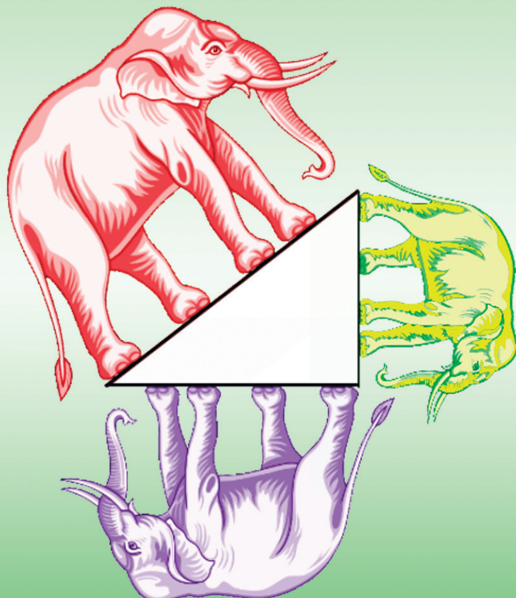
МФТИ

**М. Г. Иванов**

# РАЗМЕРНОСТЬ И ПОДОБИЕ



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

**М. Г. Иванов**

# РАЗМЕРНОСТЬ И ПОДОБИЕ

**Учебно-методическое пособие**

МОСКВА
МФТИ
2019

УДК 530.17, 514.8(075)
ББК 22.311я73
И20

Рецензенты:
Кандидат физико-математических наук,
ст. науч. сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова РАН
*А. С. Трушечкин*

Кандидат физико-математических наук,
ст. науч. сотрудник ИПМ им. М. В. Келдыша РАН *Н.С. Келлин*

**Иванов, Михаил Геннадьевич**
И20 **Размерность и подобие** : уч.-метод. пособие / М. Г. Иванов. — Москва : МФТИ, 2019. — 152 с.
ISBN 978-5-7417-0700-5

Пособие даёт введение в методы размерности и подобия, понимание которых необходимо для формирования культуры физического мышления. Эти методы помогают оценке физических величин через параметры системы, самопроверке при вычислениях, преобразованию единиц измерения. Методы подобия широко применяются в аэрогидродинамике при аналитических вычислениях, при натурном и численном моделировании.

Включена общая информация о Международной системе единиц (СИ) с учётом реформы 20 мая 2019 г.

Пособие содержит упражнения, примеры и иллюстративный материал, призванные служить развитию научного кругозора и поддержанию мотивации учащихся.

Предназначено для старшеклассников, студентов младших курсов, а также учителей и преподавателей.

**УДК 530.17, 514.8(075)**
**ББК 22.311я73**

**ISBN 978-5-7417-0700-5**

# Оглавление

# Предисловие

Предыдущие издания данного пособия[1] печатались очень небольшим тиражом и сейчас доступны преимущественно в электронном виде (см. ссылку ниже).

Прошедшее с последнего издания время показало, что учебно-методическое пособие получилось достаточно удачным.

Кроме того, 16 ноября 2018 года XXVI Генеральная конференция по мерам и весам постановила[2], что с 20 мая 2019 года меняется определение ряда основных единиц (килограмм, ампер, кельвин, моль) международной системы единиц СИ, что сразу потребовало переработки соответствующего раздела пособия.

Возникла необходимость подготовки нового переработанного издания. Автоматически определился и срок, к которому новая версия пособия должна стать доступна в электронном виде и на бумаге — Всемирный день метрологии 20 мая 2019 года.

Автор обещает, что текущая стабильная версия данной книги на русском языке будет доступна для свободного скачивания с авторской интернет-странички по ссылке ниже либо с другой интернет-странички. Автор не намерен брать на себя каких-либо обязательств (перед издателями, работодателями или кем-либо ещё), которые препятствовали бы этому.

Обещания автора, касающиеся свободного доступа к электронному тексту книги, относятся *только к* ***русской*** *версии.*

[1]Иванов М. Г. Размерность и подобие. Долгопрудный: ДАТ, 2013; М. Г. Иванов. Размерность и подобие в естествознании, М. : МФТИ, 2014.

[2]`https://www.bipm.org/en/CGPM/db/26/1/`

**P.S.** Если вы получили книгу из какого-либо места, отличного от авторской интернет-странички (`https://mipt.ru/students/organization/mezhpr/biblio/razmernost.php`) (например, с торрентов или на бумаге), проверьте, нет ли на авторской интернет-страничке более свежей версии.

Значок (PD) помечает рисунки, имеющие статус «общественного достояния» (Public Domain).

Значок (cc) означают ссылку на лицензию Creative Commons. В этом случае указывается интернет-ссылка на источник, по которой можно ознакомиться с информацией о том, на каких условиях материал может быть использован.

Буквы «GNU» — ссылка на лицензию семейства GNU (конкретную версию можно узнать, пройдя по интернет-ссылке).

# Структура пособия

Пособие рассчитано на старшеклассников и студентов младших курсов, а также учителей и преподавателей, работающих с ними.

Разделы и фразы, отмеченные звёздочной (*), могут быть опущены при прочтении. Чем больше звёздочек, тем больше оснований пропустить раздел, помеченный ими.

Если название раздела оканчивается на «(л)», то данный раздел является «ликбезовским», т.е. материал раздела должен быть хорошо знаком читателю. Однако раздел всё же включён в пособие в расчёте на слабо подготовленного читателя[3].

**Если вы не специалист, не читайте пособие подряд! При первом чтении пропустить некоторые разделы не только можно, но и нужно!**

Пособие разбито на главы, рассчитанные на разные категории читателей, которые можно читать более-менее независимо.

Глава 1 «38 попугаев» содержит минимум материала, изложенного максимально простым языком и рассчитанного на

---

[3]Младшего школьника, учащегося или выпускника непрофильных классов, гуманитария.

школьников, начиная с младших классов.

Глава 2 «Единицы измерения в информатике» рассчитана на школьника, проявляющего интерес к информатике. Эта глава более сложна математически (хотя и не содержит ничего сложнее логарифмов, а логарифмы даются в главе 1) и призвана на примере единиц измерения показать идейную связь информатики с математикой и физикой.

Глава 3 «Переосмысляем теорию размерностей» возвращается к материалу главы 1 на новом уровне. Первый раздел главы даёт понятия, необходимые для дальнейшего знакомства с различными системами единиц. Второй раздел (помечен звёздочкой) предполагает более глубокое осмысление материала.

Глава 4 «Международная система единиц СИ и её проблемы» в первой части содержит краткий обзор системы СИ, её истории и основных единиц измерения. С учётом роли метрологии в современной технике, этот материал должен быть знаком любому культурному человеку. Во второй части главы (под тремя звёздочками) обсуждается применение системы СИ в электродинамике и возможная модификация системы СИ («физико-техническая система единиц»). Вопросы, обсуждаемые в данном разделе, являются предметом полуторавековых споров и ориентированы уже не столько на школьников и студентов, сколько на достаточно квалифицированных преподавателей физики (как школьного, так и университетского уровня).

Глава 5 «Иные системы единиц и внесистемные единицы*» содержит разбор физически осмысленных единиц измерения и их систем. Глава рассчитана на школьников и студентов, глубоко интересующихся физикой.

Глава 6 «Подобие» состоит из четырёх разделов, которые предполагают различающийся контингент читателей. Раздел «Геометрическое подобие» — отсылка к школьной геометрии в общем контексте теории подобия. Раздел «Механическое подобие» содержит разбор простых примеров из механики и биологии, доступных школьнику средних классов. Раздел «Аэрогидродинамика: критерии подобия*» ориентирован на школьника старших классов или студента. Раздел «Аэрогидродинамика в фотографиях» содержит описания и фотографии экспериментальных установок (преимущественно аэродинамических труб), используемых в Центральном аэрогидродинамическом институте им. профессора Н. Е. Жуковского (ЦАГИ). Это почти комикс, призванный заинтересовать и увлечь, хотя для подлинного понимания нужно прочитать предыдущий раздел.

Глава 7 «Фракталы*» может пониматься как развитие темы геометрического подобия на случай сложных форм, возникающих в физике, химии, биологии, математике и информатике, так что эту главу можно считать междисциплинарной. Отчасти это комикс, в котором можно просто смотреть картинки, но понимание предполагает хотя бы знание логарифмов.

## Благодарности

Автор благодарит всех школьников, студентов и учителей, слушавших популярные лекции «Размерность и подобие» и «Фракталы в математике, физике и искусстве», на которых обкатывался материал, вошедший в данное пособие.

Автор благодарит В. С. Булыгина, при участии которого был написан раздел 4.1.7 «Кандела».

Автор благодарит Г. В. Пряхина, который в рабочем порядке организовал издание первой версии пособия через Долгопрудненский авиационный техникум, В. П. Слободянина, который организовал издание второй версии пособия и «обкатал» её на школьниках-олимпиадниках, показав тем самым, что пособие действительно полезно, А. А. Рухадзе, который, несмотря на дискуссионность темы, издал в журнале «Инженерная физика» статью[4], послужившую основой раздела 4.2 «Система СИ в электродинамике».

Автор благодарит рецензентов за вдумчивое и внимательное изучение пособия, полезные советы и замечания.

[4] Иванов М. Г. Физико-техническая система единиц для электродинамики // Инженерная физика. 2015. №1. С. 4–12. `https://mipt.ru/upload/medialibrary/fe4/fts-inzphys_2015.pdf`

## Предисловие рецензента (Н. С. Келлина)

Автор этих строк преподаёт математику всю свою сознательную жизнь. Столь лихое кавалеристски-математическое заявление можно и доказать: будучи в восьмом классе он (я то есть) учился в Вечерней математической школе при Московском математическом обществе, а став девятиклассником легендарной Второй школы в далёком 1968 году, продолжил занятия в ВМШ уже младшим преподавателем. Потом преподавание в 57, Второй, 179 школах и, наконец, ...

МКШ(Ю) — Международная Компьютерная Школа Юных — родившаяся (смотря от чего отсчитывать) в 1988 или в 1989 году, оказалась пластинкой долгоиграющей, справившей недавно своё тридцатилетие. Действительно, временами она была не Международной, но Межрегиональной. Затем ещё и Летним университетом. Занятия в ней проводились в основном летом, три (сейчас — две) недели в июле–августе под Москвой (Дубна, Большая Волга, Пущино, Протвино, Черноголовка, Переяславль-Залесский, Дмитров, ...). Однажды (в 1991 году) занятия были в июне в Москве, в ИПМ АН СССР, так как шведская делегация не могла участвовать в августовской сессии. Но не столь интенсивная (обычная кружковская: раз в неделю) подготовка к летней сессии велась круглогодично. Как в ИПМ, так и в МАИ, МГУ и в школах Дубны и Пущино.

Что касается возраста и статуса участников, то руководители Проектов (что есть наше изобретение, зарегистрированное в 1988 году в рамках МКК — Международного компьютерного клуба, Ноу-Хау и замена «предметов», «классов», «тем» и прочих уроков) — это научные сотрудники и аспиранты, реже студенты-старшекурсники (фанаты преподавания); ассистенты — ясно кто (и также фанаты преподавания); исполнители — старшеклассники, с осени по весну прошедшие конкурсный отбор (и, разумеется, также фанаты, готовые продолжать занятия в летние каникулы).

Такова была идея МКШ и её структура в прошлом тысячелетии. Однако ж сразу началась и её (их) модернизация. К планомерной осаде МКШ-1 и МКШ-2 приступили младшеклассники и их родители, так что на МКШ-3 помимо стандартного компьютерного ликбеза (в те времена ещё необходимого) был организован Проект «Картинная Галерея», специально для тех, кому во времена ГКЧП было лет 8–10.

Об их ровесниках я и вспомнил, ознакомившись с книгой М. Г. Иванова «Размерность и подобие».

Дела с младшеклассниками в 1989–1991 годах в МКШ обстояли так. Летом, разумеется, они «урча и облизываясь, как котята на сметану», были допущены до персоналок: японских «Ямах», болгарских «Правцев» и шведских «Nokia», т.е. IBM PC AT 286. Круто! Но вот зимой взять и запустить малышню на БЭСМ-6-1 или на ЕС 10-45, или на ЕС 10-60...Ненаучная фантастика. А группа уже есть, она набрана и роет копытами землю (реально пришлось ремонтировать паркет в конференц-зале). И это ещё полбеды. А главная проблема в том, что у отлично справлявшейся с малышами Натальи Леонидовны появляется Ванька, и она исчезает на три года...Кидаться грудью на эту амбразуру велено мне - любимому. А ведь раньше занимался я только со старшеклассниками, ну ещё с шестиклассниками в 57 школе в далёком 1973... Деваться некуда — у самого дочь пошла в первый класс.

Что делать? С чего начать? Не ясно даже, Кто виноват?

Решил, что изобретать велосипед вредно, обложился книгами Перельмана (Якова Исидоровича), и вот программа уже готова: «Размерность и подобие». Курс начинаю с двух стаканов... гороха и сахара. Какая цепочка будет длиннее: из горошин или из сахаринок? И во сколько раз? Уже к ноябрю понимаю, что или Наталья Леонидовна оставила мне в подарок шикарную группу, или мы с Яковом Исидорычем дотронулись до каких-то заветных струн детских душ. (Впрочем, в эту пору преподавание в школах практически прекратилось.) Точную последовательность подачи материала сейчас, увы, уже не установишь, но помню, что под конец темы (где-то в конце ноября или начале декабря) я говорил с ребятами как с 8–9 классниками, и ничего, они выдерживали занятие (не 90, но 45 минут, разумеется). А конкретно речь шла в том числе и о биологии, когда конфликтуют между собой вес животного (пропорциональный кубу характерного размера) и прочность его костей (пропорциональная квадрату того же размера). Помню, что застряли мы на бронтозавре и диплодоке.

А дальше родители попросили лекарства от жадности, да побольше, побольше! За оставшиеся полгода мы осилили мою любимую геометрию (планиметрию). На двух или даже трёх следующих МКШ эти ребята были самыми активными и успешными исполнителями в выбранных ими Проектах. Их руководителям я сдал с рук практически готовых исследователей. И, казалось бы, всё прекрасно и замечательно, но школу-то закончить надо! А на дворе лихие девяностые. И большинство моих «специалистов размерности и подобия» исчезло с территории Советского Союза. Обидно, досадно, но ладно!

*Н. С. Келлин*

# Глава 1

# 38 попугаев. Теория размерности для самых маленьких

## 1.1. Идеи

### 1.1.1. Идея 1: яблоки и сливы

**Яблоки нельзя складывать со сливами или арбузами.** Такая простая мысль лежит в основе теории размерности. Размерность физической величины — это единица измерения, в которой величина измеряется.

Почему яблоки нельзя складывать со сливами или арбузами? Потому, что приравнивать корзину, в которой 2 яблока и 3 арбуза, корзине, в которой 4 яблока и 1 арбуз, было бы неестественно:

$$\text{2 яблока } + \text{ 3 арбуза} = \text{5 чего-то}$$
$$\text{5 чего-то} \neq \text{5 чего-то другого} = \text{4 яблока } + \text{ 1 арбуз.}$$

#### Упражнение

1. Как вы думаете, что больше: 2 яблока + 3 арбуза, или 4 яблока + 1 арбуз?

### 1.1.2. Идея 2: 3·**яблок**$\underline{\text{о}}$

Давайте внимательно рассмотрим, что значит задание какой-либо «размерной величины». Например, что такое «5 метров».

«5 метров» — это 5 раз по 1 метру (1 м), то есть это умножение числа 5 на 1 метр:

$$5 \text{ метров} = 5 \text{ метр} = \underbrace{1 \text{ м} + 1 \text{ м} + 1 \text{ м} + 1 \text{ м} + 1 \text{ м}}_{5 \text{ раз}} = 5 \cdot 1 \text{ м} = 5 \text{ м}.$$

В конце мы опустили знак умножения, как это обычно и делают.

(*) Обратите внимание, мы написали 5 метров = 5 метр, имея в виду $5 \cdot$ метр. Аналогично мы будем писать в формулах 3 яблоко, а не 3 яблока, имея в виду $3 \cdot 1$ яблоко.

*«Размерная величина» $X$ — это произведение «просто числа» («числовая часть», обозначим её $\{X\}$) на единицу измерения (обозначим её $[X]$)*!!!

$$X = \{X\} \cdot [X].$$

Например,

$$X = 5 \cdot \text{м} = 5 \text{ м}, \text{ тогда } \{X\} = 5, \quad [X] = \text{м}.$$

«Просто число» считается «безразмерным» — его единица измерения просто 1.

$$Y = 5 = 5 \cdot 1, \text{ тогда } \{Y\} = 5, \quad [Y] = 1.$$

(*) Обычай не писать знак умножения мог прижиться в алгебре вероятно потому, что в выражении типа $5x$ буква $x$ играет ту же роль, что и единица измерения. Вообще, **правила обращения с единицами измерения такие же, как правила обращения с буквами в алгебре,** с небольшими добавлениями, которые мы обсудим далее.

## Упражнения

В мультфильме «38 попугаев» для измерения длины удава в качестве единиц длины (эталонов) использовались попугай, слонёнок и мартышка. Конечно, такие эталоны не очень удобны на практике. Однако они ничуть не хуже, чем реально употреблявшиеся в прошлом такие единицы, как *фут* («стопа»), *сажень* («размах рук») или *миля* («тысяча двойных шагов»).

1. [38 попугаев] = ?, {38 попугаев} = ?

2. Пусть попугай = 20 см. 1 удав = 38 попугай. Выразить удава в см.

3. Пусть 1 удав = 5 слонёнок = 7 мартышка = 38 попугай. Найти отношение $\frac{\text{мартышка}}{\text{попугай}}$ (коэффициент пересчёта попугаев в мартышки).

### 1.1.3. Операции с единицами измерения

При умножении и делении единицы измерения также умножаются и делятся. Например,

$$10\ \text{м}\cdot 3\ \text{м} = (10\cdot 3)\cdot(\text{м}\cdot\text{м}) = 30\ \text{м}^2, \quad \frac{60\ \text{м}}{12\ \text{с}} = (60/12)\cdot(\text{м}/\text{с}) = 5\ \text{м/с}.$$

При возведении в степень величины в ту же степень возводится её единица измерения. При умножении единицы измерения саму на себя появляются степени этой единицы.

Например, [длина] = м = метр (единица длины),
[площадь] = м · м = $\text{м}^2$ = метр в квадрате = метр квадратный (единица площади),
[объём] = м·м·м = $\text{м}^3$ = метр в кубе = метр кубический (единица объёма).

При правильном вычислении правильные единицы измерения получаются сами собой. Например, если все длины даны в метрах, то все площади неизбежно окажутся выражены в метрах квадратных вне зависимости от того, площади каких фигур по каким формулам вычисляются, а все объёмы — в метрах кубических.

Деление одной единицы измерения на другую часто обозначается предлогами «в», «на», «за». Например,

[скорость] = м/с = метр разделить **на** секунду = метр **в** секунду (единица скорости),

[плотность] = кг/$\text{м}^3$ = килограмм разделить **на** метр в кубе = килограмм **на** метр кубический = килограмм **в** кубическом метре (единица плотности).

Тут предлоги «в», «на», «за» можно понимать и буквально:

яблоко/человек = яблоко **на** человека, такая единица появится, если вы делите число яблок **на** число человек, она даёт число яблок, приходящихся **на** одного человека,

скорость метр **в** секунду (или, что то же самое, метр **за** секунду) означает, что частица проходит **в** (**за**) секунду один метр,

плотность килограмм **на** метр кубический (килограмм **в** метре кубическом) означает, что **в** одном кубическом метре содержится один килограмм, или один килограмм приходится **на** кубический метр объёма,

ускорение м/с$^2$ = (м/с)/с = метр **на** секунду в квадрате = = метр **в** секунду **за** секунду означает, что **за** одну секунду скорость увеличивается **на** один метр **в** секунду,

%/год = процент **в** год — в таких единицах измеряются банковские проценты,

подзатыльник/(ученик · урок) = (подзатыльник/ученик)/ /урок = подзатыльников **на** ученика **за** урок — естественная единица измерения для числа подзатыльников, которые **за** урок получает ученик от своих товарищей.

При переходе от одних единиц измерения к другим надо просто старые единицы измерения выразить через новые и подставить эти выражения в формулу

$$3\ \text{м}^2 = 3 \cdot (100 \cdot \text{см})^2 = 3 \cdot 100^2 \cdot \text{см}^2 = 30\,000\ \text{см}^2,$$

$$60\ \frac{\text{км}}{\text{ч}} = 60 \cdot \frac{1000 \cdot \text{м}}{60 \cdot \text{мин}} = (60 \cdot 1000/60) \cdot \frac{\text{м}}{\text{мин}} = 1000\ \frac{\text{м}}{\text{мин}}.$$

Правильное задание размерности (единицы измерения) величины позволяет сразу определить, как будет меняться величина, если единицы измерения поменяются. Вспомним, что размерная величина

$$X = \{X\} \cdot [X].$$

Можно считать, что $X$ — одно и то же в любых единицах измерения! (Ведь единицы измерения можно выбирать разные!) Просто когда вы изменяете единицу измерения в $k$ раз $[X] \to k[X]$, то числовая часть меняется так, чтобы произведение осталось прежним $\{X\} \to \{X\}/k$.

### Упражнения

Не забывайте везде указывать размерности!

1. Какая величина может иметь размерность человек/м$^2$?
2. Какая величина может иметь размерность яблоко/м$^3$?
3. Какая величина может иметь размерность яблоко/(человек · с)?
4. В каких единицах можно измерить прожорливость?
5. Какова производительность молочной фермы (по молоку) в пересчёте **на** одну корову, если 100 коров **в** год дают 500 м$^3$ молока?
6. Какова производительность той же молочной фермы (по молоку) в пересчёте **на** гектар пастбища, если площадь пастбища — 50 га?
7. За сколько часов пешеход со скоростью 2 м/с преодолеет расстояние в 1 старорусскую милю = 7,5 км? 1 ч = 60 мин, 1 мин = 60 с. (Ответ округлить.)

## 1.2. Безразмерные величины

Бывают такие величины, которые от единицы измерения не зависят («разы», «штуки» и т.п.). Такие величины называются *безразмерными*. Считается, что единица измерения для них — просто 1 (без единицы измерения), т.е. её можно не писать:

$$7\ \text{раз} = 7\ \text{штук} = 7 \cdot 1 = 7.$$

Безразмерным всегда оказывается отношение величин, имеющих одинаковую размерность:

$$\frac{10\ \text{яблоко}}{2\ \text{яблоко}} = \frac{10}{2} \cdot \frac{\text{яблоко}}{\text{яблоко}} = 5 \cdot 1 =$$
$$= 5 = \frac{30\ \text{подзатыльник}}{6\ \text{подзатыльник}} = \frac{30}{6} \cdot \frac{\text{подзатыльник}}{\text{подзатыльник}}.$$

Безразмерным оказывается угол, измеренный в радианах, поскольку он вычисляется по формуле

$$\text{угол} = \frac{\text{длина дуги}}{\text{радиус окружности}},$$

для единиц измерения получаем

$$\text{радиан} = [\text{угол}] = \frac{[\text{длина дуги}]}{[\text{радиус окружности}]} = \frac{\text{м}}{\text{м}} = 1.$$

Для чего иногда вводятся и явно пишутся безразмерные единицы измерения, такие как радиан, или оборот? Такие единицы измерения служат для напоминания определения величины. Так, частоту вращения можно измерять в единицах $\frac{\text{радиан}}{\text{секунда}}$ или $\frac{\text{оборот}}{\text{секунда}}$. Размерность этих единиц одинакова — $\text{с}^{-1}$, но соответствующие единицы различаются в $2\pi$ раз.

Только про безразмерные величины можно говорить, что они «малы» или «велики», не указывая по сравнению с чем.

Безразмерная величина $X$ мала, если она много меньше единицы: $X \ll 1$.

Безразмерная величина $Y$ велика, если она много больше единицы: $Y \gg 1$.

Размерная величина $A$ может быть «мала» или «велика» только *по сравнению с другой величиной $a$ той же размерности.* Это сводится к малости или великости безразмерного отношения $A/a$. Безразмерная величина может быть мала или велика не только по сравнению с единицей, но и по сравнению с другой безразмерной величиной.

Что значат значки «много меньше» ($\ll$) и «много больше» ($\gg$)? Что значит «много»? Ответ на этот вопрос зависит от задачи. Когда в одном случае из 100 устройство не срабатывает, то шанс (*вероятность*) отказа устройства $\frac{1}{100}$ мал, если устройство пускает мыльные пузыри. Но если это устройство самолёт, на котором летят люди, то такая вероятность отказа очень велика[1].

[1] Велика для мирного времени. В военное время, если шансы, что самолёт будет сбит противником за один вылет, существенно больше, чем $\frac{1}{100}$, то та же вероятность отказа $\frac{1}{100}$ может быть признана пренебрежимо малой.

Понятия «много больше» и «много меньше» принято определять согласованно: если $Y \gg 1$, то $\frac{1}{Y} \ll 1$.

Во многих задачах «по умолчанию» предполагается, что «много» — это «больше, чем на порядок», т.е. больше, чем в 10 раз. То есть $X \ll 1$ — это $X < 0{,}1$, а $Y \gg 1$ — это $Y > 10$.

Если про размерную величину говорят, что она мала или велика, не указывая по сравнению с чем, то либо такое утверждение бессмысленно, либо сравнение неявно подразумевается.

### 1.2.1. А как же яблоки?*

Мы написали, что в «штуках» измеряются безразмерные величины. А как же яблоки и сливы? Ведь с самого начала главы мы утверждали, что яблоко $\neq$ слива, тогда как и яблоки, и сливы, вроде бы, измеряются в штуках.

Это означает, что *мы договорились* считать, что яблоко (или *одна штука яблока* $= 1\,$яблоко) — это не то же самое, что просто *штука* (безразмерная единица):

$$\text{яблоко} = \text{штука} \cdot \text{яблоко} = 1 \cdot \text{яблоко}.$$

Тут, действительно, присутствует некоторый произвол: число яблок мы можем считать как размерным (измерять в яблоках), так и безразмерным (измерять в штуках).

Подобного рода *обезразмеривание* часто возникает тогда, когда в задаче есть *естественный масштаб*. Если мы считаем яблоки, то естественный масштаб — это одно яблоко. Деля величину на такой естественный масштаб, мы её обезразмериваем — получаем аналогичную безразмерную величину:

$$\text{число\_яблок\_безразмерное} = \frac{\text{число\_яблок}}{1\ \text{яблоко}}.$$

Аналогично в природе существует естественная единица заряда $e$ — элементарный заряд (заряд электрона со знаком минус). Разделив электрический заряд на заряд $e$, мы его обезразмериваем (выражаем в единицах элементарного заряда):

$$\text{электрический\_заряд\_безразмерный} = \frac{\text{электрический\_заряд}}{e}.$$

Таким образом, часто обезразмеривание сопровождается переходом к естественным (для данной задачи) единицам измерения.

### Упражнения

1. Скорость света $c \approx 300\,000$ км/с считается «большой», однако она размерна. По сравнению с чем велика скорость света?

2. Астрономы, которые изучают возможность контакта с внеземными цивилизациями, часто сетуют на то, что скорость света мала. Что они имеют в виду?

3. Диаметр Земли $D \approx 13\,000$ км. Часто люди говорят, что размер Земли велик. По сравнению с чем велик?

4. Часто астрономы говорят, что размер Земли мал. По сравнению с чем мал?

5. Как определить концентрацию раствора, чтобы она оказалась безразмерной величиной?

## 1.3. Возведение в степени (л)

На всякий случай, напомним определение и основные свойства операции возведения в степень.

Изначально

$$a \text{ в степени } n = a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

В выражении $a^n$ число $a$ называется *основанием*, а $n$ — *показателем.*

Например,

$$2^1 = 2, \quad 2^2 = 2 \cdot 2 = 4, \quad 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8, \quad 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16,$$

$$3^1 = 3, \quad 3^2 = 3 \cdot 3 = 9, \quad 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27,$$

$$10^1 = 10, \quad 10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000, \quad 0,1^2 = 0,1 \cdot 0,1 = 0,01,$$

$$-1^1 = -1, \quad (-1)^2 = (-1)\cdot(-1) = 1, \quad (-1)^3 = -1.$$

То есть степень получается из повторного умножения так же, как умножение из повторного сложения.

Для любого числа

$$X^1 = X.$$

Понятно, что при умножении степеней с одинаковым основанием показатели складываются

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a\cdot a\cdot\dots\cdot a}_{n\text{ раз}}\cdot\underbrace{a\cdot a\cdot\dots\cdot a}_{m\text{ раз}} = \underbrace{a\cdot a\cdot\dots\cdot a}_{n+m\text{ раз}} = a^{n+m}.$$

Например,

$$2^3 \cdot 2^2 = 8\cdot 4 = 32 = 2^5 = 2^{3+2}.$$

При возведении степени в степень показатели перемножаются:

$$(a^n)^m = \underbrace{\underbrace{a\cdot a\cdot\dots\cdot a}_{n\text{ раз}}\cdot\underbrace{a\cdot a\cdot\dots\cdot a}_{n\text{ раз}}\cdot\dots\cdot\underbrace{a\cdot a\cdot\dots\cdot a}_{n\text{ раз}}}_{m\text{ раз}} =$$

$$= \underbrace{a\cdot a\cdot\dots\cdot a}_{m\cdot n\text{ раз}} = a^{mn}.$$

Например,

$$(2^3)^2 = 8^2 = 64 = 2^6 = 2^{3\cdot 2}.$$

Пока мы определили степени только для случая, когда показатель — натуральное число (т.е. 1, 2, 3, 4, 5, …).

Для неположительных целых степеней мы определим возведение в степень так, чтобы свойство $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ по-прежнему выполнялось.

Положим

$$X^0 = 1 \quad \text{при } X \neq 0,$$

степень $0^0$ будем считать неопределённой. Также положим

$$\frac{1}{X^n} = X^{-n}.$$

Например,

$$10^0 = 1, \quad 10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1. \quad 10^{-2} = 0{,}1^2 = \frac{1}{100} = 0{,}01,$$

$$10^{-3} = 0{,}1^3 = \frac{1}{1000} = 0{,}001,$$

$$2^0 = 1, \quad 2^{-1} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \quad 2^{-2} = \frac{1}{4} = 0{,}25, \quad 2^{-3} = \frac{1}{8} = 0{,}125.$$

Возведение в степень, в отличие от сложения и умножения, неперестановочно (некоммутативно):

$$a^n \neq n^a, \text{ например } 2^3 = 8 \neq 9 = 3^2.$$

По этой причине для возведения в степень есть две обратные операции: извлечение корня и логарифм.

$a = \sqrt[n]{a^n}$ — корень степени $n$ из $a^n$,

$n = \log_a(a^n)$ — логарифм по основанию $a$ от $a^n$.

Например,

$$8 = 2^3 \quad \Rightarrow \quad 2 = \sqrt[3]{8}, \quad 3 = \log_2 8.$$

Логарифм по основанию 10 ($\log_{10}$) обозначается как lg. Например,

$$\lg 1 = 0, \quad \lg 10 = 1, \quad \lg 100 = 2, \quad \lg 1000 = 3,$$

$$\lg 0{,}1 = -1, \quad \lg 0{,}01 = -2.$$

Условие $(a^n)^m = a^{nm}$ позволяет определить возведение в дробную степень для положительного основания. По определению корня

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Следовательно, мы можем принять, что

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}, \quad a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

Например,

$$8^{2/3} = (\sqrt[3]{8})^2 = \sqrt[3]{8^2} = 2^2 = 4.$$

**(!)** Обратите внимание, что показатель степени или корня — это число **раз** (**штук**), которое надо взять основание степени и умножить на себя. Как мы уже отмечали, «разы» («штуки») безразмерны. Мы можем возвести 3 м в степень 3, но не можем возвести 3 в степень 3 м, так как 3 м = 300 см — длина (размерная величина, которая зависит от единицы измерения), и в штуки (безразмерные единицы, которые от единицы измерения не зависят) не может быть переведена.

## Упражнения

1. $\lg 1\,000 = ?$, $\lg 1\,000\,000 = ?$
2. $? \leqslant \lg 2019 \leqslant ?$ (целые числа).
3. $\lg 0{,}001 = ?$, $\lg 0{,}000\,001 = ?$
4. $? \leqslant \lg 0{,}03245 \leqslant ?$ (целые числа).

### 1.3.1. Степени основания 10 и запись больших/маленьких чисел

Целые степени 10 имеют вид

$$\ldots, 10^{-3} = 0{,}001, \quad 10^{-2} = 0{,}01, \quad 10^{-1} = 0{,}1,$$

$$10^0 = 1, \quad 10^1 = 10, \quad 10^2 = 100, \ldots$$

Причём умножение числа на $10^n$ сводится к сдвигу десятичной запятой на $n$ цифр влево (для отрицательных $n$ — сдвиг на $|n|$ цифр вправо). Например,

$$3{,}1415 \cdot 10^2 = 3{,}1415 \cdot 100 = 314,15,$$

$$3{,}1415 \cdot 10^{-2} = 3{,}1415 \cdot 0{,}01 = 0{,}031415.$$

При умножении степеней десятки показатели складываются, при делении — вычитаются:

$$10^8 \cdot 10^3 = 10^{8+3} = 10^{11}, \quad 10^8 \cdot 10^{-3} = \frac{10^8}{10^3} = 10^{8-3} = 10^5,$$

$$10^{-8} \cdot 10^3 = 10^{-8+3} = 10^{-5}, \frac{1}{10^4} = 10^{-4}, \quad \frac{10^2}{10^4} = 10^{2-4} = 10^{-2},$$

$$10^k \cdot 10^m = 10^{k+m}, \quad \frac{10^k}{10^m} = 10^{k-m}.$$

При записи очень больших или очень маленьких чисел бывает удобно записать их в виде

«число не большое и не маленькое»$\cdot 10^n$.

**(*)** Эту форму записи называют *экспоненциальной записью.*

«Число не большое и не маленькое» обычно имеет одну цифру перед запятой (и эта цифра отлична от нуля). **(*)** Если выполнено ещё и это условие, то такую запись называют *нормализованной экспоненциальной записью.*

После запятой в экспоненциальной записи принято писать столько цифр, сколько позволяет точность используемого приближения.

Например, записав скорость света в виде 300 000 км/с (см. упражнение выше), мы нарушили эту традицию. Такая запись обычно подразумевает, что все цифры записаны точно (об округлении можно только догадываться по нулям на конце числа). Реально мы округлили число до первой цифры, и нам следовало писать $3 \cdot 10^5$ км/с. Точное значение скорости света 299 792 458 м/с. Если его округлить до первых трёх цифр, то следует писать $3{,}00 \cdot 10^5$ км/с $= 3{,}00 \cdot 10^8$ м/с. Нули после запятой не отбрасываются потому, что они указывают на точность, с которой записана величина. Также, чтобы не было соблазна откинуть нули после запятой, можно писать $300 \cdot 10^3$ км/с $= 300 \cdot 10^6$ м/с.

Используя экспоненциальную запись числа, учёные (даже если им приходится иметь дело с очень большими числами) обычно не утруждают себя запоминанием глупых названий типа «квадриллион» или «квинтиллион». Вместо этого пишется просто $10^{15}$ или $10^{18}$.

## Упражнения

Постоянная Авогадро $N_\mathrm{A} \approx 6 \cdot 10^{23}$ 1/моль (по определению 1 моль $= N_\mathrm{A}$ штук). Масса атома водорода: $m_\mathrm{H} \approx 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ г.

Постоянная Больцмана: $k_Б = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — коэффициент пересчёта из единиц температуры (Кельвин) в единицы энергии (Джоуль).

1. Какова масса 1 моля атомарного водорода (одного моля атомов)?

2. Молекула водорода состоит из двух атомов. Какова масса 1 моля молекулярного водорода $H_2$ (одного моля молекул)?

3. Какая энергия соответствует температуре 300 К (26,85 С)?

4. Какая энергия соответствует температуре поверхности Солнца $T_{\odot} \approx 6\,000$ К?

5. Какая температура соответствует энергии 1 Дж?

6. Вещество звёзд и планет состоит из нуклонов (протонов и нейтронов) и электронов. Масса нейтрона примерно равна массе атома водорода. Масса электрона примерно в 2 000 раз меньше. Число электронов равно числу протонов. Масса Земли — $6{\cdot}10^{24}$ кг. Оцените число нуклонов, образующих Землю.

### 1.3.2. Степени 10 и десятичные приставки

Иногда вместо того, чтобы писать степени 10, вводятся производные *кратные* (более крупные) и *дольные* (более мелкие) единицы измерения. Кратные и дольные единицы отличаются от базовой добавлением специальной приставки, которая означает множитель вида $10^n$. Приведём таблицу таких приставок.

| $10^n$ | приставка | сокр. | пример | встречается |
|---|---|---|---|---|
| $10^{-24}$ | йокто/yocto | и/y | иг=йоктограмм | – |
| $10^{-21}$ | зепто/zepto | з/z | зКл=зептокулон | – |
| $10^{-18}$ | атто/atto | а/a | ас=аттосекунда | + |
| $10^{-15}$ | фемто/femto | ф/f | фс=фемтосекунда | + |
| $10^{-12}$ | пико/pico | п/p | пФ=пикофарад | + |
| $10^{-9}$ | нано/nano | н/n | нм=нанометр | ++ |
| $10^{-6}$ | микро/micro | мк/$\mu$(u) | мкм=микрометр=микрон | ++ |
| $10^{-3}$ | милли/milli | м/m | мН=миллиньютон | +++ |
| $10^{-2}$ | санти/centi | с/c | см=сантиметр | +++ |
| $10^{-1}$ | деци/deci | д/d | дм=дециметр | + |
| $10^{0}$ | / | / | | |
| $10^{1}$ | дека/deca | да/da | дал=декалитр | + |
| $10^{2}$ | гекто/hecto | г/h | гПа=гектопаскаль | + |
| $10^{3}$ | кило/kilo | к/k | кН=килоньютон | +++ |
| $10^{6}$ | мега/Mega | М/M | МПа=мегапаскаль | ++ |
| $10^{9}$ | гига/Giga | Г/G | ГГц=гигагерц | ++ |
| $10^{12}$ | тера/Tera | Т/T | ТВ=теравольт | + |
| $10^{15}$ | пета/Peta | П/P | Пфлопс=петафлопс | – |
| $10^{18}$ | экса/Exa | Э/E | ЭБ=эксабайт | – |
| $10^{21}$ | зетта/Zetta | З/Z | ЗэВ=зеттаэлектронвольт | – |
| $10^{24}$ | йотта/Yotta | И/Y | ИБ=йоттабайт | – |

Таблицу не надо зубрить! Те из десятичных приставок, которые вам понадобятся, запомнятся постепенно в процессе работы.

Последний столбец показывает, насколько часто та или иная приставка встречается:
+++ — очень часто встречается, в том числе в быту (приставка «санти» встречается почти исключительно в слове сантиметр),
++ — часто встречается в науке и технике,
+ — регулярно встречается в специальной литературе,
– — встречается сравнительно редко.

Ещё раз подчеркнём, что десятичные приставки — это форма записи множителей виде $10^n$:

$$5\text{ кг} = 5\text{ килограмм} = 5\cdot\underbrace{\text{кило}}_{10^3}\cdot\text{грамм} = 5\cdot 10^3\cdot\text{г} = 5\,000\text{ г},$$

$$3\text{ мм} = 3\text{ миллиметр} = 3\cdot\underbrace{\text{милли}}_{10^{-3}}\cdot\text{метр} = 3\cdot\underbrace{10^{-3}}_{0{,}001}\cdot\text{м} = 0{,}003\text{ м}.$$

Некоторые единицы, получаемые из базовых умножением на $10^n$, могут иметь нестандартные названия и/или обозначения.

Например,

$$10^{-10}\ \text{м} = 1\ \text{Å} = 1\ \text{ангстрем} \approx \text{диаметр атома водорода},$$

иногда стандартному обозначению приписывается нестандартное название:

$$10^{-15}\ \text{м} = 1\ \text{фемтометр} = 1\ \text{фм} = 1\ \text{ферми} \sim \text{радиус протона}.$$

### Упражнения

1. Посчитайте площадь класса в единицах $\text{Å}^2$ и $\text{фм}^2$.
2. $\text{кило} \cdot \text{кило} = ?$, $\text{кило} \cdot \text{милли} = ?$, $\text{фемпто} \cdot \text{мега} = ?$, $\text{фемпто}^{-1} = ?$, $\text{кило}/\text{милли} = ?$
3. $\text{тонна} = 10^3\ \text{кг}$. $\frac{\text{килотонна}}{\text{кг}/\text{м}^3} = ?$

## 1.4. Смысл операций над единицами измерения*

### 1.4.1. Смысл [ ] и { }

Результаты операций взятия единицы измерения [ ] и числовой части { } зависят от того, какую систему единиц мы выбрали.

Если мы взяли в качестве единицы длины метр, то

$$[10\ \text{м}] = \text{м}, \quad \{10\ \text{м}\} = 10,$$

$$[10\ \text{м}^2] = \text{м}^2, \quad \{10\ \text{м}^2\} = 10.$$

Если мы взяли в качестве единицы длины сантиметр, то

$$10\ \text{м} = 10 \cdot 100 \cdot \text{см} = 1000\ \text{см},$$

$$[10\ \text{м}] = [1000\ \text{см}] = \text{см}, \quad \{10\ \text{м}\} = \{1000\ \text{см}\} = 1000.$$

$$10\ \text{м}^2 = 10 \cdot (100 \cdot \text{см})^2 = 100\,000\ \text{см}^2,$$

$$[10\ \text{м}^2] = [100\,000\ \text{см}^2] = \text{см}^2, \quad \{10\ \text{м}\} = \{100\,000\ \text{см}^2\} = 100\,000.$$

В некоторых случаях мы не беспокоимся о явном указании системы единиц, если система единиц легко угадывается по используемым единицам измерения.

**(!)** Когда мы выбрали систему единиц, все расстояния имеют одинаковую размерность [длина] вне зависимости от того, приведены ли они в метрах, сантиметрах, милях или попугаях! Аналогично все площади имеют размерность [длина]$^2$, все скорости [длина]/[время] и т.д.

Для того чтобы говорить об размерностях не привязываясь к конкретным единицам измерения, можно ввести следующие обозначения:

$$\begin{aligned}[\text{длина}] &= L,\\ [\text{время}] &= T,\\ [\text{масса}] &= M.\end{aligned}$$

Эти три основные размерности есть практически во всех системах единиц. По мере необходимости их дополняют другими символами (с ними мы познакомимся при изучении Международной системы едини СИ).

### 1.4.2. Можно ли складывать разные единицы с одинаковой размерностью?

Выше мы столкнулись с тем, что разные по смыслу единицы могут иметь одинаковую размерность.

$$\left[\frac{\text{оборот}}{\text{время}}\right] = \left[\frac{\text{угол}}{\text{время}}\right] = \frac{1}{[\text{время}]}.$$

Такие единицы как яблоко и слива можно считать безразмерными и т.п.

Можно ли такие величины, выраженные в разных единица с одинаковой размерностью, складывать/вычитать, сравнивать?

**Можно, но только осторожно!**

Рассмотрим пример сложения числа оборотов с углом поворота. Тут возможны следующие варианты.

- Складывать нельзя.
- Перед тем, как складывать, надо привести всё к одинаковым (безразмерным) единицам с учётом того, что

$$1 \text{ оборот} = \text{поворот на полный угол} = 2\pi \text{ радиан} = 360.$$

- Можно складывать без преобразования единиц, например, если число оборотов превращается в угол поворота при помощи ременной передачи.

Аналогично **если мы считаем, что число яблок и число слив безразмерны**, но при этом используем яблоко и сливу в качестве единиц измерения

$$[\text{яблоко}] = [\text{слива}] = 1.$$

- В задачах, где мы ходим поделить фрукты так, что каждому досталось одинаковое число каждого фрукта складывать яблоки и сливы бессмысленно.
- В задачах, где мы хотим, чтобы каждому досталось равноценное число фруктов, мы можем привести всё к одинаковым единицам измерения (рублям или единицам удовольствия).
- В задачах, где яблоки и сливы выступают в роли счётных палочек, их можно складывать без преобразования единиц.

Какой вариант выбрать в той или иной задаче?

**Тут теория размерностей не поможет, тут *думать надо.***

### 1.4.3. Какой смысл у производных единиц?

В некоторых случаях мы легко угадываем смысл новой единицы измерения, полученной в результате умножения, деления или возведения в степень известных единиц, но иногда получаются такие единицы, по поводу которых не ясно, есть ли у них вообще смысл. Всегда ли можно выполнять соответствующие действия?

**Можно! Теория размерностей позволяет умножать, делить и возводить в безразмерные степени любые единицы в любых комбинациях.**

**(!)** В промежуточных вычислениях размерность может быть любой, поскольку вы всегда можете умножить, поделить или возвести в одинаковую степень обе части уравнения. В ответе размерность должна соответствовать смыслу ответа.

Каков смысл получившихся в результате умножения, деления и возведения в степень единиц?

**Теория размерностей поможет только выразить всё через основные единицы, а дальше *надо думать*.**

## 1.5. Именованные числа**

Если вы не знаете, что такое именованные числа, то вы ничего не потеряли и можете пропустить данный раздел. Если же вы сталкивались с этой темой, то здесь вы найдёте, как соотнести её с теорией размерности.

Именованные числа — это такая тема, содержащаяся в некоторых школьных учебниках математики. Эта тема представляет собой по существу сильно урезанное и устаревшее изложение некоторых частных случаев теории размерности, порой с грубыми ошибками. При этом используются специфические термины, которые, по всей видимости, практически неизвестны за пределами школьной математики.

Иногда высказывается мнение, что именованные числа — инновация последних десятилетий, но это не так. Хотя эта тема отсутствовала в позднесоветских учебниках, её первое появление восходит к дореволюционным временам. В частности, она присутствует в дореволюционной «Арифметике» А. П. Киселёва[2].

[2]Киселёв А. П. Систематический курс арифметики. Репринтное издание к 150-летию со дня рождения А. П. Киселёва — Орёл: Издательство Орловского государственного университета, 2002. С. 264. `http://mexalib.com/`

Вероятно, к Киселёву с теми или иными сокращениями или дополнениями восходят и современные изложения именованных чисел.

Приведём перевод терминов теории именованных чисел по Киселёву на современный язык с использованием теории размерности:

- *Именованное число* — размерная величина.

- *Однородные именованные числа* — размерные величины одинаковой размерности.

- *Отвлечённое число* — безразмерная величина.

- *Множимое* — первый множитель (размерный или безразмерный).

- *Множитель* — второй множитель (безразмерный).

- *Простое именованное число*[3] — размерная величина, записанная через одну единицу измерения, например 5 кг.

- *Составное именованное число*[4] — размерная величина, записанная через несколько единиц измерения, например, 5 кг 200 г (имеется в виду 5 кг + 200 г).

- Единица А имеет *низший разряд, чем* единица Б (единица Б имеет *высший разряд, чем* единица А) — единицы А и Б имеют одинаковую размерность, причём А $<$ Б.

---

`view/28748` (Воспроизводится издание А. Киселёвъ. Систематическiй курсъ ариѳметики. Москва: Товарищество «Печатня С. П. Яковлева», 1912).

[3] Неудачный термин из-за возможной путаницы с теорией чисел, где простым числом называется, натуральное число, которое больше 1 и делится нацело только на себя и 1.

[4] Неудачный термин из-за возможной путаницы с теорией чисел, где составным числом называется натуральное число, которое кроме себя и 1 имеет другие натуральные делители.

- *Раздробление* — выражение размерного числа через «единицу низшего разряда». В большинстве примеров рассматривается переход от нескольких единиц измерения («составного именованного числа») к одной единице измерения («простому именованному числу»).

- *Превращение* — выражение размерного числа через одну «единицу высшего разряда» или несколько таких единиц. В большинстве примеров рассматривается переход от одной единицы измерения («простого именованного числа») к нескольким единицам измерения («составному именованному числу»).

По Киселёву над именованными числами допускаются *только* следующие операции:

- Сложение/вычитание однородных именованных чисел — обычные сложение/вычитание размерных чисел *одинаковой размерности.*

- Сравнение однородных именованных чисел — обычное сравнение (больше, меньше или равно) размерных чисел *одинаковой размерности.*

- Умножение именованного числа на отвлечённое — умножение размерной величины на безразмерную. По странной традиции подразумевается, что размерным обязательно должен быть первый множитель, что некоторые учителя начальной школы до сих пор вводят как правило.[5]

- Деление именованного числа на однородное именованное с получением отвлечённого — деление двух величин одинаковой размерности с получением безразмерного результата.

[5] Не надо учить так, что потом придётся переучивать. Теория размерности позволяет перемножать и делить величины любой размерности в любом порядке. Кроме того, по традиции, принятой в физико-математической литературе, безразмерный постоянный множитель в произведении обычно ставят первым: $L = 2\pi R$, а безразмерный функциональный множитель — последним: $x = a\,\sin(\omega t)$.

- Деление именованного числа на отвлечённое с получением именованного — деление размерного числа на безразмерное с получением размерного.

Также у Киселёва тема именованных чисел искусственно объединена с исчислением времени с использованием *календарных* лет и месяцев, т.е. *единиц времени переменной длины*. Такое объединение сильно усложняет изложение и делает невозможным интерпретацию «именованного числа» как размерной величины.

Некоторые современные авторы ограничиваются именованными числами по Киселёву с добавлением (тоже по Киселёву) исчисления времени.[6]

Теория именованных чисел по Киселёву очень ограничена. Вероятно, она была ориентирована на дореволюционные задачи о купцах, торгующих селёдкой и апельсинами, но даже для таких задач была бы полезна возможность делить и умножать размерные величины, чтобы, например, представить цену в единицах вида $\frac{\text{копейка}}{\text{селёдка}}$ = «копеек за селёдку». Также возможность более свободного умножения и деления размерных величин необходима для геометрии, чтобы связать между собой линейные размеры, площади и объёмы.

По этой причине другие современные авторы расширяют теорию именованных чисел, позволяя умножать и делить размерные величины, но почему-то только *в некоторых случаях*. Набор таких случаев, вероятно, связан с личными предпочтениями и предрассудками авторов. Приведём примеры таких предрассудков[7] с пояснениями:

- «Бессмысленно, например, умножать гектары на часы или делить литры на метры.»
  - Если на поверхности происходит какой-то процесс, с результатом пропорциональным площади и времени, например, рост растений, или химическая реакция на

[6]Тонких А. П. Именование числа в курсе математики факультетов подготовки учителей начальных классов. `http://school2100.com/upload/iblock/842/842a5abe1c9dfc8098802e2a80772785.pdf`

[7]`https://weburok.com/2547585`

границе раздела сред, то произведение площади на время вполне осмысленно и даёт меру полученного результата.

- Деление литров на метры, т.е. объёма на длину даёт площадь.

- «Имеет смысл умножение массы на расстояние, например, 150 т на 8 км, т.к. их произведение есть производная величина, характеризующая выполненную машиной работу.»

  - Нельзя обманывать детей. Работа — это произведение силы (а вовсе не массы!) на расстояние. Потом в курсе физики эту ошибку придётся выкорчёвывать.
  - Приведённые в примере тоннокилометры (тонны умножить на километры) — это не работа, а *объём грузоперевозок*.

Из задач на именованные числа рассмотрим только примеры перевода «составных именованных чисел» в «простые именованные числа» и обратно.

В записи величины через несколько единиц измерения пропущены не только знаки умножения, но и знаки сложения между вкладом разных единиц:

$$\begin{gathered}10\text{ км }234\text{ м }52{,}3\text{ см} = 10\cdot\text{км} + 234\cdot\text{м} + 52{,}3\cdot\text{см} = \\ = 10\cdot 1000\cdot\text{м} + 234\cdot\text{м} + 52{,}3\cdot 0{,}01\cdot\text{м} = 10\,234{,}523\text{ м}.\end{gathered}$$

Очень удобно переходить в одну и другую сторону, если все единицы получаются друг из друга умножением и делением на степени 10:

$$10\,234{,}523\text{ м} = \underbrace{10}_{\text{км}}\underbrace{234}_{\text{м}},\underbrace{52}_{\text{см}}\underbrace{3}_{\text{мм}}\text{ м} = 10\,\text{км}\ 234\,\text{м}\ 52\,\text{см}\ 3\,\text{мм}.$$

Чаще всего используются единицы измерения, получающиеся из основной путём умножения и деления на степени $1000 = 10^3$.

В этом случае десятичные разряды группируются по 3:

$$123\,456\,789{,}012\,345\text{ г} = \underbrace{123}_{\text{т}}\underbrace{456}_{\text{кг}}\underbrace{789}_{\text{г}},\underbrace{012}_{\text{мг}}\underbrace{345}_{\text{мкг}}\text{ г} =$$

$$= \underbrace{123}_{\text{т}}\underbrace{456}_{\text{кг}},\underbrace{789}_{\text{г}}\underbrace{012}_{\text{мг}}\underbrace{345}_{\text{мкг}}\text{ кг} = 123\text{ т }456\text{ кг }789\text{ г }12\text{ мг }345\text{ мкг.}$$

Такой перевод в обе стороны легко делать в уме, поэтому в науке и технике «составные именованные числа», т.е. размерные величины, выраженные через несколько единиц измерения, практически не используются.

Обратите внимание, в рассмотренном примере, в старшем разряде миллиграммов при таком преобразовании «теряется» ноль: вместо 012 мг мы пишем 12 мг. При преобразовании в обратную строну этот ноль надо вставить, ориентируясь на число разрядов отведённых под миллиграммы. Это недостаток записи величины через несколько единиц измерения, даже если все единицы получаются друг из друга умножением и делением на степени 10. Запись величины через одну единицу измерения лишена этого недостатка.

### 1.5.1. Советы учителю***

Если учителю приходится работать по учебнику, в котором присутствуют именованные числа, то ему можно дать следующие советы:

- Если в именованные числа включено исчисление времени через календарные годы и месяцы, выделить исчисление времени в отдельную тему.
- Заменить теорию именованных чисел на теорию размерности.
  - Разнобой в изложении именованных чисел в разных источниках вполне позволяет считать, что теория размерностей — это наиболее полный и современный вариант теории именованных чисел, а значит, такая замена не будет нарушением программы.

  – Теория размерностей более логически последовательна и не содержит искусственных ограничений теории именованных чисел, что позволяет её быстрее освоить.
  – Введение теории размерностей можно подать начальству как «инновационную педагогику» (и не важно, что этой теории более ста лет).

- Использовать терминологию теории размерностей. Эта терминология потом пригодится в физике и математике.
- Если вам спущена контрольная работа, использующая терминологию именованных чисел, то перед ней можно дать словарик, переводящий именованные числа на язык теории размерности.

# Глава 2

# Единицы измерения в информатике

## 2.1. Двоичная система счисления (л)

В вычислительной технике на аппаратном уровне обычно реализована двоичная система счисления. Числа записываются с помощью двух цифр 0 и 1, каждый разряд соответствует коэффициенту при некоторой степени двойки[1].

Это связано с тем, что двоичные цифры легко реализовать в электронных схемах как состояния выключателей: 1 — включено, ток течёт, 0 — выключено, тока нет. Одна такая двоичная ячейка (которая может находиться в двух состояниях) образует 1 бит. 8 двоичных ячеек (8 бит) образуют 1 байт. 1 байт может находиться в $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 256$ состояниях.

В десятичной системе счисления цифры — коэффициенты

[1] Интересно исключение из общего правила. В 1959 г. при участии ведущих отечественных математиков в МГУ была разработана ЭВМ Сетунь, использовавшая уравновешенную троичную систему счисления (с цифрами $-1, 0, 1$) и троичную логику. Вместо двоичных ячеек (битов) Сетунь использовала троичные ячейки (триты). Казанский завод вычислительных машин выпустил серию из 46 компьютеров Сетунь (по тем временам довольно много). До сих пор у ЭВМ Сетунь есть поклонники и фан-клубы (см. `http://trinary.ru/`), которые разрабатывают троичную логику и создают эмуляторы ЭВМ Сетунь.

разложения числа по степеням десятки:

$$\begin{aligned} 7256{,}401 &= 7\cdot 10^3 + 2\cdot 10^2 + 5\cdot 10^1 + 6\cdot 10^0 + 4\cdot 10^{-1} + \\ &\quad + 0\cdot 10^{-2} + 1\cdot 10^{-3} = \\ &= 7\cdot 1000 + 2\cdot 100 + 5\cdot 10 + 6\cdot 1 + 4\cdot 0{,}1 + \\ &\quad + 0\cdot 0{,}01 + 1\cdot 0{,}001. \end{aligned}$$

В двоичной системе счисления (будем помечать двоичные числа индексом 2, так $10_2 = 2^1 = 2$) цифры — коэффициенты разложения числа по степеням двойки:

$$\begin{aligned} 1101{,}011_2 &= 1\cdot 10_2^3 + 1\cdot 10_2^2 + 0\cdot 10_2^1 + 1\cdot 10_2^0 + 0\cdot 10_2^{-1} + \\ &\quad + 1\cdot 10_2^{-2} + 1\cdot 10_2^{-3} = \\ &= 1\cdot \underbrace{1000_2}_{8} + 1\cdot \underbrace{100_2}_{4} + 0\cdot \underbrace{10_2}_{2} + 1\cdot 1 + 0\cdot \underbrace{0{,}1_2}_{\frac{1}{2}} + \\ &\quad + 1\cdot \underbrace{0{,}01_2}_{\frac{1}{4}} + 1\cdot \underbrace{0{,}001_2}_{\frac{1}{8}} = \\ &= 8 + 4 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 13\frac{3}{8} = 13{,}375. \end{aligned}$$

Нумерация байт в памяти компьютера также осуществляется двоичными числами, поэтому память оказывается удобно выделять порциями по $2^n$ байт. В двоичной системе счисления это круглые числа $2^n = 1\underbrace{0\cdots 0}_{n}{}_2$.

## 2.2. Степени 2 и двоичные приставки

> У начинающего программиста в килобайте 1000 байтов, а у «законченного» программиста в килограмме 1024 грамма.
>
> Старый программистский анекдот.

Как и для степеней 10, для степеней 2 вводятся производные *кратные* двоичные приставки, которые означают множитель вида $2^n = 10_2^n$. Приведём таблицу таких приставок (в последнем столбце приведена ближайшая десятичная приставка).

| $2^n$ | приставка | сокр. | пример | бл. десятичная |
|---|---|---|---|---|
| $2^{10} = 1\,024$ | киби/kibi | Ки/Ki | кибибайт=КиБ | кило = к = $10^3$ |
| $2^{20} = 1\,048\,576$ | меби/mebi | Ми/Mi | мебибайт=МиБ | мега = М = $10^6$ |
| $2^{30} = 1\,073\,741\,824$ | гиби/gibi | Ги/Gi | гибибайт=ГиБ | гига = Г = $10^9$ |
| $2^{40} = 1\,099\,511\,627\,776$ | теби/tebi | Ти/Ti | тибибайт=ТиБ | тера = Т = $10^{12}$ |
| $2^{50} = 1\,125\,899\,906\,842\,624$ | пеби/pebi | Пи/Pi | пебибайт=ПиБ | пета = П = $10^{15}$ |
| $2^{60} = 1\,152\,921\,504\,606\,846\,976$ | эксби/exbi | Эи/Ei | эксбибайт=ЭиБ | экса = Э = $10^{18}$ |
| $2^{70} = 1\,180\,591\,620\,717\,411\,303\,424$ | зеби/zebi | Зи/Zi | зебибайт=ЗиБ | зетта = З = $10^{21}$ |
| $2^{80} = 1\,208\,925\,819\,614\,629\,174\,706\,176$ | йоби/yobi | Йи/Yi | йобибайт=ЙиБ | йотта = И = $10^{24}$ |

Эти приставки были введены в 1999 году (последние две в 2005 году) Международной электротехнической комиссией.

Приказом Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии от 9 октября 2015 года №1508-ст «О введении в действие межгосударственного стандарта»[2] введён в действие с 1 октября 2016 года в качестве национального стандарта Российской Федерации ГОСТ IEC 60027-2-2015 «Обозначения буквенные, применяемые в электротехнике. Часть 2. Электросвязь и электроника»[3], идентичный международному стандарту IEC 60027-2:2005 «Обозначения буквенные, применяемые в электротехнике. Часть 2. Электросвязь и электроника».

В 1999 году вычислительная техника имела уже давние традиции, поэтому в использовании двоичных приставок до сих пор наблюдается беспорядок: часто вместо двоичной приставки используется ближайшая десятичная (как было принято до 1999 года).

Самый экзотический вариант — двоично-десятичный «мегабайт», который равен $10^3 \cdot 2^{10}$ Б $= 1\,024\,000$ Б и который использовался для записи объёма 3-дюймовой дискеты объёмом 1,44 «мегабайт».

Путаница усугубляется коммерческим интересом ряда производителей, которые используют её для преувеличения в глазах покупателя объёма продаваемого носителя информации. Так если вы покупаете флешку заявленным объёмом 64 гигабайт то, поскольку $64 = 2^6$ — круглое двоичное число, то вы ожидаете, что под гигабайтами подразумеваются гибибайты. Однако производитель понимает гига $= 10^9$, и объём флешки составляет 59,6

[2] `https://base.garant.ru/71264062/#ixzz5bUOYa5Jm`

[3] `http://files.stroyinf.ru/Data2/1/4293758/4293758971.pdf#page=68`

гибибайт. В 2004 году по этому поводу в США даже состоялось судебное разбирательство.

## 2.3. Единицы информации и энтропии

### 2.3.1. Дробное число бит

Количество информации можно задать числом двоичных ячеек (бит), которое достаточно для задания данной информации. Может показаться, что бит — минимальная единица информации, а количество информации в битах всегда целое, но это не так.

$n$ бит информации позволяют сделать выбор из $N = 2^n$ равнозначных вариантов. Так что

$$n = \log_2 N \text{ бит}.$$

Целое число получается, только если $N$ — степень двойки.

Например, для выбора из 3 равноценных вариантов нужно

$$\log_2 3 \approx 1{,}585 \text{ бит}.$$

Но что значит дробное число двоичных ячеек?

Пусть нам надо выбрать из 3 равноценных вариантов 5 раз. Даёт $3{\cdot}3{\cdot}3{\cdot}3{\cdot}3 = 3^5 = 243$ равноценных комбинации. $243 < 256 = 2^8$, так что для того, чтобы совершить такую пятёрку выборов достаточно 8 бит информации.

На один акт выбора приходится

$$\frac{8}{5} = 1{,}6 \text{ бит} \gtrapprox 1{,}585 \text{ бит}.$$

А точное количество информации $\log_2 3$ — это минимум, ниже которого информация на один акт выбора не может опуститься, сколь бы длинную серию мы не брали.

### 2.3.2. Триты и наты

Мы можем рассматривать троичные ячейки (триты), тогда

$$n = \log_3 N \text{ трит.}$$

Вспоминаем свойства возведения в степень:

$$N = b^m, \qquad b = a^n, \quad \Rightarrow N = (a^n)^m = a^{nm}.$$

Получаем

$$\log_b N = m = \frac{mn}{n} = \frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

Отсюда видно, что количество информации, заданное через логарифм по любому основанию, пропорционально количеству информации в битах, т.е. это то же самое количество информации, заданное в других единицах измерения.

В частности, коэффициент пересчёта тритов в биты:

$$\log_3 N = \log_3 2{\cdot}\log_2 N \;\Rightarrow\; 1\text{ трит} = \frac{1\text{ бит}}{\log_3 2} = \log_2 3\text{ бит} \approx 1{,}585\text{ бит.}$$

Математики и физики любят *натуральные логарифмы* (обозначаются ln), т.е. логарифмы по основанию

$$\mathrm{e} = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot n}+\dots \approx 2{,}718281828459.$$

Единица информации, выраженной через натуральный логарифм, — нат:

$$I = \ln N \text{ нат} = \log_{\mathrm{e}} N \text{ нат},$$

$$1\text{ нат} = \log_2 \mathrm{e}\text{ бит} = \frac{1}{\ln 2}\text{ бит} \approx 1{,}442695\text{ бит.}$$

Значение логарифма — степень, в которую надо возвести основание, т.е. сколько **раз** надо умножить основание на себя. Так что значение логарифма по данному основанию не зависит от выбора единиц измерения, т.е. значение логарифма безразмерно. Безразмерно и количество информации. Как и для других безразмерных величин, для количества информации единица измерения — напоминание того, как мы определили количество информации (по какому основанию взяли логарифм).

### 2.3.3. Может ли информация быть меньше бита?

Мы рассмотрели количество информации при выборе из $N$ равнозначных вариантов. При этом вероятность выбора каждого варианта — $p_i = \frac{1}{N}$, $(i = 1, 2, \dots, N)$. С учётом того, что $\sum_{i=1}^{N} p_i = N \cdot \frac{1}{N} = 1$, получаем

$$n = \log_2 N = -\log_2 \frac{1}{N} = -\log_2 p_i = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 p_i.$$

Последнее выражение мы примем за определение количества информации в случае, когда выбор осуществляется между вариантами с разными вероятностями $p_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \dots, N)$, $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$ :

$$n = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 p_i.$$

Можно считать, что если нам выпал исход номер $i$, то мы получили информацию $n_i = -\log_2 p_i$, а общая формула даёт среднюю информацию, которую мы получаем на один акт выбора:

$$n = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 p_i = \sum_{i=1}^{N} p_i n_i.$$

Если выбор осуществляется из двух неравноценных вариантов, вероятности которых $p$ и $1-p$, то один акт выбора даёт в среднем информацию

$$-p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p),$$

что при $p \neq \frac{1}{2}$ составляет меньше 1 бита, например, при $p = \frac{1}{4}$ получаем $n \approx 0{,}811$ бит, а при $p = 0{,}01$ получаем $n \approx 0{,}081$ бит на один акт выбора.

Как в случае выбора из числа вариантов, отличающегося от степени двойки, мы можем объединить несколько актов выбора и описать, как именно тратить на один выбор в среднем меньше бита информации.

Например, рассмотрим выбор из двух вариантов с вероятностями 0,01 (орёл) и 0,99 (решка). Объединим акты выбора в серии по 8. Если орёл не встретился ни разу, то передаём 0, если орёл выпал хотя бы раз, то передаём 1, а потом 8 бит задающих последовательность орлов и решек.

Вероятность того, что орлов не будет (кодируется в один бит)

$$0{,}99^8 \approx 0{,}922.$$

Вероятность того, что будет хотя бы один орёл (кодируется в 9 бит)

$$1 - 0{,}99^8 \approx 0{,}078.$$

Таким образом, в среднем на кодирование 8 актов выбора нам понадобится

$$1 \text{ бит} \cdot 0{,}922 + 9 \text{ бит} \cdot 0{,}078 = 1{,}62 \text{ бит}.$$

В среднем на 1 акт выбора получаем

$$\frac{1{,}62 \text{ бит}}{8} \approx 0{,}2 \text{ бит} > 0{,}081 \text{ бит}.$$

Данная оценка достаточно далека от предельной оценки в 0,081 бит, поскольку мы выбрали не оптимальную длину серии и не оптимальный способ кодирования, но всё равно на один акт выбора тратится в среднем существенно меньше, чем 1 бит.

На подобных идеях основаны алгоритмы сжатия информации.

### 2.3.4. Информация и энтропия

В статистической физике сложная система молекул описывается с помощью небольшого количества усреднённых величин, таких как объём, давление, температура. Знание этих величин не позволяет восстановить точное микросостояние системы, т.е. положение и скорость каждой молекулы. Недостающее знание о микросостоянии системы описывается с помощью такой величины, как *энтропия*.

Если система может с равной вероятностью находиться в одном из $N$ состояний (например, если задана общая энергия системы, в статфизике это называется микроканоническим распределением), то энтропия имеет вид

$$S = k_{\text{Б}} \ln N.$$

Если система находится в состоянии $i$ с вероятностью $p_i$ ($\sum_i p_i = 1$), то

$$S = -k_{\text{Б}} \sum_i p_i \ln p_i.$$

Коэффициент $k_{\text{Б}}$ называется постоянной Больцмана.

Мы видим, что энтропия — это информация, которой нам не хватает для того, чтобы узнать микросостояние системы[4], но измеренная в специальных единицах. Постоянная Больцмана — коэффициент пересчёта из единиц информации (натов) в единицы энтропии. Часто постоянную Больцмана удобно положить единицей.

Количество информации можно определять по-разному в зависимости от того, в каких условиях находится система и с чьей точки зрения эта информация определяется. Аналогично существуют разные энтропии. Из физики термин энтропия проник и в теорию информации и в литературе можно найти, например, энтропию канала передачи информации или энтропию компьютерного файла.

[4]Казалось бы, чтобы задать координаты и скорости даже одной молекулы нам надо задать бесконечное число цифр, т.е. бесконечное количество информации. Однако ситуацию спасает соотношение неопределённостей из квантовой механики: произведение неопределённостей координаты и импульса не может быть больше, чем половина приведённой постоянной Планка: $\delta x \cdot \delta p_x \geqslant \frac{\hbar}{2}$. Благодаря этому микросостояние системы может быть описано конечным (хотя и очень большим) количеством информации.

# Глава 3

# Переосмысляем теорию размерности

## 3.1. Размерность

### 3.1.1. Обозначение размерности

Одинаковые формулы могут использоваться для вычисления с использованием разных единиц измерения. Например, мы можем вычислять скорость как $v = L/t$, деля метры на секунды, или километры на часы (но в любом случае единицы длины делятся на единицы времени), или вычислять площадь прямоугольника $S = ab$, умножая метры на метры, или километры на километры (но в любом случае единицы длины возводятся в квадрат).

Для того чтобы не привязываться к конкретному выбору системы единиц, вводят некоторые абстрактные масштабы (единицы) различных величин — *размерности*. (Тем более что в конкретных задачах могут появляться свои, характерные для данной задачи, масштабы.) Например, принято обозначать

$L$ — размерность (какая-то единица или масштаб) длины,
$T$ — размерность (какая-то единица или масштаб) времени,
$M$ — размерность (какая-то единица или масштаб) массы,
$L/T$ — размерность (какая-то единица или масштаб) скорости,
$L^2$ — размерность (какая-то единица или масштаб) площади.

Как видно из приведённых примеров, некоторые размерности выбираются как основные (обозначаются одной буквой), а остальные (производные) размерности получаются как комбинации основных.

### Упражнения

Определите размерности следующих величин.

1. Ускорение (изменение скорости **за** единицу времени).
2. Сила (масса · ускорение).
3. Энергия (сила · смещение).
4. Импульс (масса · скорость).
5. Давление (сила **на** единицу площади).

### 3.1.2. Интегрирование и дифференцирование**

С точки зрения теории размерности дифференцирование аналогично делению функции на аргумент, а интегрирование — умножению. Введённые Лейбницем обозначения эту аналогию наглядно показывают:

$$\left[\frac{df}{dx}\right] = \left[\lim_{dx\to 0}\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}\right] = \frac{[f]}{[x]}.$$

$$\left[\int\limits_a^b f(x)\,dx\right] = \left[\lim_{dx\to 0}\sum_{n=1}^{\frac{b-a}{dx}} f(x+n\cdot dx)\cdot dx\right] = [f]\cdot[x].$$

**(!)** Если не писать под интегралом дифференциал, то легко ошибиться в размерности.

**(!)** Взятие предела не влияет на размерность.

Восходящие к Ньютону обозначения производных точками и штрихами могут запутать: точка и штрих оказываются размерными (не величинами, а *дифференциальными операторами*).

$$[\dot f] = \left[\tfrac{df}{dt}\right] = \tfrac{[f]}{[t]}, \quad \left[\tfrac{d}{dt}\right] = [\dot{(\ )}] = \tfrac{1}{[t]},$$

$$[f'] = \left[\tfrac{df}{dx}\right] = \tfrac{[f]}{[x]}, \quad \left[\tfrac{d}{dx}\right] = [(\ )'] = \tfrac{1}{[x]}.$$

Аналогично в многомерном математическом анализе размерными оказываются такие дифференциальные операторы как градиент ($\mathrm{grad}_\alpha f = \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}$), дивергенция ($\mathrm{div}\,\mathbf{E} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\alpha}$) и ротор ($\mathrm{rot}_x \mathbf{E} = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}$, остальные компоненты получаются циклическими перестановками $x \to y \to z \to x$)[1]. Поскольку все они сводятся к дифференцированию по координате, для них размерность — обратная к размерности координаты:

$$[\boldsymbol{\nabla}] = [\mathrm{grad}\,] = [\mathrm{div}\,] = [\mathrm{rot}\,] = [\tfrac{\partial}{\partial x}] = [x]^{-1}.$$

## Упражнения

1. Оператор Лапласа определяется как $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, = \boldsymbol{\nabla}^2$. $[\triangle] = ?$
2. Волновое уравнение имеет вид $c^2 \triangle \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$. $[c] = ?$
3. $\int \delta(x)\, dx = 1$. $[\delta(x)] = ?$

### 3.1.3. Проверка размерности

Как мы видим, при вычислении числа по какой-нибудь формуле единица измерения должна вычисляться по той же формуле! Это позволяет осуществить *проверку размерности* — проверку того, что единица измерения ответа такая, какой она должна быть.

Если в формуле складывается длина (метры) с площадью (метры квадратные), то эта формула вообще не имеет смысла. Почему? Перейдём от метров к сантиметрам:

$$1 \text{ м} = 100 \text{ см}, \qquad 1 \text{ м}^2 = 10\,000 \text{ см}^2.$$

Если вы сложили метр с квадратным метром, то вы не будете знать, на что умножить получившееся число, если вас попросят перейти к сантиметрам.

Некоторые аргументы математических функций обязательно должны быть безразмерными или выражены в специальных единицах. Мы это уже видели на двух примерах:

---

[1] Формулы даны в декартовых координатах. $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $\nabla_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$.

- всегда безразмерен показатель степени, безразмерен угол (в радианах),

- угол является аргументом всех тригонометрических функций, если угол выражен в радианах, то он безразмерен, если угол выражен в градусах, то он должен иметь размерность градус.

**(!)** К сожалению, часто путаницу в размерностях допускают школьные учебники. Например, в школьном учебнике физики может встретиться задача с условием наподобие такого:

«Пешеход движется по закону $x = 2\ \text{м} \cdot t$, где $t$ — значение времени в секундах.»

При проверке размерности получаем $[x] = \text{м} \neq [2\ \text{м}] \cdot [t] = \text{м} \cdot \text{с}$, т.е. что формула является ошибочной. Понятно, что на самом деле автор имел в виду $x = 2\ \text{м} \cdot \{t\}$ (числовое значение времени $\{t\}$ безразмерно). Однако такое выражение зависит от выбора секунды как единицы измерения времени. Кроме того, обозначение $\{t\}$ обычно неизвестно учащемуся (хотя, по существу, аналогичный смысл подразумевается в словах «*значение* времени в секундах»). Правильная запись данной формулы — $x = 5\ \text{м/с} \cdot t$. Если подставить в такую формулу время в секундах, то секунда сократится и получится расстояние в метрах. Например,

$$x = 2\ \text{м/с} \cdot 3\ \text{с} = 6\ \text{м},$$

а если подставить время в других единицах, то всё равно получится правильный ответ, *если учесть отношение единиц времени.* Например,

$$x = 2\ \text{м/с} \cdot 3\ \text{мин} = 6\ \text{м} \cdot \frac{\text{мин}}{\text{с}} = 6\ \text{м} \cdot \frac{60\ \text{с}}{\text{с}} = 6\ \text{м} \cdot 60 = 360\ \text{м}.$$

Если вам надо определить размерность какой-либо физической величины, то пользоваться можно любой (правильной) формулой. Например, вы можете определить размерность энергии из формулы для кинетической энергии:

$$E = \frac{mv^2}{2}, \qquad [E] = [m][v]^2 = \text{кг} \cdot \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$$

или из формулы для потенциальной энергии (в однородном поле тяготения):

$$E = mgh, \qquad [E] = [m][g][h] = \text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2},$$

результат окажется одинаков.

*Исходя из соображений размерности*, ответ можно не только проверить, но и угадать. Если вы подберёте из условий задачи такую комбинацию, которая будет измеряться в тех же единицах, что и ответ, и покажете, что такая комбинация единственна (с точностью до произвольного безразмерного множителя), то она и будет ответом (с точностью до произвольного безразмерного множителя). Как это делать, описано далее в разделе 3.2.1 «Анализ размерности».

## Упражнения

Проверьте размерность для перечисленных формул. $E$ — энергия, $F$ — сила, $v$ — скорость, $g$ — ускорение свободного падения, $R$ и $L$ — какие-то расстояния, $k_\text{Б}$ — постоянная Больцмана — энергия на единицу температуры ($[k_\text{Б}] = \text{Дж/К}$), $T$ — температура.

1. $F = mg + mv$.
2. $F = mg \sin(L^2/R)$.
3. $E = mv^2 - \sin(L/R)$.
4. $E = \frac{3}{2}k_\text{Б}T + mgh$.

### 3.1.4. Произвольность выбора единиц измерения

Как уже неоднократно отмечалось, единицы измерения можно вводить по-разному. Длину можно мерить в метрах, футах или попугаях, но это всё равно будет та же самая длина:

$$1 \text{ удав} = 38 \text{ попугай} = 7{,}6 \text{ м} = 24{,}9 \text{ фут}.$$

Мы можем мерить площадь не в квадратных метрах, а в круглых метрах[2]: круглый метр — это площадь круга радиусом 1 метр. В квадратных метрах площади прямоугольника и круга имеют вид

$$S_{\square} = ab, \qquad S_o = \pi R^2.$$

В круглых метрах формула для площади круга упрощается, зато для площади прямоугольника — усложняется:

$$S_{\square} = \frac{1}{\pi} ab, \qquad S_o = R^2.$$

Вообще, по сравнению с обычными формулами геометрии в *любой* формуле для площади, при измерении её в круглых метрах, появляется множитель $\frac{1}{\pi}$[3].

В древности люди не понимали, как массу зерна, массу железа, массу серебра и массу алмазов можно мерить в одинаковых единицах. Эта непоследовательность усложняла жизнь, но мы не можем считать её ошибкой. Это было вполне в духе начала данной книги:

$$\text{яблоко} \neq \text{слива}, \qquad \text{грамм серебра} \neq \text{грамм пшеницы}.$$

Просто принято было считать, что массы серебра и зерна — это разные физические величины, которые нельзя складывать или сравнивать. Для каждой такой физической величины есть своя базовая единица, коэффициенты пересчёта которых — «фундаментальные» константы (фундаментальные в данной системе единиц, но их численное значение связано с произвольным выбором единиц измерения).

---

[2] Никто, разумеется, круглыми метрами не пользуется, но такая единица измерения вполне возможна.

[3] Шуточный пример с круглым метром иллюстрирует, как коэффициенты в формулах могут не только меняться, но и появляться и исчезать в зависимости от выбора системы единиц. Например, закон Кулона, задающий силу между двумя электрическими зарядами $q_1$ и $q_2$, находящимися на расстоянии $r$ друг от друга, в системах СИ и СГС выглядит различно:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}, \qquad F = \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

До сих пор (особенно в англоговорящих странах и на международных рынках, находящихся под их влиянием) используется ряд специальных архаичных единиц измерения для отдельных веществ:

| величина | вещество | единица | значение |
|---|---|---|---|
| объём | нефть | американский нефтяной баррель | 158,988 л |
| масса | драг.металлы | тройская унция | 31,1034768 г |
| масса | драг.камни | карат метрический | 200 мг |

Проиллюстрируем эту противоестественную традицию цитатой из мемуаров военного руководителя «Манхэттенского проекта» (программы по созданию атомного оружия в США в 1942–47 гг.) генерала Гровса[4]:

> Летом 1942 г. из предварительных расчётов стало ясно, что нам понадобится огромное количество хорошо проводящего металла для обмоток и шин. Поскольку, однако, потребность оборонной промышленности в меди превышала её запасы в стране, правительство приняло решение частично заменять медь, где это возможно, серебром из запасов государственного казначейства.
>
> По этому поводу полковник Маршалл посетил второго секретаря казначейства США Д. Белла. Последний заявил, что он располагает 47 тысячами тонн свободного серебра и еще около 39 тысяч тонн серебра, для использования которого нужно разрешение Конгресса. Я говорю здесь о тоннах серебра, хотя мера исчисления этого металла была причиной небольшого забавного инцидента, случившегося с Николсом, когда он во время переговоров упомянул о пяти–десяти тысячах тонн необходимого нам серебра. В ответ он

[4]Гровс Л. Теперь об этом можно рассказать. М. : Атомиздат, 1964 г. Сокращенный перевод с английского О.П. Бегичева с издания NOW IT CAN BE TOLD. The story of Manhattan project. By Leslie R. Groves, Lieutenant General, U.S. Army, Retired. Harper & Brothers Publishers, New York. 1962.

> услышал: «Полковник, в казначействе не принято говорить о тоннах. Единицей веса серебра является унция».

Помимо отдельных «внесистемных единиц» в англоязычных странах до сих пор используется *английская система мер*, основными единицами которой служат фут, фунт и дюйм. Также английская система включает большое количество кратных и дольных единиц, которые, однако, не основаны на степенях числа 10. Некоторые английские кратные и дольные меры используют степени числа 2. В настоящее время английская система мер не является независимой: все английские единицы измерения определены через единицы международной системы СИ. Их использование основывается исключительно на традиции. В естественных науках англоязычные страны используют международные системы СИ и СГС.

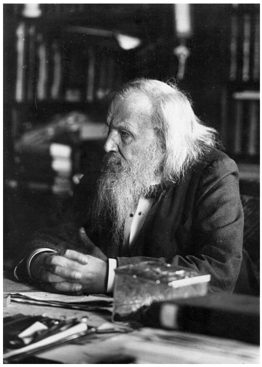


**Рис. 3.1:** Дмитрий Иванович Менделеев (1834–1907) в своём кабинете в Главной палате мер и весов в Санкт-Петербурге (1897). [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:DIMendeleevCab.jpg]

В России тоже была своя, не менее запутанная, «русская система мер». В 1893 году Дмитрий Иванович Менделеев преобразует «Депо образцовых мер и весов» (создано в 1842 г.) в «Главную палату мер и весов» (ныне Всероссийский научно-исследовательский институт метрологии имени Д.И. Менделеева), на базе которой готовит введение в России метрической системы (предшественницы современной международной системы СИ). Метрическая система была допущена к применению в России (в необязательном порядке) по закону от 4 июля 1899 г. Эта мера способствовала бурному научно-техническому и промышленному росту в России перед Первой мировой войной. Применение метрической системы мер в России стало обязательным после революции по декрету СНК РСФСР от 14 сентября 1918 года. Переход на метрическую систему способствовал развитию науки, техники и образования и значительно упростил построение системы массового образования и индустриализацию[5].

## Упражнения

1. Рассмотрим международную торговлю углём и зерном, которые продаются за золото и серебро. Мы можем ввести 4 разных килограмма: $\text{кг}_{\text{угля}}$, $\text{кг}_{\text{зерна}}$, $\text{кг}_{\text{золота}}$ и $\text{кг}_{\text{серебра}}$. Этим 4 килограммам естественно приписать 3 разных размерности, т.к. $[\text{кг}_{\text{золота}}] = [\text{кг}_{\text{серебра}}] = [\text{стоимость}]$. Каков смысл безразмерного отношения $\frac{\text{кг}_{\text{золота}}}{\text{кг}_{\text{серебра}}}$?

2. Покажите, что при рассмотрении задач на свободное падение в однородном гравитационном поле $\mathbf{g}$ для расстояний по вертикали и горизонтали можно ввести разные размерности, взяв в качестве единиц, например, $\text{м}_\perp$ и $\text{м}_\|$. Какова будет размерность ускорения свободного падения? Определите из соображений размерности зависимость максимальной высоты подъёма и дальности полёта тела, брошенного под углом $\alpha$ к горизонту (используя $v_\perp = v \sin\alpha$, $v_\| = v \cos\alpha$).

### 3.1.5. Понятие о системе единиц

Для того чтобы задать систему единиц, необходимо

- задать *основные единицы измерения* с помощью эталонов или связав их с природными константами;
- задать определения (формулы), которые используются для определения *производных единиц*.

[5]Массовое образование и промышленность являются важными факторами обороноспособности страны. Так что введение метрической системы было одним из решений, позволивших подготовить страну к Великой Отечественной войне (о неизбежности новой большой европейской войны стали говорить сразу по окончанию Первой мировой войны). Так что в победе СССР во Второй мировой войне есть немалый вклад Д. И. Менделеева как основоположника русской метрологии (а ещё его же вклад как учёного, экономиста и преподавателя).

**(*)** Производные единицы строятся из основных при помощи операций умножения и возведения в степень, но сами по себе эти операции не могут ничего сказать о численных (безразмерных) коэффициентах, которые входят в определение физической величины. Например, второй закон Ньютона и формула для кинетической энергии имеют вид

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \qquad E = \frac{mv^2}{2}.$$

Кто-то мог бы заменить $m \to 2m$, после чего во втором законе Ньютона появилась бы «лишняя» двойка, а в кинетической энергии двойка исчезла бы. После такого переопределения по-прежнему единица силы имела бы вид: кг $\cdot$ м $\cdot$ с$^{-2}$, а энергии: кг $\cdot$ м$^2$ $\cdot$ с$^{-2}$, но единицы силы и энергии уменьшились бы в два раза при прежнем определении килограмма, метра и секунды.[6]

**(**)** Необходимость задания формул для определения производных единиц делает систему единиц измерения *теоретически нагруженной* — зависящей от используемой нами теории.

К счастью, к моменту, когда метрическая система единиц стала международной, механика была уже очень хорошо развита. Учёные достигли общепринятых соглашений относительно тонкостей определений основных механических величин[7], поэтому производные механические единицы измерения определялись *почти* всегда однозначно. К несчастью, в электродинамике ситуация оказалась сложнее.[8]

[6]Подобный случай с введением квадратного и круглого метра как единиц площади мы рассматривали выше в разделе 3.1.4 «Произвольность выбора единиц измерения».

[7]Тонкости касались во многом произвольного выбора безразмерных коэффициентов.

[8]Это связано с тем, что последовательное изложение электродинамики предполагает использование специальной теории относительности, которая до сих пор недостаточно понимается многими инженерами. В результате ряд единиц системы СИ оказался неудобным для теоретической физики.

## 3.2. Теория размерности и подобия*

### 3.2.1. Анализ размерности

Если начать с нескольких *основных* единиц измерения, то, как мы уже убедились, новые единицы измерения могут получаться из введённых ранее с помощью операций умножения и возведения в степень[9].

В качестве примера рассмотрим случай трёх основных единиц (количество единиц может быть произвольным): длины $L$, массы $M$ и времени $T$. Например, это могут быть сантиметр, грамм и секунда или метр, килограмм и секунда. Все возможные единицы, которые могут быть получены из этих трёх, имеют вид

$$U(a,b,c) = L^a \cdot M^b \cdot T^c.$$

Например, единица скорости см/с $=$ см$^1$ г$^0$ с$^{-1}$, т.е. $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$.

Размерностью физической величины называют выражение вида $L^a \cdot M^b \cdot T^c$, которое однозначно определяется набором степеней $a$, $b$, $c$. Если положить $b = c = 0$, то $a$ задаёт обычную геометрическую размерность: $a = 1$ для единицы длины, $a = 2$ для единицы площади, $a = 3$ для единицы объёма.

Все единицы с разными размерностями считаются различными:

$$U(a_1,b_1,c_1) = U(a_2,b_2,c_2) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2, \\ c_1 = c_2. \end{cases}$$

Если $a = b = c = 0$, то получается безразмерная единица. Три числа, задающие единицу измерения, складываются при умно-

[9]Извлечение корня и деление сводятся к данным операциям.

жении единиц и умножаются на $n$ при возведении в степень $n$[10]:

$$U(0,0,0) = 1, \quad U(a_1,b_1,c_1)\cdot U(a_2,b_2,c_2) = U(a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2),$$
$$[U(a,b,c)]^n = U(n\cdot a, n\cdot b, n\cdot c).$$

Если мы решаем какую-либо физическую задачу, то часто бывает полезно провести *оценку из соображений размерности.* Мы знаем (или можем вычислить), в каких единицах должен измеряться ответ $X$. Эта единица задаётся как $U = U(a,b,c)$. Также мы знаем (или можем вычислить), в каких единицах задаются параметры задачи. Пусть таких параметров будет 3 ($P_1$, $P_2$ и $P_3$), а их единицы измерения

$$U_1 = U(a_1,b_1,c_1), \quad U_2 = U(a_2,b_2,c_2), \quad U_3 = U(a_3,b_3,c_3).$$

Будем искать ответ в виде

$$X = k\cdot P_1^A\cdot P_2^B\cdot P_3^C,$$

где $k$ — безразмерный параметр ($[k]=1$).[11]

Аналогичная формула должна выполняться для единиц измерения

$$[X] = [P_1]^A\cdot[P_2]^B\cdot[P_3]^C;$$
$$U = U_1^A\cdot U_2^B\cdot U_3^C;$$

$$U(a,b,c) = U(Aa_1+Ba_2+Ca_3, Ab_1+Bb_2+Cb_3, Ac_1+Bc_2+Cc_3) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = Aa_1 + Ba_2 + Ca_3, \\ b = Ab_1 + Bb_2 + Cb_3, \\ c = Ac_1 + Bc_2 + Cc_3. \end{cases}$$

То есть мы получили систему из трёх линейных уравнений с тремя неизвестными $A, B, C$.

[10]Легко видеть, что тройки чисел (размерности) $(a,b,c)$ ведут себя как векторы. Причём сложению таких векторов соответствует умножение единиц измерения, а умножению вектора на число — возведение единицы измерения в соответствующую степень. Нуль в пространстве размерностей соответствует безразмерной единице. Дальнейшее содержание данного параграфа — разложение вектора в пространстве размерностей по линейно независимым векторам.

[11]$A$, $B$, $C$ также безразмерные числа, т.к. показатель степени (число одинаковых сомножителей) всегда безразмерен.

Если число параметров задачи совпадает с числом основных единиц, то обычно (**обычно, но не всегда**[12]) такую систему можно решить и *почти* найти тем самым формулу для ответа, *за исключением безразмерного множителя* $k$.[13] При этом предполагают, что множитель $k$ не слишком мал и не слишком велик («порядка единицы»). Во многих случаях это предположение оправдывается.

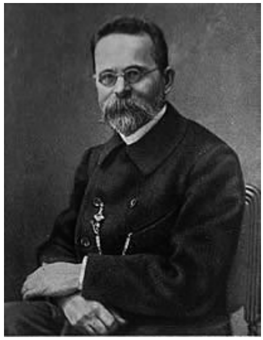


**Рис. 3.2:** Николай Александрович Морозов (1854–1946) — революционер-народник, писатель, астроном (1910).

[PD https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Morozov1910.jpg]

(*) В этом случае формула $X = k \cdot P_1^A \cdot P_2^B \cdot P_3^C$ оказывается самой общей, поскольку любые другие математические функции, которые могли бы войти в коэффициент $k$, должны были бы иметь безразмерный аргумент. Такой аргумент можно получить из параметров задачи только тривиальным образом: $P_1^0 P_2^0 P_3^0 = 1$.

Если получившаяся система не имеет решения, то это означает, что задача не может быть решена (в ней не хватает размерных параметров).

В научных задачах обычно параметров больше, чем основных единиц измерения, система уравнений имеет бесконечно много решений. Это связано с тем, что из заданных параметров можно построить один или несколько безразмерных параметров. Во многих случаях понимание задачи позволяет отбросить лишние параметры как несущественные и всё-таки получить оценку из соображений размерности.

Анализ размерностей применялся физиками начиная, по крайней мере, с XIX века. Однако впервые методически описан Н. А. Морозовым[14] в монографии «Основы качественного

[12]Точнее, *в случае общего положения*, т.е. почти для любых параметров системы уравнений, кроме отдельных неудачных, система решается.

[13]Такая задача самоподобна, т.е. мы можем для разных значений параметров перемасштабировать единицы измерения так, чтобы все параметры обратились в единицы.

[14]Н. А. Морозов также известен как основоположник применения

физико-математического анализа и новые физические факторы, обнаруживаемые им в различных явлениях природы» (1908).

## Упражнения

Коэффициент поверхностного натяжения $\sigma$ — сила на единицу длины границы поверхности жидкости. Пусть жидкость образует каплю радиуса $R$. Из соображений размерности оцените:

1. Поверхностную энергию капли.

2. Избыточное давление внутри капли (за счёт поверхностного натяжения).

### 3.2.2. Теория подобия*

Вернёмся к пункту, на котором мы остановились в разделе «Анализ размерности». Рассмотрим ситуацию, когда из параметров задачи $P_1, \ldots, P_N$, измеряемых в единицах $U_1, \ldots, U_N$, можно получить величину с размерностью $U$ разными способами. Если две разные комбинации параметров имеют одинаковую размерность

$$[X] = [P_1^{A_1} \cdot \ldots \cdot P_N^{C_1}] = [P_1^{A_2} \cdot \ldots \cdot P_N^{C_2}],$$

то их отношение $\Pi = P_1^{A_1-A_2} \cdot \ldots \cdot P_N^{C_1-C_2}$ будет безразмерно:

$$[\Pi] = [P_1^{A_1-A_2} \cdot \ldots \cdot P_N^{C_1-C_2}] = 1.$$

Причём, число разных комбинаций с нужной размерностью оказывается бесконечным: для всякого $l$

$$X_l = P_1^{A_1} \cdot \ldots \cdot P_N^{C_1} \Pi^l, \quad [X_l] = [P_1^{A_1} \cdot \ldots \cdot P_N^{C_1} \Pi^l] = [P_1^{A_1} \cdot \ldots \cdot P_N^{C_1}] = U.$$

естественно-научных методов в исторической хронологии. Его результаты и результаты его последователей в этой области до сих пор вызывают ожесточённые споры.

В общем случае, если мы имеем $N$ параметров и $n < N$ основных единиц измерения, то мы можем построить $J \geqslant N - n$ независимых (т.е. таких, что ни одну нельзя выразить через остальные) безразмерных величин $\Pi_s$[15]. Ответ теперь будет выражаться как[16]

$$X = k(\Pi_1, \ldots, \Pi_J) \cdot P_1^{A_1} \cdot \cdots \cdot P_N^{C_1}.$$

Здесь $A_1, \ldots, C_1$ — любой из наборов показателей степеней, которые дают правильную размерность, а безразмерный коэффициент $k$ стал функцией от максимального набора независимых безразмерных параметров.

Если $J = 0$ (независимых безразмерных параметров нет вообще), то любые два набора параметров задачи задают подобные системы, которые отличаются друг от друга только характерными масштабами.

В общем случае ($J > 0$) условие подобия — равенство всех безразмерных параметров.

Независимые безразмерные параметры (*критерии подобия*) в задаче могут быть введены различными способами (поскольку из набора безразмерных параметров можно получать новые с помощью умножения, деления, возведения в степень и др. функциональных преобразований). В разных разделах физики существует традиция выбирать такие параметры определённым образом (так, чтобы они имели хороший физический смысл). В гидро- и аэродинамике такой параметр обычно называют «число такого-то». Например, *число Маха* (отношение скорости тела к скорости звука в среде).

Обычно обеспечить подобие по всем безразмерным параметрам оказывается невозможно. Однако во многих практических задачах достаточно подобия по некоторым параметрам.

---

[15]Если независимых безразмерных величин больше, то через данные параметры можно выразить не всякую единицу измерения данной системы.

[16]Это утверждение называют П-теорема (читается как «пи-теорема»).

## Упражнения

Жидкость имеет плотность $\rho$, поверхностное натяжение $\sigma$, ускорение свободного падения $g$, глубина сосуда — $H$.

1. Какие безразмерные параметры можно построить из условий задачи?

2. * Чему соответствует большое ($\gg 1$) и малое ($\ll 1$) значение полученных параметров?

3. ** Добавим ещё один параметр: высота волны $h$. Как изменятся решения упражнений 1 и 2*?

### 3.2.3. Размерность и относительность**

Для многих разделов физики ключевой является идея относительности описания физической системы, согласно которой содержательные предсказания физической теории не должны зависеть от выбора способа описания системы. Способ описания системы при этом оказывается связан с явным или неявным описанием экспериментальной измерительной установки (прибора и/или наблюдателя). Произвольность выбора описания соответствует некоторой *симметрии теории*[17]. Соответственно каждый вариант принципа относительности предполагает некоторую более или менее подробно разработанную *теорию измерения.*

Проявлениями идеи относительности являются:

- принцип относительности Галилея (1-й закон Ньютона) — равноправность инерциальных систем отсчёта в ньютоновской механике;

- принцип относительности Эйнштейна — равноправность инерциальных систем отсчёта в специальной теории относительности;

[17]Симметрия фигуры означает, что фигура выглядит одинаково при каком-либо преобразовании (отражении, повороте и т.п.). Аналогично, симметрия теории означает, что теория формулируется одинаково в разных описаниях.

- принцип эквивалентности Эйнштейна — возможность описания гравитационных полей в общей теории относительности путём задания геометрии искривлённого пространства времени и равноправие всех криволинейных систем координат;

- принцип относительности систем единиц измерения — возможность описания любой физической теории с помощью любой системы единиц измерения (этой идее и посвящён данный раздел книги);

- различного рода обобщения перечисленных принципов.

Название «принцип относительности» является устоявшимся, но не слишком удачным. Относительно лишь описание физической системы, но выводы от описания не зависят, т.е. *инвариантны относительно выбора описания* (абсолютны).

Во всех случаях, когда применяется та или иная форма принципа относительности, особое место уделяется величинам, не зависящим от способа описания — *инвариантам.*

Обычно для теории, содержащей тот или иной принцип относительности, физики подбирают или изобретают такой математический язык, который автоматически обеспечивают выполнение этого принципа. Для теории размерности такой язык — представление физических величин как произведений числа на единицу измерения и выражение всех единиц измерения через несколько основных.

В теории размерности инварианты — величины, не зависящие от выбора системы единиц измерения, обязательно должны быть безразмерными. Любая измеренная на эксперименте физическая величина является безразмерной, поскольку мы никогда не мерим размерную величину $X$, а только её отношение к эталону единицы измерения $[X]$. То есть измеряется всегда численная часть физической величины $\frac{X}{[X]} = \{X\}$[18]. При описании эксперимента определение $[X]$ выступает как описание эксперимен-

[18]Измерение численного значения физической величины как отношение её к эталону $\frac{X}{[X]} = \{X\}$ можно трактовать наоборот: мы одновременно измеря-

тальной установки[19]. Теория измерения тут сводится к теории размерности.

Внутри любой физической теории безразмерные физические величины (комбинации физических величин) играют особую роль. Как следует из теории подобия, при совпадении всех (существенных) беразмерных параметров (т.е. при выполнение критериев подобия) физические явления описываются полностью одинаково, но могут различаться масштабом.

Классическая физика до середины XIX в. знала только одну фундаментальную константу (гравитационную постоянную) и не включала в фундаментальные принципы теории характерных масштабов длины, времени и массы. В современной фундаментальной физике (квантовой теории поля) присутствуют ещё две фундаментальные константы: скорость света и постоянная Планка. С помощью трёх перечисленных фундаментальных констант мы можем ввести планковские единицы и обезразмерить любую физическую величину. Это означает, что строгого подобия (по *всем* безразмерным параметрам) в современной физике не бывает.

---

ем отношение эталона к физической величине $\frac{[X]}{X} = \frac{1}{\{X\}}$. Таким способом мы можем связать разные эталоны между собой. Так, после того, как для скорости света приняли точное численное значение, эксперимент по измерению скорости света превратился в эксперимент по установлению эталона метра.

[19] Аналогичную роль описания экспериментальной установки в принципах относительности механики и теории относительности играет задание системы отсчёта.

# Глава 4

# Международная система единиц (СИ) и её проблемы

## 4.1. Международная система единиц (СИ)

Международная система единиц (СИ)[1] является современным развитием метрической системы, введённой в 1795 г. в революционной Франции законом Национального Конвента[2]. Экспериментальное определение основных единиц длины и массы было поручено комиссарам. В их число входили Ш. О. Кулон, Ж. Л. Лагранж, П.-С. Лаплас и другие выдающиеся учёные[3].

20 мая 1875 года[4] была принята «Метрическая конвенция» на Международной дипломатической конференции в Париже, в которой участвовали 17 государств:

[1]Основной источник информации по системе СИ — интернет-сайт Международного бюро мер и весов (http://www.bipm.org). Современное состояние системы СИ описано в специальной брошюре (`https://www.bipm.org/en/publications/si-brochure/`).

[2]Работы по разработке метрической системы были начаты ещё до революции по поручению Людовика XVI.

[3]Ранее в работе комиссии принимал участие А. Л. Лавуазье (1743–1794), однако его участие было прервано во время якобинского террора арестом в 1793 г. и последующей казнью.

[4]Начиная с 2000 г. 20 мая — Всемирный день метрологии.

1. Австро-Венгрия,
2. Аргентина,
3. Бельгия,
4. Бразилия,
5. Венесуэла,
6. Германия,
7. Дания,
8. Испания,
9. Италия,
10. Перу,
11. Португалия,
12. Россия,
13. США,
14. Турция,
15. Франция,
16. Швейцария,
17. Объединённые королевства Швеция и Норвегия.

Конференция была созвана по инициативе Петербургской Академии Наук. Конференция приняла решение о разработке международных эталонов и учредила Международное бюро мер и весов.

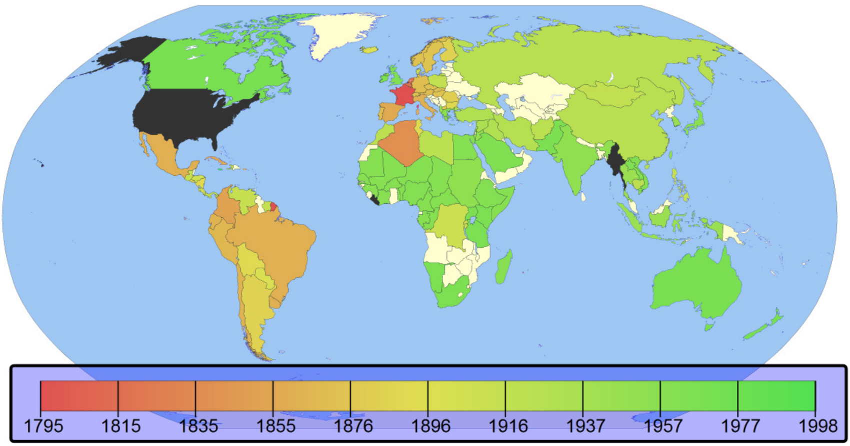



**Рис. 4.1:** Даты перехода на метрическую систему. Страны, которые не приняли систему СИ в качестве основной или единственной (Либерия, Мьянма, США), отмечены чёрным цветом. [Ⓟ https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Metrication_by_year_map.svg]

Название Международная система единиц (СИ) было введено в 1960 году. Постепенно метрическая система вытеснила различные национальные системы мер.

Современная система СИ имеет семь основных единиц

| величина | размерность | единица | обозначение |
|---|---|---|---|
| длина | L | метр | м/m |
| масса | M | килограмм | кг/kg |
| время | T | секунда | с/s |
| сила тока | I | ампер | А/A |
| температура | $\Theta$ | кельвин | К/K |
| количество вещества | N | моль | моль/mol |
| сила света | J | кандела | кд/kd |

С точки зрения теоретика, можно было бы обойтись и меньшим количеством основных единиц. Так, система СГС (другое ответвление метрической системы) обходится тремя единицами: сантиметр, грамм, секунда. «Лишние» единицы измерения нужны в тех случаях, когда мы плохо умеем мерить какие-либо величины, но хорошо умеем мерить отношения таких величин. Далее этот принцип будет проиллюстрирован примерами.

Основные идеи метрической системы:

- Для каждой величины есть только одна главная единица измерения, которая является комбинацией основных единиц.

- Другие единицы измерения той же величины получаются из главной умножением на степени числа 10.

- Величина каждой основной единицы измерения *по возможности* связана с неизменными природными константами и другими основными единицами.

- Из природных констант выбираются по возможности *фундаментальные* (входящие в основные законы природы).

### 4.1.1. Метр

**Рис. 4.2:** Жан-Батист-Жозеф Деламбр (1749–1822). [PD https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jean_Baptiste_Joseph_Delambre.png]

**Рис. 4.3:** Эталоны метра 1795 и 1799 гг. и их футляры. [©Centre historique des Archives nationales. https://www.histoire-image.org/fr/etudes/systeme-metrique-decimal]

Первоначально метр — длина парижского меридиана[5], делённая на $10^7$ (на десять миллионов). То есть метр подобран так, чтобы расстояние по меридиану от полюса до экватора (четверть полной окружности) равнялось 10 000 км. Неизменная природная константа, к которой первоначально привязали метр, — размер Земли. Для уточнения длины меридиана в 1792–1797 гг. была предпринята экспедиция астрономов Деламбра и Мешена. Была измерена длина дуги от Дюнкерка до Барселоны ($940'$ по широте).

Почему длину меридиана разделили именно на десять миллионов? Ясно, что в соответствии с идеологией метрической системы делить решили на степень числа 10. Почему именно $10^7$? Потому что в этом случае получается длина «человеческого» масштаба: при таком определении рост взрослого человека обычно составляет величину между 1 м и 2 м.

Прототип эталона метра был изготовлен из латуни в 1795 г. В 1799 г. из платины был изготовлен эталон метра, известный как *архивный метр* (специальная линейка, на которой отмечена длина 1 м).

Как впоследствии выяснилось, из-за неправильного учёта сжатия Земли у полюсов эталон оказался короче на $0,2$ мм, чем соответствующая доля длины меридиана. Это весьма большая

[5] Дуга меридиана, проходящего от северного полюса до экватора через город Париж.

ошибка для эталона, даже по тем временам. Кроме того, измерение размеров Земли — не очень удобно для проверки эталона.

В 1889 г. в соответствии с решением Метрической конвенции был изготовлен международный эталон метра из сплава 90% платины и 10% иридия. За основу был взят архивный метр, от привязки метра к размеру Земли отказались. С этого момента метр *по определению* считался расстоянием между двумя крестиками (при температуре 0 С) на платиноиридиевом «рельсе», хранящемся в Международном бюро мер и весов в Париже. Другие страны-участницы Метрической конвенции хранили копии парижского эталона, который считался основным. Идейно это был шаг назад: размер Земли оказался «плохой» константой, для привязки к нему эталона длины. Как в древности, эталон стал всего лишь произвольным образцом.


**Рис. 4.4:** В 1889 г. было изготовлено 30 одинаковых эталонов метра. Эталон №6 был выбран как главный (международный). Эталон №28 был национальным в России. На фотографии эталон №27, который был национальным в США. [🅭 https://commons.wikimedia.org/wiki/File:US_National_Length_Meter.JPG]

В 1960 году метр был определён как определённое число длин волн в вакууме определённой спектральной линии криптона-86[6]. Для воспроизведения метра теперь использовался специальный интерферометр.

После этого старые платиново-иридиевые линейки перестали быть эталонами, а стали музейными экспонатами. Хранить эталон метра как образец теперь не нужно: его может изготовить «кто угодно». Физики вернулись на новом уровне к изначальной идее: эталон метра оказался привязан к природной константе.

В 1983 году было принято новое определение метра:

$$\text{метр} = \text{скорость света в вакууме} \cdot \frac{1\ \text{секунда}}{299\,792\,458}.$$

[6]Метр определялся как 1650763,73 длины волны в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями 2p10 и 5d5 атома криптона-86.

Такое определение означает, что теперь *по определению* принято фиксированное *точное* значение скорости света в вакууме:

$$c = 299\,792\,458\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

В современной физике скорость света — одна из основных фундаментальных констант, которая входит во многие основные законы природы (описывающие их уравнения). В то время как длина волны спектральной линии криптона — хорошо воспроизводимая, но произвольно выбранная величина. Она не входит в какие-либо законы природы, хотя и может быть из них получена.

Принятие такого эталона также означает, что физики умеют очень точно измерять время и скорость света, так чтобы новый эталон метра был точнее старого.

### 4.1.2. Килограмм

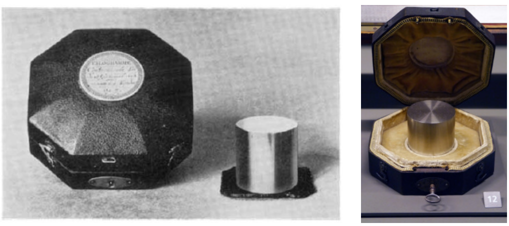


**Рис. 4.5:** Архивный килограмм. [, Platinum Metals Rev., 1973, 17, (2), 66–68. Standard Kilogram Weights. A story of precision fabrication. F.J. Smith https://www.technology.matthey.com/pdf/pmr-v17-i2-066-068.pdf] [, Poulpy, 2014, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Conservatoire_platinum_kilogram_-_Musée_des_arts_et_métiers_-_Inv_3297_-_01.jpg]

Первоначально килограмм был определён как масса 1 дм$^3$ (литра) воды при 4 C (температура максимальной плотности воды) на уровне моря. В 1799 году был изготовлен эталон килограмма (*архивный килограмм*) в виде платиновой гири. Как и с метром, позже выяснилось, что величина эталона была не совсем та (0,028 г больше массы литра воды).

**Рис. 4.6:** Международный эталон килограмма. [©Bureau International des Poids et Mesures. https://www.bipm.org/en/bipm/mass/ipk/]

**Рис. 4.7:** Паровая чистка эталона перед сравнением масс. [© Bureau International des Poids et Mesures. https://www.bipm.org/utils/common/img/mass/cleaning_300.jpg]

В 1889 г. в соответствии с решением Метрической конвенции был изготовлен международный эталон килограмма из сплава 90% платины и 10% иридия. За основу был взят архивный килограмм, от привязки килограмма к литру воды отказались. С этого момента килограмм *по определению* считается массой эталонной гири, хранящейся в Париже. Другие страны-участницы Метрической конвенции хранили копии международного эталона, который считался основным. Идейно это был шаг назад. Как в древности, эталон стал всего лишь произвольным образцом.

До 20 мая 2019 года килограмм 1889 года использовался как эталон. Это была единственная основная основная единица системы СИ, не определённая через природные константы.

Последнее уточнение определения килограмма с помощью эталона 1889 г. было дано в 1990 г. Поскольку, даже находясь под тремя колпаками, масса эталона за год возрастает за счёт загрязнений на величину до 1 мкг, эталон должен быть перед взвешиванием вымыт, согласно специальной процедуре.

В 2011 году XXIV Генеральная конференция по мерам и весам приняла Резолюцию «О возможных будущих пересмотрах Международной системы единиц, СИ». В этой резолюции планировалось определить килограмм, задав точное значение ещё одной фундаментальной постоянной — постоянной Планка (подобно тому, как определили метр, задав точное значение скорости света):

$$h = 6{,}626\,06\text{X} \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с}.$$

Здесь X обозначает некоторые цифры, которые должны были быть определены в будущем.

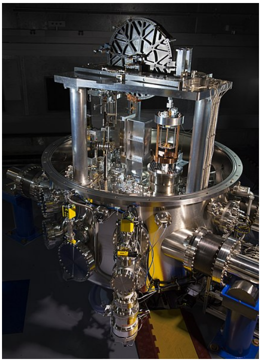


**Рис. 4.8:** Весы Киббла. [©, 2015 https://commons.wikimedia.org/wiki/File:NIST-4_Kibble_balance.jpg]

16 ноября 2018 года XXVI Генеральная конференция по мерам и весам постановила, что с 20 мая 2019 года килограмм определяется через точное значение постоянной Планка:

$$h = 6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с}.$$

Единица измерения постоянной Планка $\text{Дж} \cdot \text{с} = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$. Если секунда и метр уже определены, то задание точного значения постоянной Планка определяет килограмм.

Для воспроизводства килограмма предполагается использовать *весы Киббла* (рис. 4.8), в которых вес груза уравновешивается силой, действующей на катушку с током в магнитном поле.

## 4.1.3. Секунда

Первоначальное определение секунды (*астрономическая секунда*) связано с периодом обращения земли. Сутки (средний период от полудня до полудня) разделяются на 24 часа, час — на 60 минут, минута — на 60 секунд. То есть

$$\text{сут} = 24\ \text{ч} \cdot 60\ \frac{\text{мин}}{\text{ч}} \cdot 60\ \frac{\text{с}}{\text{мин}} = 86\,400\ \text{с}.$$

Во время Французской революции это казалось очевидным: надо только хорошо измерить среднюю длительность суток и построить хорошие часы. (Точное определение средней длины суток оставили астрономам.) Ну и ещё множители 60 и 24 выбивались из набора степеней числа 10, которые использовали при создании метрической системы. С этой древней традицией, к сожалению, справиться не удалось[7].

[7]До сих пор ходят проекты разделить сутки на 10 часов, час — на 100 минут и минуту — на 100 секунд, т.е. принять сутки = 100 000 с. Удалось

В 1960 году в СИ была принята секунда эфемеридного времени[8]:

$$\text{эфемеридная секунда} = \frac{\text{тропический год}}{31\,556\,925{,}974\,7}.$$

Тропический год (время от одного весеннего равноденствия до следующего) тоже не постоянен, поэтому в качестве эталона взяли тропический год в «фундаментальную эпоху 1900 г.» по астрономическим таблицам Ньюкомба. Эфемеридная секунда была стандартом недолго, поскольку развитие физики уже предлагало более точные стандарты.

В 1968 году принято новое определение: секунда = 9 192 631 770 периодов излучения при переходе между двумя уровнями сверхтонкой структуры основного состояния цезия-133. То есть было принято, что частота соответствующей спектральной линии составляет 9 192 631 770 Гц *точно.*[9]

В 1997 году определение уточнили: атом цезия надо брать в состоянии покоя при температуре 0 К[10].

### 4.1.4. Ампер

Электродинамика была создана только в середине XIX века, кроме того, электромагнитные явления в тот период ещё не играли существенной практической роли. Поэтому первоначальная метрическая система не была приспособлена к описанию явлений, связанных с электричеством и магнетизмом.

---

только изгнать из употребления терцию ($\frac{1}{60}$ с), которая в быту никому не нужна, и ввести вместо этого миллисекунды (0,001 с). Можно отметить упущенный шанс поделить час (или хотя бы минуту) по степеням числа 10. В конце XVIII в. при малом распространении точных часов это было бы ещё возможно.

[8] В астрономии эфемериды — таблицы видимых положений звёзд и планет.

[9] На современном уровне техники измерение частоты — одна из самых точных операций (возможно самая точная).

[10] Законы термодинамики запрещают охладить что-либо до абсолютного нуля температуры, тем не менее частоту излучения при ненулевой температуре можно экстраполировать к температуре 0 К.

**Рис. 4.9:** Андре-Мари Ампер. (1775–1836)

[PD, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Andre-Marie_Ampere.jpg]

В системе единиц Сантиметр-Грамм-Секунда (СГС) единицы измерения всех электромагнитных величин сводились к единицам длины, массы и времени (за счёт приравнивания 1 коэффициентов в ряде фундаментальных законов электродинамики). Неоднозначность выбора констант, которые приравниваются 1 привела к тому, что возникло целое семейство различных вариантов системы СГС. Они отличались для электромагнитных величин и совпадали для механических. Такое определение электромагнитных величин удобно для теоретиков (если они договорятся между собой, какие константы считать единицами). Однако к концу XIX века, когда электротехника стала активно развиваться, точность опытов, в которых проявлялись бы соответствующие фундаментальные законы, была недостаточной для установления эталонов. Поэтому единицы измерения были введены исходя из того, что на тот момент умели мерить точно. Форма фундаментальных законов электродинамики при этом усложнилась за счёт появления лишних коэффициентов.

Первоначально ампер (единица силы тока — электрический заряд, протекающий в секунду) был введён в системе *абсолютных практических электрических единиц*. Они были введены для практических инженерных целей 1-м Международным конгрессом электриков (Париж, 1881 г.) как кратные (как и полагается, с использованием степеней числа 10) единиц СГСМ (*одной из разновидностей* системы СГС), которые были слишком мелки для практических применений. В последствии более удобной оказалась другая разновидность системы СГС — *Гауссова система СГС*, в результате чего отношения практических электрических единиц к единицам современной СГС уже не выражаются как степени числа 10, но практические единицы получили очень широкое распространение, так что менять их было уже поздно.

Сразу же для ампера стали придумываться способы установления эталонов. Определение ампера через систему СГСМ предполагало точное измерение силы, с которой притягиваются параллельные провода с током, что в то время было слишком сложно. 4-м Международным конгрессом электриков (Чикаго, 1893 г.) было принято определить ампер, как силу тока, который осаждает за 1 секунду из водного раствора нитрата серебра 0,001 118 000 грамм серебра.[11]

В 1948 г. ампер был введён в систему метрических единиц.

Ампер, по этому определению, — такая сила тока, что два прямых бесконечно длинных и бесконечно тонких параллельных проводника, расстояние между которыми составляет 1 м, по которым течёт такой ток, взаимодействуют с силой $2 \cdot 10^{-7}$ ньютон на погонный метр.[12]

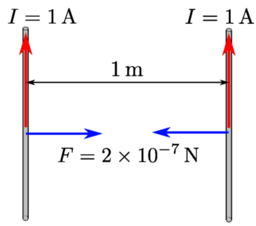



**Рис. 4.10:** Старое определение тока в 1 ампер через силу. [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ampere-def-en.svg]

В системе СИ сила на единицу длины для параллельных проводов с токами $I_1$ и $I_2$, помещённых на расстоянии $r$ друг от друга, имеет вид $f_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I_1I_2}{r}$. Поэтому такое определение ампера соответствовало заданию точного значения «магнитной постоянной»:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Гн/м} = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Н/А}^2.$$

Хотя магнитная постоянная иногда считается фундаментальной константой, непосредственного физического смысла она не имеет. Поэтому планировалось переопределить ампер через по-настоящему фундаментальную постоянную — заряд электрона, приписав ему *точное* значение:

$$e = 1{,}602\,17\text{X} \cdot 10^{-19}\ \text{Кл}.$$

[11]Такое определение делало ампер новой единицей, не выводимой по теории размерности из метра, килограмма и секунды.

[12]Это определение соответствует возврату от определения 1893 года через электролиз нитрата серебра к исходному определению 1881 года ампера как кратной единицы в системе СГСМ. При таком определении ампер не является в полной мере основной единицей измерения, дополнительной к метру, килограмму и секунде, но по традиции таковой продолжает считаться.

Кл = А · с — единица заряда в системе СИ. Здесь X обозначает некоторые цифры, которые должны были быть определены в будущем.

16 ноября 2018 года XXVI Генеральная конференция по мерам и весам постановила, что с 20 мая 2019 года ампер определяется через точное значение элементарного заряда:

$$e = 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл}.$$

### 4.1.5. Кельвин

**Рис. 4.11:** Уильям Томсон, лорд Кельвин (1824–1907) в 1848 г. предложил абсолютную шкалу температур. [художник: Губерт фон Геркомер, PD https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hubert_von_Herkomer03.jpg]

Температура — это средняя энергия атома в одноатомном газе, находящемся в термодинамическом равновесии с изучаемым телом, умноженная на $\frac{2}{3}$. С точки зрения теоретика, температуру было бы естественно измерять в единицах энергии. Однако энергия на один атом при практически любых разумных температурах окажется очень маленькой, по сравнению с привычными нам человеческими масштабами. Связано это с тем, что мы обычно имеем дело с системами, в которых атомов очень много. На это рассчитаны наши единицы измерения. Более того, в XIX веке, когда вводилась единица температуры *градус Кельвина* (предложена в 1848 году, с 1968 года слово «градус» откинуто и единица называется просто *кельвин*), физики ещё не были уверены в том, что вещество состоит из атомов, а о масштабах атомных явлений имели очень смутное представление. Свести температуру к энергии тогда ещё не могли, поэтому была установлена отдельная единица измерения.

Шкала температур Кельвина отличается от привычной в быту шкалы Цельсия выбором нуля. Величина градуса в обеих шкалах одинакова. Шкала Цельсия использует две реперные точки:

0 C — температура таяния льда и 100 C — температура кипения воды. Обе температуры берутся «на уровне моря», т.е. при «нормальном» атмосферном давлении[13].

При введении шкалы абсолютных температур (шкалы Кельвина) одна реперная точка фиксирована — это абсолютный нуль температуры ($-273,15$ C). В качестве второй точки была взята температура *тройной точки воды* ($0,01$ C). Тройная точка воды — это давление и температура, при которых могут одновременно находиться в равновесии все три агрегатных состояния: жидкость, твёрдое тело и газ. То есть в тройной точке давление подобрано так, что сливаются температуры кипения и замерзания.

По определению (1954 г.) для температуры тройной точки воды выбрано точное значение:

$$273{,}16 \text{ K}.$$

В 2005 г. определение кельвина было дополнено требованием к изотопному составу воды:

0,000 155 76 моля $^2$H на один моль $^1$H,
0,000 379 9 моля $^{17}$O на один моль $^{16}$O,
0,002 005 2 моля $^{18}$O на один моль $^{16}$O.

По мере развития техники точное измерение энергии атома перестаёт быть неразрешимой проблемой, поэтому было запланировано, что определение кельвина будет дано через задание точного значения постоянной Больцмана:

$$k_\text{Б} = 1{,}380\,6\text{X} \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}.$$

Здесь X обозначает некоторые цифры, которые должны были быть определены в будущем.

16 ноября 2018 года XXVI Генеральная конференция по мерам и весам постановила, что с 20 мая 2019 года кельвин определяется через точное значение постоянной Больцмана:

$$k_\text{Б} = 1{,}380\,649 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}.$$

---

[13]Первоначальная школа Андерса Цельсия (1742) была перевёрнута: кипение при 0  и таяние при 100 , к привычному виду её привёл Карл Линней (1744).

Постоянная Больцмана иногда считалась фундаментальной физической постоянной. Однако по существу она — коэффициент пересчёта единиц температуры (кельвины) в единицы энергии (джоули), что и зафиксировало новое определение.

### 4.1.6. Моль


**Рис. 4.12:** Амедео Авогадро, граф Куаренья и Черрето (1776–1856), установил закон Авогадро: равные объёмы газа (низкой плотности) при одинаковых условиях содержат равное число молекул.

[PD https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Avogadro_Amedeo.jpg]

В разделе «Кельвин» мы начали с того, что для атомов сложно измерить среднюю энергию, но их и просто посчитать тоже сложно, потому что они очень мелкие, а в любом сколько-нибудь значимом образце их ещё и очень много. Надо ли считать атомы и молекулы поштучно? Иногда надо (если их не слишком много). Чаще надо знать отношение количеств атомов или молекул разных сортов. Это бывает полезно, например, в химии, поскольку в каждую молекулу данного сорта входит строго определённое количество атомов разных сортов, а потому отношение количеств атомов оказывается фиксированным.

Чтобы определить отношение количеств разных атомов или молекул, их можно считать не поштучно, а десятками, дюжинами, миллиардами или ... *молями.*

По прежней договорённости, 1 моль — это столько же штук, сколько атомов изотопа углерод-12 составляют 12 граммов. Сколько это? Число атомов (или молекул, или других структурных единиц, т.е. штук) в одном моле называется *постоянная Авогадро* и составляет примерно $6{,}022\,14 \cdot 10^{23}$. Мы умеем считать молекулы и атомы всё точнее и точнее, поэтому планировалось, что в будущем определение моля будет дано через задание *точного* значения постоянной Авогадро:

$$N_\mathrm{A} = 6{,}022\,14\mathrm{X} \cdot 10^{23}\ 1/\text{моль},$$

где X — некоторые цифры, которые должны быть определены в будущем.

Как определяют постоянную Авогадро? Первые общепринятые (но не самые первые) измерения провёл в 1909 г. Жан Перрен, исследуя броуновское движение — случайное движение мелких частиц под действием толчков со стороны отдельных молекул жидкости (Нобелевская премия по физике 1926 г.). Броуновские частицы (их диаметр в опытах Перрена составлял 0,37 мкм) ведут себя как очень большие молекулы: для них, как и для молекул, средняя кинетическая энергия составляет $\frac{3}{2}kT$ и т.п. Величина случайных отклонений (*флуктуаций*), которые вызывают броуновское движение, зависит от того, насколько мелки молекулы. Перрен использовал два способа: 1) измерял, насколько быстро броуновская частица смещается от начального положения, 2) измерял распределение частиц по высоте сосуда (без броуновского движения все частицы легли бы на дно).

Позднее использовались и более прямые способы измерения. Длительное время лучшим способом было измерение электрического заряда, при протекании которого через электролит выделяется 1 моль вещества (*постоянная Фарадея*), и деление его на заряд электрона. В 2010 г. постоянная Авогадро была определена через число атомов в монокристалле кремния, которое подсчитывалось через объём кристалла и период кристаллической решётки.

16 ноября 2018 года XXVI Генеральная конференция по мерам и весам постановила, что с 20 мая 2019 года моль определяется через точное значение постоянной Авогадро:

$$N_{\mathrm{A}} = 6{,}022\,140\,76 \cdot 10^{23}\ 1/\text{моль}.$$

### 4.1.7. Кандела

Данный раздел написан при участии Владимира Семёновича Булыгина.

Почему кандела («стандартная свеча» — единица силы света) вообще попала в список основных физических единиц системы СИ, не вполне понятно. Дело в том, что «сила света» не является физической величиной. Это величина призвана описать яркость поверхности, *воспринимаемую человеческим глазом.* То есть она относится не к физике, а к физиологии зрения. Понятно, что чувствительность глаза зависит от длины волны электромагнитного излучения (цвета). Поэтому поток энергии на разных длинах волн $\lambda$ учитывается с разными весовыми факторами $V(\lambda)$. Поскольку глаза у всех разные, то международными соглашениями вводится «стандартный глаз» — кривая видности (относительной спектральной эффективности) $V(\lambda)$ с максимумом, равным 1, при $\lambda \approx 555$ нм (частота $f = 540 \cdot 10^{12}$ Гц; см. рис. 4.14).

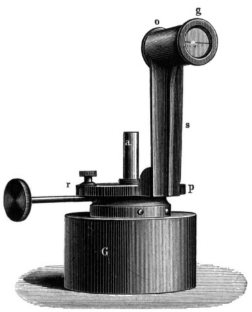



**Рис. 4.13:** Лампа Хефнера — эталон «свечи Хефнера», единицы силы света, предшествующей канделе.



Кривая видности была утверждена Международной комиссией по освещению[14] в 1924 г. как результат усреднения многочисленных экспериментов с различными людьми (наблюдателями), которые методом «малых ступеней» визуально попарно уравнивали по видимой яркости два излучения с очень близкими длинами волн (регулируя их энергетическую интенсивность).

Введение канделы в СИ связано с необходимостью установления международных стандартов на осветительные приборы, кино/телеэкраны и прочие устройства, основной результат работы которых — восприятие человеком какой-либо яркости.

До 1948 года кандела определялась в разных странах с помощью стандартных ламп накаливания. В 1948 году по предложению Международной комиссии по освещению кандела была введена в СИ. Определение было основано на свечении абсолютно чёрного тела, нагретого до температуры отвердевания платины (2045 K = 1772 C).

[14]Международная комиссия по освещению — International Commission on Illumination (CIE) занимается исследованиями и разработкой стандартов в области освещения и цвета. Она основана в 1913 г. как преемник Международной комиссии по фотометрии.

В 1979 году принято новое определение: кандела — сила света источника, который испускает монохроматический свет с частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц с мощностью излучения $\frac{1}{683}$ Вт/ср[15]. Здесь ср — стерадиан (единица телесного угла). Если вершину телесного угла поместить в центр сферы радиуса $R$, то угол в 1 стерадиан вырежет на сфере площадку площадью $R^2$. Телесный угол в стерадианах, на самом деле, безразмерен.

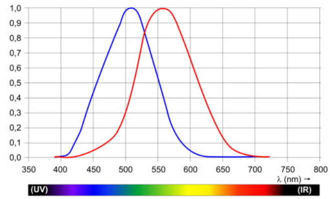



**Рис. 4.14:** Кривая видности для дневного (правая линия $V(\lambda)$) и ночного (левая линия $V'(\lambda)$) зрения. [HHahn. http://commons.wikimedia.org/wiki/File:LuminosityCurve1.svg]

### 4.1.8. Эталоны*

Мы уже многое узнали про эталоны, обсуждая основные единицы измерения системы СИ, однако некоторые важные моменты стоит уточнить дополнительно.

Следует различать определение единицы измерения и её эталон. Так, определение секунды — 9 192 631 770 периодов излучения при переходе между двумя уровнями сверхтонкой структуры основного состояния цезия-133 при температуре 0 К. А эталон секунды — сложное техническое устройство, которое может с точностью до периода отсечь промежуток времени в одну секунду.

Величина электрического сопротивления Ом определяется как производная единица: Ом $= \frac{\text{В}}{\text{А}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^3\cdot\text{А}^2}$. В свою очередь, ампер определялся ранее через силу взаимодействия бесконечно длинных проводов с током. Однако эталон сопротивления может быть основан на совсем других принципах, например на квантовом эффекте Холла (см. рис. 4.15)[16].

[15] Это позволяет превратить кривую видности (относительную спектральную чувствительность усреднённого глаза) в абсолютную спектральную чувствительность: спектральную световую эффективность $K(\lambda)$ (единица измерения — Лм/Вт).

[16] Эффект Холла — появление электрического напряжения *поперёк* про-

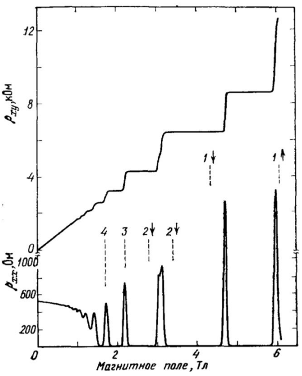



**Рис. 4.15:** Зависимости холловского (поперечного) сопротивления и омовского (продольного) сопротивления от магнитного поля при постоянной концентрации носителей. На зависимости холловского сопротивления наблюдаются «плато». [К. фон Клитцинг «Квантовый эффект Холла: Нобелевские лекции по физике — 1985 г.» УФН 150, 107 (1986). `https://ufn.ru/ru/articles/1986/9/c/`]

Эталоны бывают разных классов точности, в зависимости от решаемых задач.

При создании международных и национальных эталонов используются методы, способные стабильно обеспечивать наилучшую точность, доступную при современном уровне науки и техники. Поэтому история эталонов наглядно показывает ход научно-технического прогресса. Архивный килограмм — это просто платиновая гирька, изготовление которой было заказано ювелиру и которая хранилась в футляре, сделанном по образцу футляров ювелирных изделий. В 1799 году считалось достаточным один раз (силами учёных) определить величину килограмма, изготовить гирьку и сдать её на хранение в Национальный Архив, где она просто хранилась. Аналогично архивный метр был просто платиновой линейкой в красивом деревянном футляре. В 1889 году международный эталон метра стал балкой, специального сечения, обеспечивающего оптимальную жёсткость (профиль Трескá), а с 1960 года — специальным интерферометром. Аналогичная ситуация наблюдается и для эталонов других физических величин. Так, введённое в 2005 году требование к изотопному составу воды, по тройной точке которой определяется единица

---

водника, если этот проводник помещён в магнитное поле и по нему протекает электрический ток. Электрическое поле, создаваемое таким холловским напряжением, компенсирует магнитные силы, действующие на движущиеся заряды. Отношение поперечного (холловского) напряжения и обычного (продольного) тока имеет ту же размерность, что и обычное (продольное) электрическое сопротивление и называется холловским (поперечным) сопротивлением.

температуры кельвин, было принято потому, что это уточнение стало существенным, тогда как во времена самого Кельвина, понятие изотопов (атомов с одинаковыми химическими свойствами, но разной массой) ещё не было известно.

## 4.2. Система СИ в электродинамике***

Данный раздел написан на основе статьи [1] и имеет отдельную библиографию (см. с. 96).

В настоящее время сложилась практика преимущественного использования системы СИ для электрических цепей и гауссовой системы СГС для электромагнитного поля. Предлагается модификация международной системы единиц СИ (физико-техническая система), в которой единицы измерения для электрических цепей совпадают с единицами СИ, а уравнения для электромагнитного поля имеют почти тот же вид, что и в гауссовой системе.

### 4.2.1. Спор длиной в полтора века

Вопрос о выборе единиц измерения в электродинамике восходит к временам Фарадея (1822–1831 гг.) и Максвелла (1861–1873 гг.). Законченную форму классическая электродинамика приобрела только после геометризации специальной теории относительности Г. Минковским (1907–1909 гг.). Совершенствование и внедрение современной (4-мерной релятивистски ковариантной) формулировки электродинамики в практику высшего образования растянулось ещё не менее чем на полвека. Обзор *некоторых* систем единиц, применявшихся и применяемых в электродинамике, можно найти, например, в книгах [2, 3].

Законодательство и стандарты многих стран рекомендуют использование в науке и образовании международной системы единиц (СИ), которая, применительно к электродинамике, восходит к системе «абсолютных практических единиц измерения», принятой 1-м Международным конгрессом электриков (Париж, 1881 г.) как кратные единиц СГСМ (одной из устаревших разновидностей системы СГС), которые были слишком мелки для практических применений.

Применение СИ в электродинамике до сих пор вызывает возражения. Среди физиков традиционно сильны позиции гауссовой (симметричной) системы СГС (далее просто СГС), которая лучше учитывает симметрии теории, и является стандартом для научных публикаций и учебников по теоретической физике.

Можно (несколько утрируя ситуацию) сказать, что сегодня СИ — система для измерений, а СГС — система для записи формул и аналитических выкладок.

В настоящее время при рассмотрении электрических цепей фактическим стандартом является система СИ, а при рассмотрении электромагнитного поля — СГС. Так, в классическом учебнике И. Е. Тамма «Основы теории электричества» [4] последовательно используется СГС, но при рассмотрении задач на переменный ток (§ 80 книги [4]) используется практическая система единиц (предшественник системы СИ). Аналогичные предпочтения наблюдаются не только у классиков науки, но, например, у современных преподавателей и студентов МФТИ.

Проблема выбора системы единиц для электродинамики не становится менее актуальной, скорее наоборот. Само Международное бюро мер и весов в последнем 8-м издании своей брошюры «Международная система единиц» [5] признаёт (раздел «Units outside the SI», 2-й абзац. Перевод цитаты и выделение курсивом — М. Г. Иванов):

> *Отдельные* учёные должны *также* иметь свободу *иногда* использовать единицы, не входящие в систему СИ, для которых они видят *частные* научные преимущества для *своей* работы. Пример этого — использование СГС–гауссовых единиц в электромагнитной теории применительно к квантовой электродинамике и относительности.

Читая эти фразы, необходимо помнить, что последовательное современное изложение электродинамики без специальной теории относительности невозможно. Понятно также, что основной смысл данной оговорки относится в первую очередь именно к применению системы СГС.

Предыдущее 7-е издание брошюры «Международная система единиц» [6] этих оговорок не содержит.

Вероятно такое смягчение отношения к СГС связано с планируемым изменением определения килограмма, моля и кельвина в рамках СИ через фиксирование точных численных значений постоянных Планка, Авогадро и Больцмана [7]. Это переопределение предполагает новые точные измерения с использованием методов квантовой электродинамики, в которой СГС очень часто предпочитается СИ.

### 4.2.2. Критика СИ

Применение системы СИ в теоретических исследованиях сильно затруднено по причине того, что используемые в ней единицы электродинамических величин не соответствуют симметриям теории, связанным со специальной теорией относительности. Несоответствие выражается в разных размерностях напряжённостей и индукций электрического и магнитного полей, что затрудняет применение СИ как для теоретических выкладок, так и для преподавания электродинамики, особенно в тех случаях, когда предполагается, что учащийся должен хорошо понимать структуру теории. По этой причине курс теоретической физики в ведущих вузах России традиционно читается с использованием СГС.

Данной проблеме посвящена статья Д. В. Сивухина «О международной системе физических величин» [9] (см. также [10], где дано последовательное сравнение СИ и СГС), опубликованная в 1979 г. журнале «Успехи физических наук» *по решению Бюро Отделения общей физики и астрономии Академии наук СССР*, что практически означает единую позицию по данному вопросу сообщества отечественных учёных-физиков. Приведём яркую цитату из данной статьи:

> В этом отношении система СИ не более логична, чем, скажем, система, в которой длина, ширина и высота

предмета измеряются не только различными единицами, но и имеют разные размерности.

Несоответствие СИ симметриям электродинамики обусловлено историческими причинами, оно связано с тем, что основы системы были заложены до создания специальной теории относительности. Кроме того, такие единицы измерения как вольт, ампер, ом, фарад и др. (восходящие к практической системе единиц) чрезвычайно широко используются в технике, входят в СИ и не входят в СГС[17]. Когда в 1948 году эти единицы были введены в СИ роль специальной теории относительности для электродинамики всё ещё не была в достаточной мере осознана многими физиками-экспериментаторами и инженерами. Об изменении этих единиц измерения можно было мечтать в начале XX века, но сейчас они и основанные на них стандарты повсеместно используются не только в измерительных устройствах, но и во всей технике, включая бытовую. *Это делает практически невозможным любой пересмотр СИ, исключающий из системы ампер как основную единицу.*

Можем ли мы совместить пожелания инженеров и теоретиков? В существенной мере можем!

### 4.2.3. Какая система единиц нам нужна?

#### Пожелания теоретика

- Для электрического поля напряжённость $\mathbf{E}$ и индукция $\mathbf{D}$ должны иметь одинаковую размерность, причём в вакууме $\mathbf{E} = \mathbf{D}$.

- Для магнитного поля индукция $\mathbf{B}$ и напряжённость $\mathbf{H}$ должны иметь одинаковую размерность, причём в вакууме $\mathbf{B} = \mathbf{H}$.

- Поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ должны иметь одинаковую размерность, причём в вакууме для поля плоской бегущей волны $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$.

[17] В начале XX в. в России производились конденсаторы, с маркировкой в системе СГС, единицей ёмкости в которой является сантиметр [11].

- Магнитное поле движущегося заряда — релятивистский эффект, поэтому в формулу для него *должно* входить отношение скорости частицы к скорости света $\frac{\mathbf{v}}{c}$. Избавляться от скорости света путём переопределения единиц измерения противоестественно.

- Сила Лоренца — релятивистский эффект, поэтому в формулу для неё *должно* входить отношение скорости частицы к скорости света $\frac{\mathbf{v}}{c}$. Избавляться от скорости света путём переопределения единиц измерения противоестественно.

- Введение константы $\frac{1}{4\pi}$ в закон Кулона (восходит к О. Хевисайду) вполне естественно, поскольку позволяет избавить от множителя $4\pi$ (площадь двумерной единичной сферы) не только в уравнениях Максвелла, но и в формулах энергии и функционала действия для электромагнитного поля. Это соответствует практике, принятой у теоретиков, рассматривающих пространства с размерностью, отличной от 3. Для обычной электродинамики такая *рационализация* не вредит и не помогает.

### Пожелания инженера и экспериментатора

- Единицы измерения для электрических цепей (ампер, вольт, ом, фарад, генри) используются повсеместно в приборах и стандартах и не могут быть изменены.

- Появление скорости света в уравнениях для электрических цепей нежелательно.

- Поля **D** и **H** непосредственно не могут быть измерены, их единицы измерения не заложены в какие-либо приборы, а потому не слишком важны.

### Как примирить теоретиков с инженерами?

Мы предлагаем модифицировать систему СИ, не изменяя основных единиц измерения (килограмм, метр, секунда, ампер, моль, кельвин, кандела), но модифицировав форму записи уравнений электродинамики (максимально приблизив их к уравнениям СГС), изменив входящие в них коэффициенты (за счёт этого изменятся по сравнению с СИ некоторые производные единицы измерения).

Сохраним из старой системы СИ (далее СИ$_{\text{ст}}$) ампер в качестве единицы силы тока и те производные единицы, которые не затрагивают полей **D**, **B**, **H**: заряда кулон = Кл = А · с, напряжения вольт = В = $\frac{\text{Дж}}{\text{А}\cdot\text{с}}$, сопротивления Ом = $\frac{\text{В}}{\text{А}}$, ёмкости фарад = Ф = $\frac{\text{Кл}}{\text{В}}$, индуктивности генри = Гн = $\frac{\text{Дж}}{\text{А}^2}$.

Закон Кулона и напряжённость электрического поля сохраняют ту же форму, что и в системе СИ:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} = k_q \frac{q_1 q_2}{r^2}, \qquad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = k_q \frac{q}{r^2}.$$

Здесь $k_q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ — *постоянная Кулона*, $q_1, q_2, q$ — заряды.

Поля **D**, **H** и **B** определяем в соответствии с приведёнными выше «Требованиями теоретика», все они имеют одинаковую размерность $\frac{\text{В}}{\text{м}}$.

**Все формулы и единицы измерения для электрических цепей (не включающие в себя поля) сохраняют тот же вид, что и в системе СИ.**

**Все формулы (но не единицы измерения!) для электромагнитных полей похожи на формулы гауссовой системы СГС.**

Этот вариант будущей системы СИ мы назовём физико-технической системой единиц (ФТ). В названии системы заложена идея совместить преимущества систем, используемых в физике и технике.

В процессе подготовки статьи [1] было обнаружено, что такая система единиц уже предлагалась ранее (начиная с 2001 г.) Г. М. Труновым [3, 12, 13, 14] под названием *теоретическая система электромагнитных единиц* (сокращённо СИ(Т)). К сожалению, эта инициатива пока не получила широкого распространения. Изменять название системы единиц в соответствии с терминологией Г. М. Трунова представляется нецелесообразным, поскольку для распространения новой системы важнее её преимущества в сближении физики и техники, чем чисто теоретические преимущества (теоретики вполне довольны системой СГС).

### 4.2.4. Физико-техническая система единиц

#### Преобразование от СГС к ФТ

В ФТ-системе основные единицы совпадают с основными единицами старой системы $СИ_{ст}$. Поэтому, используя уравнения системы $СИ_{ст}$ для электрических цепей, для тока $I$, напряжения $U$, мощности $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$, энергий $\mathcal{E}_C$ и $\mathcal{E}_L$ для ёмкости $C$ и индуктивности $L$

$$I = \frac{dq}{dt}, \qquad UI = \frac{d\mathcal{E}}{dt}, \qquad R = \frac{U}{I}, \qquad \mathcal{E}_C = \frac{q^2}{2C}, \qquad \mathcal{E}_L = \frac{LI^2}{2},$$

мы выражаем через килограмм, метр, секунду и ампер единицы измерения для электрических цепей, которые совпадают с обычными единицами СИ.[18]

Уравнения электромагнитного поля в ФТ-системе получим модификацией уравнений СГС.

В гауссовой системе СГС для физиков не важен конкретный выбор сантиметра, грамма и секунды, как основных единиц измерения, важна форма записи уравнений (выбор коэффициентов). Поэтому, прежде чем сближать СГС и СИ для полей, мы введём вспомогательную гауссову систему МКС (метр, килограмм, секунда, далее МКСГ), все уравнения в которой записываются так же, как в гауссовой системе СГС.

С точки зрения системы МКСГ константа

$$k_q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, \qquad \{k_q\} = \{c\}^2 \cdot 10^{-7},$$

[18] Обратите внимание, мы специально не использовали величин, связанных с электромагнитными полями (кроме напряжения $U$). Все величины определяются через параметры цепи. В соответствии с электромеханической аналогией, заряд $q$ — обобщённая координата, ток $I$ — обобщённая скорость, напряжение $U$ — обобщённая сила, сопротивление $R$ — коэффициент вязкого трения, обратная ёмкость $\frac{1}{C}$ — жёсткость, индуктивность $L$ — массовый коэффициент. Как и в системе $СИ_{ст}$, скорость света в уравнениях для электрических цепей не возникает.

в законе Кулона (далее *постоянная Кулона*) нужна для перевода зарядов из СИ в МКСГ:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} = k_q \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{q_{1\text{мксг}}\, q_{2\text{мксг}}}{r^2}, \qquad q_{\text{мксг}} = \sqrt{k_q}\, q_{\text{си}}.$$

Если мы хотим, чтобы в законе для силы, действующий на заряд в электрическом поле **E** не было коэффициентов, то

$$\mathbf{F} = q_{\text{мксг}}\mathbf{E}_{\text{мксг}} = q_{\text{си}}\mathbf{E}_{\text{си}}, \qquad \mathbf{E}_{\text{мксг}} = \frac{\mathbf{E}_{\text{си}}}{\sqrt{k_q}}.$$

Для электрических зарядов, токов и поля **E** различия между системами ФТ и $\text{СИ}_{\text{ст}}$ нет.

В МКСГ, как и в СГС, поля $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$ имеют одинаковую размерность. Чтобы сохранить это свойство с ФТ-системе, мы возьмём коэффициенты пересчёта из МКСГ в ФТ для всех четырёх полей одинаковыми. Также возьмём одинаковые коэффициенты пересчёта для всех источников (зарядов, токов, электрических и магнитных мультипольных моментов).

Мы возьмём уравнения электродинамики в системе МКСГ (т.е. в гауссовой форме, точно такие же, как в системе СГС) и сделаем подстановки:

$$(q, \mathbf{j}, \dots)_{\text{мксг}} \to \sqrt{k_q} \cdot (q, \mathbf{j}, \dots)_{\text{фт}},$$

$$(\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H})_{\text{мксг}} \to \frac{1}{\sqrt{k_q}} \cdot (\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H})_{\text{фт}}.$$

*Переводных коэффициентов* из физико-технической системы в привычную всем теоретикам гауссову систему (точнее в МКСГ) всего два: один для всех полей и другой для всех источников (зарядов, токов и моментов). Причём их произведение равно 1[19].

[19] Обратите внимание, что указанные подстановки надо делать только в уравнениях для полей. В уравнениях для электрических цепей и определениях мультипольных моментов никаких подстановок делать не надо, они сохранят тот же вид, что и в гауссовой системе.

### Уравнения в ФТ-системе

В физико-технической системе уравнения электродинамики имеют вид

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{B} &= 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\\
\operatorname{div}\mathbf{D} &= 4\pi k_q\rho, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}k_q\mathbf{j},\\
\mathbf{S} &= \frac{c}{4\pi k_q}[\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}], \quad W = \frac{(\mathbf{E},\mathbf{D})+(\mathbf{B},\mathbf{H})}{8\pi k_q},\\
\sigma_{\alpha\beta} &= \frac{E_\alpha D_\beta + B_\alpha H_\beta}{4\pi k_q} - \delta_{\alpha\beta}W,\\
\mathbf{F} &= q\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}]\right), \qquad L = \frac{\Phi}{cI},\\
\mathbf{D} &= \mathbf{E} + 4\pi k_q\mathbf{P}, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi k_q\mathbf{M}.
\end{aligned}$$

Здесь $\rho$ и $\mathbf{j}$ — плотности заряда и тока, $W$ — плотность энергии, $\mathbf{S}$ — вектор Умова–Пойнтинга, $\sigma_{\alpha\beta}$ — тензор напряжений Максвелла, индексы $\alpha,\beta = 1,2,3$ нумеруют пространственные координаты, $\Phi$ — магнитный поток, $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$ — электрический и магнитный дипольные моменты на единицу объёма.

Если сделать замену $k_q \to 1$, то мы воспроизведём уравнения в гауссовой форме, за исключением индуктивности, которую в СГС иногда определяют как $L_{\text{сгс}} = \frac{\Phi}{I}$. Впрочем, это расхождение следует считать скорее преимуществом, чем недостатком, поскольку оно убирает скорость света из уравнений электрических цепей.

Если положить $k_q = \frac{\varkappa_q}{4\pi}$, где $\varkappa_q = \frac{1}{\varepsilon_0}$ можно назвать *постоянной Хевисайда*, то запись уравнений электродинамики приблизится к записи в системе единиц Хевисайда–Лоренца (ещё одна популярная у теоретиков разновидность системы СГС). Если сделать замену $\varkappa_q = 1$, $k_q = \frac{1}{4\pi}$, то мы воспроизведём уравнения в форме, принятой в системе Хевисайда–Лоренца.

Как видно, переход от формул СГС к ФТ-системе (вставка в формулы постоянной Кулона) легко проводится из соображений размерности. Такой переход не намного сложнее, чем восстановление в формулах постоянной Больцмана, после того как она была положена равной 1.

Поля в старой системе СИ$_{\text{ст}}$ и в физико-технической системе (ФТ) связаны соотношениями

$$\mathbf{E}_{\text{фт}} = \mathbf{E}_{\text{си}_{\text{ст}}}, \qquad \mathbf{D}_{\text{фт}} = \frac{\mathbf{D}_{\text{си}_{\text{ст}}}}{\varepsilon_0},$$

$$\mathbf{B}_{\text{фт}} = c\mathbf{B}_{\text{си}_{\text{ст}}}, \qquad \mathbf{H}_{\text{фт}} = \frac{\mathbf{H}_{\text{си}_{\text{ст}}}}{c\varepsilon_0} = c\mu_0\mathbf{H}_{\text{си}_{\text{ст}}},$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k_q}, \qquad \mu_0 = \frac{1}{c^2\varepsilon_0} = \frac{4\pi k_q}{c^2}.$$

Для соответствия со старой системой СИ$_{\text{ст}}$ полезно определить *«приведённое» магнитное поле*, совпадающее с полем старой системы СИ$_{\text{ст}}$:

$$\mathbf{B}_{\text{пр}} = \frac{\mathbf{B}_{\text{фт}}}{c} = \mathbf{B}_{\text{си}_{\text{ст}}}.$$

Именно в единицах приведённого поля калиброваны современные измерительные приборы, однако использование его в формулах нежелательно[20].

### 4.2.5. Система СИ в электродинамике

Приведём для сравнения вид тех же ключевых уравнений электродинамики в системе СИ:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{B} &= 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\\
\operatorname{div}\mathbf{D} &= \rho, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j},\\
\mathbf{S} &= [\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}], \quad W = \frac{1}{2}(\mathbf{E},\mathbf{D}) + \frac{1}{2}(\mathbf{B},\mathbf{H}),\\
\sigma_{\alpha\beta} &= (E_\alpha D_\beta + B_\alpha H_\beta) - \delta_{\alpha\beta}W,\\
\mathbf{F} &= q\left(\mathbf{E} + [\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}]\right), \qquad L = \frac{\Phi}{I},
\end{aligned}$$

[20] Запомнить это не сложно, исходя из того, что формула для силы Лоренца, записанная через приведённое поле, не содержит скорость света.

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}, \qquad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}.$$

Может показаться, что уравнения в системе СИ проще, чем в СГС или в ФТ-системе. Чтобы развеять эту иллюзию и объяснить причину предпочтения теоретиков, запишем уравнения СИ в вакууме (исключив поля $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$):

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{B} &= 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\\
\operatorname{div}\mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0}\rho, \quad \operatorname{rot}\mathbf{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0\mathbf{j} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\mathbf{j},\\
\mathbf{S} &= \frac{1}{\mu_0}[\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}] = \varepsilon_0 c^2[\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}],\\
W &= \frac{\varepsilon_0}{2}\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2 = \frac{\varepsilon_0}{2}(\mathbf{E}^2 + c^2\mathbf{B}^2),\\
\sigma_{\alpha\beta} &= \varepsilon_0\left(E_\alpha E_\beta + c^2 B_\alpha B_\beta\right) - \delta_{\alpha\beta}W.
\end{aligned}$$

### 4.2.6. Смысл постоянной Кулона

Традиция гауссовой системы единиц предполагает, что постоянная Кулона не имеет физического смысла, поскольку представляет собой всего лишь квадрат отношения двух единиц заряда:

$$\{k_q\} = \left(\frac{q_{\text{мксг}}}{1\text{Кл}}\right)^2.$$

$$q_{\text{мксг}} = \sqrt{\text{Дж}\cdot\text{м}} = \text{кг}^{1/2}\cdot\text{м}^{3/2}\cdot\text{с}^{-1} = 10^{4{,}5}\ \text{ед.заряда СГС}$$

— единица заряда в гауссовой системе МКСГ.

В старой версии системы СИ, в которой ампер, а вместе с ним и кулон определяются через силу, действующую между двумя параллельными проводниками с током, это мнение о нефизичности $k_q$ абсолютно справедливо.

В 2018 году XXVI Генеральная конференция по мерам и весам приняла Резолюцию «О пересмотре Международной системы единиц, СИ» [8]. В этой резолюции определение килограмма дано через задание точного значения постоянной Планка:

$$h = 2\pi\hbar = 6{,}626\,070\,15\cdot 10^{-34}\ \text{Дж}\cdot\text{с},$$

а ампер определён через заряд электрона, которому приписано точное значение

$$e = 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл}.$$

Ещё в 1983 году был переопределён метр, путём задания точного значения скорости света в вакууме, для которой с тех пор *по определению* принято фиксированное *точное* значение:

$$c = 299\,792\,458\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Таким образом, в определении постоянной тонкой структуры[21]

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} = \frac{k_q e^2}{\hbar c}$$

оказываются *точно заданы по определению* все величины, кроме постоянной Кулона. Таким образом:

$$k_q = \frac{\hbar c}{e^2} \cdot \alpha = C_\alpha \cdot \alpha.$$

Мы видим, что численное значение $k_q$ в реформированной системе СИ — это постоянная тонкой структуры, умноженная на некоторый фиксированный численный множитель, который выбран так, чтобы переопределённые единицы массы и тока воспроизводили принятые на сегодняшний день с точностью, доступной современным (на момент реформы СИ) измерительным приборам.

Дальнейшее улучшение точности измерений неизбежно приведёт к тому, что различие единиц измерения современной системы СИ и реформированной станет доступно измерению. С этого момента постоянная Кулона станет действительно фундаментальной константой — постоянной тонкой структуры, умноженной на исторически фиксированный коэффициент $C_\alpha$.

---

[21]Постоянная тонкой структуры представляет собой квадрат отношения элементарного заряда к планковскому $\alpha = \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)_{\text{СГС}} = \left(\frac{e}{q_{\text{пл}}}\right)^2 \approx \frac{1}{137{,}035\,999}$.

Таким образом, постоянная Кулона приобретает физический смысл благодаря тому, что для электрического заряда существует естественная единица (элементарный заряд), которая не кратна планковскому заряду.

Спор между гауссовой системой и реформированной системой СИ в части определения единицы электрического разряда сводится к тому, определить ли эту единицу через элементарный заряд (новая СИ) или через планковский заряд (СГС и старая СИ). Поскольку планковский заряд в природе не реализуется, выбор представляется очевидным.

### 4.2.7. Практические единицы и переопределение ампера и килограмма

Этот раздел основан преимущественно на материалах статьи С. Г. Каршенбойма «О переопределении килограмма и ампера в терминах фундаментальных физических констант» [15].

*Одновременное* переопределение килограмма и ампера путём фиксирования точного численно значения постоянной Планка и элементарного заряда связано также с тем, что в настоящее время воспроизведение эталона ампера на основе его официального определения через силу взаимодействия параллельных проводников с током, т.е. на основе фиксации точного численного значения

$$\mu_0 = \frac{\varepsilon_0}{c^2} = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Гн/м},$$

менее точно, чем определение ампера на основе квантовых эффектов. На квантовых эффектах основаны эталоны «практических» единиц 1990 года: вольт-1990 и ом-1990.

Вольт-1990 определяется с помощью эффекта Джозефсона. При протекании сверхпроводящего тока через джозефсоновский контакт лишняя энергия $2eU$, полученная куперовскими парами за счёт внешнего напряжения, излучается в виде фотонов с частотой $\nu = \frac{2e}{h} U$. Определение вольта-1990 фиксирует точное численное значение коэффициента пропорциональности между напряжением и частотой (постоянной Джозефсона):

$$K_J = \frac{2e}{h} = 483\,597{,}9\ \frac{\text{ГГц}}{\text{В}_{90}}.$$

Ом-1990 определяется с помощью квантового эффекта Холла. В нормальном (целочисленном) квантовом эффекте Холла (наблюдается в двумерном вырожденном электронном газе при низких температурах и магнитном поле, перпендикулярном плоскости газа) поперёк направления тока возникает напряжение, пропорциональное току $U_y = \rho_{xy} I_x$. Холловское сопротивление имеет вид $\rho_{xy} = \frac{R_K}{n}$, где $n$ — натуральное число. Определение ома-1990 фиксирует точное численно значение постоянной фон Клитцинга:

$$R_K = \frac{h}{e^2} = 25\,812{,}807\ \text{Ом}_{90}.$$

Таким образом, *одновременная* фиксация постоянных Джозефсона и фон Клитцинга фиксирует численные значения постоянной планка и элементарного заряда. Дополнив практические единицы вольт-1990 и ом-1990 секундой и метром, мы получаем альтернативный вариант системы СИ — практическую систему единиц, которая отличается от СИ. В частности, «практический килограмм» отличается от эталона на $10^{-7}$, а «практическая» константа $\mu_0$ не является фиксированным числом.

Поскольку для многих измерений сейчас основным источником погрешности является не само измерение, а определение единиц измерения, а практические единицы оказываются определены точнее единиц СИ, изменение определения килограмма и ампера на основе фиксации $h$ и $e$ представляется естественным, что и было отражено в Резолюциях 2011 г. и 2018 г. [7, 8]. Разумеется, это не означает принятие вольта-1990 и ома-1990 в качестве новых эталонов СИ, поскольку с 1990 года точность измерений возросла, и расхождение «практического килограмма» с эталоном на $10^{-7}$ уже не может считаться приемлемым.

### 4.2.8. Понятие о системе систем единиц измерения

Есть системы единиц, в которых проводят измерения и делают вычисления с экспериментально измеренными физическими величинами, а есть системы единиц, в которых удобно делать теоретические выкладки, но единицы измерения которых неудобны для реальных измерений.

Удобно, когда переход к «теоретическим» единицам осуществляется просто путём задания некоторых входящих в формулы констант равными единице. Например, часто теоретики в своих выкладках полагают единице постоянную Больцмана. Это очень удобно для теоретика, но непригодно для экспериментатора. Однако, получив результат, теоретик легко восстанавливает в конечных формулах постоянную Больцмана из соображений размерности. Аналогично в специальной теории относительности могут полагать единицей скорость света, а в общей — ещё и гравитационную постоянную. В квантовой механике полагают единицей постоянную Планка, а в атомной физике — массу электрона. Во всех этих случаях обратный переход к экспериментальным единицам легко осуществляется из соображений размерности.

Мы имеем вполне естественную *систему систем* «теоретических» единиц, в основании которой лежит гауссова система СГС. Из СГС получаются системы единиц, удобные для различных разделов физики, в которых единицами полагаются те или иные размерные константы. И так вплоть до полностью безразмерных систем единиц наподобие планковской.

Однако из-за разных подходов к записи уравнений электродинамики система систем единиц измерения, основанная на СГС, оказывается оторванной от экспериментальной системы единиц СИ: правила перехода между ними слишком неудобны и не сводятся к приравниванию констант единице.

Физико-техническая система единиц естественным образом становится в основание системы систем единиц измерения перед гауссовой системой, связывая тем самым систему систем с экспериментом.

# Литература


1. Иванов М. Г. Физико-техническая система единиц для электродинамики // Инженерная физика. — 2015. — №1. – С. 4–12; Ivanov M. G. Physics and technology system of units for electrodynamics // (опубликована online). — 2015. – 12 с. Расширенная английская версия статьи, arXiv:1512.05394

2. Гладун А. Д. Педагогические раздумья физика. М. : МФТИ, 2005.

3. Трунов Г. М. Уравнения электромагнитизма и системы единиц электрических и магнитных величин. М. : ФОРУМ, 2011.

4. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.

5. The International System of Units (SI), 8th edition. — Sèvres: BIPM, 2006. `https://www.bipm.org/utils/common/pdf/si_brochure_8_en.pdf`, `https://mipt.ru/upload/medialibrary/e7a/si_brochure_8_en.pdf`

6. The International System of Units (SI), 7th edition. — Sèvres: BIPM, 1998. `https://mipt.ru/upload/medialibrary/fb7/si_brochure_7_en.pdf`

7. On the possible future revision of the International System of Units, the SI. Resolution 1 of the 24th meeting of CGPM (2011); `http://www.bipm.org/en/CGPM/db/24/1/`

8. On the revision of the International System of Units (SI). Resolution 1 of the 26th meeting of CGPM (2018) `https://www.bipm.org/en/CGPM/db/26/1/`

9. Сивухин Д. В. // УФН — 1979. — Т. 129 – С. 335. `https://ufn.ru/ru/articles/1979/10/h/` [Sivukhin D. V. // Sov. Phys. Usp. — 1979. — V. 22 – P. 834.]

10. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Т. III. Электричество. — М. : Физматлит; МФТИ, 2004. § 85 «Международная система единиц (СИ)»

11. Булыгин В. С. *частное сообщение.*

12. Трунов Г. М. Приведение единиц электрических и магнитных величин системы СИ в соответствие с современным представлением об электромагнитном поле // Физическое образование в вузах. — 2001. — Т. 7. № 4. – С. 12–21.

13. Трунов Г. М. Коррекция математической формы записи уравнений электромагнетизма и создание на их основе новой системы электромагнитных единиц // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки. — 2006. № 2. – С. 66–75. `http://pstu.ru/files/file/FPMM/el.pdf`

14. Трунов Г. М. Уравнения электромагнетизма и системы электромагнитных единиц — прошлое, настоящее, будущее // Законодательная и прикладная метрология. — 2006. — № 2. – С. 46–52. `http://pstu.ru/files/file/FPMM/2006_2.doc`

15. Каршенбойм С. Г. // УФН — 2006. — Т. 176. – Р. 975. `https://ufn.ru/ru/articles/2006/9/e/`, [Karshenboim S. G. // Phys. Usp. — 2006. — V. 49. – P. 947]

# Глава 5

# Иные системы единиц и внесистемные единицы*

В различных областях науки (в первую очередь физики) могут использоваться разные системы единиц, удобные при рассмотрении конкретных задач. Обычно в таких системах фиксированы численные безразмерные значения тех или иных физических констант. Принято такие константы приравнивать единице, причём безразмерной единице. Тем самым количество независимых размерностей в теории снижается. Иногда в такой системе единиц все величины оказываются безразмерными. В этом случае переход к такой системе часто называют *обезразмериванием*.

## 5.1. Атомные единицы*

Атомная физика описывает явления, связанные с химией и спектроскопией. Эти явления связаны, главным образом, с поведением электронов в поле атомных ядер. По этой причине именно параметры электрона оказываются естественными масштабами:

единица заряда — *элементарный электрический заряд* $e = 1 \approx 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл (заряд электрона считается равным $-1$);

единица массы — *масса электрона* $m_e = 1 \approx 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг;

*постоянная в законе Кулона*[1] $k_q = 1$, что соответствует соглашению, принятому в системе единиц СГС-гауссовой.

Для электрона в атомной физике существенны квантовые свойства. В частности, энергия $E_{\text{ф}}$ *фотонов* (квантов электро-

[1] По закону Кулона сила взаимодействия двух неподвижных точечных электрических зарядов $F = k_q \frac{q_1 q_2}{r^2}$, а потенциальная энергия — $E_{\text{п}} = k_q \frac{q_1 q_2}{r}$.

магнитного излучения) оказывается пропорциональна частоте электромагнитной волны $\nu$ (или циклической частоте $\omega = 2\pi\nu$):

$$E_{\text{ф}} = h\nu = \hbar\omega.$$

Коэффициент пропорциональности $h$ называется постоянной Планка (также *квант действия*), а $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ — *приведённая постоянная Планка*. Их размерность — энергия, умноженная на время:

$$[h] = [\hbar] = [E][T] = ML^2T^{-1}.$$

В атомной системе единиц полагают $\hbar = 1 \approx 1{,}055 \cdot 10^{-34}$ Дж · с. При этом $\hbar$ оказывается также удобной единицей *момента импульса*, [2] поскольку в квантовой механике любой момент импульса кратен $\frac{\hbar}{2}$.

Атомные единица длины, времени, энергии и т.д. получаются как комбинации $e$, $m_e$ и $\hbar$ с соответствующими размерностями:

$$a = \frac{\hbar^2}{mk_q e^2} = 0{,}529 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 0{,}529 \text{ Å}$$

— радиус Бора (радиус атома водорода),

$$t_{\text{а}} = \frac{\hbar^3}{mk_q^2 e^4} = 2{,}419 \cdot 10^{-19} \text{ с},$$

$$E_{\text{а}} = \frac{k_q^2 m e^4}{\hbar^2} = 4{,}34 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 27{,}1 \text{ эВ}$$

— удвоенная энергия связи электрона в атоме водорода.

Все физические величины в атомных единицах безразмерны.

## Упражнения

В атомной системе единиц найдите единицы (формулы и численные значения)

1. Электрического тока.

[2] При движении по окружности момент импульса — произведение импульса на радиус окружности.

2. Электрического напряжения.

3. Давления.

## 5.2. Электронвольт*

Электронвольт эВ, который мы упоминали выше в числе единиц измерения физики высоких энергий, обычно считается внесистемной единицей. То есть он может использоваться наряду с единицами других систем, как дополнительная единица энергии.

Электронвольт — это энергия, которая сообщается электрону, прошедшему разность потенциалов (напряжение) в 1 В. Эта единица весьма удобна, поскольку близка к химической энергии на один электрон при многих химических, электрохимических или спектроскопических процессах.

Например, напряжение типичного гальванического элемента (батарейки) — $V = 1{,}2$ В, электрохимическая энергия, выделяющаяся при прохождении через батарейку одного электрона — $e \cdot V = 1{,}2$ эВ.

Теплота сгорания водорода, при пересчёте на один валентный электрон водорода (на одну химическую связь), — 1,46 эВ, теплота сгорания углерода (древесный уголь) на один валентный электрон — 0,96 эВ. (Удельные теплоты сгорания на кг отличаются намного сильнее: $1{,}409 \cdot 10^9$ Дж/кг для водорода и $31 \cdot 10^6$ Дж/кг для углерода.)

Энергия фотона видимого света — от 1,68 эВ (граница красного и невидимого инфракрасного) до 3,26 эВ (граница фиолетового и невидимого ультрафиолетового).

Энергия ионизации атома водорода (энергия, которая нужна, чтобы отодрать электрон от атома) — 13,6 эВ.

Почему все перечисленные энергии оказались так близки друг к другу? Это связано с тем, что все они определяются процессами, обусловленными движением электронов в поле атомных ядер.

Почему электронвольт оказался столь удобной единицей? Понятно, что заряд электрона — фундаментальная константа, за-данная природой. Но почему вольт оказался такой удобной единицей? Как мы упоминали выше, в системе СИ основная единица, связанная с электрическими явлениями, — ампер. Ампер когда-то был введён как кратная единица для соответствующей единицы системы СГСМ. При этом был выбор, какую степень числа 10 использовать. Этот выбор одновременно определял величины единицы силы тока ампера и единицы напряжения вольта:

$$\text{В} = \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{А}}.$$

Единицы вольт и ампер изначально назывались *практические единицы*, т.е. они должны были быть удобными для прикладных задач. Поэтому не удивительно, что степени 10 были подобраны так, чтобы напряжение типичного гальванического элемента было порядка вольта. Тем самым электронвольт оказался подогнан к атомным масштабам энергии.

## 5.3. Единицы физики высоких энергий*

В физике высоких энергий скорости частиц могут быть сравнимы со скоростью света в вакууме $c$ (мы обязаны при этом учитывать эффекты специальной теории относительности), поэтому оказывается удобным положить $c = 1 = 299\,792\,458$ м/с. Тем самым все скорости делаются безразмерными, а скорость света превращается в коэффициент пересчёта секунд в метры. При этом и метры и секунды можно использовать как единицы расстояния или времени. (Когда астрономы измеряют расстояние в световых годах, то они как раз измеряют расстояние в единицах времени.)

Положив $c = 1$, мы обязаны измерять в одинаковых единицах массу, импульс и энергию. В специальной теории относительности импульс —

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx mv.$$

Энергия движущейся частицы (кинетическая и внутренняя, без учёта потенциальной) —

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2}.$$

Приблизительные равенства относится к малым скоростям $v \ll c$.

Как и в атомной системе единиц, элементарный заряд $e = 1$.

В качестве единицы энергии (а также массы и импульса) обычно используют электронвольт — произведение заряда электрона на напряжение 1 вольт:

$$\text{эВ} = e \cdot \text{В} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Дж} \approx 1{,}78 \cdot 10^{-36}\ \text{кг}.$$

Для масс частиц используются кратные единицы. Так, массы электрона и протона (ядра атома водорода)

$$m_e \approx 0{,}51\ \text{МэВ}, \qquad m_p \approx 0{,}938\,272\ \text{ГэВ}.$$

Единицей длины (и времени!) можно оставить метр. Единицей электрического напряжения остаётся вольт: $\text{В} = \frac{\text{эВ}}{e} = \frac{e \cdot \text{В}}{e}$. Таким образом, в описанной системе единиц измерения есть две независимых размерности: единица массы/энергии/импульса и единица длины/времени.

## Упражнения

В единицах физики высоких энергий найдите единицы (формулы и численные значения)

1. Электрического тока.

2. Электрического напряжения.

3. Давления.

## 5.4. Планковские единицы**

Физики-теоретики, занимающиеся квантовой теорией поля, часто используют планковскую систему единиц, в которой основные фундаментальные константы полагаются безразмерными и равными 1. Это:

- постоянная Больцмана $k_\text{Б} = 1 \approx 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К (кинетическая энергия молекулы идеального газа — $\frac{3}{2}k_\text{Б}T$);
- константа Кулона $k_q = 1 \approx 8{,}99 \cdot 10^9$ Н $\cdot$ м$^2 \cdot$ Кл$^{-2}$ (сила взаимодействия двух неподвижных точечных электрических зарядов $F_\text{э} = k_q \frac{q_1 q_2}{r^2}$);
- гравитационная постоянная $G = 1 \approx 6{,}673 \cdot 10^{-11}$ м$^3 \cdot$ с$^{-2} \cdot$ кг$^{-1}$ (сила гравитационного притяжения двух неподвижных точечных масс $F_\text{г} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$);
- скорость света $c = 1 = 299\,792\,458$ м/с;
- приведённая постоянная Планка $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1 \approx 1{,}055 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с.

Введение планковских единиц демонстрирует, что размерные константы не могут быть фундаментальными. Их можно трактовать как коэффициенты перевода одних единиц в другие:

- постоянная Больцмана — коэффициент перевода единиц температуры в единицы энергии;
- скорость света — коэффициент перевода единиц времени в единицы длины;
- константа Кулона (если мы уже положили $c = 1$) — коэффициент пересчёта единиц квадрата заряда в единицы момента импульса;
- гравитационная постоянная (если мы уже положили $c = 1$) — коэффициент пересчёта единиц массы (энергии) в единицы длины;

- приведённая постоянная Планка — коэффициент перевода единиц частоты в единицы энергии.

По-настоящему фундаментальными (не зависящими от выбора системы единиц) являются безразмерные комбинации фундаментальных констант. Например, *постоянная тонкой структуры*:

$$\alpha = \frac{k_q e^2}{\hbar c} = \left(\frac{e}{q_P}\right)^2 \approx \frac{1}{137{,}036},$$

здесь $q_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{k_q}}$ — планковская единица заряда.

Планковские единицы длины, времени, энергии и т.д. получаются как комбинации $k$, $k_q$, $G$, $c$ и $\hbar$ с соответствующими размерностями:

$$m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 2{,}1765{\cdot}10^{-8}\ \text{кг} \approx 1{,}22{\cdot}10^{28}\ \frac{\text{эВ}}{c^2} \text{ — планковская масса,}$$

$$E_P = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \approx 1{,}956{\cdot}10^{9}\ \text{Дж} \approx 543{,}3\ \text{кВт·ч} \text{ — планковская энергия,}$$

$$l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1{,}616 \cdot 10^{-35}\ \text{м — планковская длина,}$$

$$t_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 5{,}39 \cdot 10^{-44}\ \text{с — планковское время.}$$

Из соображений размерности предполагается, что на планковских масштабах должны проявляться эффекты квантовой гравитации (теория которой пока не создана). На сегодня лучшая неквантовая теория гравитации (общая теория относительности — ОТО) является также теорией пространства-времени. Поэтому ожидается, что квантовая теория гравитации сможет объяснить эффекты ОТО, которые пока не имеют объяснения, включая рождение Вселенной, излучение чёрных дыр, а также, быть может, даже такие фантастические (пока не обнаруженные явления), как машины времени, быстрые (сверхсветовые) путешествия вне нашего привычного пространства и другие чудеса.

Однако планковские масштабы таковы, что мы пока не можем себе представить их достижения на исторически обозримых временах. В современных ускорителях достигаются энергии «всего лишь» порядка $10^{13}$ эВ на частицу, т.е. в $10^{15}$ раз меньше. В космических лучах встречаются частицы с энергиями порядка $10^{20}$ эВ, но и им не хватает восьми порядков.

Планковская масса — это макроскопическая величина. Такую массу имеет видимая невооружённым глазом капля воды диаметром около 0,3 мм. Казалось бы немного, но сообщить энергию $E_P = m_P c^2$ одной элементарной частице пока невозможно[3].

Планковское расстояние поразительно мало. Если размер Земли порядка $10^4$ м, размер человека $\sim 10^0$ м, размер атома $\sim 10^{-10}$ м, атомного ядра — $\sim 10^{-15}$ м, то планковская длина $\sim 10^{-35}$ м. То есть отношение размера Земли к размеру атомного ядра $\sim 10^{19}$, а отношение размера атомного ядра к планковской длине в 10 раз больше — $\sim 10^{20}$.

Начиная с 1990-х годов, физики научились придумывать модели (которые пока не являются последовательными теориями), в которых эффекты квантовой гравитации должны проявляться уже на следующем поколении ускорителей.

Интересно, что с квантовой гравитацией связывают «самую большую ошибку теории размерности»: было бы естественно оценить космологическую постоянную (энергию вакуума на единицу объёма[4]) как планковское давление

$$P_P = \frac{m_P c^2}{l_P^3} = \frac{c^7}{G^2\hbar} \approx 4{,}637 \cdot 10^{113}\ \text{Дж} \cdot \text{м}^{-3}.$$

Астрономические наблюдения последних десятилетий установили, следующее значение космологической постоянной:

$$\Lambda \approx 5{,}98 \cdot 10^{-10}\ \text{Дж} \cdot \text{м}^{-3}.$$

[3]Тротиловый эквивалент такой энергии около 500 кг ТНТ. Примерно такой была дульная энергия сверхтяжёлой пушки «Дора», из которой немцы обстреливали Севастополь в 1942 г.

[4]Извлечь из вакуума эту энергию и использовать для совершения работы невозможно, поскольку любое другое состояние пространства будет иметь более высокую энергию. Так что любая реклама приборов, извлекающих «энергию из вакуума», — это заведомое шарлатанство.

Таким образом, оценка из соображений размерности даёт ошибку в $10^{123}$. Вероятно, это означает, что планковское давление соответствует какой-то другой фундаментальной величине с размерностью давления, но ни в коем случае не космологической постоянной.

## Упражнения

Модифицируем планковскую систему единиц, изменив набор фундаментальных констант, которые приравниваются 1. Для каждого случая найти формулы и численные значения единиц длины, массы, времени, энергии, заряда. Также вычислить численное (безразмерное!) значение той константы, которая ранее в планковских единицах полагалась 1.

1. Вместо гравитационной постоянной $G$ взять элементарный заряд $e = 1$. Определить единицы и найти значение $G$.

2. Вместо постоянной Планка $\hbar$ взять элементарный заряд $e = 1$. Определить единицы и найти значение $\hbar$.

3. Вместо гравитационной постоянной $G$ взять массу электрона $m_e = 1$. Определить единицы и найти значение $G$.

# Глава 6

# Подобие

## 6.1. Геометрическое подобие. Пифагоровы слоны на все стороны равны

Простейший частный случай подобия — геометрическое подобие. Для его рассмотрения нам достаточно одной основной единицы измерения — единицы длины. Геометрическая размерность имеет вид $L^a$.

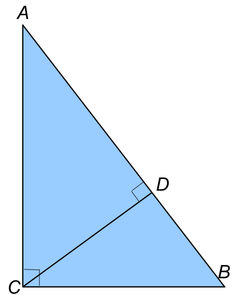



**Рис. 6.1:** К доказательству теоремы Пифагора из подобия треугольников.

Мы можем доказать теорему Пифагора из подобия треугольников (см. рис. 6.1). Проведём в прямоугольном треугольнике $ABC$ высоту $CD$, соединяющую прямой угол $C$ и гипотенузу $AB$. Согласно признаку подобия треугольников по двум углам, видим, что треугольники $ABC$, $ACD$ и $CBD$ подобны. При этом площадь исходного треугольника $ABC$ разбивается на сумму площадей треугольников $ACD$ и $CBD$. Площади подобных треугольников (как и всяких подобных фигур) пропорциональны квадратам соответствующих размеров, например квадратам гипотенуз. Гипотенузы наших треугольников — это $AB$, $AC$ и $CB$ соответственно.

$$S_{ABC} = k(AB)^2, \qquad S_{ACD} = k(AC)^2, \qquad S_{CBD} = k(CB)^2,$$

$$S_{ABC} = S_{ACD} + S_{CBD},$$

$$k(AB)^2 = k(AC)^2 + k(CB)^2.$$

Сокращая коэффициент[1] $k$, получаем привычную теорему Пифагора.

Площади *любых* подобных фигур пропорциональны квадратам размеров, поэтому вместо квадратов мы можем брать любые фигуры. Например, на рисунках 6.2 на сторонах прямоугольного треугольника изображены подобные слоны, чьи размеры пропорциональны соответствующим сторонам. Рисунок справа демонстрирует, что отношение площади слона к площади соответствующего квадрата не зависит от размеров слона, а значит, теорема Пифагора формулируется для слонов не хуже, чем для квадратов.

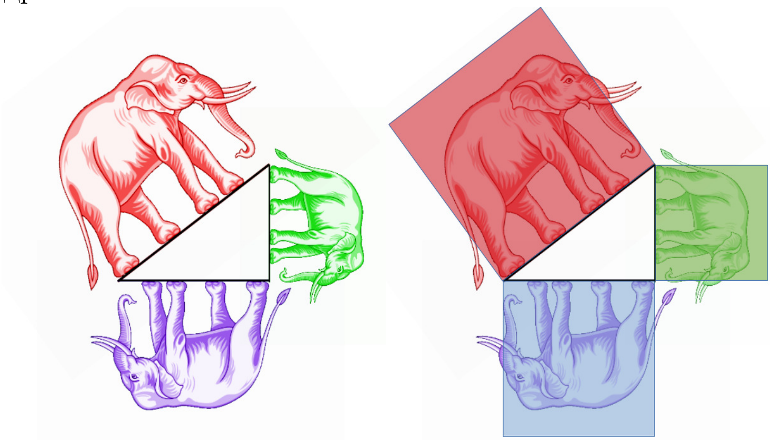


**Рис. 6.2:** Пифагоровы слоны на все стороны равны: площадь слона, стоящего на гипотенузе, равна сумме площадей слонов, стоящих на катетах. [Слоны взяты с флага Сиама PD, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Flag_of_Siam_(1855).svg]

## 6.2. Механическое подобие

### 6.2.1. Механика: пóрок (требушет)

[1]Легко видеть, что $k = \frac{1}{2}\sin(\angle ABC)\cdot\cos(\angle ABC)$, но для доказательства теоремы важно только то, что $k \neq 0$.

Рассмотрим средневековый камнемёт-по́рок (см. рис. 6.3). При опускании противовеса быстро поднимается рычаг, на конце которого на длинной верёвке в сетке находится камень. Когда сетка открывается, камень вываливается из сетки и летит в цель. За счёт большого отношения плеч рычага груз опускается сравнительно медленно, конец рычага движется существенно быстрее.

**Рис. 6.3:** Требушет около замка де Бо во Франции (реконструкция). [Quistnix. http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Trebuchet.jpg]

По́рок работает за счёт энергии опускания противовеса. Заряжая камнемёт, противовес поднимают вручную. Для этого рычаг опускают верёвкой, которая наматывается на ворот.

На фотографии рис. 6.3 мы видим реконструкцию по́рока в натуральную величину. Видно, что эта конструкция весьма громоздкая. Примерные параметры настоящего по́рока: высота — около 7 м, длина рычага — 10–12 м, масса противовеса — 10–15 т, масса ядра — 100–150 кг, дальнобойность — около 200 м[2].

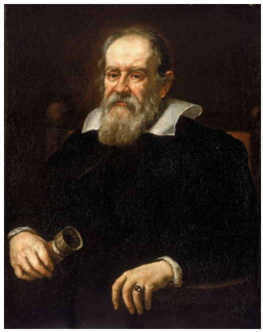


**Рис. 6.4:** Галилео Галилей (1564–1642) [https://en.wikipedia.org/wiki/File:Justus_Sustermans_-_Portrait_of_Galileo_Galilei,_1636.jpg]

Представьте себе, что вы хотите сделать более скромную модель, уменьшив все размеры пропорционально и используя те же материалы (действующие игрушечные требушеты бывают высотой до 1 м).

Какова будет дальнобойность модели по сравнению с большой машиной? Для этого определим, какие размерные параметры являются наиболее важными: размер модели (например, высота) $H$ (измеряется в метрах, размерность — $L$), ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с$^2$ (размерность — $LT^{-2}$), плотность камня (из которого сделаны снаряд и противовес) $\rho$ (измеряется в килограммах на метр кубический, размерность — $L^{-3}M$).

[2] http://copypast.ru/2011/12/22/iz_istorii_kamnemetalok.html

Конечно, высота камнемёта — не единственный его размер, но мы считаем, что все размеры уменьшены в одинаковое число раз. Таким образом, их можно выразить через $H$, а отношение любого размера к $H$ безразмерно. Размерна также плотность дерева, но отношение плотности дерева к плотности камня безрамерно.

Сопротивлением воздуха при малых скоростях снаряда мы можем пренебречь.

При принятых условиях дальнобойность $l$ должна выражаться формулой вида

$$l = k_l \cdot H^a \cdot g^b \cdot \rho^c,$$

где $k_l, a, b, c$ — безразмерные параметры. Дальность $l$ должна выражаться в единицах длины. Находим, что единственное решение: $a = 1$, $b = c = 0$. Чтобы определить $k_l$, надо знать безразмерные параметры (отношения размеров и плотностей) и всерьёз исследовать динамику камнемёта. Тем не менее мы определили, что

$$l = k_l \cdot H.$$

То есть дальнобойность по́рока прямо пропорциональна его размерам. Если мы в 10 раз уменьшили высоту, то дальнобойность тоже уменьшилась в 10 раз. Интересно, что в формулу не вошло ускорение свободного падения. Это означает, что, например, на Луне дальность камнемёта будет прежней: противовес будет опускаться медленнее, камень полетит медленнее, но Луна будет слабее притягивать камень, и он улетит на то же самое расстояние, что и на Земле.

Аналогично для массы любой детали (не важно, каменной или деревянной):

$$m = k_m \cdot \rho \cdot H^3.$$

Плотность фиксирована выбором материала, так что все массы пропорциональны $H^3$, т.е. объёму.

Для любой силы, действующей в конструкции,

$$F = k_F \cdot \rho \cdot H^3 \cdot g.$$

Для силы тяжести это очевидно, но поскольку размерность силы получается единственным способом $\rho \cdot H^3 \cdot g$, то для разных сил мы будем получать одинаковую зависимость от $\rho$, $H$ и $g$ с разными коэффициентами $k_F$. Это и сила давления требушета на землю, и сила растяжения верёвки при выстреле, и сила, действующая на ось.

Особенно интересно выражение для отношения силы и площади (удельная нагрузка). Такую размерность имеет давление (на землю), растяжение (верёвки), напряжение (балок и осей). Именно эти величины определяют прочность конструкции: при давлении выше критического (для данного грунта) машина будет проваливаться в землю, при натяжении выше критического (для данного материала) верёвка порвётся, при напряжении выше критического (для данного металла) ось сломается. Все площади пропорциональны $H^2$, так что для давлений и натяжений имеем

$$P = k_P \cdot \rho \cdot H \cdot g.$$

Плотность фиксирована выбранными материалами, ускорение свободного падения практически фиксировано тем, что мы строим модель на Земле. То есть все напряжения пропорциональны размеру $P \sim H$.

Таким образом, модель по́рока в масштабе 1 : 10 окажется в 10 раз прочнее (во столько раз изменится отношение $P$ к критическому значению, после которого начинается разрушение материала).

Если мы построим модель и убедимся, что она работает и не ломается, то при строительстве устройства в большем масштабе (с соблюдением всех пропорций!) оно может сломаться. Пусть, например, критическая деталь, та, для которой отношение напряжения к критическому ближе всего к 1, — ось. Тогда именно ось сломается первой при постепенном увеличении размеров. Мы можем увеличивать толщину оси быстрее, чем все остальные размеры. Если считать ось невесомой, то, чтобы напряжения в оси оставались неизменными, надо, чтобы её диаметр рос пропорционально $H^{3/2}$. Тогда площадь поперечного сечения оси растёт пропорционально $H^3$, как и сила на неё действующая, и напряжения остаются постоянными. В этом случае при увеличении размеров будет ломаться не ось, а что-то другое, например, будет рваться верёвка, и её толщину тоже придётся наращивать быстрее, чем $H$. Таким образом, нам уже не удастся увеличивать все размеры пропорционально друг другу, и по мере роста масштаба конструкции она будет выглядеть всё более тяжеловесно: детали будут становиться всё более толстыми относительно их длины. Причём, поскольку невесомых деталей не бывает, утолщение и утяжеление деталей будет само требовать дополнительного их утолщения.

Аналогичные простые рассуждения проводил ещё Г. Галилей[3] в своей «Механике»:

> Сальвиати. В таком случае заметьте, синьор Симпличио, что невозможно в равной мере уменьшить поверхность и вес твердого тела, сохраняя подобие его формы. Так как совершенно ясно, что уменьшение веса происходит пропорционально уменьшению объема, то всякий раз, как объем уменьшится более, нежели поверхность (при сохранении подобия формы), и вес уменьшится в большей степени, нежели поверхность. Но геометрия учит, что отношение объемов подобных тел больше, нежели отношение их поверхностей, что для большей наглядности я поясню на следующем примере. Представим себе куб, ребро которого равно двум дюймам, так что каждая из граней содержит четыре квадратных дюйма, а все шесть граней, т. е. вся его поверхность, содержит, таким образом, двадцать четыре квадратных дюйма. Предположим теперь, что куб этот разрезан на восемь маленьких кубиков; ребро каждого из последних будет равно одному дюйму, каждая грань — одному квадратному дюйму, вся же поверхность — шести квадратным дюймам, тогда как поверхность большего куба равнялась двадцати четырем квадратным дюймам. Теперь вы видите, что поверхность малого кубика составляет четвертую часть

[3] Галилео Галилей. Избранные труды. М. : Наука, 1964. http://scilib-physics.narod.ru/Discorsi/index.html

поверхности большего (отношение шести к двадцати четырем), в то время как объем его уменьшился до одной восьмой большего. Объем, а вместе с ним и вес уменьшились, следовательно, в большей степени. Если вы разделите теперь малый кубик еще на восемь частей, то поверхность нового кубика будет содержать полтора квадратных дюйма, что составит всего одну шестнадцатую часть всей поверхности первоначального куба, объем же его будет равен лишь одной шестьдесят четвертой части того же куба. Вы видите, что путем всего лишь двух делений мы уменьшили объем в четыре раза значительнее, нежели поверхность; если же путем последовательных делений мы дойдем до раздробления первоначального тела на частицы, образующие мельчайший порошок, то найдем, что вес этих мельчайших атомов уменьшился в сотни и сотни раз значительнее, нежели поверхность. То, что я показал вам сейчас на примере куба, происходит и со всякими другими подобными друг другу телами, отношение между объемами которых равняется полуторному отношению их поверхностей[4].

### 6.2.2. Биофизика: подобные животные

При написании данного раздела использовалась книга К. Ю. Богданова «Физик в гостях у биолога»[5].

#### Почему плохо быть слишком большим

Многое из соображений предыдущего раздела о конструкции камнемёта применимо не только к механизмам, но и к живым организмам. Только не ко всем силам, а лишь к силам, связанным с земным тяготением. При этом кроме удельной нагрузки,

---

[4]Полуторное отношение (терминология времён Галилея) — отношение величин в степени $3/2$.

[5]Богданов К. Ю. Физик в гостях у биолога. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. — 1986. – 144 с. — (Б-чка «Квант». Вып. 49)

вызывающей разрушение, появляется ещё одна важная удельная нагрузка. Это максимальное напряжение, которое может создать мышца.

С увеличением размеров животного при соблюдении пропорций возрастает, например, удельная нагрузка на кости. Чтобы частично компенсировать это, толщина костей растёт быстрее, чем размер животного. Увеличение удельной нагрузки (для подобных животных) пропорционально $H$. Оно относится не только к пассивному стоянию. Если человек споткнётся и упадёт с высоты собственного роста, то более рослый человек падает с большей высоты, развивает большую скорость и сильнее травмируется.

Такие рассуждения объясняют, с одной стороны, почему невозможны сказочные великаны (их раздавит собственным весом), а с другой стороны, почему муравей легко тащит соломинку, которая намного тяжелее его.

Эти простые соображения также восходят к Г. Галилею, который в «Механике» от рассмотрения подобных механизмов переходит к подобным животным:

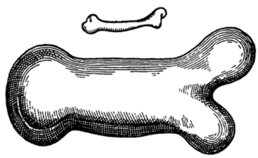
> Из того, что было сейчас доказано, мы ясно видим невозможность не только для искусства, но и для самой природы беспредельно увеличивать размеры своих творений. Так, невозможна постройка судов, дворцов и храмов огромнейшей величины, коих весла, мачты, балки, железные скрепы, словом, все части держались бы прочно. С другой стороны, и природа не может произвести деревьев несоразмерной величины, так как ветви их, отягощенные собственным чрезвычайным весом, в конце концов, сломились бы. Равным образом невозможно представить себе костяка человека, лошади или другого живого существа слишком большой величины, который бы держался и соответствовал своему назначению; достигнуть чрезвычайной величины животные могли бы только в том случае, если бы вещество их костей было значительно прочнее и крепче, нежели обычное, или же если

бы кости их изменились, соразмерно увеличившись в толщину, отчего животные по строению и виду производили бы впечатление чрезвычайной толщины. Это, возможно, уже было подмечено тем проницательнейшим поэтом, который, описывая великана, говорит:

*Нельзя было сказать, насколь он был высок,*

*Так все в нем было непомерно толсто*[6].

В качестве краткого примера только что сказанного я покажу вам сейчас рисунок кости, удлиненной только в три раза, но увеличенной в толщину в такой мере, чтобы она могла служить для большого животного с той же надежностью, как меньшая кость служит для животного малого размера.



Вы видите, какой несообразно толстой выглядит такая увеличенная кость. Отсюда ясно, что тот, кто желал бы сохранить в огромном великане пропорцию членов обыкновенного человеческого тела, должен был бы найти для построения костей какое-либо иное, более удобное и прочное вещество, или же должен был бы примириться с тем, чтобы большое тело обладало крепостью сравнительно меньшею, чем тело человека обычной величины; увеличение размеров до чрезмерной величины имело бы следствием то, что тело было бы раздавлено и сломано тяжестью своего собственного веса. Обратно, мы видим, что, уменьшая размеры тел, мы не уменьшаем в такой же пропорции их прочности; в телах меньших замечается даже относительное увеличение ее, так, я думаю, что небольшая собака может нести на себе двух или даже трех таких же собак, в то время лошадь едва ли может нести на спине одну только другую лошадь, равную ей по величине.

[6]Эти строки взяты из Ариосто, любимого поэта Галилея.

> Симпличио. У меня есть достаточный повод усомниться, а именно, из-за огромной величины тела, встречаемой у рыб; так, например, кит равен по величине, если я не ошибаюсь, десяти слонам, и, однако, тело его все же держится.

> Сальвиати. Ваше сомнение, синьор Симпличио, заставляет меня припомнить еще одно упущенное мною сначала из виду условие, при котором великаны и прочие огромные существа могут жить и двигаться не хуже малых животных. Вместо того, чтобы увеличивать толщину и прочность костей и других частей, предназначенных для поддержания собственного веса и веса прилегающих частей тела, можно, оставив строение и пропорцию костей прежними, уменьшить в значительной мере вес материи как самих костей, так и частей тела к ним прилегающих и ими поддерживаемых. По этому второму пути и пошла природа в творении рыб, сделав их кости и части тела не только легкими, но и вовсе лишенными веса.

### Почему плохо быть слишком маленьким

Для теплокровных животных (млекопитающих, птиц, некоторых рептилий), которые поддерживают постоянную температуру тела, помимо прочности при изменении размеров, существенно соблюдение теплового баланса.

Примем, что на поверхности тела температура примерно постоянна, также примерно постоянна температура окружающей среды (которая ниже температуры животного). Поток тепла пропорционален площади поверхности тела ($\sim L^2$) и квадрату размера[7]:

$$\text{общий поток тепла} = \frac{\text{количество теплоты}}{\text{время}} \sim L^2.$$

Удельная теплоёмкость любого животного практически одинакова и близка к удельной теплоёмкости воды. Поэтому скорость остывания животного (если оно прекратит производить тепло) обратно пропорциональна размеру:

$$\text{скорость остывания} = \frac{\text{изменение температуры}}{\text{время}} \sim L^2/L^3 = L^{-1},$$

а характерное время остывания[8] прямо пропорционально размеру:

$$\text{время остывания} \sim \frac{1}{\text{скрость остывания}} \sim L^3/L^2 = L.$$

*Характерное время остывания пропорционально времени, за которое животное съедает количество пищи, равное его собственной массе.*

Разумеется, подобных животных не бывает, однако возможности изменения формы тела ограничены. Каково бы животное ни было, большего отношения объёма тела к его поверхности, чем у шара, оно не достигнет. Рассмотрим два крайних случая: слона и землеройку.

---

[7]Это означает, что в толще тела более крупного животного температура больше. Если зафиксировать температуру в толще тела, то тепловой поток на единицы поверхности будет обратно пропорционален размерам животного (поверхность тела более маленького животного будет горячее), а суммарный тепловой поток $\sim L$. Поток на единицу массы окажется $\sim L^{-2}$. Какой из двух вариантов предпочесть? Посмотрим на экспериментальные данные.

[8]Например, время за которое разность температур тела и окружающей среды уменьшится вдвое. Время, за которое разность температур полностью выровняется за счёт теплопроводности, формально бесконечно.

**Рис. 6.5:** Землеройка и слон. Землеройка вида крошечная бурозубка (Sorex minutissimus) — самое маленькое млекопитающее в России. [http://www.zooeco.com/eco-mlek/eco-mlek424z1-7.html] Африканский (по современной классификации — саванный) слон. [(PD) Friedrich Wilhelm Kuhnert (1965–1926), http://turambar.ru/hudozhniki-risujut-slonov-2.html]

| | землеройка | слон | $\frac{\text{слон}}{\text{землеройка}}$ |
|---|---|---|---|
| масса | 2–4 г | 3–5 т | $\sim 10^6$ |
| длина тела ($L$) | 4–5 см | $\sim 6$ м | $\underline{\sim 10^2}$ |
| дневной рацион | 4–8 г | 100–300 кг | $\sim 10^4$ |
| пища | насекомые | ветки и трава | |
| калорийность пищи | 2–3 ккал/г | 0,2 ккал/г | $\sim 10^{-1}$ |
| рацион в % к массе | $\sim$ 200% | $\sim$5% | $\underline{\sim 10^{-2}}$ |
| шерсть | есть | почти нет | |
| температура | > 40 С | 36-37 С | |
| уши | маленькие | «лопухи» | |
| сон в сутки | 10–15 мин до 80 раз | 4 часа | $\sim 1/3$ |
| жизнь | до 1,5 лет | до 80 лет | $\sim 50 \sim 10^2$ |

Мы видим, что отношение «прожорливости» слона и землеройки примерно соответствует нашему предсказанию (как и скорость остывания, близко к обратному отношению размеров). Причём у землеройки мы видим механизмы, помогающие поддерживать температуру тела, несмотря на большое отношение поверхности к объёму: мех, маленькие уши, более калорийная пища, длительный сон (во время сна температуру тела можно понизить).

Почему температура поверхности тела землеройки выше? Чтобы успеть поймать и съесть большое количество насекомых ей приходится поддерживать высокую активность.

При такой прожорливости землеройка может умереть от голода за несколько часов. Не случайно ей приходится питаться очень калорийной пищей — насекомыми. Чуть более крупные, чем землеройка, мыши могут позволить себе растительную пищу, но не траву и ветки, а сравнительно калорийное зерно.

Интересно, что отношение продолжительностей жизни слона и землеройки составляет тоже примерно $10^2$, т.е. количество пищи, съеденной за всю жизнь, по отношению к массе животного, оказывается примерно одинаковым $\sim 10^3$.

В заключение отметим, что ошибки в 1,5–2 раза при таких оценках считаются незначительными. В конце концов землеройка и слон не подобны, несмотря на наличие хобота и хоботка.

### Упражнение

Поток тепла на единицу площади прямо пропорционален разности температур и обратно пропорционален толщине теплоизолирующего слоя (для толщи тела $\sim$ размеров животного).

1. Как изменятся отношения величин для подобных животных, если вместо того, чтобы предполагать одинаковую температуру на поверхности тела, мы предположим одинаковую температуру в толще тела?

## 6.3. Аэрогидродинамика: критерии подобия*

В разных задачах аэрогидродинамики используются различные критерии подобия. Мы ограничимся здесь лишь некоторыми, наиболее распространёнными.

### 6.3.1. Число Маха*

В аэродинамике естественный масштаб скорости — это скорость звука. Для воздуха «при нормальных условиях» (т.е. при 0 С и давлении 1 атмосфера) — это $u = 331$ м/с. Скорость самолёта $v$ можно обезразмерить, поделив на $u$,

$$\mathrm{M} = \frac{v}{u}.$$

Величина M называется *числом Маха*, хотя это просто скорость, измеренная в скоростях звука. Если вы читаете, что скорость равна 5 M (может читаться как «скорость — пять махов»), то имеется в виду, что число $M = 5$, т.е. $v = 5u$.

**Рис. 6.6:** Эрнст Мах (1838–1916) — австрийский физик и философ-позитивист (1910). [PD https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ernst-Mach-1900.jpg] В 1887 г. опубликовал первые в мире фотографии с отошедшей головной ударной волной.

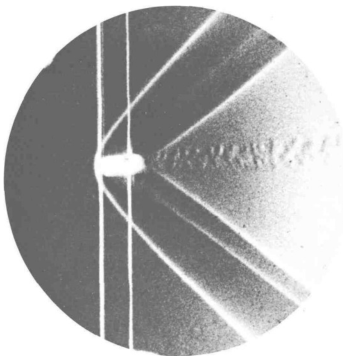


**Рис. 6.7:** Латунная пуля со сверхзвуковой скоростью в воздухе (вертикальные линии — элементы крепления). [Э. Мах, Прага, зима 1888 г., PD, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Photography_of_bow_shock_waves_around_a_brass_bullet,_1888.jpg]

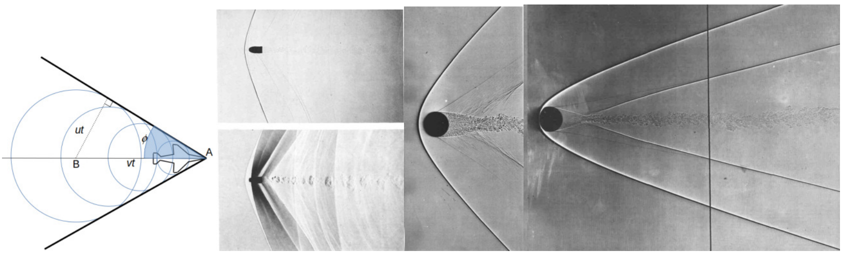



**Рис. 6.8:** Конус Маха: схема (рисунок автора). Винтовочная пуля при $M = 1,1$. Шар, движущийся при $M = 1,53$ и $M = 4,01$. [Альбом течений жидкости и газа. An album of fluid motion. Составление и авторский текст М. Ван-Дайка. Перевод с английского Л.В. Соколовской. Под редакцией Г.И. Баренблатта и В.П. Шидловского. М. :Мир — 1986.]

При движении тела со сверхзвуковой скоростью в среде возникает ударная волна (огибающая поверхность сферических звуковых волн, испущенных в разные моменты времени), имеющая форму конуса, чей угол раствора определяется соотношением $\sin\varphi = 1/M$ (см. рис. 6.7, 6.8).

Когда наблюдатель пересекает фронт ударной волны, он слышит хлопок или взрыв. В частности, если самолёт на сверхзвуковой скорости пролетает низко над городом, ударная волна может выбивать оконные стёкла.

Как видно из рисунка, наблюдатель услышит звук уже после того как сверхзвуковой объект (самолёт/снаряд/ракета/пуля) пролетел мимо него и оказался в точке $A$. Причём, ощущаемое направление на источник звука (перпендикулярное поверхности конуса Маха) будет указывать на точку $B$, в которой тело находилось ещё до того, как миновало наблюдателя.

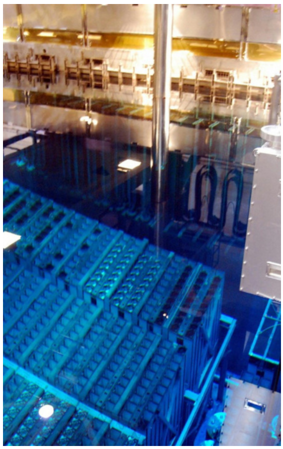



**Рис. 6.9:** Павел Алексеевич Черенков (1904–1990) лауреат Нобелевской премии по физике (совместно с И. Е. Таммом и И. М. Франком, 1958). [http://www.ras.ru/win/db/show_per.asp?P=.id-52683.ln-ru] Хранение облученного MOX-топлива в бассейне-охладителе реакторного блока №3 атомной электростанции Фукусима-1 (Япония) 21 августа 2010. Видно голубое черенковское свечение в воде бассейна вокруг сборок отработанного топлива (поверхность воды видна по бликам). [http://www.atomic-energy.ru/photo/21255] 11 марта 2011 г. АЭС Фукусима-1 подверглась удару цунами. После этого допущенная эксплуатирующей АЭС компанией ТЕПКО халатность в подаче аварийного электропитания и организации аварийных работ привела к серьёзной аварии со взрывами водорода, пожарами и расплавлением активной зоны нескольких реакторов.

При движении заряженной частицы со скоростью, большей, чем скорость света в среде (но, разумеется, меньшей, чем скорость света в вакууме), наблюдается аналогичная ударная волна, но не звуковая, а электромагнитная (световая). Этот эффект называется *эффектом Вавилова–Черенкова* (*черенковское излучение*). На этом эффекте основаны черенковские датчики заряженных частиц высоких энергий. В охлаждающих бассейнах атомных реакторов и бассейнах для выдержки отработанного атомного топлива черенковское излучение голубого цвета может наблюдаться невооружённым глазом.

Разумеется, эффект Вавилова–Черенкова не относится к аэрогидродинамике, но его сходство с конусом Маха демонстрирует нам единство методов современной физики и, в частности, сходство между механикой сплошной среды и теорией поля.

### 6.3.2. Число Кнудсена*

**Рис. 6.10:** Мартин Ганс Христиан Кнудсен (1871–1949), датский физик и океанограф. [http://www.eduspb.com/node/705]

Число Кнудсена Kn определяется как отношение средней длины свободного пробега молекулы (среднего расстояния от соударения до соударения) к характерному размеру течения (сечение струи, размер сосуда и т.п.)

$$\mathrm{Kn} = \frac{\lambda}{L}$$

Kn характеризует степень разреженности газа. Если $\mathrm{Kn} \gg 1$, то можно учитывать только столкновения молекул с телом, пренебрегая столкновениями молекул между собой. Можно сказать, что при $\mathrm{Kn} \to \infty$ газ можно считать вакуумом (пустотой). Например, термос (сосуд) Дьюара хорошо теплоизолирует содержимое только тогда, когда газ между двойными стенками очень разрежен, т.е. $\mathrm{Kn} \sim 1$ или больше. (В качестве характерного размера $L$ для сосуда

Дьюара следует брать расстояние между двойными стенками.) При малых Kn теплопроводность газа слабо зависит от давления и сосуд Дьюара не работает.

На рисунке 6.11 изображены сосуд Дьюара и планетарная туманность Кошачий Глаз. Плотность газа в туманности намного меньше, чем между стенками дьюара, однако сама туманность намного больше. Поэтому газ между стенками дьюара имеет намного большее число Кнудсена, т.е. может считаться вакуумом. Туманность же вакуумом считаться не может: на фотографии видно, что газ клубится и по нему пробегают ударные волны, т.е. это именно газ со своими газодинамическими явлениями. Однако, если мы наполним таким газом сосуд, привычных нам (метровых) размеров, то в масштабах такого сосуда мы будем считать его высоким вакуумом.

**Рис. 6.11:** Сосуд Дьюра с кипящим жидким кислородом. [GNU Dr. Warwick Hillier, Australian National University, 2006, `http://pacificschoolserver.org/Wikipedia/images/2288/228899.gif.htm`] и туманность Кошачий Глаз [©NASA, `http://apod.nasa.gov/apod/image/0803/NGC6543HST_peris.jpg`]

### 6.3.3. Число Рейнольдса*

Для определения числа Рейнольдса нам понадобится такая величина, как вязкость. Вязкое трение — это внутреннее трение в жидкости, которое создаёт силу, прямо пропорциональную скорости. Если два слоя жидкости текут параллельно друг другу с разными скоростями $v_1$ и $v_2$, то сила, действующая между ними и стремящаяся выравнять их скорости, имеет вид

**Рис. 6.12:** Осборн Рейнольдс (1842–1912), английский инженер и физик, специалист в области гидравлики. [ⓟ https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Osborne_Reynolds.jpg]

$$F = \eta \frac{(v_1 - v_2)S}{h},$$

где $S$ — площадь поверхности контакта, $h$ — толщина слоя, в котором скорость меняется от $v_1$ до $v_2$; $\eta$ — *вязкость* (*динамическая вязкость*) — коэффициент пропорциональности, характеризующий данную жидкость.

Отношение динамической вязкости к плотности жидкости

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

называется *кинематической вязкостью.* Легко видеть, что для двух жидкостей с одинаковой кинематической вязкостью, текущих в одинаковых условиях, силы и импульсы пропорциональны друг другу, и кинематика (движение частиц жидкостей) будет одинакова.

*Число Рейнольдса* — безразмерная величина, которая имеет вид

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v L}{\eta} = \frac{vL}{\nu},$$

где $v$ и $L$ — характерные скорость и размер потока (тела).

**Число Рейнольдса — отношение характерных значений действующих в среде сил инерции и сил вязкости.**

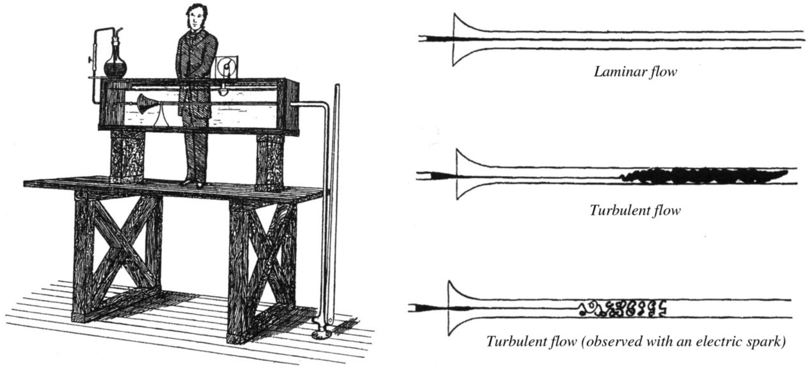



**Рис. 6.13:** Эксперимент Рейнольдса 1883 г. Подкрашенная вода втекает под давлением в стеклянную трубку с неподвижной водой. В зависимости от Re течение имеет ламинарный или турбулентный характер. Критическое значение Re от $2 \cdot 10^3$ до $1,3 \cdot 10^4$ (при исключительной аккуратности — $4 \cdot 10^4$). Нижний правый рисунок — мгновенный вид турбулентного течения (при свете электрической искры). [PD, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Reynolds_fluid_turbulence_experiment_1883.jpg, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Reynolds_observations_turbulence_1883.svg]

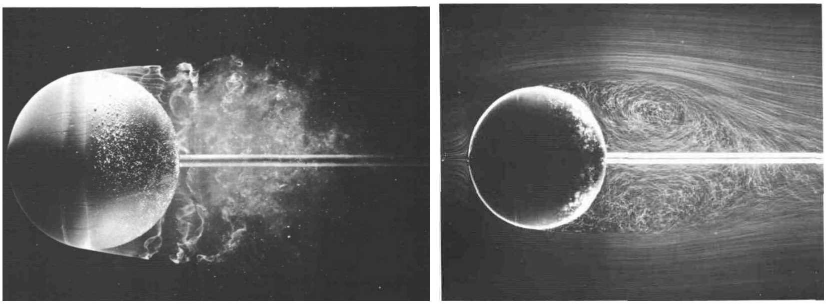


**Рис. 6.14:** Поток при обтекании шара при $\mathrm{Re} = 1,5 \cdot 10^4$. Мгновенная картина и осреднённый поток. Хотя Re не достигает критического значения, течение в области за шаром уже турбулентное. [Альбом течений жидкости и газа.]

При малых числах Рейнольдса жидкость или газ текут *ламинарно* — без завихрений и пульсаций. Когда число Рейнольдса превышает некоторое критическое значение (своё для каждой геометрии течения), ламинарное течение становится сначала метастабильным (может быть разрушено достаточно большими возмущениями), а потом неустойчивым (может быть разрушено малыми возмущениями). В результате поток теряет ламинарность, он становится *турбулентным*: в нём самопроизвольно возникают вихри.

При больших числах Рейнольдса турбулентность порождает вихри очень разных размеров.

Критические значения числа Рейнольдса, обычно, лежат в диапазоне от $2 \cdot 10^3$ до $4 \cdot 10^5$. Дополнительную путаницу в вопрос вносит наличие двух критических чисел Рейнольдса. При первом ламинарный поток становится метастабильным, а при втором — неустойчивым. Также турбулизация разных областей течения может происходить при различных числах Рейнольдса.

На примере рисунков 6.14 видно, что потоки жидкости, обтекающие шар с разных сторон, сталкиваются с обратной стороны, где возникают вихри. Энергия, которая тратится на создание этих вихрей, в конечном итоге с помощью вязкого трения преобразуется в тепло. Отбирается эта энергия у потока жидкости (с точки зрения системы отсчёта шара) за счёт увеличения силы сопротивления. Если придать телу форму капли (приделать к шару сзади острый хвост, который занимает примерно ту область, где создаётся турбулентность), то область турбулентного течения уменьшится или исчезнет и сила сопротивления уменьшится. По мере увеличения скорости потока, набегающего на шар, область турбулентного течения увеличивается, и в конце концов (при критическом числе Рейнольдса) вытягивается до бесконечности.

## Упражнения

Пусть, тело с характерным размером $L$ летит со скоростью $v$ в жидкости с плотностью $\rho$ и вязкостью $\eta$. Оценить силу сопротивления среды.

1. Для больших чисел Рейнольдса. (Для больших Re вязкостью можно пренебречь.)

2. Для малых чисел Рейнольдса. (Для малых Re сила должна быть линейна по скорости.)

### 6.3.4. Турбулентность по Колмогорову***

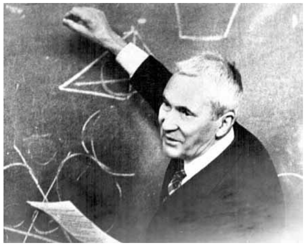


**Рис. 6.15:** Андрей Николаевич Колмогоров (1903–1987), один из крупнейших математиков XX века. [http://www.kolmogorov.info/]

Теория Колмогорова была создана в 1941 г. и являлась первой теорией, позволявшей сказать о турбулентности что-то математически содержательное. Интересно, что при создании данной теории А. Н. Колмогоров выступил не как математик, а как физик.

Теория основана на соображениях размерности и подобия и поражает своей простотой. Однако читателю полезно помнить, что в подобных случаях самое сложное — понять, что мы вообще можем описать, и какие параметры на самом деле существенны.

Теория Колмогорова описывает турбулентность при очень высоких значениях числа Рейнольдса. Делаются следующие предположения и выводы:

- На масштабах $\ll L$ все направления равноправны, причём статистика мелких вихрей универсальна (для мелких вихрей не важны крупномасштабные характеристики течения размеров $\sim L$).

- Статистика мелких вихрей определяется двумя параметрами: кинематической вязкостью $\nu$ и скоростью диссипации энергии $\varepsilon$ (энергия, потраченная на работу против сил вязкого трения на единицу массы жидкости в единицу времени). Получаемые из этих параметров комбинации с размерностью длины, времени и скорости характеризуют самые мелкие вихри (колмогоровский масштаб):

$$L_{\text{K}} = \sqrt[4]{\frac{\nu^3}{\varepsilon}}, \qquad \tau_{\text{K}} = \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}}, \qquad v_{\text{K}} = \sqrt[4]{\nu\varepsilon}.$$

- На промежуточных размерах вихрей $L \gg r \gg L_K$ вязкость несущественна, энергия почти не теряется, а лишь передаётся от крупных вихрей к мелким. Таким образом, на промежуточных масштабах единственный параметр турбулентного течения — скорость диссипации энергии $\varepsilon$. То есть турбулентность на промежуточных масштабах самоподобна: при изменении масштаба картина не меняется.

- Из соображений размерности мы выражаем характерную скорость вращения вихря[9] радиуса $r$ $(L \gg r \gg L_K)$

  $$v(r) = C\,\sqrt[3]{\varepsilon r},$$

  где $C$ — универсальная безразмерная константа.

Интересно, что на колмогоровском масштабе (размер самого маленького вихря) число Рейнольдса падает до значений $\mathrm{Re} \sim 1$, т.е. турбулентное течение на масштабе своих мельчайших вихрей оказывается ламинарным. Если оценить число Рейнольдса для вихря промежуточного размера $r$, то мы получим

$$\mathrm{Re}(r) = \frac{v(r)\cdot r}{\nu} = C\frac{\varepsilon^{1/3}}{\nu}\,r^{4/3}.$$

Если положить $\mathrm{Re}(L) = \mathrm{Re}$ (здесь мы выходим за пределы применимости теории Колмогорова, в надежде на то, что ошибёмся не слишком сильно), то

$$\frac{vL}{\nu} \approx C\frac{\varepsilon^{1/3}}{\nu}\,L^{4/3}, \qquad \frac{L}{L_{\mathrm{K}}} \approx (\mathrm{Re})^{3/4}, \qquad \varepsilon \approx C^{-3}\,\frac{v^3}{L}.$$

Мы можем ввести ещё один безразмерный критерий подобия, который было бы естественно назвать *числом Колмогорова*[10]:

$$\mathrm{Kl} = \frac{L}{L_{\mathrm{K}}} = L\sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{\nu^3}} \approx (\mathrm{Re})^{3/4}$$

— отношение масштаба течения к масштабу самого маленького вихря.

[9]На самом деле в теории Колмогорова оценивается коррелятор или фурье–компонента скорости, но на данном уровне изложения эти понятия лучше не вводить.

[10]Термин «число Колмогорова» также используется педагогами для определения максимального числа компонентов на каждом уровне иерархии целей и максимального числа уровней иерархии: $7 \pm 2$.

## 6.4. Аэрогидродинамика в фотографиях

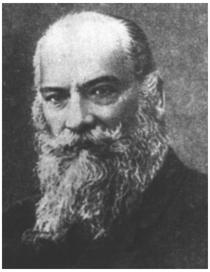


**Рис. 6.16:** Николай Егорович Жуковский (1847–1921), основоположник аэродинамики и теоретик авиации. [(PD), 1911 http://visualrian.ru/search/33/78025.html]


**Рис. 6.17:** Инженерный корпус ЦАГИ и аэродинамическая «штопорная» труба Т-105 (построена в 1941 году), г. Жуковский. [(cc) CC-BY 2.5, GNU FDL, Yuriy Lapitskiy, 2006, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:TsAGI_with_vertical_tube_autumn2006.jpg]

Для исследования аэродинамики процесса обтекания воздухом различных машин и устройств (ракет, самолётов, автомобилей, зданий, мостов и т.д.) используются аэродинамические трубы (АДТ). В них неподвижную модель устройства обдувает поток воздуха или другого газа. Модель может быть выполнена как в натуральную величину, так и в другом масштабе. При этом критерии подобия, важные для данного процесса, подбираются такие же, как для реальных условий работы устройства. Подобрать одновременно все аэрогидродинамические критерии подобия невозможно, но это и не нужно: обычно в конкретном режиме работы устройства важен какой-либо один процесс и соответствующий критерий.

Ниже в качестве примеров применения методов подобия в аэрогидродинамике приводится ряд фотографий и таблиц, взятых преимущественно с интернет-сайта Центрального аэрогидродинамического института имени профессора Н. Е. Жуковском (ЦАГИ; `http://tsagi.ru`), расположенного в г. Жуковский Московской области. Этот набор примеров ни в коем случае не претендует на полный обзор.

ЦАГИ основан 1 декабря 1918 года в Москве пионером отечественной авиации Н. Е. Жуковским на базе Аэродинамической лаборатории МВТУ и Авиационного расчетно-испытательного бюро (РИБ). С 1935 г. ЦАГИ располагается в г. Жуковском — центре российской авиационной науки. В Жуковском располагаются:

- ЦАГИ,
- Лётно-исследовательский институт им. Громова (ЛИИ),
- НИИ приборостроения им. В. В. Тихомирова — научно-исследовательский институт по разработке мобильных зенитных ракетных комплексов средней дальности и систем управления вооружением самолетов,
- Московский научно-исследовательский институт «Агат» — институт по разработке радиолокационных головок самонаведения (РГС) для ракет,
- Научно-исследовательский институт авиационного оборудования — опытно-конструкторские разработки комплексов и систем бортового оборудования летательных аппаратов,
- Экспериментальный машиностроительный завод имени В. М. Мясищева,
- Центр научно-технических услуг «Динамика» — крупное предприятие, представляющее услуги в области отечественного авиационного тренажёростроения.

В Жуковском располагается Факультет аэромеханики и летательной техники (ФАЛТ; `http://falt.ru`) Московского физико-технического института (МФТИ) и филиал «Стрела» Московского авиационного института (МАИ). Каждый нечётный год проводится Международный авиационно-космический салон (МАКС, `https://aviasalon.com/`).

### 6.4.1. Очень большие скорости: АДТ Т-117

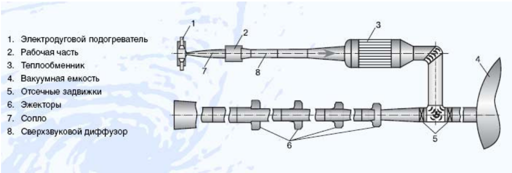



**Рис. 6.18:** Схема гиперзвуковой АДТ Т-117 в ЦАГИ [©ЦАГИ]

**Рис. 6.19:** Испытания модели ракетоносителя «Ангара» в АДТ Т-117. [©ЦАГИ]

Параметры АДТ Т-117 (см. `http://tsagi.ru/experimental_base/aerodinamicheskaya-truba-t-117/`):

| | | | |
|---|---|---|---|
| Число M потока | 7,5–18,6 | Рабочая часть | |
| Число Re на 1 м | $(0{,}15 - 8{,}5) \cdot 10^6$ | Длина | 2,5 м |
| Полное давление | 0,8–20 МПа | Ширина | 2,4 м |
| Скоростной напор | до 12 кПа | Высота | 1,9 м |
| Т. торможения | 600–3400 K | Диаметр сопла | 1 м |
| Продолжит. пуска | 30–180 с | Объекты | |
| Углы атаки | −5–+50;<br>−25–+30;<br>+25–+80 | Длина | до 1 м |
| Углы скольжения | ±30 | Размах крыла | до 0,4 м |
| Рабочий газ | воздух | | |

**Рис. 6.20:** АДТ Т-117 в ЦАГИ [©ЦАГИ]

### 6.4.2. Очень большие размеры: АДТ Т-101

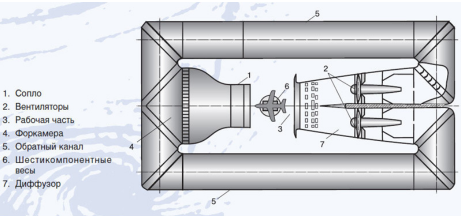



**Рис. 6.21:** Схема АДТ Т-101 в ЦАГИ и (предположительно) тестовые испытания в 2008 г. новой телеметрической системы АДТ Т-101 с серийным рулевым винтом вертолета Ми-17. Лопасти оборудованы специальными тензорезисторами, с помощью которых измерялись шарнирные и изгибающие моменты, а также моменты кручения винта. [©ЦАГИ]

Параметры АДТ Т-101 (см. `http://tsagi.ru/experimental_base/aerodinamicheskaya-truba-t-101/`):

| | | | |
|---|---|---|---|
| Скорость потока | 5–52 м/с | Рабочая часть | |
| Число Re на 1 м | до $3{,}6 \cdot 10^6$ | Сопло | 24 м · 14 м |
| Полное давление | атмосферное | Длина | 24 м |
| Скоростной напор | до 1,7 кПа | | |
| Т. торможения | окружающей среды | Мощность | 30 МВт |
| Продолжит. пуска | непрерывно | Объекты | |
| Углы атаки | ±20 | Длина | до 30 м |
| Углы скольжения | ±180 | Размах крыла | до 18 м |
| Рабочий газ | воздух | Площадь крыла | до 35 м$^2$ |

Дозвуковая аэродинамическая труба Т-101 — труба непрерывного действия. Первый пуск трубы состоялся в 1939 году. До войны и во время Великой Отечественной войны Т-101 использовалась для разработки и совершенствования боевых самолётов (см. рис. 6.22, 6.23). В 2008 г. на Т-101 установлена новая телеметрическая система. До сих пор АДТ Т-101 остаётся крупнейшей в Европе.

АДТ Т-101 позволяет проводить испытания натурных летательных аппаратов или их крупномасштабных моделей. В аэродинамической трубе Т-101 были испытаны практически все отечественные самолеты и вертолеты, многие образцы аэрокосмической техники, а также объекты промышленности различного назначения.

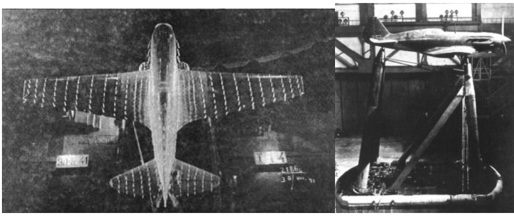


**Рис. 6.22:** Самолёт МИГ-3 в АДТ Т-101. 1940 г. [http://crimso.msk.ru/Site/Arts/Art2109.htm], февраль 1941 г. [http://crimso.msk.ru/Site/Arts/Art5813.htm]

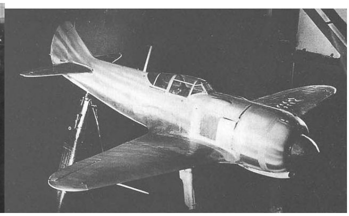


**Рис. 6.23:** Самолёт ЛА-5 М-71 в АДТ Т-101, 1943 г. [http://crimso.msk.ru/Site/Arts/Art4488.htm]

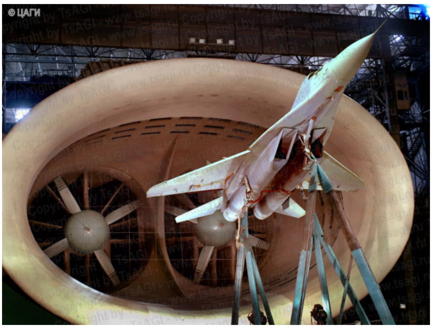



**Рис. 6.24:** Самолёт МИГ-29 в АДТ Т-101. [©ЦАГИ]

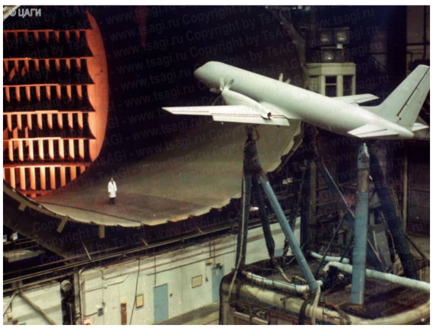



**Рис. 6.25:** Модель самолёта ИЛ-114 в АДТ Т-101. Обратите внимание на человека, стоящего для масштаба внутри трубы. [©ЦАГИ]

**Рис. 6.26:** Испытания планирующего парашюта в АДТ Т-101. [©ЦАГИ]

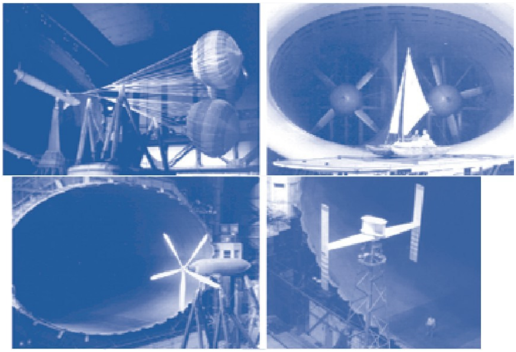


**Рис. 6.27:** Разные эксперименты в АДТ Т-101. [©ЦАГИ]

**Рис. 6.28:** АДТ Т-101. [©ЦАГИ]

### 6.4.3. Двигатели и не только: АДТ Т-104

Дозвуковая аэродинамическая труба Т-104 — труба непрерывного действия. Первый пуск трубы состоялся в 1939 году.

АДТ Т-104 позволяет проводить испытания силовых установок с замером тяги двигателя до 100 кН, малых натурных летательных аппаратов или их крупномасштабных моделей. В аэродинамической трубе Т-104 экспериментально отработаны практически все отечественные турбовинтовые двигатели, воздушные и несущие винты, воздухозаборники на больших и закритических углах атаки, исследованы на специальных крупномасштабных моделях характеристики аэроупругости отечественных самолетов, системы и средства спасения различного целевого назначения.

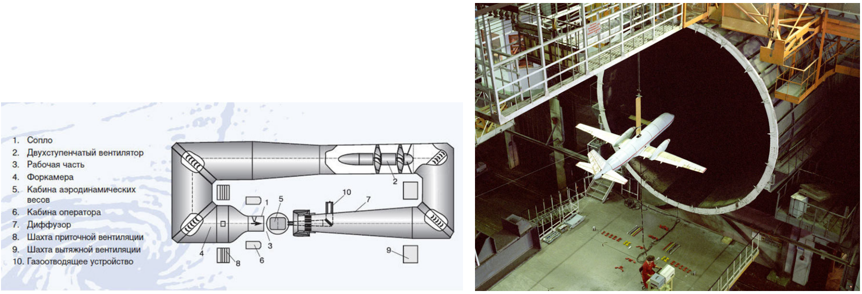



**Рис. 6.29:** Схема АДТ Т-104 в ЦАГИ. Исследование флаттера (автоколебаний конструкции самолёта) в АДТ-104. [©ЦАГИ]

Параметры АДТ Т-104 (см. `http://tsagi.ru/experimental_base/aerodinamicheskaya-truba-t-104/`):

| | | | |
|---|---|---|---|
| Скорость потока | 10–120 м/с | Рабочая часть | |
| Число Re на 1 м | до $8 \cdot 10^6$ | Диаметр сопла | 7 м |
| Полное давление | атмосферное | Длина | 13 м |
| Скоростной напор | до 8,8 кПа | | |
| Т. торможения | окружающей среды | Мощность | 28,4 МВт |
| Продолжит. пуска | непрерывно | | |
| Рабочий газ | воздух | | |

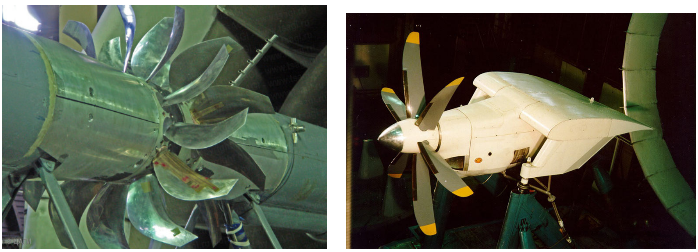


**Рис. 6.30:** Испытания винтовентиляторов авиационного двигателя по проекту DREAM в АДТ Т-104 в ЦАГИ. Испытания двигательной установки (предположительно для КБ Антонова) в АДТ Т-104. [©ЦАГИ]

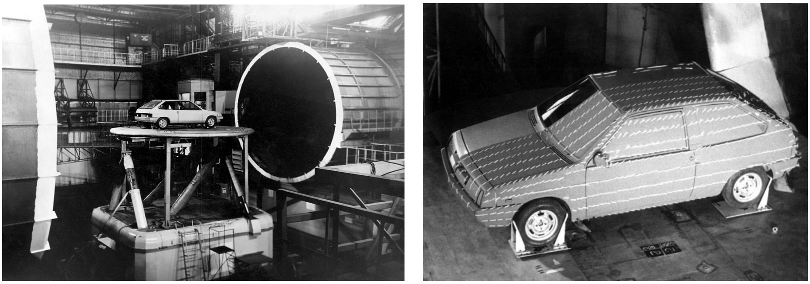


**Рис. 6.31:** Продувка автомобиля ВАЗ-2108 в ЦАГИ (предположительно в АДТ Т-104). Ленточки служат для визуализации воздушного потока. [Из книги «Высокой мысли пламень (Часть вторая)», Управление главного конструктора АВТОВАЗ (коллектив авторов). ДИС ОАО «АВТОВАЗ»; Тольятти; 2004]

**Рис. 6.32:** «Живописный мост» через Москва-реку (25.04.2010, вид с Крылатских холмов) [CC BY-SA, Daryona, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Zhivopisny_Bridge_from_Krylatsky_Hills_2.JPG] и продувка модели моста в АДТ Т-104. [©ЦАГИ]

## 6.4.4. Исследуя штопор: АДТ Т-105

Дозвуковая аэродинамическая труба Т-105 — вертикальная труба непрерывного действия — предназначена для исследования режимов штопора самолетов путем испытания динамически подобных моделей самолетов и других летательных аппаратов (ЛА) в свободном полете. Т-105 широко используется также для исследования аэродинамических характеристик (АДХ) самолетов, вертолетов и других ЛА и их элементов с использованием специального оборудования, оснащенного весовыми устройствами.

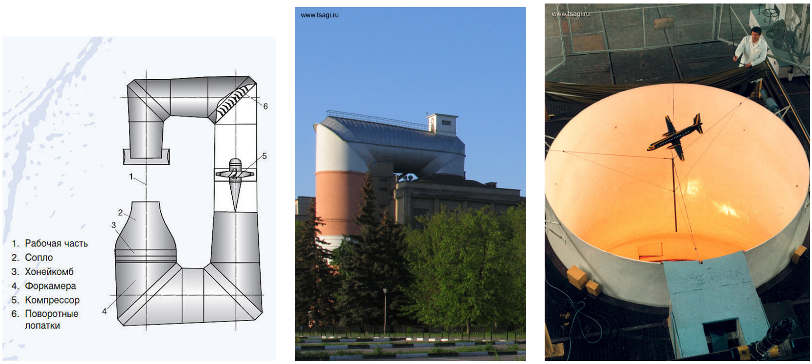



**Рис. 6.33:** Схема и фотографии АДТ Т-105 снаружи и изнутри. [©ЦАГИ]

Параметры АДТ Т-105 (см. `http://tsagi.ru/experimental_base/adt-t-105/`):

| | | | |
|---|---|---|---|
| Скорость потока | 5–40 м/с | Рабочая часть | |
| Направление потока | снизу вверх | Диаметр сопла | 4,5 м |
| Число Re на 1 м | до $2{,}4 \cdot 10^6$ | Длина | 7,5 м |
| Полное давление | атмосферное | | |
| Скоростной напор | до 0,75 кПа | | |
| Т. торможения | окружающей среды | Мощность | 450 кВт |
| Углы атаки | 0 – 360 | | |
| Углы скольжения | 0 – 360 | | |
| Продолжит. пуска | непрерывно | | |
| Рабочий газ | воздух | | |

### 6.4.5. В воде как в воздухе: гидроканал ЦАГИ

См. `http://tsagi.ru/experimental_base/opytovyy-basseyn/`.

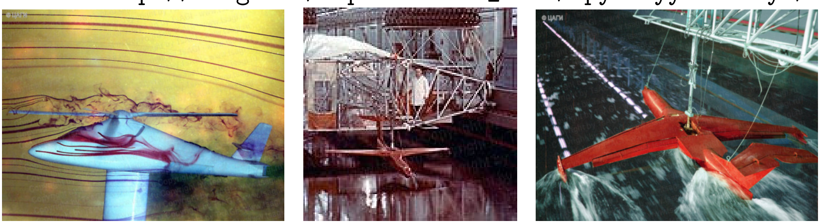


**Рис. 6.34:** Исследование обтекания модели вертолета в гидродинамической трубе и испытания модели самолёта-амфибии А-40 в гидроканале ЦАГИ. [©ЦАГИ]

Канал и сопутствующая ему гидролаборатория разрабатывались под руководством Туполева. Строительство канала было начато в 1925 г. По проекту канал имел длину 205 м, ширину 12 м и глубину 6,5 м. Над водой передвигалась шеститонная электротележка, выполненная в виде ферменного мостового крана. Опорами ей служили четыре колеса, передвигавшиеся по рельсам, проложенным вдоль канала. Пробег тележки состоял из трех этапов. Сначала тележка разгонялась до необходимой скорости (максимальная скорость равнялась 54 км/ч), затем проводился эксперимент с последующим торможением. Обратный ход тележки был холостым. В боковых стенках канала, ниже уровня воды, были предусмотрены иллюминаторы. Они позволяли либо вести визуальное наблюдение за экспериментом, либо проводить его киносъемку. Одно из требований к строителям состояло в том, чтобы по всей длине канала расстояние между рабочей платформой тележки и зеркалом воды было постоянным — на точность эксперимента влияла выпуклость водной поверхности. Рельсы пришлось изготовить с необходимой кривизной. В связи с тем, что торец канала близко подходил к Немецкой улице, пришлось решать задачу виброзащиты водяного бассейна от вредных внешних воздействий. Они возникали от проезжавших трамваев и ломовых телег, громыхавших по булыжной мостовой. Проблему решили, оградив бетонную ванну со всех сторон песчаной подушкой. Канал вступил в строй 28 апреля 1930 г. Наиболее радикальная модернизация была осуществлена в 1966–1967 гг., когда старое деревянное здание гидроканала заменили железобетонным, заново уложили рельсовый путь, на смену рычажным динамометрам пришли тензометрические весы, появился новый волнопродуктор в виде качающейся стенки. В 1978 г. закончилась модернизация электропривода буксировочной тележки, были внедрены приводные электродвигатели, система автоматического управления режимами движения тележки, питающие генераторы постоянного тока заменили тиристорными преобразователями [11].

[11] С существенными сокращениями цитируется по http://forum.worldofwarplanes.ru/index.php?/topic/7972-цаги-центральный-аэрогидродинамический-инсти/

# Глава 7

# Фракталы*

## 7.1. Самоподобие и фракталы*

До сих пор мы много обсуждали подобие *разных* математических фигур и физических процессов, но почти не упоминали *самоподобие* — ситуацию когда один и тот же объект подобен самому себе, т.е. выглядит на разных пространственных масштабах одинаково. Самоподобие мы использовали только при построении колмогоровской теории турбулентности. Мы видим это самоподобие на примере кучевых облаков (см. рис. 7.1). Они позволяют видеть турбулентность атмосферы. Облачные клубы всех размеров выглядят совершенно одинаково (определить их размер на глаз практически невозможно), в чём проявляется самоподобие турбулентности.

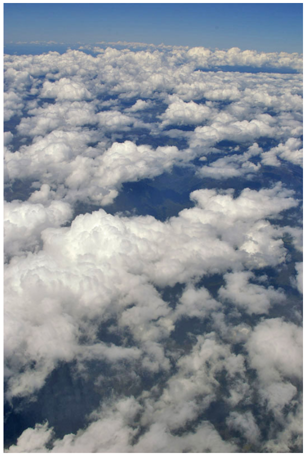


**Рис. 7.1:** Кучевые облака (вид сверху) делают видимой турбулентность атмосферы. [🅭🅯, Bidgee, 02.12.2007, `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cumulus_mediocris.jpg`]

Это самоподобие более сложное, чем простое самоподобие прямой или плоскости, которые выглядят на всех масштабах одинаково скучно (лишены деталей). Тем более что реально мы не наблюдаем в природе ни прямых, ни плоскостей, ни просто гладких кривых и поверхностей.

Архитектура и геометрия древних греков (см. рис. 7.2) со своими отрезками прямых выглядит более искусственной, чем самоподобная восточная архитектура (см. рис. 7.3).

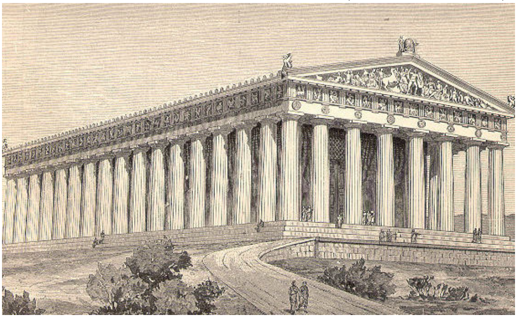


**Рис. 7.2:** Реконструкция Парфенона [Из немецкой энциклопедии, редактор Joseph Kürschner, 1891, Ⓟ https://commons.wikimedia.org/wiki/File:ParthenonRekonstruktion.jpg]

**Рис. 7.3:** Прамбанан — комплекс раннесредневековых буддийских и индуистских храмов в центральной части острова Ява [cc by sa, GNU FDL, Gunkarta Gunawan Kartapranata, 2010 https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Prambanan_Complex_2.jpg]

Аналогично, листья магнолии (см. рис. 7.4) выглядят в духе греческой геометрии (*если не обращать внимание на жилки, структура которых самоподобна*), а листья папортника (см. рис. 7.5) самоподобны.

**Рис. 7.4:** Листья магнолии [🅭🅯🄎, GNU FDL, Liné1 https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Magnolia_acuminata_leaves_01_by_Line1.jpg]

**Рис. 7.5:** Папоротник — растение с самоподобными листьями [🅭🅯🄎, Jml3 https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Samambaia_fern.jpg]

## Упражнение

1. Придумайте примеры самоподобных форм в природе.

## 7.2. Строго самоподобные фракталы*

**Рис. 7.6:** Бенуа Мандельброт — основоположник фрактальной геометрии [©MFO, Konrad Jacobs, https://opc.mfo.de/detail?photo_id=2733]

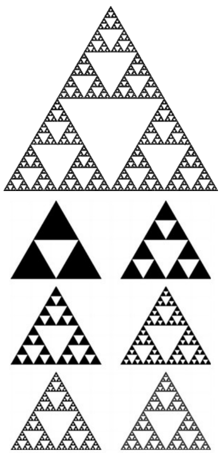


**Рис. 7.7:** Треугольник Серпинского и процесс его построения

Чтобы разобраться, как могут быть устроены такие самоподобные формы, рассмотрим похожий, но более простой пример: треугольник Серпинского (см. рис. 7.7 сверху). Легко видеть, что такой треугольник состоит из *трёх* подобных треугольничков в *два* раза меньшего размера!

Вы ещё не удивились? Отрезок можно разбить на $2 = 2^1$ отрезка в 2 раза меньшего размера, обычный треугольник (или квадрат) можно разбить на $4 = 2^2$ треугольника (или квадрата) в 2 раза меньшего размера, призму (или куб) можно разбить на $8 = 2^3$ призмы (или кубика) в 2 раза меньшего размера. Каждый раз коэффициент подобия (т.е. 2) возводится в степень, соответствующую размерности фигуры:

$$2 = 2^1, \qquad 4 = 2^2, \qquad 8 = 2^3.$$

И это соответствует тому, как меняется мера (длина, площадь, объём) при изменении масштаба длины.

Итак, треугольник Серпинского состоит из 3 треугольничков в 2 раза меньшего размера! Если мы припишем треугольнику Серпинского площадь или периметр, то они не будут при изменении единицы длины подчиняться общему закону для длин и площадей: $2 \neq 3 \neq 2^2$. То есть мы никак не можем приписать треугольнику Серпинского ни длины периметра, ни площади, а должны приписать что-то промежуточное с дробной (и даже иррациональной) раз-

мерностью $d$:
$$3 = 2^d, \qquad d = \log_2 3 \approx 1{,}58.$$

Мера такого треугольника должна выражаться в единицах «метр в дробной степени» $\text{м}^{\log_2 3} \approx \text{м}^{1{,}58}$.

Чтобы исследовать периметр и площадь треугольника Серпинского, рассмотрим процесс его построения (см. рис. 7.7 снизу). На первом шаге строится один правильный треугольник, на втором шаге из него удаляется средняя четверть, на каждом последующем шаге из каждого оставшегося треугольничка снова удаляется средняя четверть и так повторяется бесконечное число раз. Треугольник Серпинского — это то, что остаётся в пределе после бесконечного числа шагов.

На каждом шаге площадь фигуры уменьшается на $\frac{1}{4}$, т.е. умножается на $\frac{3}{4} < 1$, а периметр увеличивается на $\frac{1}{2}$, т.е. умножается на $\frac{3}{2} > 1$. После $n$ шагов площадь изменилась в $\left(\frac{3}{4}\right)^n$, а периметр в $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ раз. В пределе получаем площадь треугольника Серпинского равна нулю, а периметр — бесконечности.

**Определение:** *строго самоподобный фрактал* — это фигура, которую можно разрезать на $M$ одинаковых частей, подобных фигуре в целом и имеющих в $N$ раз меньший размер. Число $\log_N M$ — *размерность* фрактала.

Название *фрактал* связано с тем, что такой объект *может* иметь дробную размерность и выглядеть очень изломанным.

## Упражнения

1. Определите фрактальную размерность салфетки Серпинского (в. 1, рис. 7.8). Для девочек (по желанию) вышить салфетку Серпинского крестиком.

2. Определите фрактальную размерность салфетки Серпинского (в. 2, рис. 7.9).

3. Определите площадь снежинки Коха. (рис. 7.10).

4. Определите фрактальную размерность границы снежинки Коха. (рис. 7.10). Подсказка: разбейте границу снежинки

на три части и ищите разбиение этих частей на подобные участки.

5. Определите фрактальную размерность губки Серпинского (рис. 7.11). Вычислите площадь поверхности губки Серпинского (рис. 7.11).

6. Определите фрактальную размерность губки Менгера (рис. 7.12). Для мальчиков (по желанию) изготовить губку Менгера дрелью и напильником или на 3D-принтере.

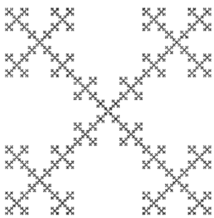


**Рис. 7.8:** Салфетка Серпинского (вариант 1)

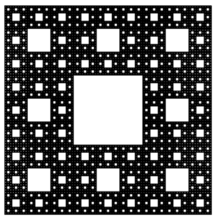


**Рис. 7.9:** Салфетка Серпинского (вариант 2)

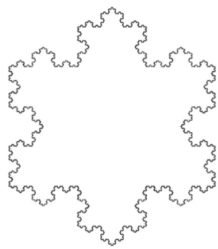


**Рис. 7.10:** Снежинка Коха

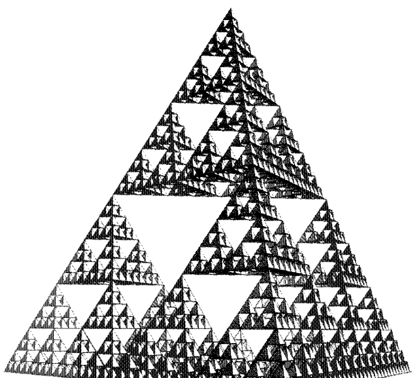


**Рис. 7.11:** Губка Серпинского

[ⓒⓘⓢ https://commons.wikimedia.org/wiki/File:PyramideFractaleSmallInfini.GIF]

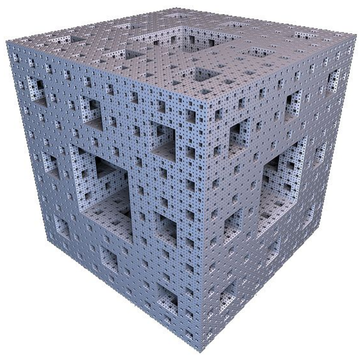


**Рис. 7.12:** Губка Менгера

[ⓒⓘⓢ, GNU FDL https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Menger-Schwamm-6-iterations.jpg]

## 7.3. Статистически самоподобные фракталы*

**Рис. 7.13:** Чем короче линейка, тем длиннее берег Британии

[Кадр из фильма «Fractals. Hunting The Hidden Dimension», ©2008, WGBH Educational Foundation and The Catticus Corporation, pbs.org]

**Рис. 7.14:** Норвегия и окрестности.

[http://planetolog.ru/map-country-zoom.php?country=NO&type=KM]

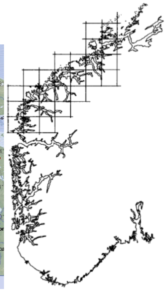


**Рис. 7.15:** Шаг решётки $\delta = 50$ км

[Федер Е. Фракталы. — М. : Мир, 1991]

Самоподобными можно считать не только фигуры, которые на разных масштабах повторяют сами себя точно, но и фигуры, *средние характеристики* которых на разных масштабах одинаковы. Такие фигуры мы будем называть *статистически самоподобными*. Именно статистически самоподобно турбулентное течение (см. 6.3.4. «Турбулентность по Колмогорову***»).

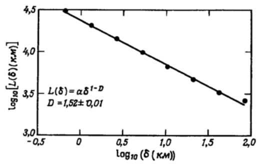



**Рис. 7.16:** Зависимость длины береговой линии Норвегии (по клеточкам) от шага сетки.

[Федер Е. Фракталы. — М. : Мир, 1991]

Классическим примером статистически самоподобного фрактала является береговая линия Норвегии (рис. 7.14). Побережье Норвегии очень сильно изрезано фиордами (узкими и извилистыми морскими заливами). Чем более подробную карту мы смотрим, тем больше мелких фиордов и мелких ответвлений крупных фиордов мы обнаруживаем. При вычислении длины береговой линии Норвегии или Британии результат сильно зависят от того, карта какого масштаба используется при вычислении (см. рис. 7.13).

На рисунке 7.15 береговая линия Норвегии накрыта сеткой с шагом $\delta$. После этого длина берега $L(\delta)$ оценивается как число клеток $N(\delta)$, куда попал кусочек берега, умноженное на $\delta$. График 7.16 показывает, что в широком диапазоне шага сетки $\delta$ зависимость имеет вид

$$L(\delta) = a\delta^{1-D}, \qquad D = 1{,}52 \pm 0{,}01.$$

Назовём $D$ — *размерностью Минковского*, а $a$ — *мерой Минковского* данного фрактала[1].

## 7.4. Предфракталы в природе: зачем и как*

Понятно, что если захочется изготовить фрактал с размерностью $2 < d < 3$, как физический объект, то, как бы мы не старались, процесс вырезания всё более мелких деталей остановится, когда размер детали приблизится к размеру атома. Получившаяся заготовка фрактала, тем не менее, будет очень похожа на фрактал. Такую фигуру мы будем называть предфракталом. Если мы вырезаем предфрактал из объёмного куска материала, объём предфрактала не будет нулевым, но будет очень мал, по сравнению с $L^3$ (объёмом сплошного куска материала, того же размера), площадь поверхности не будет бесконечной, но будет очень большой, по сравнению $L^2$ (с площадью гладкого куска материала того же размера).

Эти свойства сразу подсказывают возможные практические применения предфракталов: они могут быть полезны всегда, когда надо достичь большой площади поверхности при малом объёме (массе). Это обычно бывает нужно, если на поверхности (или

[1] Это соответствует тому, что квадратику $\delta \cdot \delta$ приписывается мера $\delta^D$. (**) При этом мера Минковского аналогична верхней мере Жордана. Иногда размерность и меру Минковского путают с размерностью и мерой Хаусдорфа. Мера Хаусдорфа аналогична мере Лебега (с той же мерой $\delta^D$ для квадратика), т.е. вместо сетки с постоянным размером квадратика, как для мер Жордана и Минковского, используются всевозможные наборы квадратиков, покрывающих фрактал, и минимизируется суммарная мера покрытия.

вблизи поверхности) происходят какие-либо процессы, которые не могут проникнуть в толщу объёма вещества.

Есть много примеров таких процессов. Обычно они предполагают обмен через поверхность веществом, энергией или информацией.

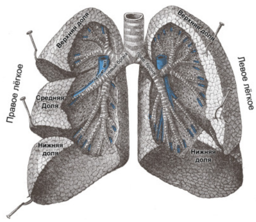



**Рис. 7.17:** Лёгкие человека в разрезе [PD, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lungs_Ru.gif]

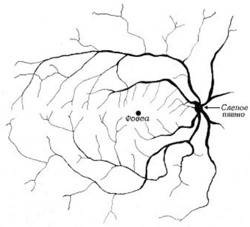



**Рис. 7.18:** Дерево Пуркинье — кровеносные сосуды на дне глазного яблока [PD Г. Гельмгольц]

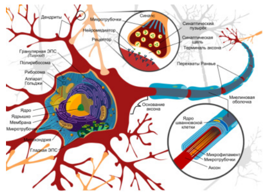


**Рис. 7.19:** Дендриты (короткие отростки) нейрона [PD https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Complete_neuron_cell_diagram_ru.svg]

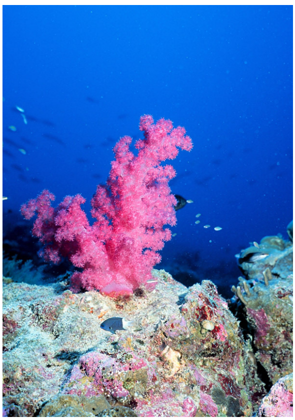


**Рис. 7.20:** Кораллы (настоящие) [PD, Linda Wade, 1994, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Reef0484.jpg]

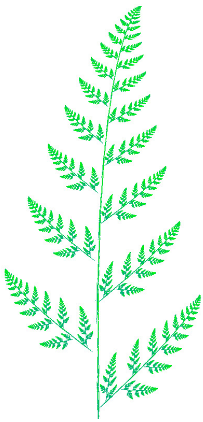


**Рис. 7.21:** Фрактальный папоротник [сгенерировано программой Fractal Explorer 2.02, http://www.eclectasy.com/Fractal-Explorer/index.html]

**Рис. 7.22:** Фрактальное дерево выглядит вполне деревянно [сгенерировано программой Easy Tree Generator]

Предфракталы возникают сами собой не только в живой природе, но и в неживой. Это свидетельствует о том, что механизмы их возникновения достаточно просты и естественны. Как мы уже видели на примерах и упражнениях, (пред)фракталы сложно устроены, но просто порождаются.

Как в природе, так и в математике для их генерации часто используются итерационные или пошаговые процессы. При этом на каждом из шагов происходит достаточно простое преобразование. Это может быть вырезание части фигуры, преобразование фигуры по простой математической формуле, ветвление растения или коралла и т.п.

**Рис. 7.23:** Молния, облака, деревья — предфракталы. [CC BY SA, GNU FDL, Oliver Steinke, 2006, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Blitz-010-2.jpg]

**Рис. 7.24:** Гора Шишапангма (Непал) [PD, Swinelin, 2005, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Shishapangma.jpg]

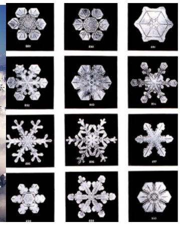
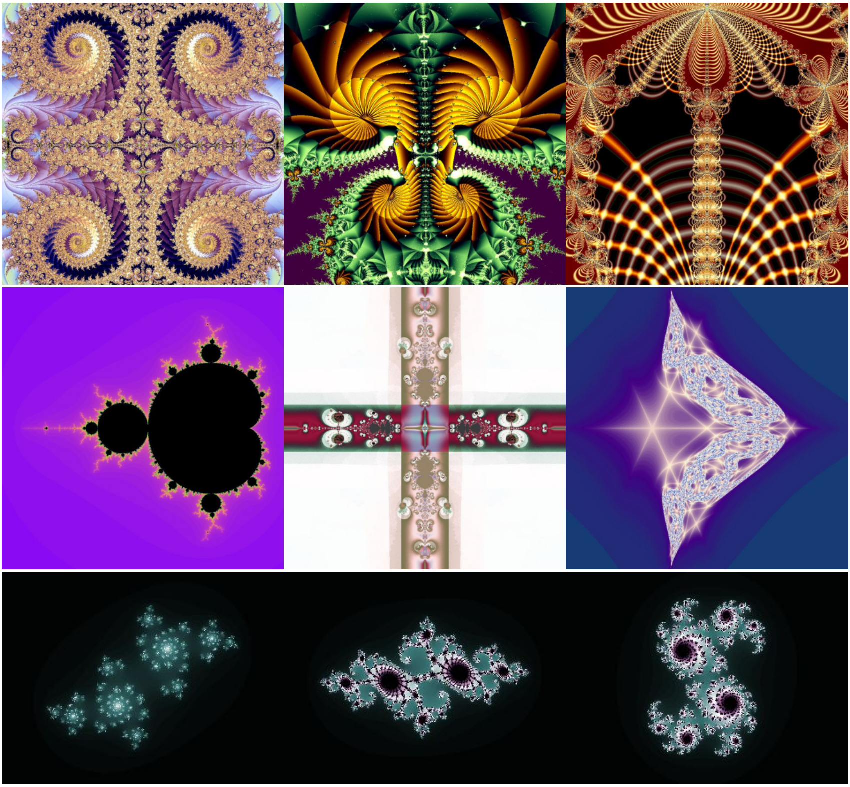


**Рис. 7.25:** Снежинки часто фрактальны [PD, commons.wikimedia.org/wiki/File:SnowflakesWilsonBentley.jpg]

Шаги порождающего фрактал процесса могут быть не только дискретными, но и непрерывными. В этом случае соответствующий динамический процесс часто бывает неустойчивым: малые начальные возмущения со временем могут неограниченно нарастать. За счёт такого рода неустойчивости процесс может протекать хаотически: начальные условия всегда известны с конечной точностью, и этой точности хватает только для предсказание хода процесса на протяжении ограниченного времени. Такова, например, турбулентность: мы не можем предсказать точное поведение всех мелких вихрей, но можем определить их среднее поведение[2]. Даже броуновское движение может порождать фракталы.

[2] Когда мы бросаем монету или игральную кость, то предполагается, что динамика процесса неустойчива, малые отклонения при броске нарастают и делают невозможным предсказание того, какая грань выпадет.

В заключение приведём несколько картинок, нарисованных на основе довольно простых математических идей (1-й рисунок во 2-м ряду — множество Мандельброта, 3-й ряд — множества Жюлиа) с помощью компьютерных программ, просто чтобы показать, что фракталы — это красиво.



# Заключение

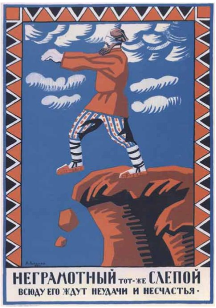



**Рис. 7.26:**
[PD, Радаков А., 1920 https://www.historyworlds.ru/gallery/raznoe_all/cccp-plakat/9439-foto-2.html]

При написании книги автор намеренно отказался от «школьной» традиции создания иллюзии законченности предмета, и неизбежно возник вопрос о том, где поставить точку. Было решено ограничиться теми вопросами, которые доступны пониманию школьника-старшеклассника или могут возникнуть у его школьного учителя. Поэтому книгу не попали такие темы, как *автомодельность* (самоподобие решений дифференциальных уравнений) или *ренорм-группа* (метод изменения масштаба энергий к квантовой теории поля и статистической физике).

Все основные идеи этой книги[3] должны входить в культурный багаж каждого современного образованного человека (даже гуманитария!) как элемент естественнонаучной грамотности, наподобие таблицы умножения. Эти знания нужны даже в повседневной жизни, чтобы понимать в общих чертах закономерности работы окружающей нас техники, а также чтобы не стать жертвой обмана, основанного на квазинаучных манипуляциях с числами и формулами.

По этой причине вопрос о написании «Заключения» со списком рекомендованной литературы был поначалу воспринят автором так, как будто его попросили составить такое «Заключение» к таблице умножения. Тем не менее какие-то рекомендации здесь приводятся в жанре комментированной библиографии, которая, разумеется, не претендует на полноту, а лишь приводит примеры книг, которые могут оказаться интересными и полезными.

## Комментированная библиография

Чтобы по-настоящему научиться пользоваться методами размерности и подобия, полезно видеть их применения в повседневной жизни. Если вам надо объяснить более-менее сложное явление «на пальцах», то без соображений размерности подобия вам не обойтись, поэтому

[3] За исключением обращённого в прошлое раздела «Именованные числа» и обращённого в будущее разделы «Система СИ в электродинамике***».

они встретятся практически в любой качественной популярной книге по физике, например, может быть полезна такая книга:

**1.** Асламазов Л. Г., Варламов А. А. Удивительная физика. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 160 с. — (Б-чка «Квант». Вып. 63).

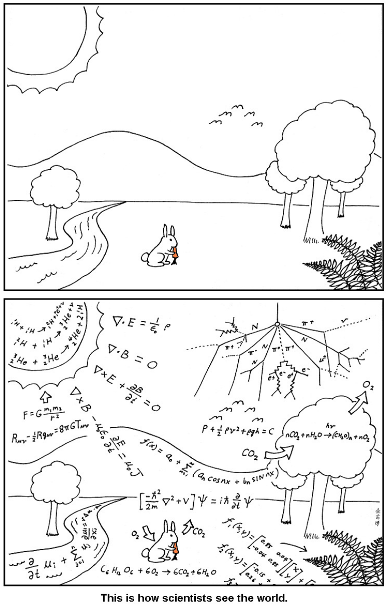



**Рис. 7.27:** Естественнонаучный взгляд на мир [CC BY-NC, Abstruse Goose, `https://abstrusegoose.com/275`]

Физический взгляд (а взгляд с точки зрения размерности и подобия — это часть физического взгляда) применим не только к явлениям, традиционно относящимся к физике, но и к более сложным системам, например в биологии:

**2.** Богданов К. Ю. Физик в гостях у биолога. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 144 с. — (Б-чка «Квант». Вып. 49).

И, конечно, методы размерности и подобия наиболее любимы в гидро- и аэродинамике, где они позволяют сделать предварительные прикидочные оценки, не прибегая к численным решениям на суперкомпьютерах, уравнений потока жидкости или газа:

**3.** Стасенко А. Л. Физика полёта. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 144 с. — (Б-чка «Квант». Вып. 70).

От биологии и гидро-аэродинамики, с их самоподобными структурами, естественно перейти к геометрии фракталов, которая тесно связана с хаотической и нелинейной динамикой:

**4.** Мандельброт Б. Б. Фрактальная геометрия природы. — М. : Институт компьютерных исследований, 2002. — 656 с.

Фракталы не только полезны, но и красивы:

**5.** Пайтген Х.-О., Рихтер П. Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. — М. : Мир, 1993. — 176 с.

Отдельно советую обратить внимание на такие источники:

**6.** Журнал для школьников «Квант» (`http://kvant.ras.ru/`).

**7.** Библиотечка «Квант» (`http://ilib.mccme.ru/#bmkvant`).

**8.** Проект по созданию математических мультфильмов и миниатюр «Математические этюды» (`http://www.etudes.ru/`).

Учебное издание

**Иванов** Михаил Геннадьевич

# РАЗМЕРНОСТЬ И ПОДОБИЕ

Редакторы: *В. А. Дружинина, О. П. Котова.*
Корректор *О. П. Котова.*
Дизайнер обложки *Е. А. Казённова.*

Подписано в печать 23.04.2019. Формат $60 \times 84\ {}^{1}/16$. Усл. печ. Л. 9,5.
Уч.-изд. л. 9,0. Тираж 1500 экз. Заказ № 85.

Федеральное государственное автономное
учреждение высшего образования «Московский физико-
технический институт (национальный исследовательский университет)»
141700б Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22б e-mail: rio@mipt.ru

---

Отпечатано в полном соответствии с предоставленным оригинал-макетом
ООО «Печатный салон ШАНС»
127412, г. Москва, ул. Ижорская, д. 13, стр. 2

**Иванов Михаил Геннадьевич**

Доцент кафедры теоретической физики МФТИ.
Автор книги "Как понимать квантовую механику".
*Научные интересы*: основания квантовой механики, применение методов общей теории относительности и дифференциальной геометрии к геометрическому моделированию упругих сред, популяризация науки, образование, применение естественно-научных методов для описания общества, школоцентричный подход к моделированию и конструированию общественных процессов.

ISBN 978-5-7417-0700-5
9 785741 707005

М. Г. Иванов РАЗМЕРНОСТЬ И ПОДОБИЕ