменты импульса)

16.[C] Вычислить коммутаторы

$$[\hat{l}_\alpha, \hat{l}_\pm], \quad [\hat{l}_+, \hat{l}_-], \quad [\hat{l}_\alpha, \hat{x}_\beta], \quad [\hat{l}_\alpha, \hat{p}_\beta], \quad [\hat{l}_\alpha, \hat{\boldsymbol{r}}^2], \quad [l_\alpha, \hat{\boldsymbol{p}}^2],$$

$$[\hat{l}_\alpha, (\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{p}})], \quad [\hat{l}_\alpha, \hat{p}_\beta \hat{p}_\gamma], \quad [\hat{l}_\alpha, f(\hat{r})], \quad [\hat{l}_z, f(\hat{\rho})], \quad \hat{\rho}^2 = \hat{x}^2 + \hat{y}^2.$$

17.[C] Доказать равенства

$$\sigma_\alpha \sigma_\beta = \hat{1}\delta_{\alpha\beta} + \mathrm{i}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_\gamma,$$

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) + \mathrm{i}\,\boldsymbol{\sigma} \cdot [\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}],$$

где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — векторы, $[a_\alpha, \sigma_\beta]{=}0$.

18. Вычислить $\sigma_\pm^2$ и $[\sigma_\pm, \sigma_\alpha]$.

19.[C] Вычислить действие на спинор оператора $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\,\phi/2}$, $|\mathbf{n}| = 1$.

20. Для $j = 1$ записать матрицы $\hat{\boldsymbol{j}}^2$, $\hat{j}_\alpha$, $\hat{j}_\pm$ и найти собственные векторы для $\hat{\boldsymbol{j}}^2$ и $\hat{j}_z$. Пусть $\mathbf{n}$ — единичный вектор. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $(\hat{\boldsymbol{j}} \cdot \boldsymbol{n})$.

21.[C] **Орбитали из учебника химии.** Функции $Y_{1x}(\theta, \phi)$, $Y_{1y}(\theta, \phi)$ и $Y_{1z}(\theta, \phi)$ — p-орбитали («гантельки» из учебника химии) ориентированные по осям x, y и z соответственно. Выразить их через $Y_{1m}(\theta, \phi)$ $(m = 0, \pm 1)$. Проверить ортонормированность.

Задачи

Первое задание

1.[C] **Потенциальный колодец.** Найти уровни энергии и волновые функции стационарных состояний частицы в потенциальном ящике:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a, \\ +\infty, & x < 0 \cup x > a. \end{cases}$$

Вычислить средние значения и дисперсии координаты и импульса, $\langle \hat{x} \rangle$, $\langle \hat{p} \rangle$, δx^2 и δp^2, для n-го стационарного состояния. Найти фазовый объем, приходящийся на одно квантовое состояние.

2.[*] **Сдвиг по фазе.** Найти уровни энергии и волновые функции стационарных состояний для свободной частицы на отрезке длины a с периодическими граничными условиями со сдвигом фазы:

$$\psi(0) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\psi(a), \quad , \psi'(0) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\psi'(a), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Для стационарных состояний вычислить средние $\langle \hat{x} \rangle$, $\langle \hat{p} \rangle$. Найти фазовый объем, приходящийся на одно квантовое состояние. Выполняется ли соотношение $\frac{d\langle x \rangle}{dt} = \frac{\langle p \rangle}{m}$? Почему?

3. Прямоугольная яма. Найти уровни энергии и волновые функции стационарных состояний в потенциальной яме:

$$a) \qquad V(x) = \begin{cases} -V_0, & |x| < a, \quad V_0 > 0, \\ 0, & |x| > a, \end{cases}$$

$$b) \qquad V(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0, \\ -V_0, & 0 < x < a, \quad V_0 > 0, \\ 0, & x > a. \end{cases}$$

4.[C] Дельта-яма. а) Найти энергию и волновую функцию связанного состояния частицы в поле:

$$V(x) = -\frac{\hbar^2 \alpha}{m}\, \delta(x).$$

Вычислить средние значения и дисперсии координаты и импульса в связанном состоянии.
б) Найти коэффициенты прохождения и отражения.
в) Вычислить вероятность “ионизации” связанного состояния при мгновенном изменении параметра ямы с α_0 до α_1.
г) Найти волновую функцию связанного состояния в импульсном представлении.

5. Одномерное рассеяние.
Найти коэффициенты прохождения и отражения частицы:
а) для прямоугольной потенциальной ступеньки;
б) для прямоугольного потенциального барьера;
в) для прямоугольной потенциальной ямы.

6.[C] Две ямы. Найти уровни энергии и волновые функции связанных состояний частицы в поле:

$$V(x) = -\frac{\hbar^2 \alpha}{m} \Big(\delta(x+a) + \delta(x-a) \Big).$$

Рассмотреть предел $\alpha a \gg 1$ и эволюцию начального состояния, отвечающего волновой функции частицы, связанной в левой яме. Определить вероятность обнаружить частицу в той же яме в момент времени t и частоту осцилляций.

7.$^{\mathbf{C}}$ **Частица в кристалле.** Найти разрешенные зоны энергии частицы, движущейся в потенциальном поле:

$$V(x) = -\frac{\hbar^2 \alpha}{m} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(x - n\,a).$$

Рассмотреть предельные случаи: а) $\alpha a \gg 1$ (сильная связь),
б) $\alpha a \ll 1$ (слабая связь). Найти закон дисперсии для первой зоны и вычислить эффективную массу частицы при малых значениях квазиимпульса.

8.* **Мелкая яма.** Рассмотреть вопрос о существовании связанного сферически симметричного состояния частицы в сферически симметричной потенциальной яме в пространстве одного, двух (качественно в импульсном представлении для мелкой ямы) и трех измерений.

9.$^{\mathbf{C}}$ **Когерентное состояние.** Найти волновую функцию, минимизирующую соотношение неопределенностей для координаты и импульса: $\delta x \cdot \delta p = \frac{\hbar}{2}$.

10.* **Расплывание волнового пакета.** Пусть в момент $t = 0$ состояние свободной частицы массы m описывается волновой функцией $\psi_0(x)$ такой, что $\langle \hat{x} \rangle = x_0$, $\langle \hat{p} \rangle = p_0$, а произведение неопределенностей координаты и импульса принимает минимальное значение. Найти, как будет меняться во времени волновая функция частицы $\psi(x,t)$ и плотность вероятности $|\psi(x,t)|^2$.

11.$^{\mathbf{C}}$ **Магические числа.** Найти уровни энергии трехмерного изотропного гармонического осциллятора и кратности их вырождения, разделяя переменные в декартовых координатах. Обсудить связь задачи с моделью ядерных оболочек и получить значения магических чисел 2, 8, 20.

12. Когерентные состояния осциллятора. Рассмотреть когерентные состояния одномерного гармонического осциллятора:

$$\hat{b}|\psi_z\rangle = z|\psi_z\rangle, \quad \langle \psi_z|\psi_z\rangle = 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

а) Найти среднюю энергию, $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$.
б) Вычислить распределение по числу квантов.
в) Вычислить $\psi_z(Q)$.
г*) Найти временную эволюцию $\psi(t)$, если $\psi(0) = \psi_z$.
д*) Найти $\langle x(t) \rangle$, $\langle p(t) \rangle$, $\langle \delta x^2(t) \rangle$, $\langle \delta p^2(t) \rangle$

13.$^{\mathbf{C}}$ Средние момента импульса. Найти средние значения компонент момента импульса в состоянии $|l, m\rangle$:

$$\langle \hat{l}_x \rangle, \quad \langle \hat{l}_y \rangle, \quad \langle \hat{l}_x \hat{l}_y \rangle, \quad \langle \hat{l}_y \hat{l}_x \rangle, \quad \langle \hat{l}_x^2 \rangle = \langle \hat{l}_y^2 \rangle.$$

14.$^{\mathbf{C}}$ Проекции спина. Найти собственные значения и собственные спиноры для оператора $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}$ проекции спина на ось $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/r$. Вычислить вероятность того, что спинор с проекцией на ось z, равной $1/2$, находится в собственных состояниях $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}$.

15.$^{\mathbf{C}}$ Прецессия спина. Отрицательно заряженный мюон находится в связанном стационарном состоянии. В момент времени $t = 0$, когда "включается" магнитное поле $\mathbf{B}$, направленное под углом θ к оси z, спиновое состояние мюона описывается функцией $|\chi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Какой функцией $|\chi(t)\rangle$ описывается спиновое состояние мюона во все последующие моменты времени в представлении Шредингера? Как выглядит оператор спина мюона $\hat{\mathbf{s}}(t)$ в представлении Гайзенберга? Найдите вектор поляризации мюона $\mathbf{P}(t) = 2\langle \chi | \hat{\mathbf{s}} | \chi \rangle$ как функцию времени, пользуясь представлениями Шредингера и Гайзенберга. Какое движение совершает в пространстве вектор $\mathbf{P}(t)$? Меняется ли во времени его длина?

16.$^{\mathbf{C}}$ Трёхмерный осциллятор. Найти уровни энергии трёхмерного изотропного гармонического осциллятора и кратности их вырождения, разделяя переменные в сферических координатах. Определить пространственную четность состояний.

17.* Водород в импульсном представлении. Записать стационарное уравнение Шредингера для атома водорода в импульсном представлении. Найти волновую функцию основного состояния в импульсном представлении.

18.$^{\mathbf{C}}$ Средние величины для водорода. Найти средние значения для nl-состояний атома водорода
а) $1/r$, $1/r^2$, $1/r^3$ и $\mathbf{p}^2$ используя теоремы Эренфеста и Гельмана–Фейнмана и вириала;
б*) $1/r$, r, r^2 используя рекурсивное отношение Крамерса.

19.$^{\mathbf{C}}$ Дипольный момент водорода. Атом водорода находится в стационарном состоянии с главным квантовым числом $n = 2$. Найти максимальное значение дипольного момента атома $\mathbf{d} = \langle \psi | (-e) \mathbf{r} | \psi \rangle$ и волновую функцию $\psi(\mathbf{r})$, описывающую состояние с максимальным электрическим дипольным моментом.

20.$^{\mathbf{C}}$ Квазиклассический осциллятор. Вычислить в квазиклассическом приближении уровни энергии и собственные функции:
а) гармонического осциллятора,
б) частицы в потенциале

$$V(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0, \\ \dfrac{m\omega^2 x^2}{2}, & x > 0. \end{cases}$$

21.$^{\mathbf{C}}$ Закон Гейгера–Неттола. В квазиклассике найти коэффициент проникновения через потенциальный барьер

$$V(x) = \begin{cases} -V_0, & 0 < x < a, \\ \dfrac{2Ze^2}{x}, & x > a, \end{cases}$$

в пределе $a \ll 2Ze^2/E$. Обсудить связь с элементарной теорией α-распада и получить закон Гейгера–Неттола.

22. Треугольная яма. Вычислить в квазиклассическом приближении уровни энергии и собственные функции частицы в потенциале

$$V(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0, \\ F\,x, & x > 0. \end{cases}$$

23. Квазиклассическое возмущение. Частица совершает финитное движение в одномерном потенциале $V(x)$; E_n – энергии стационарных состояний. Воспользовавшись квазиклассическим приближением, найдите изменения δE_n энергий стационарных состояний при малом изменении потенциала $V(x) \to V(x) + \delta V(x)$.

Задачи со значком $^{\mathbf{C}}$ рассматриваются на семинаре, знаком * отмечены дополнительные задачи повышенной сложности.

1-я контрольная работа – вторая декада марта

ЗАДАНИЕ 1 (срок сдачи 16.03 – 21.03.2026 года)

2-я контрольная работа – вторая декада мая

ЗАДАНИЕ 2 (срок сдачи 11.05 – 16.05.2026 года)

Справочный материал

Общие сведения

$$[\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\beta] = \hat{x}_\alpha \hat{p}_\beta - \hat{p}_\beta \hat{x}_\alpha = \mathrm{i}\hbar \delta_{\alpha\beta} \ \text{— в любом представлении!}$$

$$\hbar = 1{,}055 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с} = 1{,}055 \cdot 10^{-27}\ \text{эрг} \cdot \text{с}$$

Уравнение Шрёдингера (общий случай!):

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi \text{ — временнóе}, \quad \hat{H}\psi = \mathcal{E}\psi \text{ — стационарное.}$$

Типичный гамильтониан: $\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + V(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle + V(\vec{r})$.
Гамильтониан для частицы в электромагнитном поле:

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\vec{P}} - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r},t))^2}{2m} + q\,\phi(\vec{r},t).$$

$\hat{\vec{P}} = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial\vec{r}}$ — обобщённый импульс, $\hat{\mathcal{P}} = \hat{\vec{P}} - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r},t)$ — кинематический импульс (соответствует $m\vec{v}$).

Элементарный заряд: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл $= 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ед.СГС.
Массы электрона, протона, нейтрона (m_p,m_n в атомных ядрах другие):

$$m_e = 511\ \text{кэВ}, \quad m_p = 938{,}3\ \text{МэВ}, \quad m_n = 939{,}6\ \text{МэВ}.$$

Координатное и импульсное представления

$$\hat{x}_\alpha\,\psi(\vec{r}) = x_\alpha\,\psi(\vec{r}), \quad \hat{p}_\alpha\,\psi(\vec{r}) = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\psi(\vec{r}),$$

$$\hat{x}_\alpha\,\psi(\vec{p}) = +\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\psi(\vec{p}), \quad \hat{p}_\alpha\,\psi(\vec{p}) = p_\alpha\,\psi(\vec{p}),$$

$$\psi_{\vec{r}_0}(\vec{r}) = \langle\vec{r}|\vec{r}_0\rangle = \delta(\vec{r}-\vec{r}_0), \quad \psi_{\vec{p}_0}(\vec{p}) = \langle\vec{p}|\vec{p}_0\rangle = \delta(\vec{p}-\vec{p}_0),$$

$$\psi_{\vec{p}}(\vec{r}) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(\vec{r},\vec{p})}{\hbar}}}{(2\pi)^{3/2}} = \underbrace{\langle\vec{r}}_{\langle\psi_{\vec{r}}}\,|\,\underbrace{\vec{p}\rangle}_{\psi_{\vec{p}}\rangle} = \langle\vec{p}|\vec{r}\rangle^*,$$

$$\psi(\vec{p}) = \langle\vec{p}|\psi\rangle = \int\frac{\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}(\vec{r},\vec{p})}{\hbar}}}{(2\pi)^{3/2}}\,\psi(\vec{r})\,d^3\vec{r}, \quad \psi(\vec{r}) = \langle\vec{r}|\psi\rangle = \int\frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(\vec{r},\vec{p})}{\hbar}}}{(2\pi)^{3/2}}\,\psi(\vec{p})\,d^3\vec{p}.$$

$\psi(\vec{p})$ — фурье-образ $\psi(\vec{r})$, можно было бы обозначить $\tilde{\psi}(\vec{p})$, но физики считают, что аргумента $\vec{p}$ достаточно.

$$\langle\phi|\psi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle^* = \int\phi^*(\vec{r})\,\psi(\vec{r})\,d^3\vec{r} = \int\phi^*(\vec{p})\,\psi(\vec{p})\,d^3\vec{p}.$$

Гармонический осциллятор

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \hbar\omega\Big(\underbrace{\frac{\hat{p}^2}{2m\hbar\omega}}_{\frac{\hat{P}^2}{2}} + \underbrace{\frac{m\omega}{\hbar}\frac{x^2}{2}}_{\frac{\hat{Q}^2}{2}}\Big) = \hbar\omega(\hat{b}^+\hat{b} + \tfrac{1}{2}),$$

$$\hat{b} = \frac{\hat{Q} + \mathrm{i}\hat{P}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{b}^+ = \frac{\hat{Q} - \mathrm{i}\hat{P}}{\sqrt{2}}, \quad [\hat{b}, \hat{b}^+] = 1, \quad \hat{P} = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial Q},$$

$$\hat{H}\underbrace{|n\rangle}_{|\psi_n\rangle} = \mathcal{E}_n|n\rangle, \quad \langle n_1|n_2\rangle = \delta_{n_1 n_2}, \quad \mathcal{E}_n = \hbar\omega(n + \tfrac{1}{2}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\hat{b}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{b}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle,$$

$$\hat{b}^+\hat{b}|n\rangle = n|n\rangle, \quad \hat{b}\hat{b}^+|n\rangle = (n+1)|n\rangle, \qquad |0\rangle = |\psi_0\rangle \neq 0.$$

Моменты импульса

$$\hat{j}_\alpha = \hat{l}_\alpha + \hat{s}_\alpha, \quad \hat{\vec{l}} = \tfrac{1}{\hbar}[\hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}], \quad \hat{s}_\alpha \text{ — спин (матрицы } (2s+1) \times (2s+1))$$

$$\hat{j}^2 = \hat{j}_x^2 + \hat{j}_y^2 + \hat{j}_z^2 = \hat{j}_-\hat{j}_+ + \hat{j}_z^2 + \hat{j}_z, \quad \hat{j}_\pm = \hat{j}_x \pm \mathrm{i}\hat{j}_y = \hat{j}_\mp^\dagger,$$

$$[\hat{j}_\alpha, \hat{j}_\beta] = \mathrm{i}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{j}_\gamma, \quad [\hat{j}^2, \hat{j}_\alpha] = 0, \quad [\hat{j}_z, \hat{j}_\pm] = \pm\hat{j}_\pm, \quad [\hat{j}_+, \hat{j}_-] = 2\hat{j}_z,$$

$$\hat{j}^2|j, m_j\rangle = j(j+1)|j, m_j\rangle, \quad \hat{j}_z|j, m_j\rangle = m_j|j, m_j\rangle,$$

$$j = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, 2, \ldots, \quad m_j = \underbrace{-j, -j+1, \ldots, +j}_{2j+1 \text{ значение}},$$

Для орбитального момента (для $\vec{l}$) j всегда целое и обозначается l, для спинового часто (электроны, протоны, нейтроны, нейтрино и др.) $j = \frac{1}{2}$ и обозначается s.

$$\hat{j}_+|j, m_j\rangle = \underbrace{\sqrt{(j+m+1)(j-m)}}_{\sqrt{j(j+1) - m_j(m_j+1)}}|j, m_j + 1\rangle,$$

$$\hat{j}_-|j, m_j\rangle = \underbrace{\sqrt{(j-m+1)(j+m)}}_{\sqrt{j(j+1) - m_j(m_j-1)}}|j, m_j - 1\rangle.$$

Спин $\frac{1}{2}$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\hat{s}_\alpha = \tfrac{1}{2}\sigma_\alpha, \quad \sigma_\alpha\sigma_\beta = \hat{1}\delta_{\alpha\beta} + \mathrm{i}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_\gamma.$$

$$\chi_+ = |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |+\rangle = |\uparrow\rangle, \quad \chi_- = |\underbrace{\tfrac{1}{2}}_{s}, \underbrace{-\tfrac{1}{2}}_{m_s}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |-\rangle = |\downarrow\rangle.$$

Орбитальный момент

$$\hat{l}_z = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad \hat{l}_\pm = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\varphi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathrm{i}\,\mathrm{ctg}\,\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$

$$\triangle = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\underbrace{\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)}_{\triangle_{\theta\varphi} = -\hat{l}^2}.$$

Сферические гармоники

$|l, m_l\rangle$ в координатном представлении: $Y_{lm_l}(\theta,\varphi) = \langle\theta,\varphi|l, m_l\rangle$ (фазовые множители выбраны согласно курсу Ландау и Лифшица)

$$\langle l', m_l'|l, m_l\rangle = \int Y^*_{l'm_l'}(\theta,\varphi)\,Y_{l,m_l}(\theta,\varphi)\underbrace{d\Omega}_{\sin\theta\,d\theta\,d\varphi} = \delta_{l'l}\,\delta_{m_l'm_l}.$$

$$Y_{00}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10}(\theta,\varphi) = \mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \;\; Y_{1,\pm1}(\theta,\varphi) = \mp\mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\varphi}$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(1 - 3\cos^2\theta), \quad Y_{2,\pm1} = \pm\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cos\theta\,\sin\theta\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\varphi},$$

$$Y_{2,\pm2} = -\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\,E^{\pm2\mathrm{i}\varphi}.$$

Атом водорода

$$a_\text{Б} = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0{,}529\ \mathring{A}, \quad \mathcal{E}_n = -\frac{1}{2n^2}\frac{me^4}{\hbar^2} = -\frac{1}{2n^2}\frac{e^2}{a_\text{Б}} = -\frac{\mathrm{Ry}}{n^2},$$

$$\mathrm{Ry} = 13{,}6\ \text{эВ}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \quad l = 0, 1, \ldots n-1, \quad m_l = \underbrace{-l, \ldots, +l}_{2l+1\ \text{значение}}$$

$$\psi_{nlm_l}(r,\theta,\varphi) = Y_{lm_l}(\theta,\varphi)\,R_{nl}(r).$$

Уровни энергии вырождены по l, m_l, m_s ($m_s = \pm\frac{1}{2}$) с учётом спина кратность вырождения — $2n^2$.

Радиальные волновые функции (обезразмеренные)

$$R_{10} = 2\mathrm{e}^{-r}, \quad R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-r/2}(1 - \tfrac{r}{2}), \quad R_{21} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\mathrm{e}^{-r/2}r.$$

Буквенные обозначения для орбитального момента l:

$$0 = s, \quad 1 = p, \quad 2 = d, \quad 3 = f, \quad 4 = g, \;\; \text{далее по алфавиту.}$$

Квазиклассика

$p(x) = \pm\sqrt{2m(E - V(x))}$ — квазиклассический импульс, не оператор!

Критерий применимости: $\left|\frac{\partial \lambdabar}{\partial x}\right| = \left|\frac{\hbar p'}{p^2}\right| \ll 1$, $\lambdabar(x) = \frac{\hbar}{p(x)}$.

Квазиклассическая волновая функция:

$$\psi(x) = \frac{c_+}{\sqrt{p(x)}} \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int^x p(x_1)\,dx_1\right) + \frac{c_-}{\sqrt{p(x)}} \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int^x p(x_1)\,dx_1\right)$$

Правило квантования Бора–Зоммерфельда

$$\Gamma(E_n) = \oint p(x)\,dx = 2\int_a^b p(x)\,dx = 2\pi\hbar(n + \epsilon),$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, \quad V(a) = V(b) = E_n.$$

ϵ зависит от поведения потенциала вблизи точек поворота a и b. Обычно (потенциал растёт плавно) $\epsilon = \frac{1}{2}$, бесконечновысокая стенка с одной строны — $\epsilon = \frac{3}{4}$, бесконечновысокие стенки с обеих строн — $\epsilon = 1$.

$\Gamma(E_n)$ — фазовая площадь. $\Delta\Gamma = \Gamma(E_{n+1}) - \Gamma(E_n) = 2\pi\hbar$.

Проницаемость потенциального барьера (вероятность туннелирования, формула Гамова)

$$D \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_a^b |p(x)|\,dx\right) \ll 1 \text{ — внутри барьера } p(x) \text{ мнимое!}$$