Механика и теория поля

М. Г. Иванов[1]

1 сентября 2025 г.

[1]Иванов Михаил Геннадьевич. e-mail: ivanov.mg@mipt.ru

Оглавление

Предисловие . . . 14
О значении физики и математики в естественных науках . . . 16
Благодарности . . . 17
Задача 0 . . . 19
Некоторые обозначения и соглашения . . . 20

Первый семестр **24**

I Механика и специальная теория относительности (1-й семестр, основной материал) **24**

1.1 Введение (с. 152) **25**
1.1.1 Законы Ньютона как законы сохранения и баланса . . . 25
1.1.1.1 Нулевой закон Ньютона (гипотеза абсолютного времени) . . . 25
1.1.1.2 Три закона Ньютона . . . 26
1.1.1.3 Шесть законов Ньютона (законы Ньютона как законы сохранения и баланса) . . . 27
1.1.2 Материальная точка не так проста! . . . 28
1.1.3 Как могли бы возникнуть вариационные принципы (∼) . . . 28
1.1.4 Обобщённые координаты . . . 30
1.1.4.1 Если мы хотим использовать не только декартовы координаты (∼) . . . 30
1.1.4.2 Свойства обобщённых координат . . . 31
1.1.4.3 Геометрический смысл определителя* (л) . . . 32
1.1.5 Задачи 1–3 . . . 34
1.1.6 Ответы к задачам 1, 2 . . . 35

1.2 Тензоры (с. 161) **36**
1.2.1 Вспоминаем матрицы (л) . . . 36
1.2.2 Тензоры общего вида . . . 37
1.2.3 Простейшие тензоры . . . 38
1.2.3.1 Скаляр . . . 38
1.2.3.2 Вектор . . . 39
1.2.3.3 Ковектор . . . 39
1.2.4 Свойства тензоров . . . 40
1.2.4.1 Самосогласованность закона преобразования тензоров . . . 40
1.2.4.2 Тензорное произведение и свёртка . . . 40
1.2.4.3 Признак тензора . . . 41
1.2.4.4 Баланс индексов и аргументов . . . 41
1.2.4.5 Метрика . . . 43
1.2.4.6 Евклидова метрика . . . 44
1.2.4.7 Диаграммные обозначения** . . . 44
1.2.5 Матрицы и тензоры . . . 45
1.2.5.1 Правила перевода . . . 45
1.2.5.2 Некоторые правила преобразований . . . 46
1.2.6 Тензоры и базисы* . . . 47
1.2.7 Задачи 4–8 . . . 49
1.2.8 Ответы к задачам 4, 6, 7 . . . 50

1.3 Лагранжев формализм (с. 180) **51**
1.3.1 Действие . . . 51
1.3.2 Вариационная производная . . . 51
1.3.2.1 Пример: гармонический осциллятор . . . 53
1.3.2.2 Уравнения Эйлера-Лагранжа . . . 53
1.3.3 Энергия . . . 54
1.3.4 Уравнения Эйлера-Лагранжа с тензорной точки зрения* . . . 55
1.3.5 Теорема Нётер . . . 56
1.3.5.1 Симметрия, не зависящая от времени . . . 56
1.3.5.2 Симметрия и закон сохранения . . . 57
1.3.5.3 Симметрия, зависящая от времени . . . 57
1.3.5.4 Сведение к тривиальному случаю . . . 58
1.3.5.5 Главные примеры применения теоремы Нётер . . . 58
1.3.6 Задачи 9–11 . . . 59
1.3.7 Ответы к задачам 9, 10 . . . 60

1.4 Гамильтонов формализм (с. 190) **61**
1.4.1 Уравнения Гамильтона . . . 61
1.4.2 Гамильтонов формализм как частный случай лагранжева формализма . . . 63
1.4.2.1 Множители Лагранжа . . . 63
1.4.2.2 Исключение скоростей . . . 64
1.4.3 Преобразования Лежандра . . . 65
1.4.4 Исключение циклических координат и метод Рауса* . . . 66
1.4.5 Наблюдаемые и скобка Пуассона . . . 67
1.4.6 Скобка Пуассона как скобка Ли* . . . 68
1.4.7 Уравнения Гамильтона с тензорной точки зрения** . . . 68
1.4.8 Скобка Пуассона с тензорной точки зрения** . . . 70
1.4.9 Законы сохранения . . . 71
1.4.9.1 Динамические инварианты* . . . 71
1.4.9.2 Интегралы движения . . . 71
1.4.10 Задачи 12–16 . . . 72
1.4.11 Ответы к задачам 12–14 . . . 72

1.5 Задача Кеплера (с. 202) **74**
1.5.1 Сведение задачи двух тел к задаче одного тела . . . 74
1.5.2 Закон площадей (второй закон Кеплера) . . . 75
1.5.3 Разделение переменных в полярных координатах . . . 76
1.5.4 Первый закон Кеплера . . . 77
1.5.5 Третий закон Кеплера . . . 78
1.5.6 Теорема вириала . . . 79
1.5.7 Задачи 17–19 . . . 80

1.6 Кинематика и геометрия: от Ньютона к Минковскому (с. 206) **81**
1.6.1 Кинематика точки и геометрия ньютоновской механики . . . 81
1.6.1.1 Трёхмерное пространство ньютоновской механики . . . 81
1.6.1.2 Четырёхмерное пространство ньютоновской механики . . . 82
1.6.2 Постулаты специальной теории относительности . . . 83
1.6.3 Об отличиях современной физики от классической (ф) . . . 84
1.6.4 Мысленные эксперименты . . . 84
1.6.4.1 Неизменность поперечных размеров . . . 84
1.6.4.2 Собственное время и интервал . . . 85
1.6.5 О единицах измерения времени и расстояния в СТО . . . 87

1.7 Кинематика и геометрия СТО (с. 212) **88**
1.7.1 Геометрия Минковского . . . 88
1.7.2 Кинематика СТО . . . 90
1.7.3 Импульс и соответствие с ньютоновской механикой . . . 92
1.7.4 Частицы с переменной массой, упругие и неупругие процессы* . . . 93
1.7.5 Импульс и волновой вектор* . . . 94
1.7.6 Задачи 20, 21 . . . 94
1.7.7 Ответы к задачам 20, 21 . . . 95

1.8 Преобразования Лоренца и повороты (с. 222) 96
1.8.1 Поворот круговой и поворот гиперболический . . . 96
1.8.2 Быстрота и скорость . . . 99
1.8.3 Преобразования Лоренца для разных объектов . . . 99
1.8.4 Снова кинематические эффекты . . . 100
1.8.5 Кинематическое и динамическое описание эффектов СТО . . . 101
1.8.6 Матричные экспоненты* . . . 102
1.8.7 Поворот и буст в произвольном направлении* . . . 105
1.8.8 Задачи 22–28 . . . 107
1.8.9 Ответы к задачам 22–28 . . . 108

1.9 Время как координата и энергия как импульс* (с. 253) 109
1.9.1 Лагранжев формализм в расширенном конфигурационном пространстве* . . . 109
1.9.2 Принцип Мопертюи и укороченное действие* . . . 110
1.9.3 Задача 29 . . . 111

1.10 Релятивистская частица (с. 258) 112
1.10.1 Свободная релятивистская частица . . . 112
1.10.2 Релятивистская частица во внешнем поле . . . 113
1.10.3 Уравнения движения заряженной частицы в 3-мерном виде . . . 115
1.10.4 Задачи 30, 31 . . . 115
1.10.5 Ответ к задаче 31 . . . 116

1.11 Антисимметричные тензоры* (с. 268) 117
1.11.1 (Анти)симметризация . . . 118
1.11.2 Форма объёма . . . 119
1.11.3 Ходжевская дуальность . . . 120
1.11.4 Внешнее произведение** . . . 121
1.11.5 Внешняя производная* . . . 121
1.11.6 Кинематические тождества для электромагнитного поля . . . 122
1.11.7 Канонические преобразования** . . . 123
1.11.8 Гамильтонова эволюция как каноническое преобразование . . . 124
1.11.9 Задачи 32–35 . . . 125

1.12 Интегрирование и дифференцирование полей (л) (с. 271) 126
1.12.1 Градиент (л) . . . 126
1.12.2 Дивергенция (л) . . . 127
1.12.3 Ротор (л) . . . 128
1.12.4 Связи между градиентом, дивергенцией и ротором (л) . . . 130
1.12.5 Лапласиан и уравнения математической физики (л) . . . 131

1.13 Ньютоновская механика как предельный случай СТО (с. 277) 133
1.13.1 От преобразований Лоренца к преобразованиям Галилея . . . 133
1.13.2 Преобразование энергии и импульса . . . 134
1.13.3 Момент импульса и теорема о движении центра инерции . . . 134
1.13.4 Тензор момента импульса . . . 136

1.14 Неинерциальные системы отсчёта (с. 281) 138
1.14.1 Неинерциальные системы отсчёта в классической механике . . . 138
1.14.2 Так что же мы получили? . . . 140
1.14.3 Неинерциальные системы отсчёта в СТО . . . 140
1.14.4 Задача 36 . . . 141

1.15 Твёрдое тело (с. 286) 142
1.15.1 Кинематика твёрдого тела . . . 142
1.15.1.1 Углы Эйлера в теоретической физике* . . . 143
1.15.1.2 Углы Эйлера в теоретической механике** . . . 144
1.15.1.3 Навигационные углы (крен, тангаж, рысканье)** . . . 144
1.15.2 Момент инерции . . . 145
1.15.3 Момент импульса и эллипсоид инерции . . . 146
1.15.4 Свободный гироскоп . . . 147
1.15.4.1 Вблизи оси с максимальным или минимальным моментом инерции* . . . 148

1.15.4.2 Вблизи оси с промежуточным моментом инерции* . . . 148
1.15.5 Вынужденная прецессия и нутация* . . . 149
1.15.6 Задача 37 . . . 150

II Механика и специальная теория относительности (1-й семестр, дополнительный материал) 151

2.1 Введение и дифференцируемое многообразие (с. 25) 152
2.1.1 Решения задач 1—3 . . . 152
2.1.2 Дифференцируемое многообразие . . . 158

2.2 Тензоры и ковариантная производная (с. 36) 161
2.2.1 Решения задач 4, 5, 7, 8 . . . 161
2.2.2 Свободная частица в обобщённых координатах . . . 168
2.2.2.1 В плоском пространстве . . . 168
2.2.2.2 В искривлённом пространстве . . . 169
2.2.3 Кривая экстремальной длины . . . 170
2.2.4 Ковариантная производная . . . 171
2.2.5 Базисные векторы и ковекторы . . . 172
2.2.6 Дифференцируем ковектор вдоль кривой . . . 173
2.2.7 Дифференцируем ковекторное поле по координатам . . . 174
2.2.8 Определение ковариантной производной в общем случае . . . 174
2.2.9 Дифференцируем вектор . . . 174
2.2.10 Дифференцируем тензор общего вида . . . 175
2.2.11 Как преобразуются коэффициенты связности . . . 175
2.2.12 Параллельный перенос . . . 176
2.2.13 Геодезическая . . . 177
2.2.14 Связность и метрика . . . 177
2.2.15 Метрическая связность с кручением* . . . 178

2.3 Лагранжев формализм и производная Ли (с. 51) 180
2.3.1 Решения задач 9—11 . . . 180
2.3.2 Производная Ли . . . 186
2.3.3 Вектор Киллинга . . . 188

2.4 Гамильтонов формализм и коммутаторы векторных полей (с. 61) 190
2.4.1 Преобразование Лежандра на графике . . . 190
2.4.2 Решения задач 12—15 . . . 190
2.4.3 От симметрии к закону сохранения . . . 196
2.4.4 Вектор как дифференциальный оператор и сдвиг по векторному полю . . . 197
2.4.5 Коммутатор векторных полей . . . 199
2.4.5.1 Пример: скобка Пуассона и коммутатор . . . 200
2.4.5.2 Пример: векторное произведение и коммутатор . . . 200
2.4.6 Дальнейшее чтение . . . 201

2.5 Задача Кеплера и прецессия перигелия (с. 74) 202
2.5.1 Движение в центральном поле в переменных $\phi, \rho = r^{-1}$ . . . 202
2.5.2 Вывод первого закона Кеплера в переменных $\phi, \rho = r^{-1}$ . . . 202
2.5.3 Прецессия перигелия Меркурия (предварительно) . . . 203
2.5.4 Трёхмерное пространство как выделенный случай . . . 203
2.5.5 Теорема вириала и самоподобие потенциала . . . 204
2.5.5.1 Преобразования подобия . . . 204
2.5.5.2 Обобщая теорему Нётер . . . 205

2.6 Кинематика и геометрия: от Ньютона к Минковскому (с. 81) 206
2.6.1 Дополнительные мысленные эксперименты . . . 206
2.6.1.1 Интерферометр Майкельсона . . . 206
2.6.1.2 Относительность одновременности и синхронизация часов . . . 207
2.6.1.3 Чья линейка длиннее? Чьи часы быстрее? . . . 208
2.6.1.4 Согласованность замедления времени и сокращения расстояний . . . 209
2.6.1.5 Эффект близнецов . . . 210

2.6.2 Кинематика Ньютона и Минковского как вырожденный случай . . . 211

2.7 Кинематика и геометрия СТО (с. 88) 212
2.7.1 Нейтрино, мюон и другие частицы в стандартной модели . . . 212
2.7.2 Решения задач 20, 21 . . . 213
2.7.3 Кинематика частицы в нелоренцеских координатах и ОТО . . . 217
2.7.3.1 Косоугольные координаты . . . 217
2.7.3.2 Пример: радиолокационные координаты на плоскости . . . 218
2.7.3.3 Криволинейные координаты . . . 219
2.7.3.4 Пример: радиолокационные координаты в пространстве . . . 220

2.8 Группа Лоренца и пространства постоянной кривизны (с. 96) 222
2.8.1 Аддитивность угла и быстроты . . . 222
2.8.1.1 Круговое и гиперболическое движение в механике . . . 223
2.8.1.2 Угол, быстрота и площадь сектора . . . 223
2.8.2 Собственные векторы и числа буста . . . 224
2.8.3 Собственные векторы и числа поворота . . . 225
2.8.4 Понятие группы (л) . . . 225
2.8.4.1 Определение и смысл (л) . . . 226
2.8.4.2 Коммутативность и некоммутативность (л) . . . 227
2.8.4.3 Подгруппы (л) . . . 227
2.8.4.4 Стандартные матричные группы (л) . . . 228
2.8.5 Группы и алгебры Ли* . . . 229
2.8.5.1 Матричные представления групп и алгебр Ли . . . 232
2.8.5.2 Описания симметрий с помощью групп и алгебр Ли . . . 232
2.8.6 Группы Лоренца, Пуанкаре и их подгруппы . . . 233
2.8.7 Группа Лоренца и электромагнитное поле . . . 234
2.8.8 Решения задач 22–28 . . . 235
2.8.9 Геометрический смысл прецессии Томаса . . . 243
2.8.10 Геометрия Лобачевского и сферическая геометрия . . . 246
2.8.10.1 Модель Клейна и пространство скоростей СТО . . . 246
2.8.10.2 Модель Пуанкаре . . . 248

2.9 Время как координата и энергия как импульс в гамильтоновом формализме* (с. 109) 253
2.9.1 Гамильтонов формализм в расширенном фазовом пространстве . . . 253
2.9.2 Время как координата стрелки часов . . . 254
2.9.3 Канонические преобразования, зависящие от времени . . . 255
2.9.3.1 Канонические преобразования, не зависящие от времени . . . 255
2.9.3.2 Время как координата и энергия как импульс . . . 255
2.9.3.3 Канонические преобразования, не меняющие время . . . 255

2.10 Релятивистская частица в СТО и ОТО (с. 112) 258
2.10.1 Решение задачи 31 . . . 258
2.10.2 Расширенное гамильтоново описание релятивистской частицы . . . 261
2.10.3 Частица в криволинейных координатах и в общей теории относительности . . . 262
2.10.4 Частица в криволинейных координатах и в общей теории относительности-2 . . . 263
2.10.5 Частица в поле Шварцшильда . . . 264
2.10.5.1 Симметрии и законы сохранения в поле Шварцшильда . . . 265
2.10.5.2 Прецессия перигелия Меркурия . . . 266

2.11 Антисимметричные тензоры* (с. 117) 268
2.11.1 Электромагнитное поле и симплектическая структура . . . 268
2.11.2 Ковекторы, дифференциалы и дифференциальные формы** . . . 269

2.12 Интегрирование антисимметричных тензоров* (с. 126) 271
2.12.1 ∇ и $\triangle$ через $*$ и d . . . 271
2.12.2 Интегрирование по поверхностям разных размерностей . . . 274
2.12.3 Теорема Стокса для дифференциальных форм . . . 275

2.13 Ньютоновская механика как предельный случай СТО (с. 133) 277
2.13.1 Классическая потенциальная энергия и макроскопические силы из СТО . . . 277
2.13.2 Обобщение теоремы Нётер . . . 278

2.14 Неинерциальные системы отсчёта в СТО и ОТО (с. 138) **281**
2.14.1 Неинерциальные системы отсчёта в СТО . . . 281
2.14.1.1 Ускорение протяжённого тела . . . 281
2.14.1.2 Полярные координаты на плоскости Минковского . . . 283
2.14.2 Движение медленной частицы в метрике, близкой к метрике Минковского . . . 284

2.15 Гироскоп (с. 142) **286**
2.15.1 Решение задачи 37 . . . 286
2.15.2 Электромагнитная аналогия для симметрического волчка . . . 289

Второй семестр **292**

III Элементы теории колебаний и электродинамика (2-й семестр, основной материал) **292**

3.1 Уравнение Гамильтона–Якоби* (с. 405) **293**
3.1.1 Вывод уравнения Гамильтона–Якоби . . . 293
3.1.2 Зачем нужно уравнение Гамильтона–Якоби* . . . 294
3.1.3 Что делать с решением уравнения Гамильтона–Якоби* . . . 295
3.1.4 Решение уравнения Гамильтона–Якоби методом разделения переменных* . . . 295
3.1.5 Задачи 38, 39 . . . 297
3.1.6 Пробная частица в поле двух неподвижных точечных масс** . . . 297

3.2 Адиабатические инварианты (с. 417) **300**
3.2.1 Что такое адиабатические инварианты . . . 300
3.2.2 Интегрируемые системы** . . . 300
3.2.3 Переменные действие-угол** . . . 302
3.2.4 Примеры . . . 303
3.2.5 Адиабатические инварианты** . . . 304
3.2.6 Задачи 40–42 . . . 305

3.3 Одномерные малые колебания (с. 425) **307**
3.3.1 Свободные колебания . . . 307
3.3.2 Вынужденные колебания . . . 308
3.3.2.1 Вынужденные колебания и собственные частоты** . . . 310
3.3.2.2 Функция Грина для осциллятора** . . . 310
3.3.3 Параметрический резонанс* . . . 311
3.3.3.1 Параметрический резонанс с трением** . . . 313
3.3.3.2 Параметрический резонанс и спектральная задача*** . . . 314
3.3.4 Задачи 43–46 . . . 314

3.4 Сложные линейные колебания (с. 435) **316**
3.4.1 Линеаризация системы . . . 316
3.4.2 Собственные колебания . . . 317
3.4.3 Диссипативная функция Релея** . . . 319
3.4.4 Собственные колебания с диссипацией и гироскопическими силами** . . . 319
3.4.5 Задача 47 . . . 320

3.5 Нелинейные колебания (с. 451) **321**
3.5.1 Вырожденность одномерного случая . . . 321
3.5.2 Зависимость частоты от амплитуды одномерных колебаний . . . 322
3.5.2.1 Линейная по возмущению поправка к периоду осциллятора* . . . 323
3.5.2.2 Квадратичная по возмущению поправка к периоду осциллятора** . . . 324
3.5.3 Одномерный нелинейный резонанс . . . 324
3.5.4 Теория возмущений . . . 325
3.5.5 Нелинейный резонанс . . . 327
3.5.6 Задачи 48, 49 . . . 328

3.6 Поле как механическая система (с. 454) 329
3.6.1 Пример: цепочка осцилляторов* . . . 329
3.6.2 Решение одномерного волнового уравнения (л) . . . 331
3.6.3 Полевое действие в сравнении с механическим . . . 331
3.6.3.1 Точка пространства как номер степени свободы . . . 331
3.6.3.2 Пространство-время как «многомерное время» . . . 332
3.6.4 Полевые уравнения Эйлера-Лагранжа . . . 333
3.6.5 Энергия и импульс поля . . . 334
3.6.5.1 Сохранение электрического заряда . . . 334
3.6.5.2 Сохранение энергии-импульса . . . 335
3.6.5.3 Тонкости с энергией и импульсом поля (!) . . . 335
3.6.6 Задача 50 . . . 336

3.7 Описание электромагнитного поля (с. 458) 338
3.7.1 Кинематика электромагнитного поля . . . 338
3.7.2 4-мерная плотность электрического тока . . . 339
3.7.3 Действие для электромагнитного поля . . . 340
3.7.4 Вторая пара уравнений Максвелла . . . 341
3.7.5 Тензор энергии-импульса электромагнитного поля . . . 342
3.7.5.1 Симметризация тензора энергии-импульса . . . 342
3.7.5.2 Компоненты и силовые линии . . . 343
3.7.6 Картины силовых линий и их физический смысл . . . 344
3.7.7 Задача 51 . . . 347

3.8 Волновое уравнение для электромагнитного поля (с. 464) 348
3.8.1 Уравнения поля через потенциалы . . . 348
3.8.2 Калибровка Лоренца . . . 349
3.8.3 Калибровка Кулона* . . . 349
3.8.4 Уравнение Пуассона . . . 350
3.8.5 Волновое уравнение . . . 352

3.9 Электро- и магнитостатика (с. 466) 355
3.9.1 Электростатическая энергия . . . 355
3.9.1.1 Проблема точечного заряда . . . 356
3.9.1.2 Границы применимости классической электродинамики . . . 357
3.9.2 Разложение кулоновского потенциала . . . 357
3.9.3 Электрические мультипольные моменты . . . 359
3.9.3.1 Мультипольное разложение потенциала . . . 359
3.9.3.2 Мультипольное разложение энергии . . . 360
3.9.4 Магнитный дипольный момент . . . 360
3.9.5 Поля диполей . . . 361
3.9.6 Задачи 52–55 . . . 361
3.9.7 Ответ к задаче 52 . . . 362

3.10 Свободное электромагнитное поле (с. 476) 363
3.10.1 4-мерное преобразование Фурье* . . . 363
3.10.2 Решение уравнения свободного электромагнитного поля* . . . 364
3.10.3 Плоская монохроматическая волна . . . 365
3.10.4 Плоская волна произвольной формы* . . . 366
3.10.5 Поляризация . . . 367
3.10.5.1 Вектор поляризации . . . 367
3.10.5.2 Тензор поляризации* . . . 368
3.10.6 Стоячая монохроматическая волна* . . . 369

3.11 Собственные колебания электромагнитного поля (с. 484) 370
3.11.1 Разложение по бегущим волнам . . . 371
3.11.2 Резонаторы и волноводы (ф) . . . 373

3.12 Излучение в мультипольном приближении (с. 488) 374
3.12.1 Волновая зона . . . 374
3.12.2 Мультипольное разложение для потенциала в волновой зоне . . . 375
3.12.3 Поля в волновой зоне и поляризация . . . 376
3.12.4 Интенсивность излучения . . . 377
3.12.5 Задачи 56–60 . . . 378

3.13 Реакция излучения и излучение релятивистских частиц (с. 492) 380
3.13.1 Радиационное трение . . . 380
3.13.1.1 Интенсивность излучения в нуле и на бесконечности . . . 380
3.13.1.2 Проблемы с радиационным трением . . . 381
3.13.1.3 Радиационное трение как возмущение . . . 381
3.13.2 Интенсивность излучения релятивистских частиц . . . 382
3.13.3 Преобразование частот и углового распределения . . . 383
3.13.4 Задачи 61, 62 . . . 384

3.14 Рассеяние (с. 495) 385
3.14.1 Понятие о сечениях рассеяния и поглощения . . . 385
3.14.1.1 Рассеяние и поглощение частиц . . . 385
3.14.1.2 Рассеяние и поглощение волн . . . 387
3.14.2 Постановка задачи рассеяния в электродинамике . . . 388
3.14.3 Рассеяние электромагнитной волны на осцилляторе . . . 388
3.14.3.1 Рассеяние и радиационное трение . . . 389
3.14.4 Задачи 63—65 . . . 390

3.15 Электродинамика в среде и единицы измерения в электродинамике (с. 498) 391
3.15.1 Параметризация связанных источников . . . 391
3.15.2 Усреднение (сглаживание) полей и источников . . . 393
3.15.3 Смысл векторных полей **P** и **M** . . . 394
3.15.3.1 Как обычно определяют поля **P** и **M**? . . . 394
3.15.4 Системы единиц измерения в электродинамике . . . 395
3.15.4.1 Спор длиной в полтора века . . . 396
3.15.4.2 Критика СИ . . . 397
3.15.4.3 Какая система единиц нам нужна? . . . 397
Пожелания теоретика . . . 397
Пожелания инженера и экспериментатора . . . 397
Как примирить теоретиков с инженерами? . . . 398
3.15.4.4 Физико-техническая система единиц . . . 398
Преобразование от СГС к ФТ . . . 398
Уравнения в ФТ-системе . . . 399
3.15.4.5 Система СИ в электродинамике . . . 400
3.15.4.6 Смысл постоянной Кулона . . . 400
3.15.4.7 Понятие о системе систем единиц измерения . . . 401
Литература . . . 402

IV Элементы теории колебаний и электродинамика (2-й семестр, дополнительный материал) 404

4.1 Уравнение Гамильтона–Якоби и канонические преобразования (с. 293) 405
4.1.1 Решение задачи 38 . . . 405
4.1.2 Производящие функции канонических преобразований . . . 409
4.1.2.1 Действие порождает каноническое преобразование . . . 409
4.1.2.2 Зависимость производящих функций от времени . . . 410
Зависимость/независимость от времени . . . 410
Мгновенное каноническое преобразование . . . 411
4.1.2.3 Производящие функции от разных наборов аргументов . . . 411
Перестановка координат и импульсов . . . 412
Преобразование типов производящих функций . . . 412
4.1.2.4 Важные примеры . . . 413
Точечное преобразование . . . 413

Свободная частица . . . 414
Гармонический осциллятор . . . 414
4.1.3 Канонические замены координат как калибровочные преобразования в связи с производящими функциями . . . 415
4.1.4 Дальнейшее чтение . . . 416

4.2 Адиабатические инварианты (с. 300) 417
4.2.1 Решения и обсуждение задач 40–42 . . . 417

4.3 Одномерные малые колебания и линейные дифференциальные уравнения (с. 307) 425
4.3.1 Решения задач 45, 46 . . . 425
4.3.2 Линейные дифференциальные уравнения** (л) . . . 428
4.3.2.1 Как решать линейные однородные дифференциальные уравнения* (л) . . . 428
4.3.2.2 Как решать линейные неоднородные уравнения (л) . . . 429
4.3.2.3 Функциональное пространство L_2* (л) . . . 429
4.3.2.4 Обобщённые функции* (л) . . . 430
4.3.2.5 Преобразование Фурье (л) . . . 432
4.3.2.6 Решение неоднородных уравнений с фурье-гармоникой* (л) . . . 433
4.3.2.7 Функции Грина* (л) . . . 434

4.4 Сложные линейные колебания и преобразования Фурье (с. 316) 435
4.4.1 Решение задачи 47 . . . 435
4.4.2 Преобразование Фурье на решётке, отрезке, прямой . . . 441
4.4.2.1 Унитарное пространство . . . 441
4.4.2.2 Собственные числа и векторы циклического сдвига . . . 442
4.4.2.3 Преобразование Фурье на решётке . . . 444
4.4.2.4 Прямая и обратная решётки . . . 445
4.4.2.5 Переопределение скалярного произведения на координатной решётке . . . 445
4.4.2.6 Предельный переход к рядам Фурье . . . 446
4.4.2.7 Переопределение скалярного произведения на обратной решётке . . . 448
4.4.2.8 Предельный переход к преобразованию Фурье . . . 448
4.4.2.9 Коэффициенты в преобразованиях Фурье . . . 449
4.4.3 Комплексные координаты и амплитуды . . . 450
4.4.4 Уравнение Шрёдингера как описание системы гармонических осцилляторов → . . . 450

4.5 Нелинейные колебания (с. 321) 451
4.5.1 Решения задач 48, 49 . . . 451

4.6 Поле как механическая система (с. 329) 454
4.6.1 Теорема Нётер в теории поля . . . 454
4.6.2 Альтернативное определение тензора энергии-импульса . . . 455
4.6.3 Согласованность определений тензора энергии-импульса для скалярных полей . . . 456

4.7 Свойства уравнений Максвелла (с. 338) 458
4.7.1 Совместность уравнений Максвелла . . . 458
4.7.2 Уравнения Максвелла с магнитными зарядами . . . 459
4.7.3 Уравнения Максвелла в комплексной форме . . . 459
4.7.3.1 Зарядовое вращение . . . 460
4.7.4 Кинематика и динамика меняются местами . . . 460
4.7.4.1 Альтернативная параметризация электромагнитного поля . . . 461
4.7.4.2 Дуальное действие . . . 461
4.7.4.3 Дуальные калибровочные преобразования . . . 462

4.8 Запаздывающая функция Грина для волнового уравнения (с. 348) 464

4.9 Электро- и магнитостатика (с. 355) 466
4.9.1 Решения задач 53, 54 . . . 466
4.9.2 Энергия магнитостатического поля . . . 469
4.9.3 Поля диполей в нуле . . . 470
4.9.3.1 Сверхпроводящая сфера в однородном электрическом поле . . . 471
4.9.3.2 Сверхпроводящая сфера в однородном магнитном поле . . . 471
4.9.4 Точечные электрические мультиполи . . . 471

4.9.4.1 Плотность заряда в точечном мультиполе . . . 471
4.9.4.2 Ток в точечном мультиполе . . . 472
4.9.5 Точечные магнитные мультиполи . . . 473
4.9.6 Сферические функции и полиномы Лежандра . . . 473

4.10 Поляризация и квантовая механика (с. 363) 476
4.10.1 Вектор поляризации . . . 476
4.10.1.1 Унитарная эволюция . . . 477
4.10.1.2 Базисы и проекторы . . . 478
4.10.1.3 Поляризаторы с комплексными осями* . . . 478
4.10.1.4 Тензор поляризации* . . . 480
4.10.2 Поляризация отдельного фотона** . . . 481
4.10.2.1 Чистые состояния . . . 481
4.10.2.2 Смешанные состояния*** . . . 482

4.11 Собственные колебания электромагнитного поля (с. 370) 484
4.11.1 Собственные функции оператора Лапласа и собственные колебания . . . 484
4.11.2 Разложение поля в ящике на стоячие волны . . . 485

4.12 Излучение в мультипольном приближении (с. 374) 488
4.12.1 Решения задач 56, 58, 59 . . . 488

4.13 Реакция излучения и излучение релятивистских частиц (с. 380) 492
4.13.1 Радиационное трение релятивистских частиц . . . 492
4.13.2 Потенциалы Лиенара-Вихерта . . . 492
4.13.3 Преобразование частот и углового распределения . . . 493

4.14 Рассеяние (с. 385) 495
4.14.1 Решения задач 63, 64 . . . 495

4.15 Электродинамика в среде (с. 391) 498
4.15.1 Неоднозначность полей **D** и **H** . . . 498
4.15.2 Откуда берётся неоднозначность полей **P** и **M**? . . . 499
4.15.3 Поля **D** и **H** и действие . . . 500
4.15.4 Эффект Вавилова–Черенкова . . . 500
4.15.4.1 Если бы у нас была сверхсветовая частица . . . 500
4.15.4.2 Черенковское излучение при движении частицы в среде . . . 501
4.15.4.3 Черенковское излучение на границе двух сред . . . 502

Углубленный материал 505

V Механика классическая и квантовая как классическая теория поля 505

5.1 Действие через множитель Лагранжа 507

5.2 Классическая механика как вероятностная теория 509
5.2.1 Идеальное классическое измерение . . . 511
5.2.2 Представление Лиувилля . . . 512
5.2.3 Действие для уравнения Лиувилля . . . 513
5.2.4 Представление Гамильтона . . . 513
5.2.5 Представление взаимодействия . . . 514

5.3 Переход к квантовой механике 516
5.3.1 Квантовые наблюдаемые и квантовые состояния . . . 516
5.3.2 Идеальное квантовое измерение . . . 517
5.3.3 Действие для квантового уравнения Лиувилля . . . 519
5.3.4 Представление Шрёдингера . . . 520
5.3.5 Представление Гайзенберга . . . 521
5.3.6 Представление взаимодействия . . . 521
5.3.7 Каноническое квантование . . . 522

5.4 Уравнение Гамильтона–Якоби как описание ансамбля невзаимодействующих систем 525
5.4.1 Действие для уравнения Гамильтона–Якоби . . . 526

5.5 Квантовый аналог уравнения Гамильтона–Якоби 527
5.5.1 Предел малой $\hbar$ . . . 527
5.5.2 Квантовые поправки . . . 528
5.5.3 Функционал Гамильтона . . . 529
5.5.4 Функционалы наблюдаемых и скобка Пуассона . . . 530
5.5.5 Функционал Гамильтона для частицы в потенциале . . . 530
5.5.6 Действие для уравнения Шрёдингера . . . 531

5.6 Уравнение Шрёдингера как описание системы гармонических осцилляторов 534
5.6.1 От уравнения Шрёдингера к системе осцилляторов . . . 534
5.6.2 Функция Гамильтона системы осцилляторов . . . 535
5.6.3 Скалярное произведение . . . 535

VI Внешнее гравитационное поле 537

6.1 Основные идеи ОТО 539

6.2 Комментированная библиография 542
6.2.1 Популярные книги . . . 542
6.2.2 Основной список литературы . . . 543
6.2.3 Дополнительный список литературы . . . 543
6.2.4 Где искать текущие публикации . . . 544

6.3 Дифференцируемое многообразие-+ 545

6.4 Ковариантная производная-+ 546

6.5 Частица в ОТО 547
6.5.1 Свободная частица в общей теории относительности . . . 547
6.5.2 Кривая экстремальной длины и свободная частица . . . 548
6.5.3 Кривая экстремальной длины и свободная частица-2 . . . 548
6.5.4 Нерелятивистский предел . . . 549
6.5.4.1 Уравнения движения . . . 549
6.5.4.2 Действие . . . 550
6.5.4.3 Гравитационное смещение спектральных линий . . . 551

6.6 Частица в поле Шварцшильда 552
6.6.1 Симметрии и законы сохранения в поле Шварцшильда . . . 552
6.6.2 Прецессия перигелия Меркурия . . . 554
6.6.3 Отклонение луча света вблизи Солнца . . . 556

6.7Поля материи во внешнем гравитационном поле 559
6.7.1 Пробная точечная частица . . . 560
6.7.2 Скалярное поле . . . 560
6.7.3 Электромагнитное поле . . . 561

6.8 Описание электромагнитного поля (с. 338) 563
6.8.1 Кинематика электромагнитного поля . . . 563
6.8.2 4-мерная плотность электрического тока . . . 565
6.8.3 Действие для электромагнитного поля . . . 566
6.8.4 Вторая пара уравнений Максвелла . . . 567
6.8.5 Тензор энергии-импульса электромагнитного поля . . . 568
6.8.5.1 Компоненты тензора энергии-импульса . . . 570

VII Динамика гравитационного поля 572

7.1 Тензор Римана 574
7.1.1 Вывод тензора Римана (без метрики!) . . . 574
7.1.2 Действие оператора $(\nabla_k\nabla_l - \nabla_l\nabla_k)$ на тензоры . . . 575
7.1.3 Производные от тензора Римана объекты . . . 575
7.1.4 Симметрии тензора Римана . . . 576
7.1.5 Структура тензора Римана* . . . 577
7.1.6 Тождества Бианки для симметричной связности . . . 578
7.1.7 Свёрнутые тождества Бианки для симметричной метрической связности . . . 578
7.1.8 Ковариантное уравнение непрерывности для тензора энергии-импульса . . . 578
7.1.9 Пространство с двумя связностями . . . 579

7.2 Действие для гравитационного поля 581
7.2.1 Действие Гильберта $S[g_{mn}(x)]$ . . . 581
7.2.1.1 Высшие производные в действии Гильберта** . . . 582
7.2.2 Формализм Палатини . . . 583
7.2.3 Псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля . . . 583

7.3 Предел слабого поля- 585
7.3.1 Линеаризованные уравнения Эйнштейна . . . 585
7.3.2 Калибровочные преобразования и калибровка Лоренца . . . 586
7.3.3 Две поляризации гравитационной волны . . . 587
7.3.4 Интерпретация поляризаций гравитационной волны . . . 588
7.3.5 Псевдотензор энергии-импульса слабого гравитационного поля . . . 589
7.3.6 Решение неоднородного волнового уравнения для возмущения метрики– . . . 590
7.3.7 Излучение гравитационных волн . . . 592
7.3.8 Излучение системы нерелятивистских частиц— . . . 593

VIII Точные решения уравнений Эйнштейна 594

8.1 Пространства постоянной кривизны– 596
8.1.1 Римановы пространства постоянной кривизны . . . 596
8.1.2 Евклидово пространство и сфера . . . 596
8.1.3 Пространства Минковского, Лобачевского и де Ситтера . . . 598
8.1.4 Пространство анти-де Ситтера . . . 600
8.1.5 Конформные координаты в пространствах постоянной кривизны . . . 600
8.1.6 Кривизна и тензор энергии-импульса . . . 601
8.1.6.1 Конформно плоская метрика . . . 601
8.1.6.2 Кривизна пространства постоянной кривизны . . . 601
8.1.7 Тензор энергии-импульса для космологического члена . . . 602

8.2 Одиночная космологическая струна— 603

8.3 Однородные космологические решения— 604

8.4 Сферически симметричные чёрные дыры— 605

8.5 Решение Маджумдара-Папапетру— 606

8.6 Вращающиеся чёрные дыры— 607

8.7 Вращающаяся вселенная Гёделя— 608

8.8 Космологические струны— 609

8.9 Сильная гравитационная волна— 610

Предисловие

> **nil_0:** В теор. физике и математике профессионал — это человек, который сам пересобрал свою область науки: получил все ключевые результаты в своей области. То есть своими руками проделал все ключевые выкладки, построил (перепроверил) все ключевые модели.
> Когда я читаю лекции по специальной теории относительности, я эту теорию строю из первых принципов, вывожу все ключевые результаты. И студент, если это станет его профессией, должен сам эти выводы проделать, повторить все ключевые выкладки в учебнике, прорешать стандартные задачи, понимать области применимости теорий и моделей. Да, специальная теория относительности была построена трудами Пуанкаре, Эйнштейна, Минковского, но при обучении это не важно. Важно, чтобы студент сам эту теорию снова построил. Если студент не собирается быть профессионалом в этой области, то он может что-то просто запомнить, профессионал должен всё построить сам.
> Так что профессиональный физик-теоретик может не читать Ньютона, но основные результаты Ньютона он получил своими руками. В МФТИ если студент говорит на экзамене «я не помню», то стандартный ответ преподавателя старой школы: «не помните, так выведите». Если студент успешно вывел, то оценка за то, что он это не помнил, обычно не снижается.
> Следующая ступень в профессионализме: уметь модифицировать теорию. Например, хороший студент может получить вопрос: покажите, что если вот здесь поменять знак, то станет возможной машина времени. Студенту, который хочет «хотя бы троечку», такой вопрос не зададут, но на олимпиаде по теор. физике или хорошему студенту на экзамене такой вопрос могут задать.
> Уже с экспериментальной физикой сложней: отдельный физик уже не может пересоздать свою науку полностью, поэтому работа постоянной пересборки выполняется коллективно.
> **flitched9000:** Из всех прочитанных IMHO самое дельное. Вы реабилитировали в моих глазах преподавание точных наук (пусть это заявление и выглядит глупо).
> Итак, проф. —
> 1) тот, кто способен пройти без нелепых контрфорсов путь, пройденный до него, как первооткрыватель там, где это возможно для одиночки;
> 2) вносит (и знает, куда вносить, а лучше — и сколько) свой вклад в цех Профессии.
> Ergo, подготовлен быть а) первооткрывателем, способным б) вернуться из неведомого и в) показать путь последователям.
> Пусть другие скажут лучше.
> **ivanov_petrov:** Спасибо, мне кажется, очень хорошая формулировка. Что-то вроде онтогенеза: каждый организм должен пройти сам весь путь эволюции группы. Иначе — не состоялся как организм...
> **polnaya_hernyz:** Угу.
> Прям по даосизьму: истина — не то, что ты познал (узнал), а то, что ты постиг (выстрадал, «изобрёл»), т.е. не «внешнее», а «внутреннее».
>
> *Фрагмент дискуссии в «Живом журнале»*

Данная книга основана на конспекте, объединяющем материалы по двум курсам, читавшимся автором в МФТИ: по годовому курсу «Механика и теория поля», который читался автором для студентов ФБМФ[1] МФТИ с 2015-16 учебного года по 2022-23 учебный год, и факультативному курсу «Геометрические методы в классической теории поля», который читался автором начиная с весеннего семестра 2002 года как семестровый, а с 2017-16 учебного года как годовой[2].

Многие предметы учат решать уравнения, но очень немногие учат *писать новые уравнения и понимать уравнения*. В существенной степени этим мы и займёмся.

Аналитическая механика — инструмент не только механики как таковой, но и всей теоретической физики. Язык, который она даёт, был создан для нужд классической ньютоновской механики, но оказался намного универсальнее, чем можно было бы ожидать.

Существуют две традиции преподавания аналитической механики:

1. преподавание аналитической механики как математического аппарата классической физики[3];
2. преподавание аналитической механики как математического аппарата **не**классической физики[4].

Данный курс относится ко второй традиции, с некоторыми существенными изменениями: в нём совмещён материал курсов механики и теории поля[5]. Изложение содержит заметный уклон в сторону тензорного аппарата и дифференциальной геометрии (в первую очередь нас интересуют трансформационные свойства

[1] Сначала факультета биологической и медицинской физики, впоследствии Физтех-школы биологической и медицинской физики.

[2] В этот период курс мог бы называться «Дополнительные главы механики и теории поля», потому что курсы читались параллельно и по возможности согласованно.

[3] Этой традиции придерживается кафедра теоретической механики МФТИ.

[4] Традиция восходит к 1-му тому «Механика» курса теоретической физики Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица.

[5] Традиционный для МФТИ курс теории поля включает специальную теорию относительности (СТО) и классическую

тензоров, т.е. их поведение при замене координат). Многие темы, которые были бы, безусловно, полезны для механики и теории поля, не могут быть помещены в годовой курс.

Мы отступили от некоторых традиций преподавания аналитической механики и СТО в МФТИ. В частности, мы используем метрику Минковского с противоположным знаком (*пространственноподобная метрика*[6]) по сравнению с курсом теоретической физики Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица. Также, вопреки теорфизическим традициям (но согласно традициям общей физики), магнитное поле в вакууме обозначается как $\mathbf{B}$[7]. Существенно изменён порядок подачи материала как по сравнению с курсом теоретической механики, так и по сравнению с «Механикой» и «Теорией поля» Ландау и Лифшица. Поэтому использовать литературу для справок следует с осторожностью.

По перечисленным выше причинам автор не может рекомендовать студентам какую-то одну книгу, чтения которой было бы достаточно и которая покрыла бы весь материал курса с использованием совместимых обозначений и соглашений. Это не должно препятствовать изучению студентом тех или иных тем по разным книгам.

В книге используются следующие обозначения:

(л) — ликбезовский материал напоминает необходимые разделы математики в контексте данного курса[8];

(ф) — обсуждение физического смысла;

***** — материал для углубленного изучения;

****** — факультативный материал;

******* — факультативный материал повышенной сложности;

(∼) — предварительные нестрогие соображения, полезные для понимания.

Метки типа **(∼ /) (/ ∼)**, подобно скобкам, обрамляют фрагмент текста, помеченный символом ∼.

Аналогичные «скобки» могут использоваться для других меток.

Основной лекционный материал содержится в частях 1 и 3, которые соответствуют первому и второму семестрам годового курса «Механика и теория поля».

Части 2 и 4 содержат решение ключевых задач из частей 1 и 3, а также некоторый материал факультативного годового курса «Геометрические методы в классической теории поля», который начиная с 2017-18 учебного года читается параллельно с курсом «Механика и теория поля» как его углубление и расширение[9].

Каждая глава частей 2 и 4 является дополнением к соответствующей главе частей 1 и 3. Нумерация глав частей 2 и 4 в точности соответствует нумерации глав частей 1 и 3, что должно облегчить параллельное чтение частей 1 и 3 с частями 2 и 4 соответственно. После заголовка каждой главы с основным/дополнительным материалом в частях 1–4 идёт ссылка на страницу с парной главой с дополнительным/основным материалом из другой части. С точки зрения большинства студентов, материал частей 2 и 4 заведомо избыточен для первого чтения, но представляет интерес при более глубокой проработке курса.

Часть 5 «Механика классическая и квантовая как классическая теория поля» представляет собой углубленный материал, который также основан на курсе «Геометрические методы в классической теории поля».

электродинамику в вакууме. Такой курс теории поля ориентирован на 2-й том «Теория поля» курса теоретической физики Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица, за исключением общей теории относительности.

[6]Пространственноподобная метрика с сигнатурой $(-,+,+,+)$ активно используется в литературе по теории относительности, но по историческим причинам в МФТИ более распространена времениподобная метрика с сигнатурой $(+,-,-,-)$.

[7]Напряжённость магнитного поля обозначается как $\mathbf{H}$, а индукция магнитного поля — как $\mathbf{B}$. Для электрического поля напряжённость обозначается как $\mathbf{E}$, а индукция — как $\mathbf{D}$. Эти названия восходят к временам до создания теории относительности и не учитывают её симметрии. С современной точки зрения с учётом того, что поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ образуют один тензор (являются компонентами одной антисимметричной матрицы 4×4), а поля $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ — другой, такая терминология ведёт к путанице. В гауссовой системе единиц в вакууме $\mathbf{B}=\mathbf{H}$, а $\mathbf{E}=\mathbf{D}$. С точки зрения соответствия с электродинамикой в среде было бы естественно обозначать поля в вакууме как $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, но теорфизическая традиция, восходящая к временам до создания теории относительности, предписывает обозначать эти поля как $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ (т.е. брать обозначения для напряжённостей). Мы решились нарушить эту традицию, тем более что буква H интенсивно используется для обозначения функции Гамильтона.

[8]Как обычно в теоретической физике, математика излагается «на физическом уровне строгости», т.е. все условия, которые требуются для применения используемых операций, предполагаются выполненными. Таким образом, знакомство с тем или иным математическим формализмом по данному пособию не заменяет изучения соответствующих разделов математики по учебникам, излагающим материал на математическом уровне строгости, со всеми необходимыми оговорками в определениях и формулировках теорем, со строгими доказательствами. В данном пособии математически строгое изложение всего материала не является возможным как по причине ограниченности объёма, так и потому, что основной целью пособия является обучение применению соответствующих методов к решению физических задач. Тем не менее и не до конца строгое изложение является полезным не только как шпаргалка-приложение к задачнику. При математически строгом изложении часто опускаются нестрогие наводящие соображения, благодаря которым соответствующие разделы математики могли быть созданы, в данном пособии такие соображения по возможности проговариваются явно.

[9]Ранее, начиная с весеннего семестра 2002 года, курс «Геометрические методы классической теории поля» читался отдельно как семестровый курс. Интернет-страничка курса: https://mipt.ru/education/chair/theoretical_physics/courses/geomm.php

Материалы конспекта по общей теории относительности по большей части в книгу не вошли, а вошедшие распределены по частям 2, 4. Возможно, эти материалы послужат основой отдельной книги.

Текущая версия конспекта, послужившего основой данной книги, а также электронная версия книги и ссылки на полный комплект видеозаписей лекций и семинаров доступны на авторской интернет-страничке курса «Механика и теория поля»: см. QR-код или ссылку https://mipt.ru/students/organization/mezhpr/biblio/mekhanika-i-teoriya-polya.php.

О значении физики и математики в естественных науках

Поскольку данный курс читается для студентов Физтех-школы биологической и медицинской физики, у студентов регулярно возникает вопрос, зачем им читается этот курс, и вообще, зачем в биологии и медицине нужны физика и математика. Попытаемся ответить на этот вопрос.

Прежде всего попытаемся понять, что такое физика (каков её предмет и каковы её методы) и чем она отличается от других естественных наук.

Физика — наука о природе. Это автоматически означает, что физика — экспериментальная наука (как и любая наука из числа *естественных наук*).

Отличие физики от других наук о природе (естественных наук) состоит в том, что физика — наука о явлениях, которые можно понять и описать *из первых принципов*. Таким образом, физика занимается либо простыми системами, либо простыми свойствами сложных систем. Явления, слишком сложные для физического описания (описания из первых принципов), к предмету физики не относятся, исследование таких явлений выделяется в отдельные естественные науки. Например, атом водорода хорошо описывается в рамках квантовой теории и рассматривается в рамках физики, теория химической связи находится на стыке физики и химии, а описание сколько-нибудь сложных молекул, как правило, выходит за пределы физики и является предметом химии. В химии есть свои закономерности и методы (основанные на химическом эксперименте), которые строго физически не обосновываются, но имеют свою область применимости. Исследование систем и явлений, слишком сложных для описания в рамках химии, выделяются в отдельные естественные науки, в число которых входит, например, биология.

По мере развития физики удаётся описывать её методами некоторые системы, которые раньше описывать не удавалось. Тем самым физика расширяет свою область применимости за счёт других естественных наук. Так, упомянутый выше атом водорода стал предметом физики только с созданием квантовой теории, тем самым физика расширилась за счёт химии. Химия от этого только выиграла, так как это позволило применять к химическим задачам мощные физические методы.

Что значит *описание из первых принципов*? Обычно это означает, что первые *принципы физики* формулируются на языке математики, где они выступают в роли аксиом, после чего физическая система допускает математическое описание. Это означает, что *математика — родной язык теоретической физики*. С такой точки зрения становится понятной «непостижимая эффективность математики»[10] в физике и её существенно меньшая эффективность в других естественных науках.

Но что такое математика? *Математика — наука о строгом мышлении.* Любое действительно строгое рассуждение может быть переформулировано как математическое вычисление. Исследованием нестрогого мышления занимаются другие науки (в основном гуманитарные). Сама математика естественной наукой не является, но и к гуманитарным обычно не относится по причине несравнимой с гуманитарными науками строгости. Подобно тому, как физика расширяется за счёт других естественных наук, обогащая их своими методами, математика расширяется за счёт гуманитарных наук, также обогащая их своими методами. Так, логика была поглощена математикой практически полностью (хотя осознание этого факта сильно затянулось во времени).

Подобно тому как любое строгое рассуждение — это математическое вычисление, *любой объективный эксперимент — физический эксперимент* (в некоторых случаях физическое содержание эксперимента может быть тривиальным и не заслуживать внимания).

Поскольку математика — язык физики, очень многие математические задачи имеют физическую интерпретацию или хотя бы физическую мотивацию. Физика часто придаёт математическим понятиям наглядность и позволяет угадывать ответы математических задач.

Физика и математика — простейшие (по кругу изучаемых явлений и структур) науки о природе и мышлении. Благодаря этому им удалось очень сильно продвинуться. Изучаемые ими сейчас явления и структуры уже не столь просты, как на заре науки, а их методы необычайно мощны и универсальны. В любой естественной науке является большим успехом обнаружить, что какое-то явление может быть рассмотрено как физическое (пусть с некоторыми упрощениями) или хотя бы исследовано физическими методами.

[10] Е. Вигнер «Непостижимая эффективность математики в естественных науках». Лекция в честь Ричарда Куранта, прочитанная 11 мая 1959 года в Нью-Йоркском университете. (Communications on Pure and Applied Mathematics. **13**: 1–14; УФН, 1968, том 94, номер 3, 535–546 `https://www.mathnet.ru/links/653c111e868d9f4f436fffe88573b25c/ufn11329.pdf`).

Задача о ёжике, брошенном под углом к горизонту, к биологии не относится. Также задача о механических нагрузках в опорно-двигательном аппарате (мышцах, связках, скелете) относится не к биологии, а к биомеханике. Кровоток (особенно в мелких сосудах) не сводится к простой гидродинамике, но использование гидродинамики позволяет выделить из сложного биофизического процесса ту часть, которой должна заниматься биология. Само по себе использование в эксперименте физических методов (рентгеновское исследование, ультразвуковое исследование, ядерный магнитный резонанс и т. п.) сильно облегчает работу биолога.

Попробуем прикинуть в общих чертах, что желательно знать современному биологу из физики и математики.

- Иметь общее представление о физике, как любой культурный естествоиспытатель.
- Идентифицировать, какие биологические процессы достаточно просты, чтобы их изучение было предметом не биологии, а физики (или хотя бы биофизики).
- Идентифицировать, какие экспериментальные физические методы применимы к биологии. Понимать физические основы и ограничения.
- Уметь разговаривать с физиком (по возможности без биологических терминов), выделяя из биологических процессов физические явления, интерпретируя физические явления с точки зрения биологии.
- Иметь общее представление о математике, как любой культурный естествоиспытатель.
- Идентифицировать, какие биологические процессы достаточно просты, чтобы их изучение допускало математическое моделирование.
- Идентифицировать, какие математические методы обработки экспериментальных данных применимы к биологии. Понимать их математические основы и ограничения.
- Уметь разговаривать с математиком (по возможности без биологических терминов), выделяя из биологических теорий логическую структуру, интерпретируя математические результаты с точки зрения биологии.

В данном списке слово «идентифицировать» подразумевает, что биолог либо знает о применимости физики/математики в конкретном случае, либо может сам опознать ситуации типа «здесь почти всё сводится к гидродинамике», «на этом физическом эффекте можно было бы построить прибор, который пригодится в моих биологических исследованиях», «это математическое понятие должно подойти для описания процесса естественного отбора», «это уравнение распространения волн в мелкой воде описывает что-то похожее на распространение нервного импульса».

Понятно, что сейчас не времена Аристотеля и даже не времена Гельмгольца и биолог, как правило, не может быть одновременно физиком и/или математиком. Но биолог может быть биофизиком, и современный биолог должен уметь сотрудничать с физиками, математиками и биофизиками, чтобы вести совместные исследования.

Благодарности

Автор благодарит своих родителей Г.В. Иванова и В.М. Иванову за неизменную поддержку, только благодаря которой удалось преодолеть в качестве студента и аспиранта 1990-е годы оставшись в физике. Автор благодарит своего брата В.Г. Иванова, который первый обратил его внимание на важность геометрии в современной физике.

Автор благодарит своего Учителя И.В. Воловича, а также И.Я. Арефьеву и М.О. Катанаева, благодаря которым в студенческие и аспирантские годы удалось познакомиться на практике с физическими приложениями дифференциальной геометрии.

Автор благодарит заведующего кафедрой теоретической физики МФТИ Ю.М. Белоусова за постановку «технического задания» на разработку курса «Механика и теория поля», консультации и поддержку в его разработке и внедрении, несмотря на нарушение курсом ряда неписанных традиций преподавания механики и теоретической физики в МФТИ.

Автор благодарит заведующего кафедрой теоретической физики МФТИ Э.Т. Ахмедова за поддержку, за инициативу издания серии «Лекции МФТИ по теоретической физике» и приглашение автора к участию в этой серии.

Автор благодарит всех преподавателей, вместе с которым он вёл курс «Механика и теория поля»: С.Л. Огаркова, С.В. Семендяева, Е.С. Андрианова, Л.Н. Астраханцева, Д.Л. Осипова, Д.А. Трунина,

И.В. Черноусова, Ю.Б. Чернякова. В особенности С.Л. Огаркова, сотрудничество с которым было наиболее длительным, плодотворным и дружеским, и С.В. Семендяева, который дал взгляд на курс со стороны кафедры теоретической механики МФТИ.

Автор благодарит преподавателей кафедры теоретической физики МФТИ, которые не вели занятия по курсу, но приняли участие в его обсуждении и становлении: Л.П. Суханова, И.Я. Полищука, А.А. Пухова и З.В. Хайдукова.

Автор благодарит В.А. Гуськова (одного из слушателей курса) за 3-мерный рисунок рассеяния частиц на непроницаемой сфере в § 3.14.1 «Понятие о сечениях рассеяния и поглощения» и В.А. Дорофеенко (коллегу по кафедре) за чертежи электромагнитных полей в § 3.7.6 «Картины силовых линий и их физический смысл». Автор благодарит С.С. Риус за выполненный специально для этой книги рисунок «Пламенеющий квант», использованный в части 5 книги.

Автор благодарит Е.В. Лущевскую, которая в качестве студентки 2-го курса весной 2002 года первая сдала курс «Геометрические методы в классической теории поля», а много позже, уже в качестве преподавателя кафедры теоретической физики МФТИ, обсуждала с автором положенные в основу книги курсы.

Автор благодарит своих дипломников А.Ю. Полушкина, Д.А. Черских, Д.С. Коржа, А.А. Куранова, В.В. Наумова и аспиранта В.А. Дудченко общение с которыми способствовало совершенствованию положенных в основу книги курсов. Часть выпускной квалификационной работы бакалавра Д.С. Коржа в доработанном виде вошла в книгу в качестве § 4.4.2 «Преобразование Фурье на решётке, отрезке, прямой».

Автор благодарит студентов группы 4111, которые в 2015-16 учебном году первые слушали курс «Механика и теория поля», и в особенности Д.Г. Иванова, Е.В. Буглакову и Р. Доронина за живой интерес к курсу, что помогло доработать и улучшить курс для следующих поколений студентов.

Автор благодарит К.В. Даничкину за очное посещение лекций по курсу «Механика и теория поля» в карантинный 2020-21 учебный год, благодаря чему лекции можно было читать живому человеку, а не начитывать в бездушную видеокамеру.

Также автор благодарит студентов, изучавших курсы «Механика и теория поля» и «Геометрические методы в классической теории поля» за интерес к курсам и указание на найденные в конспекте опечатки.

Задача 0

За что ставятся оценки:
5 — знает и *понимает*,
4 — знает, но *не* понимает,
3 — *не* знает и *не* понимает,
2 — *не* знает, *не* понимает, да ещё и *раздражает*.

Преподавательский фольклор

Расшифруем смысл анекдота с точки зрения старых физтеховских традиций.
5 — знает и *понимает*: свободно решает задачи и может обосновать используемые методы, что не помнит — может вывести.
4 — знает, но *не* понимает: свободно решает задачи, но не всегда может обосновать используемые методы.
3 — *не* знает и *не* понимает: может разобраться с вопросом, если разрешить пользоваться учебником.
2 — *не* знает, *не* понимает, да ещё и *раздражает*: взял на экзамене билет, открыл учебник, за час не смог найти, что списать.

Прежде чем переходить к основному материалу, читателю полезно убедиться, что он владеет минимальным математическим аппаратом, необходимым для освоения материалов курса, провести *контроль остаточных знаний*, чтобы при необходимости повторить ранее пройденный[11] материал.

Задача 0. Вспоминаем математику (контроль остаточных знаний).

а) Для матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

найдите собственные числа и собственные векторы[12]. Укажите соответствие между собственными числами и собственными векторами.

б) Возьмите производную по t от выражения $\cos(f(x,t) + \omega t)$, считая t и x независимыми переменными, где f — произвольная гладкая функция.

в) С помощью интегрирования по частям вытащите функцию f из-под производной в интеграле

$$\int\limits_a^b \frac{f'(x)\, g'(x)}{h(x)}\, dx.$$

Здесь $f(x), g(x), h(x)$ — гладкие функции от x, а штрих — производная по x.

г) Запишите через тригонометрические функции в наиболее простом виде выражение

$$\frac{1}{\exp(\mathrm{i}[\omega t - kx])}.$$

[11] Или пройденный мимо.

[12] Студенту-первокурснику линейная алгебра порой кажется менее важной, чем математический анализ. Обновить в памяти, что такое *умножение матриц* и *единичная матрица*, можно по гл. 1.2, § 1.2.1 (с. 36). Обновить в памяти, что такое *определитель* (*детерминант*) матрицы, можно по гл. 1.1, п. 1.1.4.3 (с. 32).

Собственный вектор $\mathbf{h}$ и *собственное число* λ определяются уравнением

$$A\mathbf{h} = \lambda\mathbf{h}.$$

Здесь A — квадратная матрица, $\mathbf{h}$ — вектор-столбец, λ — число. В конечномерном случае собственные числа можно найти из *векового уравнения*

$$\det(A - \lambda\hat{1}) = 0.$$

Некоторые обозначения и соглашения

(!) При написании книги, выбирая между следованием традициям и внутренней самосогласованностью текста, мы **отдавали приоритет самосогласованности**. При этом отступление от принятых традиций по возможности оговаривается в сносках.

Одно из главных отступлений от традиций — **использование в электродинамике *физико-технической системы единиц*** вместо общепринятых *международной системы единиц* (*системы СИ*) и *гауссовой системы СГС*.

В физико-технической системе вводится константа $k_к$ — *постоянная Кулона*, входящая в закон Кулона для силы взаимодействия двух неподвижных электрических зарядов:

$$F = k_к \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Выбор константы $k_к$ зависит от выбора системы единиц. В теоретической физике обычно используется *гауссова система единиц*, в которой $k_к = 1$, или *система Хевисайда*, в которой $k_к = \frac{1}{4\pi}$.

В экспериментальной физике и инженерных приложениях используется *международная система единиц (система СИ)*. Константа Кулона в системе СИ:

$$k_к = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0},$$

где $\varepsilon_0 \approx 8{,}8541878128(13) \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{Кл}^2}{\text{Дж}\cdot\text{м}}$ (две цифры в скобках — погрешность двух последних цифр числа) называется *электрической постоянной*. Единицу измерения для электрической постоянной обычно обозначают $\Phi \cdot \text{м}^{-1}$ (фарад на метр).

К сожалению, стандартная система СИ отличается от гауссовой и хевисайдовой систем не только величиной постоянной Кулона, но и формой записи ряда уравнений. В результате в системе СИ поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ имеют разную размерность и выражаются в разных единицах измерения. Это не соответствует симметриям электродинамики и затрудняет понимание теории, **поэтому принятой в стандартной системе СИ формой записи уравнений электродинамики мы пользоваться не будем!**

В *физико-технической системе единиц*, как в системе СИ, $k_к = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, но все четыре поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ имеют одинаковую размерность и единицу измерения, как у электрического поля в системе СИ: $\text{В} \cdot \text{м}^{-1}$. В физико-технической системе удаётся сохранить принятые в СИ единицы измерения для электрических цепей и поля $\mathbf{E}$. Для поля $\mathbf{B}$ коэффициент пересчёта из СИ в физико-техническую систему — скорость света: $\mathbf{B}_{\text{ФТ}} = c \cdot \mathbf{B}_{\text{СИ}}$. Поля $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ не имеют непосредственного физического смысла, поэтому с практической точки зрения изменение их единиц измерения не важно.

Первый раз в основном материале курса (части 1, 3) константа Кулона появляется в § 3.7.3 «Действие для электромагнитного поля» (с. 340). В факультативном материале (части 2, 4, 5) константа Кулона в первый раз появляется в § 2.13.1 «Классическая потенциальная энергия и макроскопические силы из СТО» (с. 277).

Подробнее проблема единиц измерения в электродинамике и связь стандартной системы СИ и физико-технической системы обсуждены в главе 3.15 «Электродинамика в среде и единицы измерения в электродинамике» (с. 391). **Для перехода от физико-технической формы записи уравнений к гауссовой вы можете просто положить** $k_к = 1$. Обратный переход вы можете выполнить, используя *соображения размерности*.

- Буква с буквенным индексом (особенно в аргументах функций) будет обычно обозначать всю совокупность объектов, нумеруемых данным индексом, так, при $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ имеем

$$f^\alpha(x^\beta) = f^\alpha(x) = \begin{pmatrix} f^1(x^1, x^2, x^3) \\ f^2(x^1, x^2, x^3) \\ f^3(x^1, x^2, x^3) \end{pmatrix}, \qquad A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{21} & A_{22} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

- Полужирные буквы или буквы со стрелочками — $\mathbf{A} = \vec{A}$, $\mathbf{r} = \vec{r}$, $\mathbf{v} = \vec{v}$ и т.д. — 3-мерные векторы в евклидовом пространстве.

- В печатном тексте будут, как правило, использоваться полужирные буквы, в рукописном — буквы со стрелочками. **Опускать стрелочки на письме не рекомендуется.**

- Скалярное произведение всегда обозначается круглыми скобками и запятой. Для евклидовых векторов $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$. Допускается запись скалярного квадрата в виде $\mathbf{A}^2 = (\mathbf{A}, \mathbf{A})$. Возведение векторов в какие-либо другие степени не допускается, т.к. такая операция плохо определена.

- Матрицы, как правило, обозначаются буквами в шляпках: $\hat{M}$, **если у матрицы не указаны индексы, нумерующие компоненты**. Если индексы, нумерующие компоненты, указаны, то шляпка не ставится.

- Единичная матрица (а также единичный оператор) обозначается как $\hat{1}$. Компоненты единичной матрицы — *дельта-символ Кронекера* (записывается прямым шрифтом):

$$(\hat{1})_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

- Ортонормированный базис в 3-мерном евклидовом пространстве — $\{\mathbf{e}_\alpha\}_{\alpha=1}^3 = \{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$:

$$(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta) = \delta_{\alpha\beta}.$$

- Компоненты векторов и других тензоров в декартовых координатах нумеруются греческими индексами (верхними или нижними) $\alpha, \beta, \ldots$, пробегающими значения 1,2,3 или x, y, z: $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z) = (A_1, A_2, A_3)$.

- *Греческие индексы* $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \mu, \lambda, \ldots$, как правило, нумеруют пространственные координаты либо координаты в конфигурационном пространстве. Такие индексы пробегают значения от 1 до D.

- *Маленькие латинские индексы (обычно из середины алфавита)* $i, j, k, l, m, n, \ldots$, как правило, нумеруют пространственно-временные координаты либо координаты в расширенном конфигурационном пространстве. Такие индексы пробегают значения от 0 до D (или до $D-1$). При этом нулевое значение соответствует временно́й координате.

- *Большие латинские индексы* $I, J, K, L, M, N, \ldots$ обычно нумеруют координаты в фазовом пространстве и пробегают $2D$ значений. Если координаты в фазовом пространстве канонические, то обобщённые координаты нумеруются индексами $x^1, \ldots, x^D$, а обобщённые импульсы — индексами $p_1, \ldots, p_D$.

- *Русские индексы* не пробегают никаких значений, а служат пометками.

- $\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_D} = \varepsilon^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_D}$ — *символ Леви-Чивиты* в пространстве размерности D. Соглашение о поднимании/опускании индексов к символу Леви-Чивиты не применяется. Число индексов равно D. Если среди индексов есть повторяющиеся, то компонента равна 0. Если индексы разные и образуют чётную перестановку, то компонента равна $+1$, а если нечётную, то -1.

- ε обычно обозначает малый параметр, иногда энергию (когда эта энергия мала).

- *Векторное произведение* обозначается квадратными скобками **и** крестиком:

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix}.$$

  Опускать квадратные скобки не рекомендуется, потому что векторное произведение не ассоциативно (при двойном векторном произведении результат зависит от расстановки скобок). Опускать крестик (или заменять его запятой) не рекомендуется, чтобы не перепутать векторное произведение с коммутатором.

- $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z) = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ — *радиус-вектор.*

- Точка над буквой обозначает полную производную по времени $\frac{d}{dt}$:

$$\dot{A}(t,x) = \frac{d}{dt}A(t,x) = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}\,\frac{\partial}{\partial x}\right)A(t,x).$$

- $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$ — *скорость.*

- $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}$ — *ускорение.*

- Мнимая единица, основание натуральных логарифмов, стандартные математические функции (включая обобщённые функции θ и δ) обозначаются прямыми буквами: i, e, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \exp(\mathrm{i}\omega t)$, $\cos(\omega t)$, $\operatorname{ch}\vartheta = \frac{\mathrm{e}^{\vartheta}+\mathrm{e}^{-\vartheta}}{2}$, $\operatorname{sh}\vartheta = \frac{\mathrm{e}^{\vartheta}-\mathrm{e}^{-\vartheta}}{2}$, $\operatorname{th}\vartheta = \frac{\operatorname{sh}\vartheta}{\operatorname{ch}\vartheta}$ и т.д.

- *Тета-функция Хевисайда* определяется как

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

  Дельта-функция Дирака (обобщённая функция) с физической степенью строгости определяется как

$$\delta(x) = \frac{d}{dx}\theta(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0 \end{cases}, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1,$$

  где производная понимается в смысле обобщённых функций.

- ϕ и θ, как правило, обозначают *сферические углы* — две из трёх *сферических координат*, причём θ отсчитывается от северного полюса:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi, \\ y &= r \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi, \\ z &= r \cdot \cos\theta. \end{aligned}$$

- φ обозначает различные поля, часто скалярный потенциал в электродинамике.

- ϑ обозначает *быстроту* (*гиперболический угол*), которая связана со скоростью соотношением

$$v = c \cdot \operatorname{th}\vartheta,$$

  где c — скорость света.

- Чтобы не перегружать букву H, в вакууме индукция=напряжённость магнитного поля обозначается как $\mathbf{B}$.

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ — множества всех натуральных, целых, рациональных, вещественных, комплексных чисел соответственно. Натуральные числа определяются в соответствии с русской традицией (без нуля): 1,2,3,...

- $\mathbb{Z}(N)$ и $\mathbb{R}(L)$ — кольца целых и вещественных чисел по модулю $N \in \mathbb{N}$ или $L \in \mathbb{R}$, т.е. множества целых и вещественных чисел, на которых введены отношения эквивалентности $n \sim n+N$ и $x \sim x+L$. На этих кольцах определены сложение, вычитание, умножение. Деление определено для $\mathbb{Z}(p)$, где p — простое число.

- $A := f$ или $f =: A$ означает, что A равно f по определению. Это равенство определяет величину A.

Первый семестр

Часть I

Механика и специальная теория относительности (1-й семестр, основной материал)

Глава 1.1

Введение (с. 152)

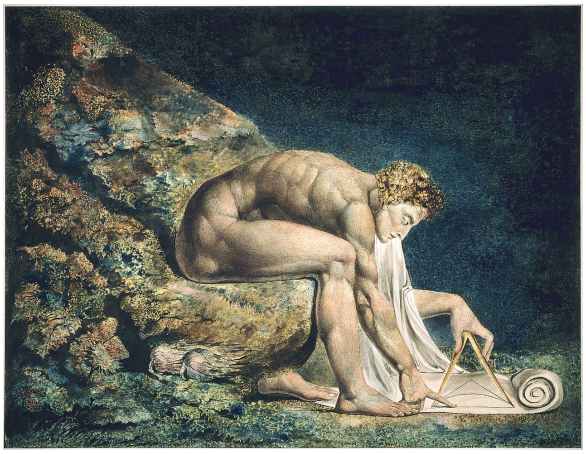
1.1.1 Законы Ньютона как законы сохранения и баланса

Счастливец Ньютон, ибо картину мира можно установить лишь однажды.

Жозеф Луи Лагранж

Не знаю, кем я кажусь миру, но себе я кажусь мальчиком, который, играя на морском берегу, нашёл несколько камешков поглаже и раковин попестрее, чем удавалось другим, в то время как неизмеримый океан истины расстилался неисследованным перед моим взором.

Исаак Ньютон



«Ветхий днями» (Бог-творец) Гравюра (1794, 1827) английского художника и поэта Уильяма Блейка.
«Ньютон» Гравюра (1795–1805) английского художника и поэта Уильяма Блейка

Мы предполагаем, что с основными понятиями и законами механики, такими как радиус-вектор, скорость, ускорение, энергия, импульс, момент импульса, законы Ньютона, законы сохранения энергии, импульса и момента импульса, читатель знаком из курса общей физики, поэтому вначале (особенно во «Введении») будем их использовать без определения. По ходу курса соответствующие определения будут даваться.

1.1.1.1 Нулевой закон Ньютона (гипотеза абсолютного времени)

Классическая ньютоновская механика предполагает существование некоего *абсолютного времени*, которое течёт во всём пространстве одинаково вне зависимости от движения каких-либо объектов.

Можно сказать, что в ньютоновской механике предполагается (в некоторых книгах явно, в других — неявно), что мы можем сколь угодно точно реализовать некоторые *идеальные ньютоновские часы*, ход

которых не зависит от их движения и положения в пространстве, и с их помощью задать синхронный ход времени во всём пространстве.

Это утверждение можно было бы назвать *нулевым законом Ньютона*, или, чтобы не нарушать принятой нумерации законов Ньютона, *гипотезой абсолютного времени*.

Как мы увидим далее, при изучении специальной теории относительности, гипотеза абсолютного времени неверна, хотя и является хорошим приближением для случая медленного движения (скорости много меньше скорости света, $v \ll c$).

При рассмотрении специальной теории относительности мы изучим вопрос о синхронизации часов, измеряющих время в разных точках пространства, а также о ходе движущихся часов и относительности понятия одновременности.

1.1.1.2 Три закона Ньютона

Напомним законы Ньютона в стандартной формулировке.

- 1-й закон Ньютона: существует система отсчёта (мы будем называть такую систему отсчёта *инерциальной* или и. с. о.), в которой *свободная частица* (т.е. частица, не испытывающая взаимодействия с другими телами) движется равномерно и прямолинейно.
- 2-й закон Ньютона: в и. с. о. ускорение $\mathbf{a}$ частицы с массой m связано с суммарной силой $\mathbf{F}$, действующей на частицу, соотношением $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.
- 3-й закон Ньютона: в и. с. о. при взаимодействии двух частиц сила $\mathbf{F}_{21}$, с которой 1-я частица действует на 2-ю, и сила $\mathbf{F}_{12}$, с которой 2-я частица действует на 1-ю, противоположны: $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$. Силы $\mathbf{F}_{12}$ и $\mathbf{F}_{21}$ направлены вдоль прямой, соединяющей частицы.

1-й закон Ньютона — это утверждение о существовании систем отсчёта (с. о.) специального вида (инерциальных систем), для которых формулируются 2-й и 3-й законы. 1-й закон Ньютона не является частным случаем 2-го, как может показаться невнимательному читателю.

2-й закон Ньютона неявно предполагает, что взаимодействие частицы с окружением может быть представлено как векторная сумма некоторых воздействий (*сил*). 2-й закон Ньютона даёт нам определение понятия силы.

3-й закон Ньютона подразумевает, что силы, действующие в системе частиц, могут быть разложены на совокупность пар сил, действующих между частицами и удовлетворяющих 3-му закону Ньютона. 3-й закон Ньютона позволяет экспериментально определять отношение масс частиц, а при наличии эталона массы — массу каждой частицы.

Законы Ньютона ничего не говорят о том, какими законами выражаются величины сил, действующих между частицами, но 3-й закон Ньютона налагает на допустимые законы, задающие действующие в системе силы, некоторое ограничение.

Если дополнить законы Ньютона законами для сил, которые выражаются как функции от координат и скоростей частиц, второй закон Ньютона даёт для радиус-векторов[1] $\mathbf{r}_a = (x_a, y_a, z_a)$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{d^2\mathbf{r}_a}{dt^2} = \frac{1}{m_a}\,\mathbf{F}_a(\mathbf{r}, \tfrac{d\mathbf{r}}{dt}).$$

Для такой системы можно ставить *задачу Коши* (вычисление $\mathbf{r}_a(t)$ по заданным $\mathbf{r}$ и $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ в начальный момент времени), т.е. задачу о вычислении движения частиц (координат как функций от времени) по их начальным положениям и скоростям.[2]

[1] Векторов, составленных из декартовых координат частиц.

[2] Возможность систематического сведения задач механики к дифференциальным уравнениям в своё время глубоко впечатлила физиков. Сам Ньютон в письме Лейбницу в 1676 году приводит свой новый метод исследования функций в виде знаменитой шифровки — *анаграммы Ньютона* (общепринятый в те времена метод закрепления научного приоритета, которым Ньютон воспользовался только однажды):

$$6\ aeccdae\ 13effi\ 3l\ 9n\ 4o\ 4qrr\ 4s\ 9t\ 12vx.$$

Впоследствии в «Математических началах натуральной философии» Ньютон дал расшифровку:

«Data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa.»

В буквальном переводе с латыни получается

«Дано уравнение, заключающее в себе текущие количества, найти течения (производные), и наоборот.»

Смысл фразы вне контекста не очень понятен. В.И. Арнольд дал современный очень вольный перевод:

«Полезно изучать дифференциальные уравнения.»

1.1.1.3 Шесть законов Ньютона (законы Ньютона как законы сохранения и баланса)

Законы Ньютона в форме, записанной выше, неприменимы вне ньютоновской механики. В частности, они не работают в теории относительности (как специальной, так и общей) и в квантовой теории. Более того, даже для ньютоновской механики в криволинейных координатах стандартные законы Ньютона неудобны.

Мы перепишем их в другой форме (*законы Ньютона как законы сохранения и баланса*), которая позволит отделить частности, свойственные ньютоновской механике в декартовых координатах, от общих законов, сохранивших силу по сей день.[3]

- 1а. Существует система отсчёта (мы будем называть такую систему отсчёта *инерциальной* или и. с. о.), в которой свободная частица движется равномерно по *геодезической*[4].
- 1а'. (Эквивалентен 1а.) Существует система отсчёта (мы будем называть такую систему отсчёта *инерциальной* или и. с. о.), в которой импульс свободной частицы сохраняется.
- 1б. Геометрия пространства евклидова.
- 2а. (Уравнение баланса импульса.) В и. с. о. **сила = скорость передачи импульса**[5]:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}.$$

- 2б. Импульс частицы $\mathbf{p}$ пропорционален скорости $\mathbf{v}$. Коэффициент пропорциональности m для данной частицы постоянен и называется *массой частицы*:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

- 3а. В и. с. о. при парном взаимодействии частиц импульс сохраняется.
- 3б. В и. с. о. при парном взаимодействии частиц силы направлены вдоль прямой (геодезической), соединяющей частицы.
- 3б'. (При условии выполнения закона 3а эквивалентен 3б.) В и. с. о. при парном взаимодействии частиц момент импульса сохраняется.

Законы 1а, 2а, 3а универсальны.

Законы 1б, 2б, 3б модифицируются в современной физике[6].

Определение силы через закон Ньютона 2а оказывается необходимым в теории относительности, но даже в ньютоновской механике такое определение предпочтительно, если вам надо работать в криволинейных координатах или описывать системы с переменной массой (например, ракеты).

В 1814 году П.С. Лаплас придумал *демона Лапласа* — воображаемое существо, которое знает все уравнения динамики, соответствующие начальные условия и умеет очень быстро и точно решать задачу Коши (как вперёд по времени, так и назад по времени):
«Разум, которому в каждый определённый момент времени были бы известны все силы, приводящие природу в движение, и положение всех тел, из которых она состоит, будь он также достаточно обширен, чтобы подвергнуть эти данные анализу, смог бы объять единым законом движение величайших тел Вселенной и мельчайшего атома; для такого разума ничего не было бы неясного, и будущее существовало бы в его глазах точно так же, как прошлое.»

[3] Не надо думать, что «ньютоновская механика устарела». Ньютоновская механика — великолепная теория, которая с замечательной точностью работает *в своей области применимости*: для макроскопических тел, медленно движущихся в слабых полях в достаточно малом объёме пространства на протяжении не слишком большого времени. Для описания работы автомобиля ни теория относительности, ни квантовая механика не дадут ничего нового по сравнению с классической ньютоновской механикой.

[4] *Геодезическая*, или *геодезическая линия*, — обобщение понятия прямой — кривая, расстояние вдоль которой экстремально. В евклидовой геометрии геодезические — отрезки прямых, в сферической геометрии (в геометрии на поверхности сферы) геодезические — дуги больших кругов (большой круг — окружность на поверхности сферы, центр которой совпадает с центром сферы, например меридиан или экватор).

[5] В криволинейных координатах, или искривлённом пространстве, вычисление производной от импульса по времени неоднозначно, поскольку параллельный перенос вектора вдоль кривой оказывается нетривиальной операцией. Мы обсудим соответствующий математический аппарат, включая *ковариантные производные*, как факультативный материал в дополнениях.

[6] **(*)** Формулировка закона 1а' требует на самом деле уточнения того, что значит «импульс сохраняется». Как мы увидим в следующей главе, в криволинейных координатах базисные векторы свои в каждой точке пространства. Сохранение импульса частицы здесь означает, что импульс при движении частицы подвергается *параллельному переносу* вдоль её траектории. При этом понятие параллельного переноса в искривлённом пространстве нетривиально, требует введения *ковариантного дифференцирования*, которое будет обсуждаться только в факультативной части книги.

Формулировка закона 3б' неявно подразумевает, что мы рассматриваем плоское пространство, т.е пространство, в котором параллельный перенос не зависит от траектории. Иначе мы просто не сможем определить момент силы.

Приведённая формулировка законов Ньютона демонстрирует важность геометрии (1а, 3б) и удобство формулировки законов физики с использованием законов сохранения и сохраняющихся величин. Нам нужен систематический способ находить такие формулировки и такие величины. Такой способ дают нам различные *вариационные принципы теоретической механики.*

1.1.2 Материальная точка не так проста!

«Частицы», для которых формулируются законы Ньютона, — это *материальные точки.*

Материальная точка — тело, для которого ***в рамках данной задачи*** описание движения соответствует описанию движения одной точки.

Для того чтобы тело можно было считать материальной точкой, надо, чтобы можно было пренебречь его внутренними степенями свободы, т.е. движением, не сводящимся к движению одной точки, в частности относительным движением составляющих тело частей.

(*/) Размеры тела, представляемого материальной точкой, не обязательно малы в масштабах задачи, например, твёрдое тело, совершающее *поступательное движение* (т.е. движение, сохраняющее длину и направление любого отрезка, соединяющего пару частиц тела), можно представить материальной точкой, даже если его перемещение мало по сравнению с размерами.

Использованию приближения материальной точки сильно помогает *теорема о движении центра масс*, согласно которой центр масс любой механической системы движется как частица, масса которой равна суммарной массе системы, к которой приложены все внешние (по отношению к данной системе) силы.

Благодаря теореме о движении центра масс утечка энергии во внутренние степени свободы (например, нагревание тела) не обязательно мешает использованию приближения материальной точки. Такие процессы учитываются в зависимости сил от координат и скоростей, например, с помощью введения сил трения.

Более существенно влияние внутренних степеней свободы на момент импульса тела. Если внутренним моментом импульса тела нельзя пренебречь, то закон Ньютона 3б может не выполняться: силы взаимодействия пары частиц не обязательно направлены вдоль прямой, их соединяющей. Но закон Ньютона 3б' (закон сохранения момента импульса при парном взаимодействии) при этом всё равно выполняется, если учесть моменты сил, пытающиеся развернуть момент импульса каждой из частиц.

Например, электрический или магнитный диполь нельзя рассматривать как материальную точку: силы взаимодействия пары диполей не обязательно направлены вдоль прямой, их соединяющей. В частности, электрон, взаимодействующий с магнитным полем, нельзя рассматривать как материальную точку, поскольку у него есть собственный (не связанный с движением электрона) момент импульса (*спин*), а также магнитный дипольный момент, параллельный спину. (/*)

1.1.3 Как могли бы возникнуть вариационные принципы (∼)

Из сохранения энергии с учётом того, что механическая энергия может диссипировать (рассеиваться) в окружающей среде, следует принцип минимума потенциальной энергии в статике. До того как было изобретено понятие потенциальной энергии, этот принцип формулировался применительно к случаю системы абсолютно твёрдых тел и нерастяжимых верёвок в однородном поле силы тяжести как утверждение, что в положении устойчивого равновесия высота центра масс системы минимальна.

Также с 1662 года известен принцип Ферма в оптике (принцип стационарности времени распространения светового сигнала между фиксированными точками пространства), из которого успешно выводится вся геометрическая оптика. Это давало надежду, что экстремальные принципы могут быть распространены со статики на динамику.

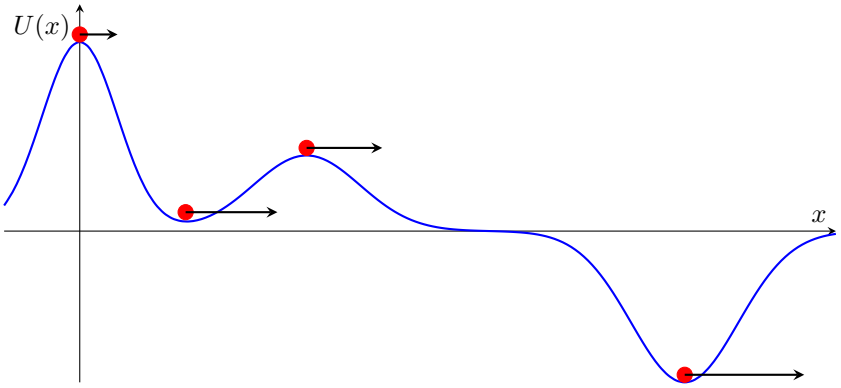
В 1744 году Мопертюи и Эйлер развили первую формулировку принципа наименьшего (экстремального, стационарного) действия применительно к оптике и механике.

Экстремальные принципы хороши тем, что они позволяют сжато описать законы для физической системы, причём экстремальная величина может быть записана через разные параметры, в результате чего мы легко можем переписать законы физики в разных переменных, в частности, для описания движения вместо декартовых координат можно брать другие непрерывные параметры, описывающие конфигурацию системы, — *обобщённые координаты* (аккуратное определение обобщённых координат будет дано ниже).

Попробуем угадать принцип стационарного действия вслед за классиками[7]. По аналогии с принципом Ферма предположим, что надо искать минимум какого-то интеграла, который мы назовём *действием.* В

[7]Мы не пытаемся описать в деталях реальный путь развития науки, так что рассказ идёт не о том, как возникли вариационные принципы, а о том, как они могли бы возникнуть.

механике естественный параметр — время, так что выберем его как переменную интегрирования. Начнём с движения частицы в потенциале (т.е. с потенциальной энергией) $U(x)$.



Частица наиболее быстро движется в «ямах» потенциала и замедляется на «горках»

Подынтегральная функция должна быть по возможности малой на горках (где частица движется медленнее, т.е. задерживается), а в ямах, которые частица проскакивает быстро, подынтегральное выражение может быть больше. Первая мысль, которая возникает, — поместить под интеграл кинетическую энергию $\mathcal{E}_{\text{кин.}} = \frac{mv^2}{2}$. Однако кинетическая энергия не содержит информации о потенциале. Вторая мысль — поместить под интеграл потенциальную энергию со знаком минус. Однако потенциальная энергия не содержит информации о массе частицы. Третья мысль — поместить под интеграл разность кинетической и потенциальной энергий:

$$S = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) \right) dt. \tag{1.1.1}$$

Неожиданно эта мысль приводит к успеху.

Продемонстрируем это, не вдаваясь в математические подробности. (Позднее мы разберём эту процедуру, которая называется *варьированием действия*, более подробно.)

Пусть функция $x(t)$ такова, что действие S оказывается экстремальным (например, минимальным или максимальным), тогда функция $x(t)+\delta x(t)$, где функция $\delta x(t)$ — малая поправка (*вариация координаты*), должна дать такое же значение действия в линейном порядке по δx. Это аналогично тому, что мы имеем при нахождении экстремума гладкой функции одного переменного: в точке экстремума график идёт горизонтально, а потому если немного «пошевелить» значение аргумента, то в линейном порядке функция не изменится (в точке экстремума функции f выполняется условие $df = 0$).

$$S + \delta S = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{m(\dot{x} + \delta\dot{x})^2}{2} - U(x + \delta x) \right) dt \approx \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{m(\dot{x}^2 + 2\dot{x} \cdot \delta\dot{x})}{2} - U(x) - U'(x) \cdot \delta x \right) dt =$$

$$= S + \int\limits_{t_0}^{t_1} (m\dot{x} \cdot \delta\dot{x} - U'(x) \cdot \delta x)\ dt$$

Здесь подынтегральное выражение имеет вид дифференциала (с заменой d на δ) от подынтегрального выражения в действии, если скорость $\dot{x}$ и координата x считаются независимыми переменными:

$$\delta \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) \right) = m\dot{x} \cdot \delta\dot{x} - U'(x) \cdot \delta x$$

Мы обозначили точкой производную по времени t и штрихом — производную по координате x. *Вариация действия* δS имеет вид

$$\delta S \approx \int\limits_{t_0}^{t_1} (m\dot{x} \cdot \delta\dot{x} - U'(x) \cdot \delta x)\ dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt}(m\dot{x} \cdot \delta x) - m\ddot{x} \cdot \delta x - U'(x) \cdot \delta x \right) dt =$$

$$= m\dot{x} \cdot \delta x|_{t_0}^{t_1} - \int\limits_{t_0}^{t_1} (m\ddot{x} + U'(x)) \cdot \delta x \cdot\ dt. \tag{1.1.2}$$

Мы ограничимся случаем, когда $\delta x(t_0) = \delta x(t_1) = 0$, т.е. концы траектории при вариации остаются фиксированными (будем считать, что нас пока интересует поведение частицы внутри промежутка[8] (t_0, t_1)). Таким образом, для стационарного действия $\delta S = 0$ и последний интеграл обращается в нуль при произвольных значениях $\delta x(t)$ внутри интервала (t_0, t_1). Для этого необходимо, чтобы в нуль обратилось выражение в скобках:

$$m\ddot{x} + U'(x) = 0.$$

Мы не только воспроизвели второй закон Ньютона для частицы, но и получили закон для силы, создающейся потенциалом $U(x)$:

$$m\ddot{x} = F, \qquad \text{где} \qquad F = -U'(x).$$

Мы записали действие в виде интеграла от некоторой функции $L(x, \dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x)$, которая называется *функцией Лагранжа* (или *лагранжианом*):

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x})\, dt.$$

Как мы в дальнейшем увидим, лагранжианы могут быть разными[9], но уже на этом примере можно показать, как из лагранжиана получаются такие важные величины, как импульс, сила, энергия:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \qquad F = \frac{\partial L}{\partial x} = -U'(x), \qquad \mathcal{E} = p \cdot \dot{x} - L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x).$$

В каждой из этих формул выражение через лагранжиан и производные от него, как мы увидим далее, является универсальным, а выражение через массу и потенциал — частным случаем.

С использованием *лагранжева формализма* мы будем изучать не только ньютоновскую механику, но и специальную теорию относительности и электродинамику (в следующем семестре).

1.1.4 Обобщённые координаты

1.1.4.1 Если мы хотим использовать не только декартовы координаты (∼)

Введение действия, как мы увидели пока на простейшем примере, позволяет систематически находить выражения для энергии, импульсов и сил. Оказывается, этот формализм работает не только для декартовых координат. Мгновенное состояние механической системы (положение всех её частей) можно описать набором чисел, которые задают координаты точки в некотором *конфигурационном пространстве*. Изменение со временем состояния системы задаёт траекторию в конфигурационном пространстве. При этом можно по-разному «нумеровать» (параметризовать) точки конфигурационного пространства с помощью числовых параметров (обобщённых координат). Переход от одних координат к другим координатам — это изменение описания движения, а не самого движения[10].

Действие тоже можно выражать через обобщённые координаты. Если это делать правильно (чтобы действие для одного движения, описанного в разных координатах, было одинаковым), то и уравнения движения, полученные из вариации действия, в разных координатах будут эквивалентными.

Примеры обобщённых координат для точки: полярные координаты на плоскости, цилиндрические координаты в пространстве, сферические координаты в пространстве. Если система состоит из нескольких материальных точек, то мы можем разные материальные точки описывать, используя разные системы координат, например, если у нас есть цепочка грузиков, соединённых пружинками, то может быть удобно координаты каждого грузика отсчитывать от его положения равновесия.

Если в системе есть какие-то связи, фиксирующие некоторые соотношения между координатами отдельных материальных точек (такие связи называются *голономными*), например, какие-то точки образуют твёрдое тело и расстояния между ними фиксированы, или какие-то точки соединены невесомыми

[8] **(***)** Как видно из формулы (1.1.2), вклад в вариацию отдельной точки внутри интервала (t_0, t_1) бесконечномал: конечный вклад даёт только интеграл по конечному интервалу времени. В то же время вклад в вариацию граничных точек интервала конечен: $m\dot{x} \cdot \delta x\big|_{t_0}^{t_1}$. По этой причине удобно считать, что действие имеет два числовых аргумента — координаты концов траектории $x(t_{0,1})$ и один функциональный аргумент $x(t)$:

$$S = S[x_0, x_1; x(t) : t \in (t_0, t_1), x(t_{0,1}) = x_{0,1}].$$

Естественно дифференцировать (варьировать) действие по функциональному аргументу $x(t)$, зафиксировав числовые аргументы: $x_{0,1} = x(t_{0,1})$.

[9] Шаблон «кинетическая энергия минус потенциальная» не универсален, что мы скоро увидим на конкретных задачах. Часто лагранжианы не столько выводят, сколько угадывают. Основной метод, который используют при угадывании лагранжиана, — соображения симметрии.

[10] Не во всяком конфигурационном пространстве декартовы координаты вообще существуют.

нерастяжимыми нитями или невесомыми абсолютно твёрдыми стержнями, то количество обобщённых координат можно сократить. Твёрдое тело в трёхмерном пространстве состоит из большого числа материальных точек, но мы можем ограничиться 6 обобщёнными координатами, например: 3 координаты центра масс и 3 угловые координаты, описывающие ориентацию тела. Две шестерёнки с фиксированными осями вращения, находящиеся в зацеплении друг с другом, описываются одной обобщённой координатой, например углом поворота одной из шестерёнок.

Любые ли числовые параметры подходят в качестве обобщённых координат?

Не любые. Скажем, мы можем все координаты собрать в одно вещественное число Z, которое определим через десятичную запись так, что в него войдут все цифры всех координат: 1-я цифра 1-й координаты, 1-я цифра 2-й координаты, ..., 1-я цифра последней координаты, 2-я цифра 1-й координаты, 2-я цифра 2-й координаты, ..., 2-я цифра последней координаты, ... Например, таким образом мы можем взаимнооднозначно отобразить точки квадрата (пары чисел $X, Y \in [0,1]$) на точки отрезка $Z \in [0,1]$:

$$(X = 0, x_1x_2x_3x_4\ldots, \qquad Y = 0, y_1y_2y_3y_4\ldots) \quad \leftrightarrow \quad Z = 0, x_1y_1x_2y_2x_3y_3\ldots.$$

Такой числовой параметр Z будет очень неудобен, так как его зависимость от конфигурации системы не будет непрерывной.

Поскольку обобщённые координаты должны входить в уравнения движения системы, взаимная однозначность и непрерывность потребуются при заменах координат также для обобщённых скоростей и ускорений (первых и вторых производных по времени от обобщённых координат). Это подразумевает дифференцируемость допустимых обобщённых координат.

1.1.4.2 Свойства обобщённых координат

Определение. *Материальная точка* — физический объект, для описания движения которого в пространстве достаточно (в рамках данной задачи!) задать движение в пространстве одной точки. Мгновенное положение материальной точки описывается одной точкой пространства. Кроме того, материальная точка может характеризоваться некоторым набором числовых параметров, таких как масса и электрический заряд.

Определение. *Механическая система* — набор материальных точек, для которых некоторым способом определены законы движения.

Определение. *Конфигурационное пространство механической системы* — множество всех возможных пространственных положений совокупности материальных точек системы, удовлетворяющих наложенным связям (условиям на координаты точек). Каждая точка конфигурационного пространства соответствует определённому пространственному положению всех материальных точек системы.

Для N материальных точек без связей в 3-мерном евклидовом пространстве конфигурационное пространство представляет собой $3N$-мерное евклидово пространство, координаты точки в котором — совокупность всех координат всех материальных точек системы $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_N, y_N, z_N$.

Введение конфигурационного пространства сводит задачу о движении механической системы к задаче о движении одной точки в конфигурационном пространстве.

Мы будем рассматривать только такие конфигурационные пространства, что у каждой их точки найдётся окрестность[11], которая может быть непрерывно дифференцируемо и взаимнооднозначно параметризована точками из открытого шара в $\mathbb{R}^n$, причём для любых двух точек найдутся непересекающиеся окрестности. Здесь фиксированное натуральное число n = число *степеней свободы* = размерность конфигурационного пространства.[12]

Другими словами, в классической механике такое конфигурационное пространство представляет собой гладкую n-мерную поверхность в $3N$-мерном евклидовом пространстве. Точки этой поверхности удовлетворяют $3N - n$ независимым уравнениям, описывающим наложенные на материальные точки связи.

Определение. *Обобщённые координаты* — вещественные числовые параметры, параметризующие точки в некоторой области конфигурационного пространства и удовлетворяющие условиям *взаимной однозначности*, *непрерывности* и *невырожденности* (см. ниже).

От набора обобщённых координат мы потребовали выполнения следующих свойств.

1. Взаимная однозначность (локальная). Обобщённые координаты *в некоторой области* $\mathbb{R}^n$ взаимнооднозначно отображаются на *некоторую область* конфигурационного пространства системы.

2. Непрерывность. Точка конфигурационного пространства непрерывно зависит от обобщённых координат (в рассматриваемой области).

[11] *Окрестность точки* — любое содержащее её открытое множество. В конфигурационном пространстве окрестности определяются через систему координат как прообразы открытых множеств в $\mathbb{R}^n$.

[12] **(***)** На языке дифференциальной геометрии это условие формулируется так: конфигурационное пространство должно являться дифференцируемым хаусдорфовым многообразием. Дифференцируемые многообразия мы обсудим в факультативном § 2.1.2 (с. 158).

3. Невырожденность (локальная). Каждой точке конфигурационного пространства и каждой обобщённой координате мы можем сопоставить набор скоростей материальных точек системы, который соответствует ситуации, когда данная координата меняется с единичной скоростью, а остальные координаты фиксированы. Эти скорости должны быть определены и конечны. Для каждой точки конфигурационного пространства (в некоторой области) наборы скоростей для разных обобщённых координат должны быть линейно независимы. (Можно сказать, что невырожденность — это взаимная однозначность отображения между скоростями изменения обобщённых координат и реальными скоростями точек системы.)

Почему мы подчёркиваем локальность во всех свойствах обобщённых координат? Дело в том, что во многих случаях одной системы координат недостаточно для описания всего конфигурационного пространства.

Даже для точки на поверхности сферы мы не можем ввести одну систему координат, которая удовлетворяла бы перечисленным свойствам во всех точках. Если поверхность сферы описывать с помощью сферических углов (или широты и долготы), то получатся две особые точки — полюсы. Отсутствие взаимной однозначности (при сдвиге долготы на полный оборот или при переходе широты через полюс) в этом примере не так важно, т.к. локально (кроме полюсов) взаимная однозначность есть: достаточно малая область сферы, не затрагивающая особые точки, может быть описана обобщёнными координатами взаимнооднозначно. Более неприятно, что в особых точках (на полюсах) нет локальных базисов, связанных со сферическими координатами, *нет набора линейно независимых касательных к направлениям, соответствующим изменениям отдельных координат*: одни координатные линии (меридианы) пересекаются, а другие (параллели) — стягиваются в точку.

Почему нам достаточно координат, которые хороши только локально? Это связано с тем, что механика описывается дифференциальными уравнениями, которые связывают между собой некоторые функции и их производные в одной точке конфигурационного пространства. А для вычисления производных достаточно задать функцию в сколь угодно малой окрестности точки.

Если у нас уже есть набор обобщённых невырожденных координат x^M (координаты мы будем, как правило, нумеровать верхними индексами) и мы задаём новые обобщённые координаты[13] $x^{M'}$ как функции от x^M, то условие невырожденности новых координат можно выразить через матрицу частных производных, которая называется *матрицей Якоби*:

$$\frac{\partial x^{M'}}{\partial x^M}.$$

Все элементы матрицы Якоби должны быть определены, а её определитель (*якобиан*) должен быть отличен от нуля:

$$\det\left(\frac{\partial x^{M'}}{\partial x^M}\right) = \frac{Dx'}{Dx} \neq 0.$$

Геометрический смысл определителя матрицы $D\times D$ — отношение объёма D-мерного параллелепипеда, натянутого на векторы, компоненты которых заданы столбцами (или строками) матрицы, к объёму D-мерного параллелепипеда, натянутого на базисные векторы. Если столбцы матрицы линейно зависимы, то параллелепипед оказывается расплющенным и имеет нулевой объём.

Геометрический смысл якобиана $\frac{Dx'}{Dx}$ — отношение элементов D-объёма d^Dx' и d^Dx. Такое отношение будет также полезно при замене переменных в D-мерном интеграле:

$$\int f(x(x'))\, d^Dx' = \int f(x)\, \frac{Dx'}{Dx}\, d^Dx.$$

1.1.4.3 Геометрический смысл определителя* (л)

Выведем общую формулу для определителя из его геометрического смысла.

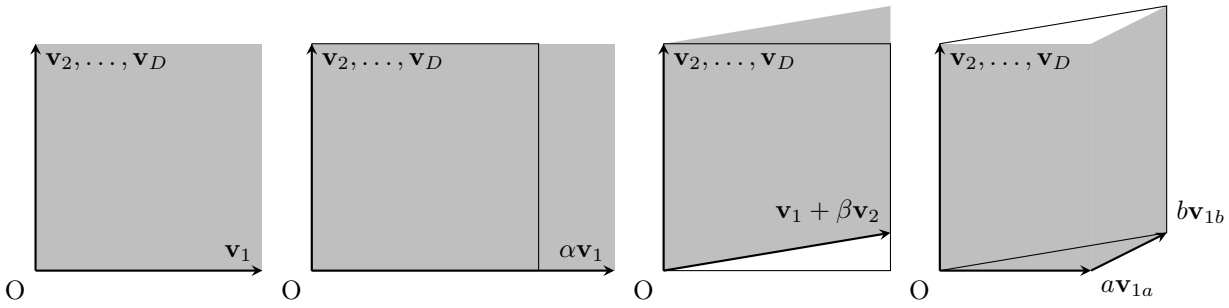
Рассмотрим параллелепипед, натянутый на векторы $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_D$. Зафиксируем все векторы, кроме $\mathbf{v}_1$. Мы видим (см. рисунки), что если вектор $\mathbf{v}_1$ умножить на положительное число α, то объём умножится на то же число. Если вектор $\mathbf{v}_1$ умножить на отрицательное число α, то объём умножится на $|\alpha|$, но давайте считать, что это *ориентированный объём*, который может быть отрицательным. Тогда для ориентированного объёма мы примем по определению, что при изменении знака $\mathbf{v}_1$ также меняется знак объёма.

Если к $\mathbf{v}_1$ добавить линейную комбинацию векторов $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_D$, то параллелепипед перекосится, но D-объём не изменится.

[13] Обратите внимание: чтобы отличить старые (нештрихованные) координаты от новых (штрихованных), мы ставим штрих не на сами координаты, а на индексы. Мы считаем, что нештрихованный индекс пробегает нештрихванные значения $M \in \{1, 2, \ldots, D\}$, а штрихованный индекс пробегает штрихованные значения $M' \in \{1', 2', \ldots, D'\}$.

Комбинируя эти свойства, мы видим, что *ориентированный объём* линеен по вектору $\mathbf{v}_1$: если $\mathbf{v}_1 = a\mathbf{v}_{1a} + b\mathbf{v}_{1b}$, то ориентированный объём $M(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_D)$ для параллелепипеда, натянутого на векторы, имеет вид

$$M(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_D) = aM(\mathbf{v}_{1a}, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_D) + bM(\mathbf{v}_{1b}, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_D).$$



Аналогично мы можем заключить, что ориентированный объём линеен по каждому из D векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_D$.

Вектор $\mathbf{v}_k$ мы можем разложить по базисным векторам $\mathbf{e}_m$ $(m = 1, \ldots, D)$:

$$\mathbf{v}_k = \sum_{m=1}^{D} v_k^m \mathbf{e}_m.$$

С учётом линейности ориентированного объёма мы можем теперь записать

$$M(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_D) = \sum_{m_1} v_1^{m_1} M(\mathbf{e}_{m_1}, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_D) = \cdots = \sum_{m_1, \ldots m_D} v_1^{m_1} v_2^{m_2} \ldots v_D^{m_D} M(\mathbf{e}_{m_1}, \mathbf{e}_{m_2}, \ldots, \mathbf{e}_{m_D}).$$

Таким образом, мы свели вычисление ориентированного объёма произвольного параллелепипеда к вычислению ориентированных объёмов, натянутых на всевозможные наборы базисных векторов.

В получившейся сумме отличны от нуля только те объёмы $M(\mathbf{e}_{m_1}, \mathbf{e}_{m_2}, \ldots, \mathbf{e}_{m_D})$, для которых все векторы $\mathbf{e}_{m_1}, \mathbf{e}_{m_2}, \ldots, \mathbf{e}_{m_D}$ различны. Поскольку у M имеется D векторных аргументов и число разных базисных векторов $\mathbf{e}_k$ тоже равно D, получается, что ненулевой вклад дают только те слагаемые, для которых индексы $m_1, m_2, \ldots, m_D$ образуют некоторую перестановку индексов $1, 2, \ldots, D$.

Примем в качестве единицы измерения объём, натянутый на базисные векторы:

$$M(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_D) = 1.$$

Параллелепипед, натянутый на те же базисные векторы, которые перечислены в другом порядке, — это тот же самый параллелепипед, так что и объём у него должен быть тот же самый. Но мы вычисляем ориентированный объём, так что возможно, что некоторые объёмы будут отличаться знаком:

$$M(\mathbf{e}_{m_1}, \mathbf{e}_{m_2}, \ldots, \mathbf{e}_{m_D}) = \pm 1, \qquad \{m_1, m_2, \ldots, m_D\} = \{1, 2, \ldots, D\}. \tag{1.1.3}$$

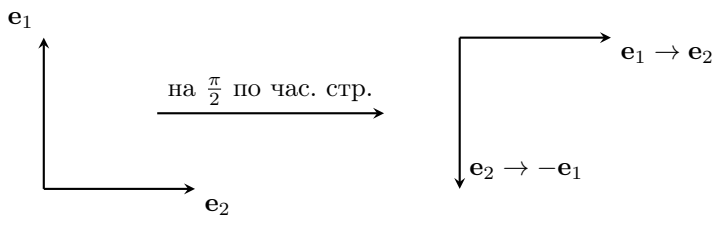
Из линейности мы получаем

$$M(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_D) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad M(-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_D) = -1.$$

Если мы будем непрерывно менять наш набор векторов, то для того, чтобы объём изменился от $+1$ до -1, в некоторой промежуточной конфигурации он должен обратиться в нуль.

Оказывается, мы можем любой набор линейно независимых векторов непрерывно преобразовать так, что ни в какой промежуточной конфигурации объём не обратится в нуль, либо к набору $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_D$ (*правый базис*), либо к набору $-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_D$ (*левый базис*), в частности, следующее преобразование осуществляется как поворот в плоскости, натянутой на векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, на угол $\frac{\pi}{2}$:

$$\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_D \to -\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_D.$$



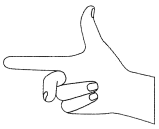
Отсюда легко видеть, что знак в формуле (1.1.3) определяется чётностью перестановки $m_1, m_2, \ldots, m_D$, т.е. чётностью числа парных перестановок индексов, которые позволяют расставить индексы $m_1, m_2, \ldots, m_D$ в порядке возрастания $1, 2, \ldots, D$.

Определим полностью антисимметричный *символ Леви-Чивиты*:

$$\varepsilon_{m_1 m_2 \cdots m_D} = M(\mathbf{e}_{m_1}, \mathbf{e}_{m_2}, \ldots, \mathbf{e}_{m_D}) = \begin{cases} 0, & \text{есть повторяющиеся индексы} \\ +1, & \text{индексы дают чётную перестановку } 1, 2, \ldots, D \\ -1, & \text{индексы дают нечётную перестановку } 1, 2, \ldots, D \end{cases}. \tag{1.1.4}$$

Теперь мы можем записать формулу для полного разложения определителя матрицы $D \times D$:

$$\det A = \sum_{m_1 m_2 \cdots m_D} \varepsilon_{m_1 m_2 \cdots m_D} A_{1 m_1} A_{2 m_2} \cdots A_{D m_D}. \tag{1.1.5}$$



В нашем 3-мерном пространстве принято считать, что ориентация правого базиса соответствует ориентации первых трёх пальцев правой руки (*правило правой руки*), если направить их взаимно перпендикулярно (см. рисунок):
большой палец — ось x, указательный палец — ось y, средний палец — ось z.

Символ Леви-Чивиты в 3-мерном пространстве имеет следующие ненулевые компоненты:

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = +1, \quad \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = -1.$$

В трёхмерном пространстве символ Леви-Чивиты можно представить как трёхмерную матрицу:

$$\varepsilon_{ijk} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Здесь первый индекс нумерует слои (в порядке удаления), второй — строки, третий — столбцы.

1.1.5 Задачи 1–3

Чтобы полноценно усвоить материал курса и уметь им пользоваться, необходимо самому прорешать ряд задач, иллюстрирующих основные идеи и методы. В конце большинства глав вы найдёте соответствующие задачи.

Проиллюстрируем удобство закона Ньютона 2а для тел с переменной массой.

Задача 1. Задача Циолковского. Используя определение силы[14] $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$, получите зависимость скорости ракеты в пустоте от начальной массы M_0, конечной массы M и скорости истечения u.

Следующие две задачи вы можете попробовать решить сейчас или, если не получится, вернуться к ним после того, как в главе 1.3 мы познакомимся с лагранжевым формализмом более последовательно.

Задача 2. От действия к системе. Проварьируйте действия, запишите уравнения движения, обобщённые импульсы, обобщённые силы, энергию. Опишите словами и проиллюстрируйте графиками, какой системе может соответствовать такое действие:

а) $S[x(t)] = \int \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} - \frac{Cx^4}{4} \right) dt$ $(m, k, C = \text{const})$;

б) $S[x(t)] = \int \left(\frac{m(\dot{x}-u)^2}{2} + Fx \right) dt$ $(m, u, F = \text{const})$;

[14] Здесь $\mathbf{F}$ — полная сила, учитывающая как внешнюю силу $\mathbf{F}_{\text{внеш.}}$, так и изменение импульса за счёт уносимой/приносимой массы. Часто эти вклады разделяют и получают *формулу Мещерского*

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}_{\text{внеш.}} + \mathbf{V}_{\text{приток}} \frac{dm_{\text{приток}}}{dt} - \mathbf{V}_{\text{отток}} \frac{dm_{\text{отток}}}{dt},$$

где $\mathbf{p} = M\mathbf{V}$ — скорость тела, $\mathbf{V}_{\text{приток/отток}}$ — скорость присоединяющихся/отделяющихся частиц, а $\frac{dm_{\text{приток/отток}}}{dt}$ — масса частиц, присоединяющихся/отделяющихся в единицу времени.

В классической механике $\mathbf{F}_{\text{внеш.}}$ не меняется при переходе в инерциальную систему отсчёта, движущуюся относительно исходной, тогда как полная сила $\mathbf{F}$ для тела с переменной массой зависит от скорости системы отсчёта.

в) $S[x(t)] = \int \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + \dot{x}A(x,t) \right) dt$ ($m = \text{const}$, функция $A(x,t)$ — одномерный векторный потенциал);
г*) $S[x(t)] = \int \left(-\frac{mx\ddot{x}}{2} + B\cos(kx) \right) dt$ ($m, B, k = \text{const}$);
д) $S[\mathbf{r}(t)] = \int \left(\frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + \frac{kr^2}{2} - \frac{Cr^4}{4} \right) dt$ ($m, k, C = \text{const}$), сравните с п.а).

Задача 3. От системы к действию. Перечислите степени свободы, запишите действие, проварьируйте, запишите уравнения движения, обобщённые импульсы, обобщённые силы, энергию.
а) Грузик массой m на пружинке с жёсткостью k.
б) Крутильные весы (*крутильный маятник*) с моментом инерции I и жёсткостью кручения κ. Сравнив с п.а), определите период колебаний.
в) Математический маятник массой m, длиной R, ускорение свободного падения — $\mathbf{g}$. Сравните с п.а).
г) Физический маятник массой m, моментом инерции I, расстояние от точки подвеса до центра масс — R, ускорение свободного падения — $\mathbf{g}$. Сравнив с п.в), определите период колебаний.
д) Колесо радиусом R и массой m с моментом инерции I катится с наклонной плоскости с углом наклона α в гравитационном поле $\mathbf{g}$ без проскальзывания.
е) То же, что в п.д), но плоскость без трения.
ж*) Молекула водорода H_2. Параметры задачи подберите сами.

1.1.6 Ответы к задачам 1, 2

Решения задач с необходимыми комментариями приводятся в разделе «Решения и дополнения», а здесь приводятся только ответы.
1. Задача Циолковского. $V(t) - V_0 = u \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$.
2. От действия к системе.
а) $-m\ddot{x} + kx - Cx^3 = 0, \quad p = m\dot{x}, \quad f = kx - Cx^3, \quad \mathcal{E} = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + \frac{Cx^4}{4}$.
в) $-m\ddot{x} - \frac{\partial A}{\partial t} = 0, \quad p = m\dot{x} + A(x,t), \quad f = \dot{x}\,\frac{\partial A}{\partial x}, \quad \mathcal{E} = \frac{m\dot{x}^2}{2}$.
Обратите внимание на то, что введение векторного потенциала не изменило энергию системы, но изменило выражение для импульса. Кроме того, обобщённая сила не совпадает с обычной силой $-\frac{\partial A}{\partial t}$, которая входит в уравнение движения.
г*) $-m\ddot{x} - Bk\,\sin(kx) = 0, \quad p = m\dot{x}, \quad f = -Bk\,\sin(kx), \quad \mathcal{E} = \frac{m\dot{x}^2}{2} - B\,\cos(kx)$.
Лагранжиан в этом пункте содержит высшую (вторую) производную по времени, однако, проинтегрировав действие по частям и откинув граничный член (он не влияет на уравнение движения), можно получить лагранжиан, зависящий только от x и $\dot{x}$. Именно этот лагранжиан надо использовать для получения обобщённых импульса, силы и энергии, которые выводились в предположении отсутствия в лагранжиане высших производных по времени.
д) $-m\ddot{\mathbf{r}} + k\mathbf{r} - Cr^2\mathbf{r} = 0, \quad \mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{f} = k\mathbf{r} - Cr^2\mathbf{r}, \quad \mathcal{E} = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - \frac{kr^2}{2} + \frac{Cr^4}{4}$.
Удобно работать не с отдельными обобщёнными координатами (компонентами вектора $\mathbf{r}$), а целиком с $\mathbf{r}$ как с векторной переменной. При этом надо различать $\mathbf{r}$ и $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{\mathbf{r}^2}$. Обратите внимание на то, что выражение $\mathbf{r}^3$ не имело бы смысла, поэтому мы пишем $r^2\mathbf{r}$.

Глава 1.2

Тензоры (с. 161)

Раз мы собираемся активно использовать обобщённые координаты, то полезно ввести подходящий математический аппарат, который позволяет одинаково хорошо работать с любыми координатами и переходить от одних координат к другим.

Кроме того, настало время ответить на вопрос, который у внимательных студентов мог остаться со времени изучения линейной алгебры:
«Если есть одномерные матрицы (столбцы и строки), есть двумерные матрицы (собственно матрицы, описывающиеся таблицей чисел на плоскости), то почему не ввести трёхмерные матрицы (которые описывались бы трёхмерными таблицами чисел), а также матрицы произвольной размерности? Ведь есть же в программировании массивы произвольной размерности.»

1.2.1 Вспоминаем матрицы (л)

Коротко напомним некоторые понятия и факты из линейной алгебры, обобщение которых понадобится нам далее.

Матрица — прямоугольная таблица из чисел, элементы которой нумеруются двумя индексами как A_{ij}. Первый индекс нумерует строки, а второй — столбцы.

Столбец (матрица-столбец) — матрица, состоящая из одного столбца, элементы которой нумеруются одним индексом как $A_{i\bullet}$. Первый индекс нумерует строки, а отсутствующий второй индекс мы заменили точкой «$\bullet$».

Строка (матрица-строка) — матрица, состоящая из одной строки, элементы которой нумеруются одним индексом как $A_{\bullet i}$. Отсутствующий первый индекс мы заменили точкой «$\bullet$», а второй индекс нумерует столбцы.

Умножение строки на столбец той же длины даёт число:[1]

$$ua = (ua)_{\bullet\bullet} = \sum_i u_{\bullet i} a_{i\bullet}. \tag{1.2.1}$$

Умножение столбца на строку даёт матрицу — таблицу умножения элементов строки на элементы столбца:[2]

$$(au)_{ij} = a_{i\bullet} u_{\bullet j} = \sum_{\bullet} a_{i\bullet} u_{\bullet j}. \tag{1.2.2}$$

(Сумма по точке $\sum_\bullet$ состоит из одного члена, т.к. точка пробегает только одно значение. Мы использовали выражение с суммой, чтобы было видно, что обе формулы (1.2.1) и (1.2.2) являются частными случаями следующей формулы (1.2.3).)

Произведение матриц даёт матрицу — таблицу умножения строк первой матрицы на столбцы второй:

$$(AB)_{ik} = \sum_j A_{ij} B_{jk}. \tag{1.2.3}$$

Умножение определяется для такой пары матриц, что число столбцов первой совпадает с числом строк второй.

[1] Запишите в строку число яблок, число груш, число слив, а в столбец — массу яблока, массу груши, массу сливы. Тогда умножение строки на столбец даст вам массу всей корзинки с фруктами.

[2] Вероятно, первое ваше знакомство с умножением столбца на строку — таблица Пифагора на обложке тетради в клеточку.

Умножение матриц *ассоциативно*, т. е. скобки в произведении можно ставить произвольным образом:

$$((AB)C)_{il} = \sum_k (\sum_j A_{ij}B_{jk})C_{kl} = \sum_{jk} A_{ij}B_{jk}C_{kl} = \sum_j A_{ij} \sum_k (B_{jk}C_{kl}) = (A(BC))_{il}.$$

Однако в общем случае умножение матриц *некоммутативно*:

$$\exists A, B: \quad AB \neq BA,$$

более того, произведение двух матриц в обратном порядке может быть вовсе не определено. Так, квадратную матрицу можно умножить на матрицу-столбец, но не наоборот.

След матрицы — сумма диагональных элементов. След определяется только для квадратных матриц, у которых число строк и столбцов совпадает:

$$\operatorname{tr} A = \sum_i A_{ii}.$$

Транспонирование матрицы меняет местами строки и столбцы:

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}, \qquad (a^T)_{\bullet i} = a_{i\bullet}, \qquad (u^T)_{i\bullet} = u_{\bullet i}.$$

Единичная матрица — матрица с компонентами

$$E_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Сама единичная матрица часто обозначается E, но обозначение E_{ij} для компонент единичной матрицы обычно не используется, вместо этого используется обозначение δ_{ij}, которое называют *дельта-символом* или *дельта-символом Кронекера*.

В этой книге для единичной матрицы мы будем использовать единицу в шляпке: $\hat{1}$, чтобы не перегружать букву E, которая нам понадобится для энергии, для электрического поля и для других объектов.

Ортогональная матрица удовлетворяет условию

$$AA^T = \hat{1}.$$

Ортогональные матрицы — это матрицы поворотов, отражений и их комбинаций, т.е. матрицы перехода между декартовыми системами координат. Множество ортогональных матриц размером $n \times n$ обозначается $\mathrm{O}(n)$.

Матрицы могут быть разных «сортов» с точки зрения их поведения при замене базиса: линейные преобразования, квадратичные формы и т.д. В матричных обозначениях эти разновидности явно не различаются.

1.2.2 Тензоры общего вида

Тензор — некоторый объект (совокупность компонент, нумерующихся индексами), несущий верхние (*контравариантные*) и нижние (*ковариантные*) индексы, пробегающие D различных значений каждый (D — размерность пространства), и преобразующийся при замене координат класса $\mathcal{K}$ следующим (*линейным*!) образом:

$$T^{i'\cdots j'}{}_{k'\cdots l'} = T^{i\cdots j}{}_{k\cdots l} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \cdots \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \cdots \frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}}. \tag{1.2.4}$$

Штрихованные индексы относятся к новым координатам, нештрихованные — к старым.

По повторяющимся индексам (в одном члене) подразумевается суммирование (*свёртка*).

Из пары повторяющихся в одном члене индексов один должен быть верхним, а другой — нижним.

Индекс у координаты всегда верхний: x^i. В частной производной $\frac{\partial}{\partial x^i}$ индекс считается нижним, поэтому её удобно обозначать как ∂_i.

Аргументы у компонент тензоров и матриц Якоби выбираются так, чтобы все величины относились к одной точке пространства. Например, $A^{i'}{}_{j'}(x') = A^i{}_j(x(x'))\, \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(x(x'))\, \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}(x')$.

Правило для преобразования тензоров произвольного ранга легко записать, если помнить, что все старые индексы тензора должны быть свёрнуты с индексами прямых и обратных матриц Якоби, причём верхние индексы должны сворачиваться с нижними.

(!*) При определении тензора всегда задаётся (явно или неявно) класс допустимых преобразований координат $\mathcal{K}$.

(!*) Класс $\mathcal{K}$ допустимых замен координат может быть выбран так.

* *Невырожденные* ($\det \neq 0$) *линейные замены координат* определяются некоторой *группой матриц*[3] $D \times D$, например группой невырожденных матриц общего вида $\mathrm{GL}(D)$, группой ортогональных матриц $\mathrm{O}(D)$ и т.д.

* Линейные замены координат могут быть *однородными* (оставляющими неподвижным начало координат) или *неоднородными*[4].

* *Общекоординатные преобразования* — это произвольные невырожденные ($\frac{Dx'}{Dx} \neq 0$) замены координат определённого *класса гладкости* $\mathcal{K}$, например, $C^\infty(\mathbb{R}^D)$ — бесконечно дифференцируемые функции D вещественных аргументов, $C^2(\mathbb{R}^D)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции и т.д. Для компонент тензора имеет смысл рассматривать гладкость не выше чем $\mathcal{K}$.

* *Преобразования, сохраняющие некоторую структуру,* — это преобразования, переводящие в себя некоторую структуру (набор тензоров). Например, (а) преобразования, сохраняющие объём, (б) преобразования, сохраняющие метрику (расстояние), (в) *конформные* преобразования (сохраняющие углы) и т.д.

Валентность тензора, или ***ранг тензора***, определяется как пара чисел (число верхних индексов, число нижних индексов), например, тензор $R^i{}_{jkl}$ имеет валентность (ранг) $(1,3)$. Иногда валентностью (рангом) могут называть общее число индексов тензора.[5]

Могут использоваться и иные объекты, которые несут индексы, но преобразуются по другим правилам и тензорами не являются.

Сразу оговорим, что хотя **координаты** будут нести верхний индекс (x^i), но набор координат («радиус-вектор») может считаться тензором (вектором), только если мы ограничиваемся *линейными однородными* (не сдвигающими начало координат) преобразованиями.

Радиус-вектор вектором может не быть.

1.2.3 Простейшие тензоры

1.2.3.1 Скаляр

Простейший (и самый важный) тензор — *скаляр*, он вообще не имеет индексов, т.е. имеет валентность $(0,0)$, и имеет одну компоненту. Скаляр — это число, не зависящее от системы координат.

инвариант ≡ скаляр.

Скаляр может быть связан с какой-то точкой пространства, при замене координат координаты точки могут измениться, но прежней точке (пусть и с новыми координатами) будет соответствовать прежнее значение скаляра.

Если скаляр записан как функция от координат, то эта функция при замене координат преобразуется следующим образом:

$$\varphi'(x') = \varphi(x(x')).$$

В частности, мы будем определять действие так, чтобы оно было скаляром (инвариантом), т.е. не зависело от выбранной системы координат.

---

[3] По определению группа матриц замкнута относительно операций матричного умножения и взятия обратного элемента.

[4] Линейные однородные замены координат $x^i \to x^{i'} = A^{i'}_i x^i$ сохраняют структуру *линейного пространства.* Точки этого пространства — векторы, которые можно складывать между собой и умножать на число.

Линейные неоднородные замены координат $x^i \to x^{i'} = A^{i'}_i x^i + a^{i'}$ сохраняют структуру *аффинного пространства.*

Пространство, на котором любая пара точек A, B соединяется некоторым радиус-вектором $\overrightarrow{AB}$ (ведущим себя как вектор по отношению к сложению и умножению на вещественные числа), причём для любой тройки точек A, B, C выполняется условие $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, мы будем называть *аффинным пространством.* Прямая в аффинном пространстве — множество таких точек X, что для любой пары несовпадающих точек A, B, лежащих на этой прямой, $\overrightarrow{AX} = \alpha\overrightarrow{AB}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$. Для аффинного пространства существуют выделенные системы координат (*аффинные координаты*), в которых координата точки X задаётся как коэффициенты разложения вектора $\overrightarrow{OA}$ (O — фиксированная точка — начало координат) по некоторому базису.

[5] Не следует путать *ранг тензора* (число индексов) и *ранг матрицы* (число линейно независимых столбцов/строк). Это разные понятия. Если тензор имеет два индекса, то он имеет ранг (валентность) тензора 2, а ранг соответствующей матрицы может быть любым целым числом от нуля до размерности пространства.

1.2.3.2 Вектор

Вектор (*контравариантный вектор*) — тензор с валентностью $(1,0)$, т.е. с одним верхним (контравариантным) индексом.

При замене координат вектор преобразуется так же, как разность координат между двумя фиксированными бесконечноблизкими точками dx^i. Если мы рассматриваем линейную замену координат, то так же преобразуется и разность координат двух произвольных точек, но в общем случае произвольной замены (переход к криволинейным координатам) разность координат двух точек преобразуется нелинейным образом, а значит, не является вектором (который, как частный случай тензора, должен иметь линейный закон преобразования). Вектор можно представить в виде стрелки, соединяющей две фиксированные бесконечноблизкие точки:

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\, dx^i = \sum_i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\, dx^i, \quad \text{аналогично для любого вектора} \quad v^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\, v^i. \tag{1.2.5}$$

(*) Заметим, что векторами в разных областях математики называют разные объекты. Как правило, вектором называется элемент линейного пространства, т.е. векторы можно умножать на число и складывать. Наши векторы тоже будут допускать эти операции, т.е. будут элементами некоторого линейного пространства. Элементами некоторого линейного пространства будут и ковекторы, а также любые тензоры определённой валентности (с определённым числом верхних и нижних индексов).[6] Однако слово «вектор» далее будет означать не только принадлежность линейному пространству, но и определённый закон преобразования (1.2.5).

1.2.3.3 Ковектор

Ковектор (*ковариантный вектор*) — тензор с валентностью $(0,1)$, т.е. с одним нижним (ковариантным) индексом. При замене координат ковектор преобразуется по тем же правилам, что и набор частных производных от скалярной функции (*градиент*). Число компонент ковектора совпадает с числом компонент вектора, но ковектор при замене координат преобразуется по-другому.

Градиент — ковектор, а не вектор:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^{i'}} = \partial_{i'}\varphi, = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\, \partial_i \varphi \quad \text{аналогично для любого ковектора} \quad u_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\, u_i. \tag{1.2.6}$$

Индекс у производной по координате считается нижним: $\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i$.

(*) Символ *набла* ∇_i мы резервируем для *ковариантной производной*. Ковариантная производная ∇_i совпадает с частной производной ∂_i в двух случаях: (а) если координаты линейные (например, декартовы), (б) когда набла действует на скаляр. В случае дифференцирования тензора с индексами в криволинейных координатах ∂_i превращает тензор в не тензор (который несёт индексы, но преобразуется не по тензорному закону), а ∇_i превращает тензор снова в тензор, у которого появился новый нижний индекс i. Ковариантные производные не входят в основной материал, но рассматриваются в дополнениях.

При свёртке градиента с вектором v^i получается производная от скалярного поля по направлению $\partial_v \varphi$:

$$v^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(x) = \left.\frac{d\varphi(x+\varepsilon v)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \partial_v \varphi. \tag{1.2.7}$$

Можно вычислять $\partial_v \varphi$ в любой системе отсчёта, результат будет одинаковый, т.е. это скаляр.

(*) Чтобы убедиться в том, что градиент (а значит, и любой ковектор) не является вектором, можно сослаться на то, что в случае вектора преобразование записывается через прямую матрицу Якоби, а для ковектора — через обратную. Это можно объяснить и «на пальцах». Вектор можно представить как стрелку. Градиент — стрелка, направленная в направлении скорейшего роста функции и имеющая длину, равную производной вдоль этого направления. Для того чтобы выбрать направление наискорейшего роста, нам необходимо сравнивать расстояния в разных направлениях (чтобы определить, где «следующая» поверхность уровня ближе подходит к рассматриваемой точке). Однако правила вычисления расстояния в различных системах координат могут быть различны. Таким образом, для представления градиента (ковектора) в виде стрелки (вектора) нам нужно знать правила вычисления расстояний (*метрику*). Немного другими словами: вектор градиента должен быть перпендикулярен поверхности уровня, а для определения перпендикулярности нам нужно скалярное произведение (*метрика*).

[6] **(**)** В каждой точке пространства есть своё линейное пространство касательных векторов. Если задана операция параллельного переноса (не зависящая от траектории параллельного переноса), то все (относящиеся к разным точкам) пространства касательных векторов можно отождествить между собой. Однако это не всегда возможно, например, мы не можем задать не зависящий от траектории параллельный перенос для касательных векторов на сфере. Аналогично для любой валентности (m,n) в каждой точке пространства имеется своё линейное касательное пространство тензоров данной валентности. Если параллельный перенос задан для касательных векторов, то его можно определить и для тензоров других валентностей.

1.2.4 Свойства тензоров

1.2.4.1 Самосогласованность закона преобразования тензоров

Закон преобразования тензоров (1.2.4) является самосогласованным, т.е. комбинация двух преобразований вида (1.2.4) (от координат x к координатам x' и от координат x' к координатам x'') снова даёт преобразование такого же вида (от координат x к координатам x'').

Для доказательства этого достаточно применить правило дифференцирования сложной функции и доказать лемму, что свёртка двух матриц Якоби снова даёт матрицу Якоби:

$$\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}} = \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i}}. \tag{1.2.8}$$

В частности,

$$\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}} = \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{i}} = \delta^{j}_{i}.$$

Покажем, что это так:

$$\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i}} = \frac{\partial x^{i''}(x'(x))}{\partial x^{i}} = \sum_{i'}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}} = \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}.$$

Непосредственное доказательство самосогласованности определения (1.2.4) с использованием доказанной выше леммы (1.2.8) предоставляем читателю.

1.2.4.2 Тензорное произведение и свёртка

Правила преобразования тензоров устроены таким образом, что произведение компонент нескольких тензоров с разными индексами (тензорное умножение[7]) даёт компоненты нового тензора, а любая правильная свёртка (верхнего индекса с нижним) превращает тензор в новый тензор (с меньшим числом индексов):

$$T^{ij\cdots}{}_{kl\ldots}S^{mn\cdots}{}_{op\ldots} = (T\otimes S)^{ij\cdots}{}_{kl\ldots}{}^{mn\cdots}{}_{op\ldots} = R^{ij\cdots}{}_{kl\ldots}{}^{mn\cdots}{}_{op\ldots} \qquad \text{— тензорное умножение,} \tag{1.2.9}$$

$$R^{\cdots imj\cdots}{}_{\ldots kml\ldots} = \sum_{m} R^{\cdots imj\cdots}{}_{\ldots kml\ldots} = P^{\cdots ij\cdots}{}_{\ldots kl\ldots} \qquad \text{— свёртка.} \tag{1.2.10}$$

Доказательство этих утверждений предоставим читателю. Доказательство того, что свёртка верхнего индекса с нижним переводит тензор в тензор, легко получить обобщением приведённых ниже выкладок для свёртки вектора и ковектора (1.2.15).

В частности, тензор преобразуется по такому же закону, как тензорное произведение (произведение компонент) векторов и ковекторов, несущее тот же набор индексов.

Поведение тензора при замене координат определяется тем, какие *свободные индексы* (по которым нет свёртки) он несёт. Если у тензора нет свободных индексов — это скаляр, один верхний свободный индекс — вектор, один нижний свободный индекс — ковектор и т.п.

Индексы, по которым проводится свёртка, называются *немыми индексами*.

Все тензоры одного типа (с одинаковыми наборами свободных индексов) преобразуются одинаково, причём линейно. В силу этого часто оказываются полезными следующие очевидные свойства, которые позволяют, установив какой-то факт в одной удобной системе координат, обобщить его на любую другую.

- Если тензор равен нулю в одной системе координат, то он равен нулю в любой системе координат.
- Если два тензора равны в одной системе координат, то они равны в любой системе координат.
- Правильно записанное тензорное уравнение (в котором все операции переводят тензоры в тензоры, подробнее см. ниже пункт 1.2.4.4 «Баланс индексов и аргументов») выглядит одинаково в любой системе координат.

Можно соединять парные немые индексы с помощью дужки (сверху или снизу). Использование дужек не является обязательным, но может быть полезно для упрощения чтения формул:

$$R^{\cdots imj\cdots}{}_{\ldots kml\ldots} = R^{\cdots i\overbrace{mj\cdots}\ldots kml\ldots} = R^{\cdots i\underbrace{mj\cdots}\ldots kml\ldots}, \qquad A^{i}{}_{j}B^{j}{}_{k}C^{k}{}_{i} = A^{i}\overbrace{{}_{j}B^{j}{}_{k}C^{k}{}_{i}} = \operatorname{tr}(ABC). \tag{1.2.11}$$

При записи цепочки выкладок бывает удобно на каждом шаге выделять дужкой не все свёртки, а только те, которые на данном шаге преобразуются.

[7] Иногда тензорное произведение обозначают значком $\otimes$, но чаще никак не обозначают, просто пишут произведение компонент соответствующих тензоров.

1.2.4.3 Признак тензора

Можно легко установить следующий ***признак тензора***: *если при сворачивании некоторого объекта с* ***произвольным*** *вектором (ковектором) получается тензор с соответствующим набором индексов, то и исходный объект тоже был тензором.*

Для иллюстрации признака тензора можно использовать то, что свёртка вектора и ковектора даёт тензор без индексов, т.е. скаляр. Это легко увидеть на примере свёртки бесконечномалого приращения координат между двумя фиксированными точками (вектора) и градиента (ковектора):

$$dx^i\,\partial_i\varphi = dx^i\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} = d\varphi. \tag{1.2.12}$$

Поскольку dx^i может быть произвольным малым вектором, а дифференциал скалярной функции (разность значений φ для двух фиксированных близких точек) не зависит от системы координат, данная свёртка оказывается инвариантом (скаляром). Поскольку все другие векторы и ковекторы преобразуются аналогично dx^i и $\partial_i\varphi$, свёртка произвольного вектора с произвольным ковектором тоже окажется скаляром.

Покажем, что δ-символ (символ Кронекера) с одним верхним и одним нижним индексом является тензором. Символ Кронекера определяется через компоненты единичной матрицы:

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{1.2.13}$$

Если свернуть δ-символ с произвольным вектором, то в сумме выживает только член с $i = j$:

$$v^j\,\delta^i_j = \sum_j v^j\,\delta^i_j = v^j\,\delta^i_j\big|_{i=j} = v^i. \tag{1.2.14}$$

Таким образом, для произвольного вектора v^j свёртка с δ-символом снова дала тензор (вектор v^i), а значит, по признаку тензора δ-символ — тензор (это можно проверить и напрямую, убедившись, что правило преобразования тензора с одним верхним и одним нижним символом показывает, что δ-символ переходит в себя при любых преобразованиях координат).

Воспользовавшись δ-символом и правилами дифференцирования сложных функций, ещё раз продемонстрируем (используя лемму (1.2.8)), что свёртка вектора и ковектора является инвариантом (скаляром):

$$u_{i'}v^{i'} = u_j\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{\,i'}}\,\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\,i}}\,v^i = u_j\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{\,i}}\,v^i = u_j\,\delta^j_i\,v^i = u_i\,v^i. \tag{1.2.15}$$

Дужками на каждом шаге выделена та свёртка, которая на данном шаге преобразуется.

1.2.4.4 Баланс индексов и аргументов

При работе с тензорными индексами следует соблюдать ***баланс индексов***, а также (если допустимы нелинейные замены координат) *баланс аргументов*:

- в каждом слагаемом индекс может встречаться один или два раза;
- если индекс встречается в слагаемом один раз (*свободный индекс*), то
  - слагаемое зависит от значения этого индекса,
  - мы можем приравнять этот индекс какому-то значению,
  - все члены, с которыми слагаемое складывается, вычитается или приравнивается, должны содержать этот индекс тоже один раз в том же (верхнем или нижнем) положении,
  - мы можем переименовать этот индекс, если одновременно таким же образом переименуем этот индекс во всех членах, с которыми данное слагаемое складывается, вычитается или приравнивается;
- если индекс встречается в слагаемом два раза (*немой индекс*), то
  - один раз он должен быть верхним, а другой раз — нижним,
  - по нему проводится *свёртка* (суммирование по всем возможным значениям индекса),
  - мы не можем приравнять этот индекс какому-то значению,
  - мы можем переименовать этот индекс произвольным образом, но так, чтобы новое имя индекса не совпадало с именами других индексов того же слагаемого;
- мы можем не различать верхние и нижние индексы, *только если* ограничиваем себя рассмотрением преобразований, для которых матрица Якоби ($\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}$) ортогональна, т.е.

$$\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^{m'}}{\partial x^m}\delta_{k'm'} = \delta_{km} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial x'}{\partial x} \in \mathrm{O}(D);$$

- мы должны различать индексы, относящиеся к разным системам координат (штрихованные и нештрихованные), удобно считать, что штрихованные индексы нумеруются штрихованными цифрами: $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, D\}$, $i', j', k' \in \{1', 2', \ldots, D'\}$;
- если вы подставляете какое-то выражение с индексами в формулу, то часто бывает *необходимо* переименовать некоторые индексы:
  - индексы, встречающиеся один раз, бывает нужно переименовать, чтобы они соответствовали индексам в формуле, в которую вы подставляете выражение;
  - индексы, встречающиеся два раза, бывает нужно переименовать, чтобы они не совпадали с индексами, уже имеющимися в члене, в который вы подставляете выражение;

- баланс должен соблюдаться не только для индексов, но и аргументов:
  - каждый член (слагаемое или множитель) в тензорном выражении относится к некоторой точке пространства,
  - точка пространства, к которой относится член, *обычно* (могут быть и другие варианты) задаётся координатами в соответствующей системе координат

$$v^i(x), \quad v^{i'}(x'), \quad \varphi(x), \quad \varphi'(x'), \quad x^{i'}(x), \quad x^i(x'), \quad \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(x), \quad \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}(x'),$$

  - аргументы у компонент тензоров и матриц Якоби выбираются так, чтобы все величины относились к одной точке пространства и выражались через координаты какой-то одной системы, например,

$$A^{i'}{}_{j'}(x') = A^i{}_j(x(x')) \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(x(x')) \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}(x'),$$

  - если рассматриваются тензоры только по отношению к линейным преобразованиям координат, то точку пространства можно не указывать.

Приведённые выше правила обращения с индексами тривиальны, но часто недостаточно чётко осознаются начинающими, что приводит к ошибкам, которых можно было бы легко избежать. Проиллюстрируем это конкретным примером. Повторим доказательство того, что свёртка $u_i v^i$ ковектора u и вектора v является скаляром, обращая при этом внимание на применение правил баланса индексов и возможные ошибки. При замене координат компоненты u и v преобразуются следующим образом:

$$u_{k'} = u_j \frac{\partial x^j}{\partial x^{k'}}, \qquad v^{m'} = \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^j} v^j.$$

Чтобы подставить компоненты u и v в штрихованных координатах в выражение $u_{i'} v^{i'}$, сначала следует переименовать свободные индексы k' и m' в i':

$$u_{i'} = u_j \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}, \qquad v^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} v^j.$$

Если мы подставим в свёртку эти выражения, то индекс j войдёт в один член четыре раза (*эту ошибку поначалу допускает большинство студентов*), поэтому перед подстановкой надо переименовать индекс j в одном из выражений, например, в выражении для $v^{i'}$ заменим j на k и получим $v^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} v^k$.
Теперь подставим $u_{i'}$ и $v^{i'}$ в исходное выражение:

$$u_{i'} v^{i'} = u_j \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} v^k = u_j \delta^j_k v^k = u_j v^j = u_i v^i.$$

(В самом конце цепочки равенств мы переименовали немой индекс j в i просто «для красоты».)

(!) Напоминаем, что буква с буквенным индексом (особенно в аргументах функций) будет обычно обозначать всю совокупность объектов, нумеруемых данным индексом. При этом неважно, какой именно индекс используется в аргументе функции, и также неважно, совпадают ли индексы в аргументах между собой или с индексами выражения. Важен может быть алфавит, к которому принадлежит индекс аргумента, поскольку индексы разных алфавитов могут пробегать разные значения. Например, при $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, $\alpha', \beta', \gamma' = 1', 2', 3'$, $i, j, k = 0, 1, 2, 3$ имеем

$$f^\alpha(x^\beta) = f^\alpha(x^\alpha) = f^\alpha(x) = \begin{pmatrix} f^1(x^1, x^2, x^3) \\ f^2(x^1, x^2, x^3) \\ f^3(x^1, x^2, x^3) \end{pmatrix}, \qquad A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{21} & A_{22} & A_{33} \end{pmatrix},$$

$$f(x, v) = f(x^\alpha, v^\alpha) = f(x^\alpha, v^\beta) = f(x^1, x^2, x^3, v^1, v^2, v^3),$$

$$f(x^i) = f(x^0, x^1, x^2, x^3) \neq f(x^\alpha) = f(x^1, x^2, x^3) \neq f(x^{\alpha'}) = f(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}).$$

1.2.4.5 Метрика

Если мы хотим определить способ превращать векторы в ковекторы с помощью свёртки, нам нужен ***метрический тензор*** g_{ij} (*метрика*) с валентностью $(0,2)$, т.е. с двумя нижними индексами. Один нижний индекс будет сворачиваться с верхним индексом вектора, а второй остаётся свободным:

$$v_i = g_{ij}\, v^j. \tag{1.2.16}$$

Ковектор, полученный из вектора, принято обозначать той же буквой, которой обозначен исходный вектор, поскольку тем самым определяется взаимнооднозначное соответствие между векторами и ковекторами (*опускание индекса*). Таким образом, вектор и соответствующий ему ковектор можно рассматривать как различные представления одного объекта.

На метрический тензор g_{ij} накладываются условия симметричности

$$g_{ij} = g_{ji} \tag{1.2.17}$$

(чтобы определённое с его помощью скалярное произведение было симметричным) и невырожденности

$$\det(g_{ij}) \neq 0 \tag{1.2.18}$$

(чтобы была определена обратная к опусканию индекса операция поднимания индекса, для чего матрицу g_{ij} надо обратить).

Обратная метрика задаётся матрицей, обратной к метрике, она имеет валентность $(2,0)$, т.е. несёт два верхних индекса:

$$g_{ij}\, g^{jk} = \delta_i^k. \tag{1.2.19}$$

То, что обратная метрика действительно является тензором с валентностью $(2,0)$, легко проверить с помощью определения тензора или признака тензора.

С помощью обратной метрики можно поднимать индексы, эта операция обратна к опусканию индексов:

$$v^i = g^{ij}\, v_j. \tag{1.2.20}$$

В присутствии метрики можно считать, что вектор v^i и ковектор v_i — это разные представления одного объекта.

Поднимать и опускать индексы можно не только для векторов и ковекторов, но и для произвольных тензоров, несущих индексы:

$$T^{ij}{}_{kl} g_{jm} g^{kn} = T^i{}_m{}^n{}_l.$$

Здесь у тензора T мы опустили 2-й индекс и подняли 3-й.

(!) Мы специально не пишем одни индексы под другими, чтобы нумерация индексов была однозначна и при поднимании с последующим опусканием индекса (или наоборот) он встал на своё исходное место. Иначе мы можем случайно переставить индексы, что может привести к ошибке, если тензор не был симметричен по переставленным индексам.

С помощью метрики и соответствующей ей обратной метрики мы можем определить скалярное произведение вектора на вектор или ковектора на ковектор. Для определения произведения вектора на ковектор метрика не нужна, достаточно обычной свёртки:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a^i b_i = a_i b^i = a^i b^j g_{ij} = a_i b_j g^{ij}. \tag{1.2.21}$$

Скалярный квадрат вектора dx^i задаёт квадрат расстояния (или *интервала*[8]) между двумя бесконечноблизкими точками

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j, \tag{1.2.22}$$

задавая тем самым первую квадратичную форму. Запись метрики (1.2.22) через расстояние между двумя точками, которое является инвариантом (скаляром), часто оказывается очень удобной.

(*) Чтобы выразить метрику в новых координатах, часто удобно действовать так.
Выражаем старые координаты через новые: $x(x')$.
Выражаем дифференциалы старых координат через дифференциалы новых: $dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\, dx^{i'}$.
Подставляем полученные выражения в формулу (1.2.22).
Раскрываем скобки, упрощаем и переписываем формулу (1.2.22) через новые координаты: $ds^2 = g_{i'j'}\, dx^{i'}\, dx^{j'}$.
Из получившейся формулы извлекаем матрицу квадратичной формы уже в новых координатах $g_{i'j'}$.

[8] Если метрика задаётся положительно определённой матрицей, то формула (1.2.22) задаёт расстояние, а если матрица знакопеременна (имеет собственные числа обоих знаков), то формула (1.2.22) задёт интервал. Интервал возникает в геометрии пространства-времени в теории относительности (как в специальной, так и в общей).

(*) Другой алгоритм вычисления метрики удобен, если у вас хорошее пространственное воображение. Выражаем базисные векторы новой системы координат через старую систему координат[9]: $(\mathbf{e}_{i'})^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$. Направление вектора $\mathbf{e}_{i'}$ задаёт, куда смещается точка, если менять координату $x^{i'}$, а остальные новые координаты фиксировать, длина вектора $\mathbf{e}_{i'}$ соответствует тому, с какой скоростью едет точка, если $x^{i'}$ меняется с единичной скоростью.
Получаем метрику как *матрицу Грама* (матрицу скалярных произведений базисных векторов):

$$g_{i'j'} = (\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}).$$

(*) Разумеется, все способы преобразования метрики от одной системы координат к другой полностью эквивалентны стандартной формуле преобразования метрического тензора

$$g_{i'j'} = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}. \tag{1.2.23}$$

Но если среди компонент матрицы, которые надо перемножить, много нулей, то удобнее способ через элемент длины (1.2.22), а если координатные линии новой системы обладают хорошими геометрическими свойствами, может быть удобнее вычислять метрику как матрицу Грама.

1.2.4.6 Евклидова метрика

В случае, если метрика задаётся единичной матрицей

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{1.2.24}$$

поднимание/опускание индекса не приводит к изменению компонент тензора. Это соответствует декартовым координатам в евклидовом пространстве. Переход между различными декартовыми координатами осуществляется с помощью линейных ортогональных преобразований. В таком случае мы можем не различать верхние и нижние индексы. В физике этот случай встречается нам при рассмотрении трёхмерного евклидова пространства (сечения $t = \text{const}$ 4-мерного пространства-времени Минковского).

1.2.4.7 Диаграммные обозначения**

Диаграммные обозначения развивают идею использования дужек (1.2.11), соединяющих парные немые индексы.

В диаграммных обозначениях тензоры (векторы, ковекторы и т.д.) представляются в виде узлов, в которых сходится определённое (для каждого сорта объекта) число линий. Вы можете себе представить такой объект как некое электронное устройство, из которого торчит k проводков. Каждый из проводков соответствует индексу.

Проводки можно соединять попарно, причём соединяемые проводки могут относиться как к разным узлам, так и к одному узлу. Такое соединение обозначает приравнивание соответствующих индексов и суммирование по всему их диапазону.

Диаграммные обозначения тензоров не всегда удобны для вычислений, но их полезно держать в голове, так как они автоматически подразумевают правильный баланс индексов.

Однако проводки бывают разных сортов, и соединяются они по следующим правилам.

- Каждый индекс/проводок является либо верхним (контравариантным), либо нижним (ковариантным) индексом. Соединять между собой можно только верхние и нижние индексы.
- Каждый индекс/проводок имеет свою область определения. Для соединяемых проводков области определения должны совпадать. Мы считаем, что индексы для разных систем координат пробегают разные наборы значений.
- В некоторых случаях удобно проводки/индексы объединять в многожильные кабели/мультииндексы.
- Иногда линии (или выходы узлов) полезно подписывать соответствующими буквенными индексами, чтобы не перепутать порядок индексов и упростить перевод формул в другие обозначения.

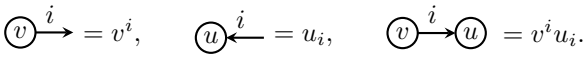
[9] $\mathbf{e}_{i'}$ — базисный вектор штрихованной системы координат с номером i', $(\mathbf{e}_{i'})^i$ — компонента номер i при разложении этого вектора по нештрихованному базису.

Таким образом, в диаграммных обозначениях тензорные формулы представляются в виде диаграмм. Если диаграмма состоит из нескольких несвязанных кусков, то подразумевается, что они умножаются друг на друга.

Диаграмма, в свою очередь, может рассматриваться как узел, несущий все внешние (свободные, оставшиеся несоединёнными) линии/проводки. Если у диаграммы нет внешних линий, то это скаляр.

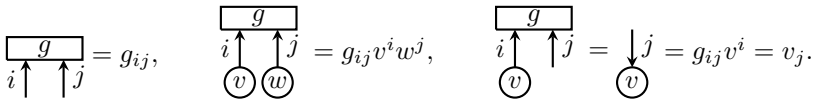
Диаграммы с одинаковым набором внешних линий (тензоры одного типа) образуют линейное пространство (их можно умножать на числа и складывать).

Вектор, ковектор, их свёртка:

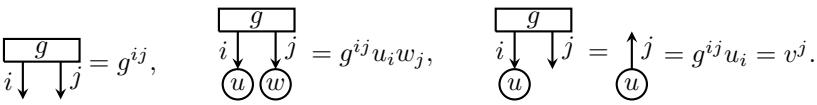


Метрический тензор и обратный метрический тензор в диаграммных обозначениях представляются как некоторые переходники, позволяющие менять ориентацию линий.

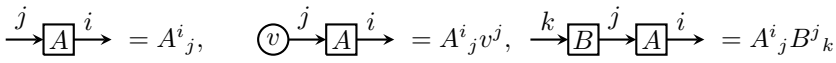
Метрический тензор, скалярное произведение двух векторов, опускание индекса:



Обратный метрический тензор, скалярное произведение двух ковекторов, поднимание индекса:



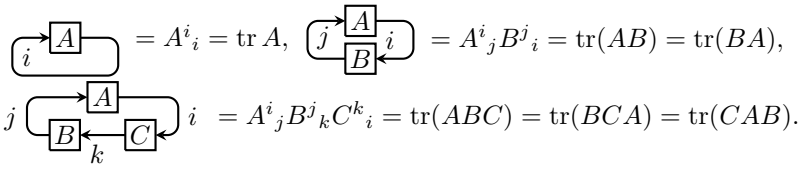
Линейное преобразование, действие преобразования на вектор, произведение преобразований (соединение их в цепочку):



В матричном виде могут быть записаны только те тензорные выражения, которые можно вытянуть в цепочку. С помощью операции взятия следа эту цепочку можно замкнуть в кольцо.

След можно брать только от тензора, у которого один индекс верхний, а другой нижний!

След — замыкание матрицы на себя:



1.2.5 Матрицы и тензоры

Тензор с одним индексом может быть представлен в виде строки или столбца. Тензор с двумя индексами может быть представлен в виде квадратной матрицы. При такой записи мы должны помнить, какие индексы тензора были сверху, а какие снизу, т.е. столбцы, строки и квадратные матрицы могут быть «разных сортов». Мы можем, например, считать, что строка — ковектор, а столбец — вектор, но для матриц надо различать по крайней мере три случая: два верхних индекса, два нижних индекса, один верхний индекс и один нижний. На самом деле такое различие по сортам имело место уже в обычной линейной алгебре, где мы различали матрицы линейных преобразований (один верхний индекс и один нижний) и матрицы квадратичных форм (оба индекса нижние).

1.2.5.1 Правила перевода

Для перевода с матричного на тензорный язык и обратно будем считать, что

- **первый индекс нумерует строки, а второй индекс нумерует столбцы**,
- если есть верхний и нижний индексы, то верхний, как правило, — первый.

Из этого следует, что

- транспонирование — перестановка индексов,
- умножение матриц — свёртка второго индекса первой матрицы с первым индексом второй,
- след матрицы — свёртка первого индекса со вторым,
- столбец — тензор, у которого есть первый индекс, но нет второго,
- строка — тензор, у которого есть второй индекс, но нет первого.

В качестве примеров приведём следующие формулы (не различая верхние и нижние индексы):

$$
\begin{aligned}
&(A^T)_{ij} = A_{ji},\\
&(AB)_{ik} = A_{ij}B_{jk},\\
&(ABCD)_{im} = A_{ij}B_{jk}C_{kl}D_{lm},\\
&\operatorname{tr} A = A_{ii},\\
&\operatorname{tr}(ABCD) = A_{ij}B_{jk}C_{kl}D_{li},\\
&(A\mathbf{a})_{i\bullet} = A_{ij}a_{j\bullet},\\
&(\mathbf{a}^T A)_{\bullet j} = a^T_{\bullet i}A_{ij} = a_{i\bullet}A_{ij}.
\end{aligned}
$$

Здесь у столбца/строки второй/первый отсутствующий индекс обозначен точкой. Вектор считается столбцом, транспонированный вектор — строкой. Мы не различали верхние и нижние индексы, но это различие может быть существенно, т.к. если мы будем сворачивать верхний индекс с верхним или нижний с нижним, то получившийся объект может не быть тензором. Также переставлять (транспонировать) можно только индексы одного типа (все верхние или все нижние, причём переставляемые индексы должны относиться к одной системе координат).

(!) Мы специально нарисовали дужки, чтобы наглядно показать, что при умножении матриц они «цепляются» друг за друга индексами: второй индекс множителя сворачивается с первым индексом следующего множителя, в результате дужки, изображающие свёртки, соединяют множители в цепочку. Взятие следа замыкает цепочку в кольцо. (Разумеется, дужки можно не рисовать, но с дужками получается нагляднее.)

При тензорной записи порядок сомножителей не играет никакой роли. Та информация, которая на матричном языке «шифровалась» в порядке сомножителей, транспонировании и взятии следов, на тензорном языке «шифруется» тем, какие индексы с какими сворачиваются.

Тензорный язык предоставляет бóльшие возможности, чем матричный, т.к. на матричном языке запись тензоров, несущих три и более индекса, оказывается затруднённой. При этом тензорный язык предохраняет от некоторых ошибок, например, бессмысленно умножать друг на друга матрицы двух квадратичных форм, поскольку результат будет зависеть от системы координат. В тензорных обозначениях этот запрет выполняется автоматически, т.к. при таком умножении пришлось бы сворачивать два нижних индекса, что недопустимо.

1.2.5.2 Некоторые правила преобразований

Запишем теперь правила преобразования для некоторых типов тензоров на матричном языке (эти правила уже известны нам из линейной алгебры). Введём обозначения для прямой и обратной матриц Якоби:

$$\Lambda^{i'}_{i} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \qquad (\Lambda^{-1})^{i}_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}.$$

При этом **будем считать верхний индекс первым**. Законы преобразования для вектора и ковектора в тензорных и матричных обозначениях имеют вид (мы считаем вектор столбцом, а ковектор — строкой)

$$
\begin{aligned}
&v^{i'\bullet} = \tfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\, v^{i\bullet} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{v}' = \Lambda\mathbf{v},\\
&u_{\bullet i'} = \tfrac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}}\, u_{\bullet i} \qquad \Leftrightarrow \qquad (\mathbf{u}')^T = (\Lambda^{-1})^T\mathbf{u}^T, \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{u}' = \mathbf{u}\Lambda^{-1}.
\end{aligned}
$$

Для удобства сравнения матричный закон преобразования ковектора мы выписали в двух эквивалентных формах: для строки $\mathbf{u}$ и для столбца $\mathbf{u}^T$. Мы видим, что закон преобразования для векторов и ковекторов (т.е. для столбцов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}^T$) совпадает тогда и только тогда, когда

$$(\Lambda^{-1})^T = \Lambda,$$

т.е. когда матрица преобразования ортогональна.

Ещё раз покажем, теперь на матричном языке, что свёртка вектора и ковектора не зависит от системы координат:

$$u_{\bullet i'} v^{i'\bullet} = \mathbf{u}'\mathbf{v}' = \mathbf{u}\Lambda^{-1}\Lambda\mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{v} = u_{\bullet i} v^{i\bullet}.$$

Матрица линейного преобразования векторов имеет один нижний индекс (он сворачивается с верхним индексом вектора) и один верхний. Преобразование действует на вектор следующим образом: $A^i_j v^j$. Закон преобразования такой матрицы имеет вид

$$A^{i'}_{j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} A^i_j \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \qquad \Leftrightarrow \qquad A' = \Lambda A \Lambda^{-1}. \tag{1.2.25}$$

Матрица квадратичной формы на векторах имеет два нижних индекса (они сворачиваются с верхними индексами векторов). Форма действует на векторах следующим образом: $G_{ij} v^i u^j = \mathbf{v}^T G \mathbf{u}$. Закон преобразования такой матрицы имеет вид

$$G_{i'j'} = G_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} = G_{ij} \left(\Lambda^{-1}\right)^i_{i'} \left(\Lambda^{-1}\right)^j_{j'} \qquad \Leftrightarrow \qquad G' = (\Lambda^{-1})^T G \Lambda^{-1}. \tag{1.2.26}$$

Правило преобразования переписывается на матричном языке путём следующих рассуждений.

1. Первый индекс матрицы G' — i', значит, i' должен быть первым индексом первого множителя в правой части равенства. В правой части индекс i' встречается в качестве нижнего (второго) индекса обратной матрицы Якоби Λ^{-1}. Чтобы поменять порядок индексов, матрицу надо транспонировать. Значит, первый множитель — $(\Lambda^{-1})^T$.

2. Второй индекс первого множителя — i, значит, i должен быть первым индексом второго множителя. Вторым множителем оказывается G.

3. Второй индекс второго множителя — j, значит, j должен быть первым индексом третьего множителя. Третьим множителем оказывается Λ^{-1}.

1.2.6 Тензоры и базисы*

Компоненты тензора — это компоненты его разложения по некоторому базису.

Так, для вектора можно записать

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i,$$

по повторяющемуся индексу i, как обычно, берётся сумма; $\mathbf{e}_i$ — базисный вектор номер i.

(!) Компоненты вектора мы нумеруем верхним индексом, поэтому, чтобы соблюдать баланс индексов, базисные векторы нумеруются нижним индексом. Аналогично компоненты ковектора мы нумеруем нижним индексом, поэтому, чтобы соблюдать баланс индексов, базисные ковекторы будем нумеровать верхним индексом.

(!) Чтобы не путать базисные векторы с компонентами ковектора, а базисные ковекторы с компонентами вектора, надо (ко)векторы писать полужирным шрифтом или буквами со стрелками.

В аффинных координатах (для евклидова пространства аффинные координаты — это декартовы координаты или координаты, получаемые из декартовых с помощью линейной замены) можно считать, что базисные векторы одинаковы для всех точек пространства. Однако **в общем случае в каждой точке пространства имеется свой базис!** Это видно по тому, что матрицы Якоби $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$ и $\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$ постоянны только для линейных преобразований координат. Прежде чем складывать, вычитать или умножать векторы, относящиеся к разным точкам пространства, их следует собрать в одну точку, чтобы они были разложены по одному базису. Это можно сделать с помощью операции параллельного переноса.

Если вектор дифференцируется вдоль некоторой кривой, то тоже надо вычитать векторы, заданные в различных (хотя и бесконечноблизких) точках, т.е. дифференцировать надо сам вектор, а не только его компоненты:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dl} = \frac{d(v^i \mathbf{e}_i)}{dl} = \frac{dv^i}{dl}\mathbf{e}_i + v^i \frac{d\mathbf{e}_i}{dl}.$$

Локальный базис (базис в данной точке) не обязательно ортонормирован.

Определение. Тензоры с законом преобразования (1.2.4) заданы в *координатных базисах*. Свой базис имеется для каждой валентности тензора (k, l) в каждой точке пространства[10].

В координатном базисе матрица скалярных произведений базисных векторов (*матрица Грама*) совпадает с метрическим тензором:

$$a^i b^j g_{ij} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a^i \mathbf{e}_i, b^j \mathbf{e}_j) = a^i b^j (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = g_{ij}.$$

Аналогичная ситуация возникает с ковекторами, для которых также в каждой точке имеется свой координатный базис (отличный от базиса для векторов!):

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}^i,$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dl} = \frac{d(u_i \mathbf{e}^i)}{dl} = \frac{du_i}{dl}\mathbf{e}^i + u_i \frac{d\mathbf{e}^i}{dl},$$

$$a_i b_j g^{ij} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a_i \mathbf{e}^i, b_j \mathbf{e}^j) = a_i b_j (\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j) \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j) = g^{ij}.$$

Базисные векторы и ковекторы, если разложить их по самим себе, дают δ-символы:

$$(\mathbf{e}_j)^i = (\mathbf{e}^i)_j = \delta^i_j.$$

Базисные векторы и ковекторы связаны соотношением

$$(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}^i)_k (\mathbf{e}_j)^k = \delta^i_j.$$

Так что если у нас есть метрика и мы можем считать векторы и ковекторы разными представлениями объектов одного типа:

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i = v_i \mathbf{e}^i,$$

то базисные ковекторы $\mathbf{e}^i$ образуют *взаимный базис* по отношению к базисным векторам $\mathbf{e}_j$. Эти базисы можно связать с помощью метрического тензора:

$$\mathbf{e}^i = g^{ij} \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}_i = g_{ij} \mathbf{e}^j.$$

(**/) Аналогично базисы определяются и для тензоров общего вида:

$$T = T^{ij\cdots}{}_{kl\cdots} \underbrace{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^l \otimes \cdots}_{\text{базисный тензор}}$$

О различии базисов в разных точках можно не думать только для скаляров или если мы договорились использовать только аффинные координаты. При этом не во всяком пространстве можно ввести аффинные координаты, например, на поверхности сферы любые координаты будут криволинейными. Аналогично в общей теории относительности если в пространстве-времени есть вещество, то пространство-время искривлено и любые координаты будут криволинейными (параллельный перенос зависит от траектории, и нельзя ввести общий базис для всех точек пространства-времени). (/**)

---

[10] (**) Мы используем для тензоров координатные базисы, которые однозначно определяются заданием координат в пространстве. Однако можно задавать базисы в разных точках пространства вне зависимости от задания системы координат.

Например, если метрика диагональна, то координатный базис оказывается ортогональным, но не обязательно нормированным. От него часто переходят к ортонормированному базису, и коэффициенты $H_i = \sqrt{g_{ii}}$ (длины векторов координатного базиса) называют *коэффициентами Ламе*. Мы ими пользоваться не будем, но в справочниках, где вы будете искать формулы для тех или иных криволинейных координат, они могут вам встретиться. Приведём несколько примеров формул, записанных через коэффициенты Ламе:

$d\ell^2 = \sum_i (H_i dx^i)^2$ — элемент длины; $(\operatorname{grad}\varphi)_i = \frac{1}{H_i}\partial_i \varphi$ — компоненты градиента *в ортонормированном базисе*.

Обратите внимание на то, что при использовании коэффициентов Ламе суммирование по повторяющимся индексам не подразумевается и баланс индексов часто не соблюдается!

Более общий подход, чем использование коэффициентов Ламе, часто применяется в общей теории относительности. *Тетрадный формализм* предполагает введение в каждой точке пространства-времени ортонормированного базиса для векторов (*тетрады*). Тетрада непрерывно меняется от точки к точке, но её выбор не зависит от выбора системы координат, тетраду и систему координат можно изменять независимо друг от друга.

1.2.7 Задачи 4–8

Задача 4. От матриц к тензорам в 3-мерном евклидовом пространстве в декартовых координатах.
а) В трёхмерном пространстве вычислите свертки:

$$\delta_{\alpha\alpha}, \qquad \delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\gamma}, \qquad \delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\gamma}\delta_{\gamma\alpha}.$$

б) Выразите $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\nu\lambda}$ (см. определение (1.1.4)) через δ-символы.
в) Используя антисимметрию символа $\varepsilon_{\ldots}$ и соображения симметрии относительно поворотов, определите свёртки

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}, \qquad \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\beta\gamma}, \qquad \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\nu\gamma}.$$

г) Вычислите свёртки

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}A_{\alpha1}A_{\beta2}A_{\gamma3}, \qquad \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}A_{\alpha\mu}A_{\beta\nu}A_{\gamma\lambda}.$$

д) При каких преобразованиях $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ ведёт себя как тензор?

Задача 5. От векторов к тензорам. Проверьте, что скалярное произведение $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ равно $a_\alpha b_\alpha$ и что компоненты векторного произведения $\mathbf{c}=[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]$ равны $c_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}a_\beta b_\gamma$. Покажите (используя результат предыдущего упражнения), что

$$[\mathbf{a}\times[\mathbf{b}\times\mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b}),$$

$$[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]\,[\mathbf{c}\times\mathbf{d}] = (\mathbf{a},\mathbf{c})(\mathbf{b},\mathbf{d}) - (\mathbf{a},\mathbf{d})(\mathbf{b},\mathbf{c}),$$

$$[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]\,[[\mathbf{b}\times\mathbf{c}]\times[\mathbf{c}\times\mathbf{a}]] = (\mathbf{a},[\mathbf{b}\times\mathbf{c}])^2.$$

Задача 6. Метрика в цилиндрических и сферических координатах.
Выразите квадрат элемента длины $d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta$ и запишите матрицу прямой метрики $g_{\alpha\beta}$ и обратной метрики $g^{\alpha\beta}$ в следующих координатах.
а) *Цилиндрические координаты* (ρ,ϕ,z), связанные с декартовыми координатами формулами:

$$x = \rho\,\cos\phi, \qquad y = \rho\,\sin\phi.$$

а) *Сферические координаты* (r,ϕ,θ), связанные с декартовыми координатами формулами:

$$x = r\,\sin\theta\,\cos\phi, \qquad y = r\,\sin\theta\,\sin\phi, \qquad z = r\,\cos\theta.$$

Вычислять и перемножать матрицы Якоби в этой задаче неудобно. Вы можете выразить dx, dy, dz через новые координаты и подставить получившиеся выражения в $d\ell^2$. Такие вычисления удобнее делать в два этапа: выразить $d\ell^2$ в цилиндрических координатах, а потом выразить цилиндрические координаты через сферические.

Если у вас достаточно развито пространственное воображение, то вы можете написать $d\ell^2$ для цилиндрических и сферических координат, просто глядя на рисунок, благо обе эти системы ортогональны.

Задача 7. Полярные координаты и «центробежная сила».
(Решение данной задачи можно отложить до знакомства с Главой 3.)
а) Выпишите действие для свободной нерелятивистской частицы на плоскости в декартовых и полярных координатах. Выпишите обобщённые импульсы. Проварьируйте действие и получите уравнения движения.
б) Выпишите вектор скорости. Опустите индекс и убедитесь, что обобщённые импульсы — компоненты ковектора.
в*) Убедитесь, что «центробежная сила» получается дифференцированием базисных ковекторов.
г)** Напишите уравнение движения свободной частицы в произвольных координатах как условие постоянства ковектора импульса (дифференцируйте с учётом базисных векторов).

Задача 8. * Одномерные тензоры и теория размерности и подобия.**
а) Выпишите закон преобразования тензора с валентностью (n_1,n_2) в одномерном пространстве.
б) В чём особенность одномерного случая? Как можно обобщить понятие тензора в одномерном случае?
в) Как теория одномерных тензоров связана с теорией размерности и подобия для случая одной основной единицы измерения?

1.2.8 Ответы к задачам 4, 6, 7

Задача 4. От матриц к тензорам в 3-мерном евклидовом пространстве в декартовых координатах.
а) $\delta_{\alpha\alpha} = 3, \qquad \delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma}, \qquad \delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\gamma}\delta_{\gamma\alpha} = 3.$
б)

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\nu\lambda} = \det \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} & \delta_{\alpha\lambda} \\ \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} & \delta_{\beta\lambda} \\ \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} & \delta_{\gamma\lambda} \end{pmatrix}.$$

в) $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = 6, \qquad \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\beta\gamma} = 2\delta_{\alpha\mu}, \qquad \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\nu\gamma} = \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}.$
г) $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}A_{\alpha1}A_{\beta2}A_{\gamma3} = \det A, \qquad \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}A_{\alpha\mu}A_{\beta\nu}A_{\gamma\lambda} = \det A\ \varepsilon_{\mu\nu\lambda}.$
д) $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ ведёт себя как тензор при преобразованиях с единичным якобианом $\frac{Dx'}{Dx} = 1$.

Задача 6. Метрика в цилиндрических и сферических координатах.
В цилиндрических координатах:

$$d\ell^2 = dr^2 + r^2\,d\phi^2 + dz^2, \quad g_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(1; r^2; 1), \quad g^{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(1; r^{-2}; 1).$$

В сферических координатах:

$$d\ell^2 = dr^2 + r^2\sin^2\theta\,d\phi^2 + r^2\,d\theta^2, \quad g_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(1; r^2\sin^2\theta; r^2), \quad g^{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(1; r^{-2}\sin^{-2}\theta; r^{-2}).$$

Задача 7. Полярные координаты и «центробежная сила».
а) В декартовых координатах:

$$S[x(t), y(t)] = \int \frac{m}{2}\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\,dt, \quad -m\ddot{x} = 0, \quad -m\ddot{y} = 0, \quad p_x = m\dot{x}, \quad p_y = m\dot{y}.$$

В полярных координатах:

$$S[r(t), \phi(t)] = \int \frac{m}{2}\,(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2)\,dt, \quad -m\ddot{r} + mr\dot{\phi}^2 = 0, \quad -\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = 0, \quad p_r = m\dot{r}, \quad p_\phi = mr^2\dot{\phi}.$$

б),в*) Задача на доказательство, ответ не требуется. Выкладки см. в разделе «Решения и дополнения».
г)**

$$\frac{d}{dt}(mg_{\alpha\gamma}\dot{x}^\alpha) + m\left(\mathbf{e}_\alpha, \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^\gamma}\right)\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = 0.$$

Глава 1.3

Лагранжев формализм (с. 180)

1.3.1 Действие

Мы можем рассматривать различные дифференциальные уравнения в качестве уравнений движения системы, но далеко не всякое уравнение будет физически осмысленно. К счастью, мы можем описывать физические системы с помощью *действия*, из которого потом можно извлечь стандартными методами физически осмысленные уравнения движения, сохраняющиеся величины и токи, включая энергию и импульс. По этой причине, даже если мы уже знаем уравнения движения, для их исследования бывает полезно найти соответствующее действие.

В теоретической механике действие представляет собой интеграл по времени от *лагранжиана* (*функции Лагранжа*)[1], который является функцией от обобщённых координат и скоростей (производных от координат по времени).[2]:

$$S[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t)\, dt. \tag{1.3.1}$$

Действие представляет собой функционал от траектории системы в конфигурационном пространстве. (*Траекторию* мы понимаем как *параметризованную кривую* $x(t)$.) Это означает, что действие ставит в соответствие каждой траектории в конфигурационном пространстве (т.е. всякому $x(t)$) некоторое вещественное число $S[x(t)]$. Таким образом, *функционал* — это просто функция на пространстве функций.

Чтобы задать действие, мало написать его выражение в виде интеграла. Необходимо также указать, функционалом от каких функций оно является.

1.3.2 Вариационная производная

Чтобы найти уравнения движения, мы ищем такую траекторию $x(t)$, для которой действие стационарно. Делается это аналогично тому, как мы ищем экстремум обычной функции многих переменных — через дифференцирование. Только функционал — функция от бесконечного числа переменных, а его аргументы — значения $x(t)$ при всех $t \in (t_0, t_1)$. Так что нам предстоит познакомиться с дифференциальным исчислением в бесконечномерном функциональном пространстве.

(∼/) Аналогично обычной частной производной $\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$ мы можем определить функциональную производную $\frac{\delta S}{\delta x(t)}$. Пространство функций бесконечномерно, поэтому если обычная частная производная $\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}$ имела D компонент, нумеруемых разными значениями α, то функциональная производная $\frac{\delta S}{\delta x(t)}$ имеет бесконечное число компонент, нумеруемых разными значениями t. Это наглядно видно на формулах для дифференциалов в конечномерном случае:

$$d\varphi = \sum_{\alpha=1}^{D} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} dx^\alpha$$

и в бесконечномерном случае (определение δS и $\frac{\delta S}{\delta x(t)}$ дано ниже):

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{\delta S}{\delta x(t)}\, \delta x(t). \tag{1.3.2}$$

[1] Напомним, что в механике лагранжиан чаще всего — разность кинетической и потенциальной энергий.

[2] В некоторых случаях лагранжиан может зависеть от высших производных по времени (второй производной и производных более высоких порядков).

Таким образом, $\sum_{\alpha=1}^{D}$ переходит в $\int\limits_{t_0}^{t_1} dt$.

(!) Подобно частной производной $\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}$, вариационная производная $\frac{\delta S}{\delta x(t)}$ не является дробью. Соответственно в формулах (1.3.2), (1.3.6) нельзя сокращать $\delta x(t)$.

Используемые граничные условия подразумевают, что вариация координат $\delta x(t)$ обращается в нуль на границах области интегрирования (в точках t_0 и t_1).**(/∼)**

Определение (л). Пусть задана функция $\varphi(x) = \varphi(x^1, \ldots, x^D)$, тогда выражение

$$d\varphi(x, dx) := \left.\frac{d\varphi(x + \varepsilon\, dx)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \tag{1.3.3}$$

называется *дифференциалом*. Дифференциал функции $\varphi(x)$ является функцией не только от переменных $x = (x^1, \ldots, x^D)$, но и от переменных $dx = (dx^1, \ldots, dx^D)$, при этом зависимость от dx всегда линейна.

Дифференциал $d\varphi(x, dx)$ можно рассматривать как производную по направлению dx от функции φ. Напомним, что производная по направлению v задаётся следующим образом:

$$\partial_v\varphi = \left.\frac{d\varphi(x + \varepsilon v)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}.$$

Мы видим, что

$$d\varphi(x, dx) = \partial_{dx}\varphi.$$

На практике часто удобно считать, что $\varphi(x + dx) = \varphi(x) + d\varphi(x, dx) + o(dx)$.

Приведём теперь точное определение вариационной производной и вариации действия, которое полностью аналогично определению дифференциала (1.3.3).

Определение. Пусть функционал $S[x(t)] = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x})\, dt$ — действие, а гладкая (непрерывно дифференцируемая) функция $\delta x(t)$ удовлетворяет граничным условиям $\delta x(t_0) = \delta x(t_1) = 0$, тогда выражение

$$\delta S[x(t), \delta x(t)] := \left.\frac{dS[x(t) + \varepsilon\, \delta x(t)]}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \tag{1.3.4}$$

называется *вариацией действия*. Вариация действия является функционалом не только от $x(t)$, но и от $\delta x(t)$, при этом зависимость от $\delta x(t)$ всегда линейна.

Вариация действия — это производная от действия S по направлению в пространстве функций, задаваемому вариацией $\delta x(t)$ (ср. с формулой (1.2.7)).

На практике часто удобнее считать, что $S[x(t) + \delta x(t)] = S[x(t)] + \delta S[x(t), \delta x(t)] + o(\delta x(t))$.

Определение. Пусть вариация действия записывается в следующем виде:

$$\delta S[x(t), \delta x(t)] = \int\limits_{t_0}^{t_1} dt\, \underbrace{\mathcal{F}_\alpha(t)}_{\frac{\delta S}{\delta x^\alpha(t)}} \delta x^\alpha(t), \tag{1.3.5}$$

где $\mathcal{F}_\alpha(t)$ — некоторое выражение, не зависящее от $\delta x^\alpha(t)$. Это выражение называется *вариационной производной* от S по $x^\alpha(t)$ и обозначается $\frac{\delta S}{\delta x^\alpha(t)} := \mathcal{F}_\alpha(t)$. Здесь индекс α нумерует обобщённые координаты. Выражение (1.3.5) может быть записано в виде

$$\delta S[x(t), \delta x(t)] = \int\limits_{t_0}^{t_1} dt\, \frac{\delta S}{\delta x^\alpha(t)}\, \delta x^\alpha(t). \tag{1.3.6}$$

По повторяющемуся индексу α подразумевается суммирование. Как уже упоминалось, $\frac{\delta S}{\delta x^\alpha(t)}$ — это не дробь, а единое обозначение.[3]

Принцип стационарного действия[4]. Если $S[x(t)]$ — действие, то уравнения движения задаются как

$$\frac{\delta S}{\delta x^\alpha(t)} = 0. \tag{1.3.7}$$

[3]Обратите внимание на то, что размерность вариационной производной соответствует отношению размерностей функции Лагранжа и координаты:

$$\left[\frac{\delta S}{\delta x}\right] = \frac{[L]}{[x]} \neq \frac{[S]}{[x]}.$$

По этой причине в литературе вариационную производную, которую мы обозначили $\frac{\delta S}{\delta x}$, иногда обозначают как $\frac{\delta L}{\delta x}$.

[4]Может также называться *принципом экстремального действия* и *принципом наименьшего действия*.

(!*) Условие (1.3.7) может выполняться, когда траектория $x(t)$ доставляет функционалу $S[x(t)]$ минимум, максимум или седло, но возможны и другие случаи. Обычно функционал действия определяют так, чтобы для малых отрезков траектории условие (1.3.7) доставляло минимум действия.

Легко видеть, что число уравнений движения, получаемых при вариации действия, равно числу компонент у x, т.е. числу степеней свободы механической системы[5].

Отметим, что если скорости не входят в лагранжиан, то $\frac{\delta S}{\delta x^\alpha(t)} = \frac{\partial L(x)}{\partial x^\alpha}$, т.е. уравнения движения превращаются из дифференциальных в алгебраические, а это значит, что такое действие не может описывать динамику.

1.3.2.1 Пример: гармонический осциллятор

Рассмотрим действие, описывающее гармонический осциллятор под влиянием внешней силы $f(t)$:

$$S[x(t)] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + f(t)\, x \right) dt.$$

По определению вариации получаем

$$\begin{aligned} \delta S[x(t), \delta x(t)] &= \frac{d}{d\varepsilon} \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2} m(\dot{x} + \varepsilon\delta\dot{x})^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 (x + \varepsilon\delta x)^2 + f(t)(x + \varepsilon\delta x) \right) dt \Big|_{\varepsilon=0} = \\ &= \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{1}{2} m(\dot{x} + \varepsilon\delta\dot{x})^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 (x + \varepsilon\delta x)^2 + f(t)(x + \varepsilon\delta x) \right)_{\varepsilon=0} dt \end{aligned}$$

Получается, что мы берём дифференциал от подынтегрального выражения (с заменой d на δ), считая скорость $\dot{x}$ и координату x (в некоторый момент времени t) независимыми переменными:

$$\delta S[x(t), \delta x(t)] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(m\dot{x}\, \delta\dot{x} - m\omega^2 x\, \delta x + f(t)\, \delta x \right) dt.$$

Первый член следует проинтегрировать по частям:

$$\delta S[x(t), \delta x(t)] = m\dot{x}\, \delta x \Big|_{t_0}^{t_1} + \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(-m\ddot{x} - m\omega^2 x + f(t) \right) \delta x\, dt.$$

Если положить $\delta x(t_0) = \delta x(t_1) = 0$, то граничный член обнуляется.

Таким образом,

$$\frac{\delta S}{\delta x(t)} = -m\ddot{x} - m\omega^2 x + f(t).$$

Импульс находим как производную от лагранжиана по скорости:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}.$$

Энергия задаётся как

$$\mathcal{E} = \dot{x}\, \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - f(t)x.$$

1.3.2.2 Уравнения Эйлера-Лагранжа

Чтобы проварьировать действие (1.3.1), берём дифференциал от подынтегрального выражения (с заменой d на δ), считая *обобщённые скорости* $\dot{x}^\alpha$ и обобщённые координаты x^α (в некоторый момент времени t) независимыми переменными:

$$\delta S = \frac{d}{d\varepsilon} \int\limits_{t_0}^{t_1} L(x + \varepsilon\delta x, \dot{x} + \varepsilon\delta\dot{x}, t)\, dt \Big|_{\varepsilon=0} = \int\limits_{t_0}^{t_1} \underbrace{\left(\frac{d}{d\varepsilon} L(x + \varepsilon\delta x, \dot{x} + \varepsilon\delta\dot{x}, t) \right)_{\varepsilon=0}}_{\delta L \text{ — дифференциал } L \text{ по } x \text{ и } \dot{x}} dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \frac{d(\dot{x}^\alpha + \varepsilon\delta\dot{x}^\alpha)}{d\varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} \frac{d(x^\alpha + \varepsilon\delta x^\alpha)}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\, \delta\dot{x}^\alpha + \frac{\partial L}{\partial x^\alpha}\, \delta x^\alpha \right) dt.$$

[5] Однако среди этих уравнений могут оказаться зависимые.

Под интегралом появился дифференциал L по x и $\dot{x}$: $\delta L(x, \dot{x}, t, \delta x, \delta\dot{x})$. В записи этого дифференциала вместо буквы d используется δ, чтобы не перепутать x и $\dot{x}$ с переменной интегрирования.

В фиксированный момент времени $\delta x^\alpha(t)$ и $\delta\dot{x}^\alpha(t)$ независимы, но как функции от времени они связаны между собой с помощью дифференцирования: $\delta\dot{x}^\alpha = \frac{d}{dt}\delta x^\alpha$. Воспользуемся этим и проинтегрируем первое слагаемое по частям:

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\,\delta x^\alpha\Big|_{t_0}^{t_1} + \int\limits_{t_0}^{t_1}\left(-\delta x^\alpha\,\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} + \frac{\partial L}{\partial x^\alpha}\,\delta x^\alpha\right)dt.$$

С учётом того, что $\delta x^\alpha(t_0) = \delta x^\alpha(t_1) = 0$, получаем

$$\delta S = \int\limits_{t_0}^{t_1}\delta x^\alpha\,\left(-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} + \frac{\partial L}{\partial x^\alpha}\right)dt.$$

Таким образом, вариационная производная имеет вид

$$\frac{\delta S}{\delta x^\alpha(t)} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} + \frac{\partial L}{\partial x^\alpha}. \tag{1.3.8}$$

Чтобы при всяком $\delta x(t)$ вариация δS была равна 0, вариационная производная должна обращаться в нуль. Это и есть *уравнения Эйлера–Лагранжа*. В большинстве случаев это дифференциальные уравнения второго порядка.[6]

Перепишем уравнения Эйлера-Лагранжа в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}}_{p_\alpha} = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x^\alpha}}_{f_\alpha}.$$

Как мы видели на примерах, для частицы с обычной кинетической энергией $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}$ — это импульс. В общем случае назовём эту величину *обобщённым импульсом*. Выражение $\frac{\partial L}{\partial x^\alpha}$ для частицы в потенциале представляет собой компоненту силы. В общем случае назовём эту величину *обобщённой силой*. Таким образом, уравнение Эйлера-Лагранжа даёт нам обобщённый второй закон Ньютона с конкретными выражениями для импульса и силы:

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = f_\alpha, \qquad p_\alpha := \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}, \qquad f_\alpha := \frac{\partial L}{\partial x^\alpha}.$$

Его можно модифицировать, вставив в него *внешние обобщённые силы*, например силы трения:

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} + F_\alpha^{\text{внеш.}}.$$

1.3.3 Энергия

Для нерелятивистской частицы в потенциале $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x)$. Энергия может быть выражена через обобщённые скорость, импульс и функцию Лагранжа:

$$\mathcal{E} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = p_\alpha\dot{x}^\alpha - L.$$

По повторяющемуся индексу α, как обычно, подразумевается суммирование.

Примем выражение энергии через функцию Лагранжа в качестве определения энергии для произвольной функции $L(x, \dot{x}, t)$:

$$\mathcal{E} := p_\alpha\dot{x}^\alpha - L \tag{1.3.9}$$

и проверим, как такая величина меняется со временем:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{dp_\alpha}{dt}\dot{x}^\alpha + p_\alpha\ddot{x}^\alpha - \frac{dL}{dt} = \frac{dp_\alpha}{dt}\dot{x}^\alpha + p_\alpha\ddot{x}^\alpha - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha}\dot{x}^\alpha - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}}_{p_\alpha}\ddot{x}^\alpha - \frac{\partial L}{\partial t}.$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \underbrace{\left(\frac{dp_\alpha}{dt} - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha}\right)}_{F_\alpha^{\text{внеш.}}}\dot{x}^\alpha - \frac{\partial L}{\partial t}.$$

[6] В предположении, что лагранжиан является функцией от x и $\dot{x}$, причём $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}$ зависит от $\dot{x}^\alpha$.

Если модифицировать уравнения Эйлера-Лагранжа, вставив в них внешние силы $\frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} + F_\alpha^{\text{внеш.}}$, то получаем уравнение баланса энергии

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = F_\alpha^{\text{внеш.}} \dot{x}^\alpha - \frac{\partial L}{\partial t}. \tag{1.3.10}$$

Мы видим, что изменение энергии связано с зависимостью от времени лагранжиана и работой внешних сил. Это соответствует нашим обычным представлениям об энергии, так что данное обобщение является естественным.

1.3.4 Уравнения Эйлера-Лагранжа с тензорной точки зрения*

Разберём уравнения Эйлера-Лагранжа с точки зрения тензоров. Будем считать, что функция Лагранжа $L(x, \dot{x}, t)$ — инвариант (скаляр) по отношению к замене обобщённых координат x^α. Инвариантом является также

$$\delta S[x(t), \delta x(t)] = \left.\frac{dS[x(t) + \varepsilon\, \delta x(t)]}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}.$$

Отсюда делаем следующие выводы:

- $\delta x^\alpha(t)$ при замене обобщённых координат ведёт себя как dx^α, т.е. как *вектор*;
- $\dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt}$, причём dt — инвариант, так что обобщённая скорость $\dot{x}^\alpha$ ведёт себя при замене координат как dx^α, т.е. как *вектор*;
- $\delta\dot{x}^\alpha = \frac{d(\delta x^\alpha)}{dt}$ является производной от компонент вектора $\delta x^\alpha(t)$, однако базисные векторы не дифференцируются, поэтому по отношению к нелинейным заменам координат этот объект *вектором не является.*

Поскольку в выражении $\delta S = \int \frac{\delta S}{\delta x^\alpha(t)}\, \delta x^\alpha(t)\, dt$ подынтегральное выражение — скаляр, по признаку тензора вариационная производная

$$\frac{\delta S}{\delta x^\alpha(t)} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} + \frac{\partial L}{\partial x^\alpha}$$

также является *ковектором.* При этом слагаемые $-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}$ и $\frac{\partial L}{\partial x^\alpha}$ могут по отдельности не быть тензорами по отношению к нелинейным заменам обобщённых координат (см. ниже).

Аналогично подынтегральное выражение при вариации действия $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\, \delta\dot{x}^\alpha + \frac{\partial L}{\partial x^\alpha}\, \delta x^\alpha$ — *скаляр.* При этом слагаемые $\frac{\partial L}{\partial x^\alpha}\, \delta x^\alpha$ и $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\, \delta\dot{x}^\alpha$ могут по отдельности не быть скалярами по отношению к нелинейным заменам обобщённых координат (см. ниже).

Исследуем подробнее поведение отдельных членов вышеприведённых выражений при замене координат. Пусть

$$L(x^\alpha, \dot{x}^\alpha, t)$$

— функция Лагранжа в заданных координатах x^α. Рассмотрим переход к новым (штрихованным) координатам, через которые выразим старые (нештрихованные). Рассмотрим случай, когда замена координат не зависит от времени[7]:

$$x^\alpha = X^\alpha(x^{\alpha'}),$$
$$\dot{x}^\alpha = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\, \dot{x}^{\alpha'}.$$

Функция Лагранжа выражается через штрихованные координаты следующим образом:

$$L(x^\alpha, \dot{x}^\alpha, t) = L\left(X^\alpha(x^{\alpha'}), \tfrac{\partial X^\alpha}{\partial x^{\beta'}}\, \dot{x}^{\beta'}, t\right).$$

Выразим теперь в штрихованных координатах обобщённую силу $f_\alpha = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha}$ и обобщённый импульс как производные сложной функции $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}$:

$$f_{\alpha'} = \frac{\partial L}{\partial x^{\alpha'}} = \underbrace{f_\alpha}_{\frac{\partial L}{\partial x^\alpha}} \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial x^{\alpha'}\, \partial x^{\beta'}}\, \dot{x}^{\beta'}.$$

Мы видим, что обобщённая сила оказывается ковектором *по отношению к линейным преобразованиям*, когда вторая производная во втором слагаемом обнуляется. По отношению к произвольным преобразованиям координат обобщённая сила ковектором не является, несмотря на то что выглядит как градиент. Это связано с тем, что одновременно с преобразованием координат мы преобразуем скорости.

[7] Зависимые от времени замены удобно рассматривать, считая время дополнительной координатой. Время как дополнительную координату мы рассмотрим ниже.

Пример: То, что обобщённая сила не является тензором, видно на примере сравнения движения свободной частицы в плоскости, записанного через декартовы координаты и через полярные координаты (см. задачу 7). В декартовых координатах сила, действующая на свободную частицу, равна нулю. В полярных координатах появляется центробежная сила. В силу линейности закона преобразования, если тензор равен нулю в одной системе координат, то он равен нулю в любой другой системе. Так что обобщённая сила не является тензором. Появление центробежной силы можно объяснить как результат дифференцирования базисных векторов в криволинейных координатах.

Обратите внимание на то, что *обобщённая внешняя сила оказывается ковектором*, поскольку ковектором является вариационная производная

$$F_\alpha^{\text{внеш.}} = -\frac{\delta S}{\delta x^\alpha(t)}.$$

Аналогично исследуем обобщённый импульс

$$p_{\alpha'} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\alpha'}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} = p_\alpha \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}.$$

Обобщённый импульс — ковектор по отношению к произвольным заменам координат.

Энергия $\mathcal{E} = p_\alpha \dot{x}^\alpha - L$ является скаляром, причём скалярами являются оба слагаемых, первое слагаемое — свёртка ковектора p_α и вектора $\dot{x}^\alpha$.

Таким образом, для двух обсуждаемых выражений получаем следующие структуры:

$$\underbrace{\frac{\delta S}{\delta x^\alpha(t)}}_{\text{ковектор}} = \underbrace{-\frac{d}{dt}\overbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}}^{\text{ковектор}}}_{\text{не тензор}} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x^\alpha}}_{\text{не тензор}}, \qquad \underbrace{\underbrace{\overbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}}^{\text{ковектор}}\overbrace{\delta\dot{x}^\alpha}^{\text{не тензор}}}_{\text{не тензор}} + \underbrace{\overbrace{\frac{\partial L}{\partial x^\alpha}}^{\text{не тензор}}\overbrace{\delta x^\alpha}^{\text{вектор}}}_{\text{не тензор}}}_{\text{скаляр}}.$$

Сложное (не тензорное) поведение обобщённых сил при нелинейных заменах координат осложняет подобные замены. Как быть, если надо переписать в новых координатах уравнения Эйлера-Лагранжа? Можно сначала переписать в новых координатах действие, а потом снова проварьировать его уже в новых координатах либо более глубоко изучать вопрос о дифференцировании тензоров в криволинейных координатах (см. дополнение «Ковариантная производная», с. 171).

1.3.5 Теорема Нётер

1.3.5.1 Симметрия, не зависящая от времени

Определение. (Однопараметрическая группа преобразований координат).
Пусть имеется семейство преобразований координат, зависящее от параметра $s \in \mathbb{R}$:

$$x' = X(x, s).$$

Такое семейство называется *однопараметрической группой преобразований координат с параметром* s, если выполняются следующие условия.

- Преобразование определено для всякого $s \in \mathbb{R}$.
- При нулевом параметре s преобразование является тождественным:

$$X(x, 0) = x.$$

- При последовательном выполнении двух преобразований из данного семейства снова получается преобразование из того же семейства, причём параметры преобразований складываются:

$$X(X(x, s_1), s_2) = X(x, s_1 + s_2).$$

Определение. (Симметрия действия, не зависящая от времени).
Пусть имеется такое преобразование координат $x' = X(x)$, что для произвольных t_0, t_1 оно переводит действие в себя:

$$S[x'(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(X(x), \dot{X}(x), t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t)\,dt = S[x(t)], \qquad \dot{x}'^\alpha = \dot{X}^\alpha(x) = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\beta}\dot{x}^\beta.$$

Тогда преобразование называется *не зависящей от времени симметрией действия*. В силу произвольности t_0, t_1 не зависящая от времени симметрия действия переводит функцию Лагранжа в себя, т.е. является *симметрией функции Лагранжа*:

$$L(x,\dot{x},t) = L(x',\dot{x}',t) = L(X(x),\dot{X}(x),t), \qquad \dot{x}'^{\alpha} = \dot{X}^{\alpha}(x) = \frac{\partial X^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\dot{x}^{\beta}.$$

1.3.5.2 Симметрия и закон сохранения

Рассмотрим однопараметрическую группу симметрий функции Лагранжа $x' = X(x,s)$:

$$L(x,\dot{x},t) = L(x',\dot{x}',t) = L(X(x,s),\dot{X}(x,s),t), \qquad \dot{x}'^{\alpha} = \dot{X}^{\alpha}(x,s) = \frac{\partial X^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\dot{x}^{\beta}.$$

Продифференцируем лагранжиан по параметру s при $s = 0$. Используя уравнения Эйлера-Лагранжа, получаем

$$0 = \frac{d}{ds}L(X(x,s),\dot{X}(x,s),t) = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x^{\alpha}}}_{\frac{d}{dt}p_{\alpha}}\frac{\partial X^{\alpha}}{\partial s} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\alpha}}}_{p_{\alpha}}\underbrace{\frac{\partial^2 X^{\alpha}}{\partial s \partial x^{\beta}}\dot{x}^{\beta}}_{\frac{d}{dt}\frac{\partial X^{\alpha}}{\partial s}} = \frac{d}{dt}\left(p_{\alpha}\frac{\partial X^{\alpha}}{\partial s}\right). \tag{1.3.11}$$

Векторное поле $\frac{\partial X^{\alpha}}{\partial s}$ — это поле скоростей точек конфигурационного пространства при изменении параметра s. Проекция импульса на это векторное поле и оказывается *интегралом движения* (сохраняющейся величиной):

$$\frac{d}{dt}\left(p_{\alpha}\left.\frac{\partial X^{\alpha}}{\partial s}\right|_{s=0}\right) = 0. \tag{1.3.12}$$

Теорема Нётер (для симметрий, не зависящих от времени).

Пусть задана однопараметрическая группа не зависящих от времени симметрий действия (симметрий функции Лагранжа) $x' = X(x,s)$, тогда величина

$$p_s := p_{\alpha}\left.\frac{\partial X^{\alpha}}{\partial s}\right|_{s=0} \tag{1.3.13}$$

не меняется вдоль удовлетворяющей уравнениям Эйлера-Лагранжа траектории системы, т.е. для этой величины действует закон сохранения.

1.3.5.3 Симметрия, зависящая от времени

Мы можем рассмотреть более общий вид группы преобразований, затрагивающих время.

Определение. (Однопараметрическая группа преобразований координат и времени).

Пусть имеется семейство преобразований координат и времени, зависящее от параметра s:

$$x' = X(x,t,s), \qquad t' = T(x,t,s).$$

Такое семейство называется *однопараметрической группой преобразований координат и времени с параметром* s, если выполняются следующие условия.

- При нулевом параметре s преобразование является тождественным:

$$X(x,t,0) = x, \qquad T(x,t,0) = t.$$

- При последовательном выполнении двух преобразований из данного семейства снова получается преобразование из того же семейства, причём параметры преобразований складываются:

$$X(X(x,t,s_1),T(x,t,s_1),s_2) = X(x,t,s_1+s_2), \qquad T(X(x,t,s_1),T(x,t,s_1),s_2) = T(x,t,s_1+s_2).$$

Определение. (Симметрия действия).

Пусть имеется такое преобразование координат и времени $x' = X(x,t), t' = T(x,t)$, что для произвольных t_0, t_1 оно переводит действие в себя:

$$S[x'(t')] = \int\limits_{t_0'}^{t_1'} L(x',\dot{x}',t')\,dt' = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(X(x,t),\tfrac{d}{dt'}X(x,t),T(x,t))\,\underbrace{dT(x,t)}_{dt'} = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(x,\dot{x},t)\,dt = S[x(t)].$$

Тогда преобразование называется *симметрией действия*. В силу произвольности t_0, t_1 не зависящая от времени симметрия действия переводит в себя выражение $L\,dt$, т.е.

$$L(x, \dot{x}, t)\,dt = L(x', \tfrac{d}{dt'}x', t')\,dt'.$$

Мы могли бы продифференцировать $\frac{\partial S}{\partial s}$ и вывести теорему Нётер для симметрии по отношению к преобразованию координат и времени, но прямые выкладки здесь оказываются слишком громоздкими.

Позже мы покажем (см. главу 1.9 «Время как координата и энергия как импульс» с. 109), что время можно рассматривать как дополнительную координату $x^0 = t$, которой соответствует импульс $p_0 = -\mathcal{E}$. При таком подходе преобразование, затрагивающее время, сводится к уже рассмотренному случаю:

$$0 = \frac{d}{dt}\left(p_\alpha \frac{\partial X^\alpha}{\partial s} - \mathcal{E}\frac{\partial T}{\partial s}\right)_{s=0}. \tag{1.3.14}$$

Теорема Нётер (для симметрий, зависящих от времени). Пусть задана однопараметрическая группа симметрий действия $x' = X(x, t, s), t' = T(x, t, s)$, тогда величина

$$p_s := \left(p_\alpha \frac{\partial X^\alpha}{\partial s} - \mathcal{E}\frac{\partial T}{\partial s}\right)_{s=0} \tag{1.3.15}$$

не меняется вдоль удовлетворяющих уравнениям Эйлера-Лагранжа траекторий системы, т.е. для этой величины действует закон сохранения.

1.3.5.4 Сведение к тривиальному случаю

Если лагранжиан не зависит от какой-то координаты (инвариантен относительно сдвигов по этой координате), то такая координата $x_{\text{ц}}$ называется *циклической координатой*. Соответствующая циклической координате компонента импульса $p_{\text{ц}}$ сохраняется. Это сразу следует из уравнения Эйлера-Лагранжа.

$$\frac{dp_{\text{ц}}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\text{ц}}} = \frac{\partial L}{\partial x_{\text{ц}}} = 0.$$

Это тривиальный случай теоремы Нётер.

На самом деле общий случай теоремы Нётер сводится к тривиальному случаю циклической координаты. Если у нас есть однопараметрическая группа симметрий действия, то мы можем выкинуть одну из имеющихся координат и взять вместо неё параметр s. Координата s окажется циклической, а соответствующий ей импульс p_s — это и есть наш интеграл движения

$$p_s = p_\alpha \frac{\partial X^\alpha}{\partial s}.$$

В последней формуле легко узнать закон преобразования для компоненты ковариантного вектора p_α.

1.3.5.5 Главные примеры применения теоремы Нётер

Сохранение энергии. Если лагранжиан не зависит от времени (что всегда выполняется для замкнутой системы), то имеется симметрия действия $x' = x$, $t' = t + s$. По теореме Нётер сохраняющаяся величина — минус энергия:

$$p_\alpha \underbrace{\frac{\partial X^\alpha}{\partial s}}_{0} - \mathcal{E}\,\underbrace{\frac{\partial T}{\partial s}}_{1} = -\mathcal{E}.$$

Таким образом, сохранение энергии связано с тем, что для замкнутой системы все моменты времени равноправны (лагранжиан от времени не зависит), т.е. *время однородно*.

Сохранение импульса. Если в бесконечном евклидовом пространстве имеется замкнутая система частиц, то действие не должно меняться при сдвиге системы как целого. Это значит, что для такой системы все точки пространства равноправны, т.е. *пространство однородно*. Рассмотрим симметрии относительно сдвига системы как целого по оси x. Декартовы координаты частиц будем нумеровать парой индексов как $r^{a,\alpha}$, где a — номер частицы, а $\alpha = x, y, z$ — ось координат.

Одинаковый сдвиг всех частиц по оси x имеет вид

$$r'^{a,x} = r^{a,x} + s, \qquad r'^{a,y} = r^{a,y}, \qquad r'^{a,z} = r^{k,z}, \qquad t' = t.$$

Соответствующий интеграл движения имеет вид

$$P_x = \sum_{a,\alpha} p_{a,\alpha} \frac{\partial X^{a,\alpha}}{\partial s} = \sum_a p_{a,x} \underbrace{\frac{\partial X^{a,x}}{\partial s}}_{1} + p_{a,y} \underbrace{\frac{\partial X^{a,y}}{\partial s}}_{0} + p_{a,z} \underbrace{\frac{\partial X^{a,z}}{\partial s}}_{0} = \sum_a p_{a,x}.$$

Таким образом, симметрия относительно сдвигов всей системы вдоль оси x соответствует закону сохранения проекции на ось x суммарного импульса $\mathbf{P} = \sum_a \mathbf{p}_a$ всех частиц системы. Аналогично получаем сохранение суммарного импульса по осям y, z.

Сохранение момента импульса. Если в бесконечном евклидовом пространстве имеется замкнутая система частиц, то действие не должно меняться при повороте системы как целого. Это значит, что для такой системы все направления в пространстве равноправны, т.е. *пространство изотропно*. Рассмотрим симметрии относительно поворота системы как целого вокруг оси z. Декартовы координаты частиц будем нумеровать парой индексов как $r^{a,\alpha}$, где a — номер частицы, а $\alpha = x, y, z$ — ось координат.

Одинаковый поворот всех частиц вокруг оси z имеет вид

$$r'^{a,x} = r^{a,x}\cos s - r^{a,y}\sin s, \qquad r'^{a,y} = r^{a,y}\cos s + r^{a,x}\sin s, \qquad r'^{a,z} = r^{a,z}, \qquad t' = t.$$

Соответствующий интеграл движения имеет вид

$$\left(\sum_{a,\alpha} p_{a,\alpha} \frac{\partial X^{a,\alpha}}{\partial s}\right)_{s=0} = \sum_a p_{a,x} \underbrace{\left.\frac{\partial X^{a,x}}{\partial s}\right|_{s=0}}_{-r^{a,y}} + p_{a,y} \underbrace{\left.\frac{\partial X^{a,y}}{\partial s}\right|_{s=0}}_{r^{a,x}} + p_{a,z} \underbrace{\left.\frac{\partial X^{a,z}}{\partial s}\right|_{s=0}}_{0} =$$
$$= \sum_a (r^{a,x} p_{a,y} - r^{a,y} p_{a,x}) = \sum_a [\mathbf{r}^a \times \mathbf{p}_a]_z = L_z.$$

Таким образом, симметрия относительно поворотов всей системы вокруг оси z соответствует закону сохранения проекции на ось z суммарного момента импульса $\mathbf{L}$ всех частиц системы. Аналогично получаем сохранение суммарного момента импульса по осям x, y.

1.3.6 Задачи 9–11

Задача 9. * Матрица масс.
Кинетическая энергия в классической механике, выраженная через обобщённые скорости, имеет вид положительно-определённой квадратичной формы: $\mathcal{E}_\text{к} = \frac{1}{2} m_{\alpha\beta}(x)\, \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$. В криволинейных координатах матрица массовых коэффициентов $m_{\alpha\beta}(x)$ может зависеть от координат. *Рассматриваемые замены координат не зависят от времени.*
а) Как матрица $m_{\alpha\beta}$ преобразуется при замене координат?
б) Что такое свёртка $m_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta$?
в) Как преобразуется при замене координат обратная матрица $(m^{-1})^{\alpha\beta}$ ($(m^{-1})^{\alpha\beta} m_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma$)?
г) Запишите кинетическую энергию через кинематические импульсы.
д*) Вернитесь в контексте данной задачи к задаче 7.

Задача 10. От действия к системе-2.
Проварьируйте действия, запишите уравнения движения, определите обобщённые импульсы, обобщённые силы, энергию. Опишите словами и проиллюстрируйте графиками, какой системе может соответствовать такое действие:
а) $S[\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t)] = \int \left(\frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2}{2} + \frac{m_3 \dot{\mathbf{r}}_2^2}{2} - U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\right) dt$ ($m_1, m_2 = \text{const}$);
б) $S[\mathbf{r}(t)] = \int \frac{m(\dot{\mathbf{r}} - \mathbf{u}(\mathbf{r}))^2}{2}\, dt$ ($m = \text{const}$);
в*) $S[\mathbf{r}(t)] = \int \left(-\frac{m(\mathbf{r}, \ddot{\mathbf{r}})}{2} + B\cos(\mathbf{k}, \mathbf{r})\right) dt$ ($m, B, \mathbf{k} = \text{const}$);
г) $S[\mathbf{r}(t)] = \int \left(\frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + \frac{q}{c}(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)) - q\varphi(\mathbf{r}, t)\right) dt$ ($m, q, c = \text{const}$, ср. с задачей 2 в).

Задача 11. ** Лагранжева механика с высшими производными (М.Г. Иванов)
Задача давалась на олимпиаде МФТИ по теоретической физике 2021 г.
Исследуйте действие с высшими производными

$$S[x_\alpha(t)] = \int_{t_1}^{t_0} L(x_\alpha, \dot{x}_\alpha, \ddot{x}_\alpha, \ldots, x^{(n)}_\alpha, t)\, dt, \quad \dot{x}_\alpha = \frac{dx_\alpha}{dt}, \quad \ddot{x}_\alpha = \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2}, \quad \ldots, \quad x^{(n)}_\alpha = \frac{d^n x_\alpha}{dt^n}.$$

а) Из принципа экстремального действия найдите уравнения движения.
б) Определите энергию через функцию L.
в) Вычислите для определённой вами энергии $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$ при условии выполнения уравнений движения.
г) Убедитесь, что для автономного лагранжиана (при $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$) введённая энергия сохраняется.
д) Выпишите уравнения движения и энергию в частном случае $n = 2$.
е) Проверьте, что предложенное определение энергии работает для лагранжиана вида

$$L(x, \dot{x}, \ddot{x}) = -\frac{m\, x\ddot{x}}{2} - U(x).$$

При решении задачи можно использовать метод множителей Лагранжа (см. Главу 4).

1.3.7 Ответы к задачам 9, 10

Задача 9. * Матрица масс. В данной задаче помимо формул важна их интерпретация, поэтому кроме сверки ответов рекомендуется ознакомиться с решением задачи в части 2.
а) $m_{\alpha'\beta'} = m_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}}$. **б)** $m_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta = p_\alpha$. **в)** $(m^{-1})^{\alpha'\beta'} = (m^{-1})^{\alpha\beta}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta}$. **г)** $\mathcal{E}_\text{к} = \frac{1}{2}(m^{-1})^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta$.
д*) $m_{\alpha\beta} = \operatorname{diag}(m, m)$, $m_{\alpha'\beta'} = \operatorname{diag}(m, mr^2)$.

Задача 10. От действия к системе-2.
а) $-m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 - \boldsymbol{\nabla}U = 0$, $-m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 + \boldsymbol{\nabla}U = 0$, $\mathbf{p}_1 = m_1\dot{\mathbf{r}}_1$, $\mathbf{p}_2 = m_1\dot{\mathbf{r}}_2$, $\mathbf{f}_1 = -\boldsymbol{\nabla}U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, $\mathbf{f}_2 = \boldsymbol{\nabla}U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, $\mathcal{E} = \frac{m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2}{2} + \frac{m_3\dot{\mathbf{r}}_2^2}{2} + U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$.
г) $-m\ddot{\mathbf{r}} + q\mathbf{E} + \frac{q}{c}[\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}] = 0$, где $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi$, $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$; $\mathbf{P} = m\dot{\mathbf{r}} + \frac{q}{c}\mathbf{A}$, $\mathbf{f} = \boldsymbol{\nabla}[\frac{q}{c}(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)) - q\varphi(\mathbf{r})]$, $\mathcal{E} = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + q\varphi(\mathbf{r})$.

Глава 1.4

Гамильтонов формализм (с. 190)

> . . . между математическими понятиями подчас возникают совершенно неожиданные связи и . . . именно эти связи позволяют нам удивительно точно и адекватно описывать различные явления природы. . . . в силу последнего обстоятельства (поскольку мы не понимаем причин, делающих математические понятия столь эффективными) мы не можем утверждать, является ли теория, сформулированная на языке этих понятий, единственно возможной.
>
> *Юджин Вигнер, «Непостижимая эффективность математики в естественных науках»*

1.4.1 Уравнения Гамильтона

Уравнения Эйлера-Лагранжа, как правило, являются уравнениями второго порядка. Чтобы поставить задачу Коши, для них надо задать начальные координаты и скорости, таким образом, через каждую точку конфигурационного пространства проходит бесконечное множество траекторий.

Во многих случаях удобнее иметь дело с уравнениями первого порядка, т.к. в этом случае достаточно задать начальную точку. При этом через каждую точку пространства (уже не конфигурационного, а фазового) проходит ровно одна траектория.

Любая система уравнений второго порядка становится системой уравнений первого порядка, если первые производные рассмотреть как независимые переменные:

$$\ddot{x}^\alpha = a^\alpha(x,\dot{x},t) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}^\alpha &=& v^\alpha, \\ \dot{v}^\alpha &=& a^\alpha(x,v,t) \end{array} \right. .$$

Пространство, точка в котором задаётся координатами x^α, v^α, мы будем называть *фазовым пространством*.

Более удобным оказывается использовать в качестве координат в фазовом пространстве вместо обобщённых скоростей обобщённые импульсы. Одно из удобств такого выбора состоит в том, что уравнения Эйлера-Лагранжа всегда легко разрешаются относительно $\dot{p}_\alpha = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}$:

$$\dot{p}_\alpha = \left.\frac{\partial L(x,\dot{x},t)}{\partial x^\alpha}\right|_{\dot{x}=\text{const}} . \tag{1.4.1}$$

Другое удобство состоит в том, что теорема Нётер связывает с симметриями сохранение некоторых комбинаций импульсов, а не скоростей. Какие преимущества следуют из этого, мы увидим ниже.

Уравнения динамики мы хотим получить в следующем виде:

$$\dot{p}_\alpha = F_\alpha(x,p,t), \tag{1.4.2}$$

$$\dot{x}^\alpha = V^\alpha(x,p,t). \tag{1.4.3}$$

(!) Выписанное выше уравнение (1.4.1) не является уравнением вида (1.4.2), потому что в нём правая часть выражена не через x,p,t, а через $x,\dot{x},t$. **Частная производная — это всегда производная по направлению.** Мало указать, по какой переменной мы дифференцируем, надо указать ещё, по какому направлению. Направление обычно указывают либо задав вектор, либо задав, какие переменные фиксируются. Для функции нескольких переменных по умолчанию фиксируются все переменные, кроме той, по которой идёт дифференцирование, но иногда полезно указать фиксированные переменные явно.

Не для всякого лагранжиана можно получить однозначное выражение $\dot{x}^\alpha = V^\alpha(x,p,t)$. Более того, мы потребуем, чтобы замена $\dot{x}^\alpha$ на p_α была невырожденной, т.е.

$$\det \frac{\partial p_\alpha}{\partial \dot{x}^\beta} = \det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^\alpha \partial \dot{x}^\beta} \neq 0. \tag{1.4.4}$$

Такие лагранжианы называются *невырожденными лагранжианами.*

Приведём к соответствующему виду уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\dot{p}_\alpha = F_\alpha(x,p,t) = \left.\frac{\partial L(x,\dot{x},t)}{\partial x^\alpha}\right|_{\dot{x}=\text{const}}.$$

В координатах x, p было бы естественно использовать производную при постоянном p, а не при постоянной скорости $\dot{x}$. Для этого выразим обобщённые скорости через координаты и импульсы $\dot{x}^\beta = V^\beta(x,p,t)$

$$\left.\frac{\partial L(x,V(x,p,t),t)}{\partial x^\alpha}\right|_{p=\text{const}} = \left.\frac{\partial L(x,\dot{x},t)}{\partial x^\alpha}\right|_{\dot{x}=\text{const}} + \underbrace{\left.\frac{\partial L(x,\dot{x},t)}{\partial \dot{x}^\beta}\right|_{x=\text{const}}}_{p_\beta} \frac{\partial V^\beta}{\partial x^\alpha}$$

$$\left.\frac{\partial L(x,\dot{x},t)}{\partial x^\alpha}\right|_{\dot{x}=\text{const}} = \left.\frac{\partial L(x,V(x,p,t),t)}{\partial x^\alpha}\right|_{p=\text{const}} - p_\beta \left.\frac{\partial V^\beta(x,p,t)}{\partial x^\alpha}\right|_{p=\text{const}} = -\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \underbrace{\left(p_\beta V^\beta - L\right)}_{H(x,p,t)}\Bigg|_{p=\text{const}}$$

Введём функцию, которая будет называться *функцией Гамильтона* или *гамильтонианом*[1]:

$$H(x,p,t) = p_\beta V^\beta(x,p,t) - L(x,V(x,p,t),t). \tag{1.4.5}$$

Мы видим, что функция Гамильтона — это энергия, выраженная через обобщённые координаты и импульсы.

Уравнения для изменения импульсов мы получили в следующем виде[2]:

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}.$$

Из формулы (1.4.5) видно, что производная $\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}$ должна содержать член V^α плюс, быть может, какие-то добавки от дифференцирования функций $V(x,p,t)$ и $L(x,V(x,p,t),t)$. Для того чтобы найти уравнения для скоростей, распишем эту производную:

$$\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha}\left(p_\beta V^\beta(x,p,t) - L(x,V(x,p,t),t)\right) = V^\alpha + p_\beta \frac{\partial V^\beta}{\partial p_\alpha} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\beta}}_{p_\beta} \frac{\partial V^\beta}{\partial p_\alpha} = V^\alpha = \dot{x}^\alpha.$$

Члены от дифференцирования функций $V(x,p,t)$ и $L(x,V(x,p,t),t)$ сократились!

Таким образом, мы получили систему уравнений, которые называются *уравнениями Гамильтона* (или *уравнениями Гамильтона в канонической форме*):

$$\dot{x}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \tag{1.4.6}$$

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}. \tag{1.4.7}$$

(!) Поскольку функция Гамильтона — функция от x, p, производная по x берётся при постоянном p, а по p — при постоянном x, что можно явно не указывать. Функция Лагранжа — функция от $x, \dot{x}$, поэтому от неё производная по x бралась при постоянном $\dot{x}$, а по $\dot{x}$ — при постоянном x. Таким образом, хотя обе функции являются функциями точки фазового пространства, производные от них берутся вдоль разных направлений.

(!) Функция Гамильтона — это энергия, выраженная через обобщённые координаты и импульсы. Энергия, выраженная через обобщённые координаты и скорости, функцией Гамильтона не является. Запись

[1] Мы будем использовать для классической (в смысле не квантовой) теории термин *функция Гамильтона*. Термин *гамильтониан* мы зарезервируем для квантовой теории, для оператора, который будет квантовым аналогом функции Гамильтона.

[2] Поскольку функция Гамильтона — функция от x, p, производная по x берётся при постоянном p, что можно явно не указывать.

функции Гамильтона через координаты и скорости в рамках данного курса будет считаться грубой ошибкой[3].

Определение. Совокупность обобщённых координат и обобщённых импульсов задаёт *систему координат в фазовом пространстве*. Одна система координат может не покрывать фазовое пространство полностью[4].

Определение (предварительное). Система координат в фазовом пространстве, в которой каждую координату можно считать (с точки зрения уравнений Гамильтона (1.4.6), (1.4.7)) либо обобщённой координатой, либо обобщённым импульсом, причём известно, какой обобщённый импульс соответствует (является *канонически сопряжённым*) какой обобщённой координате, называется *каноническими координатами* (*каноническими переменными*). Переходы между каноническими координатами называются *каноническими заменами (преобразованиями) координат*.

1.4.2 Гамильтонов формализм как частный случай лагранжева формализма

1.4.2.1 Множители Лагранжа

Введём функцию Гамильтона и уравнения Гамильтона, используя функционал действия.

Пусть имеется действие

$$S[x^\alpha(t)] = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(x^\alpha, \dot{x}^\alpha, t)\, dt. \tag{1.4.8}$$

Чтобы записать уравнения динамики как уравнения первого порядка, мы можем рассмотреть обобщённые скорости $\dot{x}^\alpha$ как новые независимые переменные v^α и наложить связи $\dot{x}^\alpha - v^\alpha = 0$. Таким образом, нам надо искать стационарные траектории $x^\alpha(t), v^\alpha(t)$ при условии $v^\alpha = \dot{x}^\alpha$, т.е.

$$S_{x,v}[x^\alpha(t), v^\alpha(t)]\Big|_{\dot{x}^\alpha - v^\alpha = 0} = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(x^\alpha, v^\alpha, t)\, dt.$$

Условную стационарную точку (как и условный экстремум) можно искать методом множителей Лагранжа.

Для функции конечного числа переменных метод множителей Лагранжа формулируется так.

- Надо найти условную стационарную точку гладкой функции $F(x^\alpha)$ при выполнении условий $f^j(x^\alpha) = 0$.
- Предположим, что число условий меньше, чем число переменных x^α, причём в интересующей нас области градиенты $\vec{\partial} f^j$ линейно независимы.
- Строим новую функцию $G(x^\alpha, \lambda_j) = F(x^\alpha) + \sum_j \lambda_j \cdot f^j(x^\alpha)$.
- Ищем стационарные точки функции $G(x^\alpha, \lambda_j)$ по всем переменным x^α, λ_j. Эта стационарная точка оказывается условной стационарной точкой функции[5] F при выполнении условий $f^j = 0$.

[3] Мы можем использовать гамильтонов формализм в других переменных, но тогда уравнения Гамильтона могут иметь неканонический вид. Чтобы записать неканонические уравнения Гамильтона, необходимо указать вид *пуассоновой структуры* (*скобки Пуассона*) на фазовом пространстве (про скобку Пуассона см. ниже в текущей главе). В рамках данного курса использование неканонических переменных относится к факультативному материалу.

[4] Фазовое пространство, как и конфигурационное пространство, имеет структуру дифференцируемого многообразия. Для его описания может понадобиться *атлас*: несколько локальных систем координат (*карт*), между которыми заданы правила перехода (склейки).

[5] При заданных условиях мы можем часть координат x^α заменить новыми координатами $y^j = f^j(x^\alpha)$. Стационарная точка при этом останется стационарной, а метод множителей Лагранжа в новых координатах x^μ, y^j (индекс μ нумерует те координаты x^α, которые не были заменены y^j) окажется тривиальным.

- Надо найти условную стационарную точку гладкой функции $F(x^\mu, y^j)$ при выполнении условий $y^j = 0$.
- Строим новую функцию $G(x^\mu, y^j, \lambda_j) = F(x^\mu, y^j) + \sum_j \lambda_j \cdot y^j$.
- Ищем стационарные точки функции $G(x^\mu, y^j, \lambda_j)$ по всем переменным x^μ, y^j, λ_j:

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda_j} = y^j = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial y^j} = \frac{\partial F}{\partial y^j} + \lambda_j = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial x^\mu} = \frac{\partial F}{\partial x^\mu} = 0.$$

Подставляя первое уравнение в третье, видим, что мы действительно нашли условную стационарную точку.

Второе уравнение позволяет найти также вспомогательные переменные $\lambda_j = -\frac{\partial F}{\partial y^j}$. Мы видим, что множители Лагранжа λ_j — это минус скорость изменения функции F при изменении величины связи f^j. Если F — потенциальная энергия, то λ^j — обобщённые силы, пытающиеся сдвинуть систему с поверхности $f^j = \text{const}$.

В нашем случае связи $f^\alpha(\dot{x},v,t)=\dot{x}^\alpha(t)-v^\alpha(t)=0$ выполняются при всех $t\in(t_0,t_1)$. Можно сказать, что мы наложили бесконечное число условий $f^\alpha(\dot{x},v,t)=0$, которые нумеруются дискретным индексом α (по нему надо будет просуммировать) и непрерывным индексом t (по нему надо будет проинтегрировать). Новое действие, построенное методом множителей Лагранжа, имеет вид

$$S_\lambda[x^\alpha(t),v^\alpha(t),\lambda_\alpha(t)]=S_{x,v}[x^\alpha(t),v^\alpha(t)]+\int\limits_{t_0}^{t_1}\lambda_\alpha(t)\,f^\alpha(\dot{x},v,t)\,dt=\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[L(x^\alpha,v^\alpha,t)+\lambda_\alpha\left(\dot{x}^\alpha-v^\alpha\right)\right]dt. \quad (1.4.9)$$

Проварьируем это действие:

$$\delta S_\lambda=\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial L}{\partial x^\alpha}\,\delta x^\alpha+\frac{\partial L}{\partial v^\alpha}\,\delta v^\alpha+\left(\dot{x}^\alpha-v^\alpha\right)\delta\lambda_\alpha+\lambda_\alpha\left(\delta\dot{x}^\alpha-\delta v^\alpha\right)\right]dt.$$

По частям надо интегрировать всего одно слагаемое $\int\lambda_\alpha\,\delta\dot{x}^\alpha\,dt$:

$$\delta S_\lambda=\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial x^\alpha}-\frac{d\lambda_\alpha}{dt}\right)\delta x^\alpha+\left(\frac{\partial L}{\partial v^\alpha}-\lambda_\alpha\right)\delta v^\alpha+\left(\dot{x}^\alpha-v^\alpha\right)\delta\lambda_\alpha\right]dt.$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа имеют вид

$$\frac{\delta S_\lambda}{\delta\lambda_\alpha} = \dot{x}^\alpha-v^\alpha, \quad (1.4.10)$$

$$\frac{\delta S_\lambda}{\delta v^\alpha} = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial v^\alpha}}_{p_\alpha}-\lambda_\alpha, \quad (1.4.11)$$

$$\frac{\delta S_\lambda}{\delta x^\alpha} = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x^\alpha}}_{f_\alpha}-\frac{d\lambda_\alpha}{dt}. \quad (1.4.12)$$

Первое уравнение (1.4.10) означает, что v^α — обобщённые скорости, второе уравнение (1.4.11) означает, что лагранжевы множители λ_α — это обобщённые импульсы, третье уравнение (1.4.12) (после подставновки в него скоростей и импульсов) даёт уравнения Эйлера-Лагранжа для исходного действия: $\dot{p}_\alpha=f_\alpha$.

1.4.2.2 Исключение скоростей

Мы получили систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, но число независимых переменных увеличилось не в два, а в три раза: кроме обобщённых скоростей добавились ещё и импульсы. Если функция Лагранжа невырожденная, т.е. $\det\frac{\partial^2 L}{\partial v^\alpha\partial v^\beta}\neq 0$ (см. условие (1.4.4)), то мы можем разрешить уравнение (1.4.11) относительно скоростей и записать скорости как функции координат x^α и импульсов $\lambda_\alpha=p_\alpha$:

$$v^\alpha=V^\alpha(x^\gamma,\lambda_\gamma,t). \quad (1.4.13)$$

Если подставить такие скорости (1.4.13) в действие (1.4.9), то уравнения движения (1.4.11) окажутся выполнены автоматически, а условия стационарности по оставшимся переменным дадут два оставшихся уравнения (1.4.10) и (1.4.12) (после подстановки (1.4.13) множество траекторий, среди которых ищется стационарная, сузится, но прежняя стационарная траектория попадёт в сузившееся множество, и мы её снова найдём).

Выпишем соответствующее действие, переобозначив $\lambda_\alpha\to p_\alpha$:

$$\begin{aligned} S_H[x^\alpha(t),p_\alpha(t)] &= \int\limits_{t_0}^{t_1}\left[L(x^\alpha,V^\alpha(x,p),t)+p_\alpha\left(\dot{x}^\alpha-V^\alpha(x,p)\right)\right]dt= \\ &= \int\limits_{t_0}^{t_1}\Big[p_\alpha\dot{x}^\alpha-\underbrace{\left\{p_\alpha V^\alpha(x,p,t)-L(x,V(x,p,t),t)\right\}}_{H(x,p,t)}\Big]\,dt. \end{aligned} \quad (1.4.14)$$

Новое действие естественным образом переписалось через функцию Гамильтона $H(x,p,t)$. Поскольку на траекториях, удовлетворяющих уравнениям движения $\dot{x}^\alpha=V^\alpha(x,p,t)$, значения действия (1.4.14) и исходного действия (1.4.8) на таких траекториях совпадают[6]. Имеем

[6]Обратите внимание на выражение $p_\alpha\,dx^\alpha-H\,dt$ в действии (1.4.15). Если принять, что время — дополнительная координата, то в роли импульса для этой координаты выступает $-H$, т.е. энергия со знаком минус. Мы уже упоминали это соответствие при обсуждении теоремы Нётер и встретимся с ним снова в главе «Время как координата и энергия как импульс», а также в теории относительности и в уравнениях Гамильтона-Якоби.

$$S_H[x^\alpha(t), p_\alpha(t)] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[p_\alpha \dot{x}^\alpha - H(x,p,t)\right] dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[p_\alpha\, dx^\alpha - H(x,p,t)\, dt\right]. \tag{1.4.15}$$

В качестве проверки проварьируем действие (1.4.15):

$$\delta S_H = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\delta\dot{x}^\alpha p_\alpha + \dot{x}^\alpha \delta p_\alpha - \delta x^\alpha \frac{\partial H}{\partial x^\alpha} - \delta p_\alpha \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right) dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(-\delta x^\alpha \left[\dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial x^\alpha}\right] + \delta p_\alpha \left[\dot{x}^\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right]\right) dt. \tag{1.4.16}$$

$$\frac{\delta S_H}{\delta x^\alpha(t)} = -\dot{p}_\alpha - \frac{\partial H}{\partial x^\alpha}, \tag{1.4.17}$$

$$\frac{\delta S_H}{\delta p_\alpha(t)} = \dot{x}^\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}. \tag{1.4.18}$$

Мы получили, что уравнения Гамильтона, как и уравнения Эйлера-Лагранжа, выводятся из принципа стационарного действия, но соответствующее действие имеет специальный вид (1.4.15).

Заметим, что мы рассмотрели три разных функционала действия $S[x^\alpha(t)]$ (1.4.8), $S_\lambda[x^\alpha(t), v^\alpha(t), \lambda_\alpha(t)]$ (1.4.9) и $S_H[x^\alpha(t), p_\alpha(t)]$ (1.4.15). У этих трёх функционалов разные наборы аргументов, функции $v^\alpha(t)$ и $p_\alpha(t)$ в аргументах действий никак не связаны с функциями $x^\alpha(t)$.

- Действие $S_\lambda[x^\alpha(t), v^\alpha(t), \lambda_\alpha(t)]$ (1.4.9) зависит от траекторий в пространстве размерности $3D$ (D — число степеней свободы) с независимыми координатами $x^\alpha, v^\alpha, \lambda_\alpha$.
- Если с помощью уравнения (1.4.11) выразить v^α через x^α и $\lambda_\alpha = p_\alpha$, то мы получим действие $S_H[x^\alpha(t), p_\alpha(t)]$ (1.4.15), которое зависит от траектории в $2D$-мерном фазовом пространстве с независимыми координатами x^α, p_α.
- Если с помощью уравнения (1.4.18) выразить p_α через x^α и $\dot{x}^\alpha$, то мы получим исходное действие $S[x^\alpha(t)]$ (1.4.8), которое зависит от траектории в D-мерном конфигурационном пространстве с независимыми координатами x^α.

1.4.3 Преобразования Лежандра

Рассмотрим переход от функции Лагранжа $L(x, v, t)$ к функции Гамильтона $H(x, p, t)$ и обратный переход.

От лагранжиана к функции Гамильтона:

$$p_\alpha = \frac{\partial L(x,v,t)}{\partial v^\alpha}, \quad \text{откуда выражаем} \quad v^\alpha = V^\alpha(x,p,t),$$

$$H(x,p,t) = p_\alpha V^\alpha(x,p,t) - L(x, V(x,p,t), t).$$

В обратную сторону:

$$v^\alpha = \frac{\partial H(x,p,t)}{\partial p_\alpha}, \quad \text{откуда выражаем} \quad p_\alpha = P_\alpha(x,v,t),$$

$$L(x,v,t) = v^\alpha P_\alpha(x,v,t) - H(x, P(x,v,t), t).$$

Мы видим, что прямой и обратный переходы осуществляются с помощью одного и того же преобразования. Преобразование, соответствующее переходу $L \to -H$ или $H \to -L$, называется *преобразованием Лежандра.*[7]

При переходе $L \to -H$ преобразование Лежандра делается по всем скоростям, которые заменяются импульсами.

При переходе $H \to -L$ преобразование Лежандра делается по всем импульсам, которые заменяются скоростями.

Преобразование Лежандра по разным термодинамическим переменным широко используется в термодинамике для перехода между различными термодинамическими потенциалами.

[7]Мы определили преобразование Лежандра так, что оно отличается знаком от преобразования $L \to H$ и $H \to L$. Преобразования Лежандра в разных книгах могут определяться с разным знаком. Мы выбрали знак так, что если мы делаем преобразование Лежандра по одной переменной, а потом по другой или сразу сделали преобразование Лежандра по обоим переменным, то знак будет одинаковым. Этот выбор знака соответствует принятому в книгах по термодинамике.

1.4.4 Исключение циклических координат и метод Рауса*

Если функция Гамильтона H не зависит от какой-либо координаты $x_{\text{ц}}$, то

$$\dot{p}_{\text{ц}} = -\frac{\partial H}{\partial x_{\text{ц}}} = 0.$$

Соответствующий обобщённый импульс $p_{\text{ц}}$ сохраняется. Поэтому мы можем в функцию Гамильтона вместо импульса $p_{\text{ц}}$ подставить его значение и сократить размерность задачи.

В случае функции Лагранжа ситуация сложнее. Если функция Лагранжа L не зависит от какой-либо координаты $x_{\text{ц}}$ (*циклической координаты*), то

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\text{ц}}} = \frac{\partial L}{\partial x_{\text{ц}}} = 0.$$

Соответствующий обобщённый импульс $p_{\text{ц}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\text{ц}}}$ сохраняется. Но функция Лагранжа выражается через координаты и скорости. И дифференцирование её по координатам и скоростям в уравнениях Эйлера-Лагранжа ведётся при фиксированном значении остальных координат и скоростей. Поскольку обобщённый импульс $p_{\text{ц}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\text{ц}}}$ может зависеть не только от соответствующей обобщённой скорости $\dot{x}_{\text{ц}}$, но и от других координат и скоростей[8], просто подставить в функцию Лагранжа константу вместо $p_{\text{ц}}$ нельзя.

Можно, конечно, сделать преобразование Лежандра и перейти от функции Лагранжа к функции Гамильтона, подставить константу вместо $p_{\text{ц}}$, а потом ещё одним преобразованием Лежандра вернуться к функции Лагранжа, уже от меньшего числа переменных. Однако таким образом по большинству переменных (кроме скорости по циклической координате и соответствующего импульса) приходится делать бесполезные преобразования туда-обратно.

Процесс можно упростить, если сделать преобразование Лежандра только для скорости по циклической координате, перейдя к соответствующему импульсу, а потом заменить этот импульс константой. В этом случае делать преобразование Лежандра в обратную сторону уже не надо.

(/) Определение.** *Функция Рауса* — это функция, полученная из функции Лагранжа преобразованием Лежандра[9] для части обобщённых скоростей:

$$R(x^i, p_i; x^\alpha, \dot{q}^\alpha) = L\big(x^i, \dot{x}^i(x^i, p_i; x^\alpha, \dot{x}^\alpha); x^\alpha, \dot{x}^\alpha\big) - \sum_i p_i \dot{x}^i(x^i, p_i; x^\alpha, \dot{x}^\alpha), \qquad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}.$$

Функция Рауса для переменных $x^\alpha, \dot{x}^\alpha$ играет роль функции Лагранжа, а для переменных x^i, p_i — роль функции Гамильтона с обратным знаком. Уравнения движения имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial R}{\partial x^\alpha} = 0, \qquad \dot{q}^i = -\frac{\partial R}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = \frac{\partial R}{\partial x^i}.$$

Если при переходе к функции Рауса сделать преобразование Лежандра только по обобщённым скоростям для циклических координат, то после подстановки вместо p_i констант мы сразу получим функцию Лагранжа по оставшимся переменным. Делать снова преобразование Лежандра уже не нужно.

Пример. Частица в центральном потенциале $U(r)$ в полярных координатах.
Функция Лагранжа имеет вид

$$L(\phi, \dot{\phi}, r, \dot{r}) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\phi}^2}{2} - U(r).$$

От координаты ϕ функция Лагранжа не зависит, т.е. ϕ — циклическая координата. Соответствующий обобщённый импульс — момент импульса:

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}.$$

Делаем переход к функции Рауса:

$$R(\phi, p_\phi, r, \dot{r}) = L - \dot{\phi}p_\phi = L - \frac{p_\phi^2}{mr^2} = \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{p_\phi^2}{2mr^2} - U(r).$$

[8]Например, в полярных координатах момент импульса $p_\phi = mr^2\dot{\phi}$ зависит не только от угловой скорости $\dot{\phi}$, но и от радиальной координаты r.

[9]В связи с разными определениями знака при преобразованиях Лежандра в литературе функция Рауса определяется с разными знаками у разных авторов.

Подставив в функцию Рауса константу вместо сохраняющегося обобщённого импульса $p_\phi = l$, получаем функцию Лагранжа для одномерного радиального движения:

$$L_{\text{рад.}}(r, \dot{r}) = \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{l^2}{2mr^2} - U(r).$$

Мы видим, что кинетическая энергия углового движения $\frac{mr^2\dot{\phi}^2}{2} = \frac{p_\phi^2}{2mr^2} = \frac{l^2}{2mr^2}$ теперь входит со знаком минус, как будто это потенциальная энергия. Такая добавка называется *центробежным потенциалом.* (/**)

1.4.5 Наблюдаемые и скобка Пуассона

Обобщённые координаты и обобщённые импульсы — это координаты в фазовом пространстве. Задание точки в фазовом пространстве полностью задаёт состояние системы. В заданном состоянии измерение любой наблюдаемой величины даёт определённый результат[10], т.е. любая *наблюдаемая величина* (*наблюдаемая*) задаётся как некоторая скалярная функция координат в фазовом пространстве и времени:

$$F(x^\alpha, p_\alpha, t).$$

Важные частные случаи наблюдаемых — функция Гамильтона, сами обобщённые координаты и обобщённые импульсы.

Вычислим полную производную некоторой наблюдаемой F по времени:

$$\frac{d}{dt}F = \frac{d}{dt}F(x^\alpha(t), p_\alpha(t), t) = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_\alpha \left(\frac{\partial F}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{dp_\alpha}{dt} \right).$$

Выразим $\frac{dx^\alpha}{dt}$ и $\frac{dp_\alpha}{dt}$ с помощью уравнений Гамильтона:

$$\frac{d}{dt}F = \frac{\partial F}{\partial t} + \underbrace{\sum_\alpha \left(\frac{\partial F}{\partial x^\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial x^\alpha} \right)}_{\{F,H\}} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}.$$

Здесь мы ввели *скобку Пуассона*, которая определена для произвольной пары дифференцируемых наблюдаемых, заданных как функции канонических координат (x^α, p_α) следующим выражением:

$$\{F, G\} = \sum_\alpha \left(\frac{\partial F}{\partial x^\alpha}\frac{\partial G}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial G}{\partial x^\alpha} \right). \tag{1.4.19}$$

Определение. Координаты на фазовом пространстве, в которых скобка Пуассона имеет вид (1.4.19), называются *каноническими координатами.*

Теорема. Для того чтобы координаты были каноническими, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{aligned} \{x^\alpha, p_\beta\} &= \delta^\alpha_\beta, \\ \{x^\alpha, x^\beta\} &= 0, \\ \{p_\alpha, p_\beta\} &= 0. \end{aligned} \tag{1.4.20}$$

Необходимость этих условий легко проверяется из формулы (1.4.19). Достаточность мы установим ниже, рассматривая скобку Пуассона с тензорной точки зрения.

Также для канонических координат выполняются следующие важные свойства:

$$\begin{aligned} \{x^\alpha, F\} &= \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}, \\ \{p_\alpha, F\} &= -\frac{\partial F}{\partial x^\alpha}. \end{aligned}$$

Таким образом, скобки Пуассона позволяют дифференцировать наблюдаемые не только по времени, но и по каноническим координатам и импульсам.

[10] **(**)** Знание состояния позволяет предсказать результат любого измерения только в рамках классической теории. В квантовой теории появляются неустранимые вероятности, и точное знание состояния не позволяет предсказать результат измерения произвольной наблюдаемой. При этом квантовая теория не допускает возможности одновременно точно зафиксировать значение координаты и соответствующего импульса. Так что для описания состояний и наблюдаемых в квантовой теории нам понадобится существенно иной (хотя и во многом сходный) формализм.

Определение. Наблюдаемые F и G называются *канонически сопряжёнными*, если $\{F, G\} = 1$.

Для канонически сопряжённых наблюдаемых можно подобрать каноническую систему координат, в которой F — обобщённая координата, а G — обобщённый импульс.

Определение. Замена координат в фазовом пространстве называется *канонической заменой координат*, если она переводит одни канонические координаты в другие.

(!) В случае 2-мерного фазового пространства (1 степень свободы) канонической является любая замена координат, сохраняющая ориентированную площадь. Доказать это утверждение вы можете самостоятельно в качестве упражнения.

(!) Если фазовое пространство имеет размерность больше 2 (больше 1 степени свободы), но замена координат такова, что каждая новая координата выражается через одну обобщённую координату x^a и соответствующий ей импульс p_a (через одну пару канонически сопряжённых координат), то канонической является любая замена, сохраняющая ориентированную площадь на поверхности $x^a - p_a$. Доказать это утверждение, опираясь на предыдущее, вы можете самостоятельно в качестве упражнения.

1.4.6 Скобка Пуассона как скобка Ли*

В классической физике любая *наблюдаемая величина* (*наблюдаемая*) задаётся как некоторая скалярная функция координат в фазовом пространстве и времени. Будем считать, что эти функции дифференцируемы бесконечное число раз.

Такие функции можно складывать друг с другом и умножать на число, т.е. множество наблюдаемых на данном фазовом пространстве образует линейное пространство (*алгебру наблюдаемых*).

Скобка Пуассона обладает следующими свойствами, выполнение которых делает её частным случаем *скобки Ли*[11].

- Скобка Пуассона отображает пару элементов некоторого линейного пространства (*алгебры наблюдаемых*) на то же линейное пространство $\{\cdot, \cdot\} : L \times L \to L$.
- Линейность по обоим аргументам: $\{F, gG + H\} = g\{F, G\} + \{F, H\}$ (аналогично по первому аргументу), где $g \in \mathbb{R}$.
- Антисимметричность: $\{F, G\} = -\{G, F\}$.
- Тождество Якоби: $\{F, \{G, H\}\} + \{H, \{F, G\}\} + \{G, \{H, F\}\} = 0$.
- Скобка Пуассона $\{F, H\}$ — это производная от функции F по направлению в фазовом пространстве, задаваемому функцией H (вдоль вектора с компонентами $(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha})$).

Алгебра наблюдаемых является *алгеброй Ли* (линейным пространством, на котором задана скобка Ли). Также на алгебре наблюдаемых определено умножение (обычное поточечное умножение скалярных функций), а для скобки Пуассона (как для производной по направлению) выполняется правило Лейбница (для производной от произведения функций):

$$\{FG, H\} = F\{G, H\} + \{F, H\}G.$$

Скобка Пуссона неассоциативна, т.е. $\exists F, G, H : \{F, \{G, H\}\} \neq \{\{F, G\}, H\}$.

(!) Скобки Пуассона будут очень полезны при переходе к квантовой механике, когда многие классические формулы, записанные через скобки Пуассона, переносятся на квантовый случай переопределением скобки Пуассона.

1.4.7 Уравнения Гамильтона с тензорной точки зрения**

Обобщённые координаты и обобщённые импульсы — это координаты в фазовом пространстве. Обозначим их как $X^M = (x^\alpha, p_\alpha)$ (при выписывании в виде строки или столбца будем сначала выписывать все координатные компоненты, а потом все импульсные), т.е. X^M может быть как обобщённой координатой, так и обобщённым импульсом в зависимости от индекса M:

$$X^{x^\alpha} = x^\alpha, \qquad X^{p_\alpha} = p_\alpha.$$

[11] Другими примерами скобки Ли являются векторное умножение $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = a_\alpha b_\beta \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{e}_\gamma$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3)$ и коммутаторы матриц или операторов $[A, B] = AB - BA$.

Таким образом, левые части уравнений Гамильтона $\dot{X}^M = (\dot{x}^\alpha, \dot{p}_\alpha)$ образуют вектор в фазовом пространстве[12]:

$$\begin{aligned} \dot{x}^\alpha &= \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \\ \dot{p}_\alpha &= -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}. \end{aligned}$$

Правые части уравнений Гамильтона можно представить как действие некоторой матрицы на столбец частных производных (градиент) от скалярной функции (функции Гамильтона):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}^\alpha \\ \dot{p}_\alpha \end{pmatrix}}_{\dot{X}^M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \hat{1} \\ -\hat{1} & 0 \end{pmatrix}}_{J^{MN}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x^\alpha} \\ \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \end{pmatrix}}_{\partial_N H}.$$

Мы записали уравнения Гамильтона в матричном виде. Здесь $\hat{1}$ — единичные матрицы $D \times D$. Поскольку $\dot{X}^M$ — вектор, а $\partial_N H$ — ковектор[13], матрица J^{MN} должна быть тензором, который несёт два верхних индекса.

Тензор J^{MN} называют *пуассоновой структурой*.

Тензор J^{MN} похож на обратный метрический тензор, но в отличие от него антисимметричен. В канонических координатах $\det J^{MN} = 1$, так что существует обратная матрица (тоже тензор, называемый *симплектической формой*) ω_{NK}, которая похожа на прямой метрический тензор[14]:

$$J^{MN} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{1} \\ -\hat{1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \omega_{NK} = \begin{pmatrix} 0 & -\hat{1} \\ \hat{1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad J^{MN}\omega_{NK} = \omega_{KN}J^{NM} = \delta^M_K. \tag{1.4.21}$$

Определение. Координаты, в которых J^{MN} имеет вид (1.4.21), называются *каноническими координатами*.

Определение. Переход от одних канонических координат к другим каноническим координатам называется *каноническим преобразованием*.

Тензоры (1.4.21) позволяют различать среди канонических координат фазового пространства обобщённые координаты и соответствующие им (*канонически сопряжённые*) импульсы.

Мы можем записать уравнения Гамильтона и в неканонических координатах, они будут иметь тот же вид (если два тензора равны в одной системе координат, то они равны и в любой системе координат):

$$\dot{X}^M = J^{MN}\partial_N H, \tag{1.4.22}$$

но в неканонических координатах компоненты тензора J^{MN} будут другими. В неканонических координатах может быть невозможно разделить координаты фазового пространства на обобщённые координаты и канонически сопряжённые им импульсы.

При произвольной невырожденной замене координат в фазовом пространстве J^{MN} преобразуется по обычному закону преобразования тензора с двумя верхними индексами:

$$J^{M'N'} = \frac{\partial X^{M'}}{\partial X^M} J^{MN} \frac{\partial X^{N'}}{\partial X^N},$$

или, на матричном языке (считая верхний индекс первым, а нижний — вторым),

$$J' = \frac{\partial X'}{\partial X} J \left(\frac{\partial X'}{\partial X}\right)^T.$$

Отсюда находим

$$\det J' = \det J \left(\det \frac{\partial X'}{\partial X}\right)^2. \tag{1.4.23}$$

[12] В лагранжевом формализме обобщённые импульсы образовывали ковектор. Теперь мы забыли об этом и считаем, что обобщённые импульсы (вместе с обобщёнными координатами) — это координаты в фазовом пространстве. Для импульсов в лагранжевом формализме (как для компонент ковектора) возможны были только линейные преобразования. Для импульсов в гамильтоновом формализме (как координат в фазовом пространстве) возможны нелинейные преобразования, перепутывающие их с обобщёнными координатами.

[13] Напоминаем, что вектор и ковектор рассматриваются в фазовом пространстве!

[14] На фазовом пространстве обычную (симметричную) метрику, как правило, не определяют, т.к. введение структуры, которая не несёт физического смысла, ничего не даёт, но при этом портит симметрию теории.

Впрочем, для системы гармонических осцилляторов энергия (функция Гамильтона) — положительно определённая квадратичная форма, в которую входят и координаты, и импульсы. Такая квадратичная форма позволяет ввести на фазовом пространстве метрику. Однако это возможно благодаря специальному виду функции Гамильтона.

Поскольку при канонических преобразованиях J — фиксированная матрица с фиксированным определителем $\det J = 1$, мы получаем, что якобиан любого канонического преобразования $\det \frac{\partial X'}{\partial X}$ равен ± 1, а значит, *фазовый объём* (объём в фазовом пространстве) сохраняется. Если каноническое преобразование непрерывно зависит от параметра t, причём при $t = 0$ является тождественным преобразованием, то соответствующий якобиан равен $+1$, а значит, сохраняется ориентированный фазовый объём.[15] В частности, каноническим преобразованием, непрерывно зависящим от параметра t (времени), является любая гамильтонова эволюция (поскольку выбор начального момента времени произволен), а значит, любая гамильтонова эволюция сохраняет фазовый объём.

Теорема Лиувилля. Гамильтонова эволюция сохраняет ориентированный фазовый объём.

Даже в канонических координатах обобщённые координаты и импульсы могут оказаться очень непривычными, например, замена

$$x^{\alpha'} = p_\alpha, \qquad p_{\alpha'} = -x^\alpha$$

является *каноническим преобразованием координат* (переводит канонические координаты в канонические), хотя и меняет местами (с точностью до знаков) координаты и импульсы.

1.4.8 Скобка Пуассона с тензорной точки зрения**

Запишем полную производную от наблюдаемой по времени:

$$\frac{dF}{dt} = (\partial_M F)\, \dot{X}^M + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Производные от координат в фазовом пространстве подставим из формулы (1.4.22):

$$\frac{dF}{dt} = \underbrace{(\partial_M F)\, J^{MN}\, (\partial_N H)}_{\{F,H\}} + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Мы видим, что в первом члене от градиентов наблюдаемой F и функции Гамильтона H берётся билинейная форма с антисимметричным тензором J^{MN}. Это выражение является *скобкой Пуассона* в произвольных (не обязательно канонических) координатах:

$$\{F, H\} = (\partial_M F)\, J^{MN}\, (\partial_N H) = -\{H, F\}.$$

Мы видим, что скобка Пуассона $\{F, H\}$ — это производная от функции F по направлению, задаваемому функцией H (вдоль вектора с компонентами $J^{MN}\, \partial_N H$).

В канонических координатах (1.4.21) скобка Пуассона имеет вид:

$$\{F, H\} = \frac{\partial F}{\partial x^\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}. \tag{1.4.24}$$

(По повторяющемуся индексу α, как обычно, проводится суммирование.)

Легко видеть (в сумме остаётся один член), что для любых координат в фазовом пространстве

$$\{X^M, X^N\} = J^{MN}. \tag{1.4.25}$$

Таким образом, пуассонова структура задаётся набором скобок Пуассона координат в фазовом пространстве. Тем самым мы доказали, что для проверки каноничности координат достаточно проверить скобки Пуассона самих координат (1.4.20).

Для любого тензора J^{MN}, задающего пуассонову структуру и удовлетворяющего следующим условиям:

- $J^{MN} = -J^{NM}$ — антисимметричность;
- $\det J^{MN} \neq 0 \Leftrightarrow \exists\, \omega_{NL} : J^{MN}\omega_{NL} = \delta^M_L$ — невырожденность;
- $J^{KL}\partial_L J^{MN} + J^{ML}\partial_L J^{NK} + J^{NL}\partial_L J^{KM} = 0 \Leftrightarrow \partial_K \omega_{MN} + \partial_M \omega_{NK} + \partial_N \omega_{KM} = 0 \Leftrightarrow \forall F, G, H \;\; \{F, \{G, H\}\} + \{H, \{F, G\}\} + \{G, \{H, F\}\} = 0$ — тождество Якоби,

в окрестности данной точки фазового пространства существуют канонические координаты (которые могут не покрывать всё фазовое пространство). Это утверждение мы приводим без доказательства.

[15] Позже мы покажем, что канонические преобразования с якобианом -1 невозможны. См. формулу (1.11.4) на с. 124.

1.4.9 Законы сохранения

1.4.9.1 Динамические инварианты*

Формально можно для любой гамильтоновой системы выдумать сколько угодно законов сохранения, доопределив любую наблюдаемую $F_0(X)$ в момент времени t_0 так, чтобы полная производная по времени равнялась нулю:

$$\frac{dF}{dt} = 0 = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}, \qquad F(x, p, t_0) = F_0(x, p). \tag{1.4.26}$$

Такие наблюдаемые называют *динамическими инвариантами*.

Например, для свободной нерелятивистской частицы $H(x,p) = \frac{p^2}{2m}$ можно построить такой динамический инвариант (обратите внимание на знак перед импульсом в формуле!):

$$x_{\text{и}}(t) = x - \frac{p}{m}t, \qquad x_{\text{и}}(0) = x.$$

Этот инвариант соответствует значению координаты в нулевой момент времени.

Очевидно, что все обобщённые координаты и импульсы в нулевой момент времени образуют *максимальный набор независимых динамических инвариантов* (все остальные можно выразить через них как функции), т.е. количество независимых динамических инвариантов равно размерности фазового пространства $2D$. Разумеется, начальные значения координат и импульсов не очень удобны в качестве законов сохранения, т.к., чтобы их найти, надо уже решить уравнения, эквивалентные уравнениям движения (1.4.26), тогда как мы хотим, чтобы законы сохранения облегчили решение уравнений движения.

1.4.9.2 Интегралы движения

Также важны *интегралы движения* — сохраняющиеся наблюдаемые величины, в определение которых не входит время:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0, \qquad \{F, H\} = 0.$$

Каждому интегралу движения соответствует однопараметрическая группа канонических преобразований координат в фазовом пространстве с параметром s, сохраняющих функцию Гамильтона:

$$X' = X'(X, s), \quad X'(X, 0) = X, \quad X'(X'(X, s_1), s_2) = X'(X, s_1 + s_2), \quad \frac{\partial X'}{\partial s} = \{X', F\}.$$

При таком преобразовании s играет роль времени, а F — функции Гамильтона:

$$\frac{d}{ds}H(X'(X, s)) = \{H, F\} = 0 \quad \Longrightarrow \quad H(X'(X, s)) = H(X).$$

Таким образом, построенное отображение фазового пространства на себя является симметрией функции Гамильтона H.

И наоборот (доказательство обратного утверждения вынесено в § 2.4.3), каждой однопараметрической группе канонических преобразований

$$X' = X'(X, s), \quad X'(X'(X, s_1), s_2) = X'(X, s_1 + s_2), \quad X'(X, 0) = X,$$
$$\{X'^K, X'^L\} = \{X^K, X^L\}, \qquad H(X'(X, s)) = H(X)$$

соответствует интеграл движения F, локально (в некоторой окрестности заданной точки фазового пространства) такой, что $\frac{\partial X'}{\partial s} = \{X', F\}$.

Эти утверждения обобщают теорему Нётер, введённую ранее для лагранжева формализма.

Из тождества Якоби для скобки Пуассона следует, что скобка Пуассона от двух интегралов движения снова даёт интеграл движения[16]:

$$\{F_1, H\} = 0, \quad \{F_2, H\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \{\{F_1, F_2\}, H\} = 0.$$

Простейший случай интеграла движения получается, если функция Гамильтона не зависит от одной из канонических координат. Такая координата называется *циклической координатой*. Тогда канонически сопряжённая координата оказывается интегралом движения:

$$\frac{\partial H}{\partial x^\alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{p_\alpha, H\} = 0, \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{x^\alpha, H\} = 0.$$

Это означает, что *если энергия не зависит от какой-то обобщённой координаты, то соответствующий импульс сохраняется*. Это, конечно, частный случай, но к этому частному случаю канонической заменой координат сводятся все остальные.

[16] С учётом того, что линейная комбинация интегралов движения тоже интеграл движения, интегралы движения образуют алгебру Ли относительно скобки Пуассона: *алгебру Ли интегралов движения*.

1.4.10 Задачи 12–16

Задача 12. От лагранжиана к функции Гамильтона.
а) Для всех лагранжианов из задач 2, 3, 10 (кроме пунктов со звёздочками) напишите функции Гамильтона.
б) Для пунктов 3 д), 2 б), 10 г) указанных задач запишите уравнения Гамильтона и проверьте их эквивалентность уравнениям Эйлера-Лагранжа. С помощью преобразований Лежандра перейдите обратно от функции Гамильтона к лагранжиану.

Задача 13. Строим теорию относительности. В данной задаче скорость света $c = 1$.
Пусть коэффициент пропорциональности между скоростью и импульсом частицы — это не масса, а энергия $\mathbf{p} = \mathcal{E}\mathbf{v}$, а энергия неподвижной частицы — это масса $\mathcal{E}(p = 0) = m$.
а) Найдите энергию $\mathcal{E}(\mathbf{v})$ и функцию Гамильтона свободной частицы $H(\mathbf{p})$.
б) Сделайте преобразование Лежандра и получите функцию Лагранжа свободной частицы и действие в 3-мерной форме как интеграл по времени.
в) Получите из действия в 3-мерной форме импульс и энергию.
г*) Задайте время как дополнительную координату, функцию от монотонного параметра l, и перепишите действие в 4-мерном виде как интеграл по монотонному параметру l.
д*) Получите из 4-мерного действия 4-импульс.

Задача 14. Движение под действием постоянной силы.
Пусть функция Гамильтона свободной частицы зависит только от модуля импульса: $H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = H(|\mathbf{p}|)$. Частица движется вдоль оси x под действием постоянной внешней силы $\mathbf{F} \| x$.
а) Найдите $x(t)$.
б) Примените результат к классической частице.
в) Примените результат к релятивистской частице (используя результат задачи 13 а).

Задача 15. Модель хищник-жертва Ло́тки–Вольте́рры в гамильтоновых переменных.
Рассмотрим взаимодействие хищников («волков») и жертв («зайцев»).

Зайцы едят траву, их число Z растёт за счёт размножения, со скоростью, пропорциональной Z. Также зайцев едят волки, за счёт чего число зайцев сокращается со скоростью, пропорциональной частоте встреч зайцев и волков, т.е. пропорциональной произведению ZW (W — число волков). Это даёт нам первое дифференциальное уравнение:

$$\dot{Z} = \alpha Z - \beta ZW, \tag{1.4.27}$$

где $\alpha, \beta = \text{const}$ — параметры модели.

Число волков W уменьшается за счёт гибели со скоростью, пропорциональной W. Также волки едят зайцев и размножаются со скоростью, пропорциональной частоте встреч зайцев и волков, т.е. пропорциональной произведению ZW. Это даёт нам второе дифференциальное уравнение:

$$\dot{W} = -\gamma W + \delta ZW, \tag{1.4.28}$$

где $\gamma, \delta = \text{const}$ — параметры модели.
а) Покажите, что переменные Z, W не являются гамильтоновыми (что уравнения (1.4.27),(1.4.28) не являются каноническими уравнениями Гамильтона).
б) Найдите для системы уравнений (1.4.27),(1.4.28) гамильтоновы переменные, функцию Гамильтона, интеграл движения. (Попробуйте искать гамильтоновы переменные в виде некоторых монотонных функций $w(W)$ и $z(Z)$.)

Задача 16. Тождество Якоби.
а) Покажите, что при дифференцировании скобки Пуассона выполняется правило Лейбница, как будто скобка Пуассона является произведением:

$$\frac{\partial}{\partial s}\{F(s), G(s)\} = \left\{\frac{\partial F(s)}{\partial s}, G(s)\right\} + \left\{F(s), \frac{\partial G(s)}{\partial s}\right\}. \tag{1.4.29}$$

б) Докажите тождество Якоби для скобки Пуассона:

$$\{F, \{G, H\}\} + \{H, \{F, G\}\} + \{G, \{H, F\}\} = 0. \tag{1.4.30}$$

1.4.11 Ответы к задачам 12–14

Задача 12. От лагранжиана к функции Гамильтона.
б) Для пункта 10 г): $H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A})^2}{2m} + q\varphi$, $\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}}{m}$, $\dot{p}_\alpha = -q\partial_\alpha\varphi + \frac{q}{mc}(p_\beta - \frac{q}{c}A_\beta)\partial_\alpha A_\beta$.

Задача 13. Строим теорию относительности.
а) $\mathcal{E}(\mathbf{v}) = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}$, $H(\mathbf{p}) = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$. **б)** $S[\mathbf{r}(t)] = -m \int \sqrt{1 - \dot{\mathbf{r}}^2}\, dt$. **в)** $\mathcal{E}(\mathbf{v}) = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}$, $\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}$.

Задача 14. Движение под действием постоянной силы.
а) $x(t) - x_0 = \frac{1}{F} H(F(t - t_0))$. **б)** $x(t) - x_0 = \frac{F(t-t_0)^2}{2m}$. **в)** $x(t) - x_0 = \frac{1}{F}\sqrt{m^2c^4 + c^2F^2(t-t_0)^2}$.

Задача 15. Модель хищник-жертва Ло́тки–Вольте́рры в гамильтоновых переменных.
$H(w, z) = -\alpha w + \beta \mathrm{e}^w - \gamma z + \delta \mathrm{e}^z$, $\quad w = \ln W$ — координата, $\quad z = \ln Z$ — импульс.

Глава 1.5

Задача Кеплера (с. 202)

1.5.1 Сведение задачи двух тел к задаче одного тела

Рассмотрим систему из двух нерелятивистских частиц, потенциальная энергия которых зависит только от расстояния между ними:

$$L(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|).$$

Данная функция Лагранжа симметрична относительно одновременного сдвига обеих частиц на одинаковый вектор $\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}$, $\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}$. Этим симметриям соответствуют интегралы движения

$$P_\alpha = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_a^\beta} \frac{\partial r_a^\beta}{\partial a^\alpha} = \sum_a p_{a\beta} \delta_\alpha^\beta = p_{1\alpha} + p_{2\alpha},$$

которые оказываются компонентами суммарного импульса системы:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = M\mathbf{V}, \qquad M = m_1 + m_2, \quad \mathbf{V} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{M}.$$

Поскольку суммарный импульс связан со скоростью центра масс $\mathbf{V}$, выделим координаты центра масс $\mathbf{R}$, относительные координаты частиц $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, относительную скорость $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ и распишем кинетическую энергию как энергию центра масс и энергию относительно центра масс:

$$L = \frac{MV^2}{2} + \frac{m_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{V})^2}{2} + \frac{m_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{V})^2}{2} - U(r).$$

$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{V} = \mathbf{v}_1 - \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2\mathbf{v}}{m_1 + m_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{m_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{V})^2}{2} = \frac{m_1 m_2^2 v^2}{2(m_1 + m_2)^2}$$

Аналогично, расписав кинетическую энергию второй частицы в системе центра масс, получаем

$$\frac{m_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{V})^2}{2} + \frac{m_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{V})^2}{2} = \frac{m_1 m_2^2 v^2}{2(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_1^2 m_2 v^2}{2(m_1 + m_2)^2} = \frac{m_1 m_2 v^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{\mu v^2}{2}.$$

Здесь мы ввели приведённую массу частицы

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^{-1}.$$

Таким образом, в функции Лагранжа в новых координатах оказались разделены переменные:

$$L(\mathbf{R}, \mathbf{r}, \mathbf{V}, \mathbf{v}) = \underbrace{\frac{MV^2}{2}}_{L_1(\mathbf{R},\mathbf{V})} + \underbrace{\frac{\mu v^2}{2} - U(r)}_{L_2(\mathbf{r},\mathbf{v})}.$$

Лагранжиан оказался представленным в виде двух членов, каждый из которых описывает свой набор степеней свободы.

Мы свели задачу двух тел к задаче о движении центра масс как свободной частицы с лагранжианом

$$L_1(\mathbf{R}, \mathbf{V}) = \frac{MV^2}{2}$$

и к задаче об относительном движении частиц, лагранжиан которого такой же, как для частицы массой μ в центральном потенциале:

$$L_2(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{\mu v^2}{2} - U(r).$$

1.5.2 Закон площадей (второй закон Кеплера)

Рассмотрим задачу движения нерелятивистской частицы в центральном потенциале. Соответствующий лагранжиан имеет вид

$$L(\mathbf{r},\mathbf{v}) = \frac{\mu v^2}{2} - U(r).$$

Данная функция Лагранжа симметрична относительно произвольного поворота частицы вокруг начала координат. Соответствующий интеграл движения — момент импульса частицы относительно начала координат:

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r} \times \mu\mathbf{v}].$$

Этот момент импульса совпадает с суммарным моментом импульса исходной пары частиц относительно центра масс:

$$\mathbf{r}_{a\text{ц}} = \mathbf{r}_a - \mathbf{R}, \quad \mathbf{v}_{a\text{ц}} = \mathbf{v}_a - \mathbf{V}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_{1\text{ц}}\frac{m_1+m_2}{m_2}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_{1\text{ц}}\frac{m_1+m_2}{m_2}, \quad \mathbf{r}_{2\text{ц}} = -\frac{m_1}{m_2}\mathbf{r}_{1\text{ц}}, \quad \mathbf{v}_{2\text{ц}} = -\frac{m_1}{m_2}\mathbf{v}_{1\text{ц}}.$$

$$\mathbf{L} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left[\mathbf{r}_{1\text{ц}}\frac{m_1+m_2}{m_2} \times \mathbf{v}_{1\text{ц}}\frac{m_1+m_2}{m_2}\right] = \left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}\right)[\mathbf{r}_{1\text{ц}} \times \mathbf{v}_{1\text{ц}}] = m_1[\mathbf{r}_{1\text{ц}} \times \mathbf{v}_{1\text{ц}}] + m_2[\mathbf{r}_{2\text{ц}} \times \mathbf{v}_{2\text{ц}}].$$

Это не случайное совпадение. Поворот радиус-вектора $\mathbf{r}$, соединяющего частицы, — это поворот обеих частиц относительно центра масс. Неважно, в каких переменных мы вычисляем интеграл движения, соответствующий данной симметрии, это один и тот же интеграл движения.

Выберем направление момента импульса $\mathbf{L}$ как направление оси z. Теперь $L_z = |\mathbf{L}|$. Тогда в силу сохранения момента импульса движение будет происходить в плоскости x, y. Координату z далее мы можем не рассматривать.

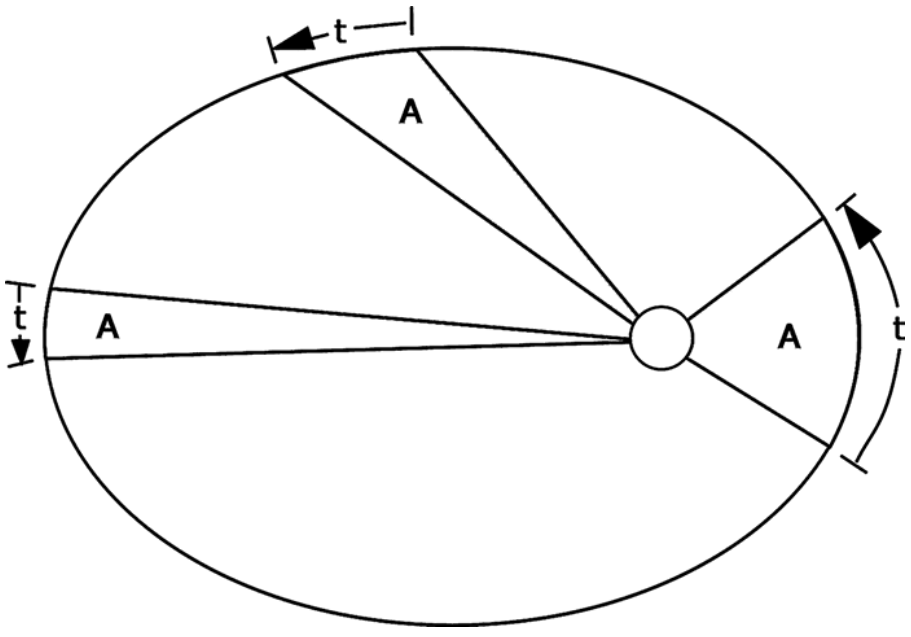
Если рассмотреть площадь, заметаемую радиус-вектором $\mathbf{r}$, то приращение этой площади за малое время — площадь бесконечномалого треугольника, натянутого на векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{dr}$, — составляет половину площади параллелограмма, натянутого на те же векторы:

$$ds = \frac{1}{2}|[\mathbf{r} \times \mathbf{dr}]| = \frac{dt}{2}\left|[\mathbf{r} \times \frac{\mathbf{dr}}{dt}]\right| = \frac{dt}{2}\frac{L_z}{\mu}.$$

Мы видим, что площадь, заметаемая в единицу времени, постоянна в силу сохранения момента импульса.

В задаче одного тела сохранение момента импульса выражается как *закон площадей* (*второй закон Кеплера*):

- частица движется в одной плоскости, проходящей через центр потенциала;
- площадь, заметаемая в единицу времени радиус-вектором, соединяющим центр потенциала и частицу, постоянна.



За равные времена радиус-вектор заметает равные площади.

1.5.3 Разделение переменных в полярных координатах

Момент импульса L_z связан с поворотами вокруг оси z, поэтому введём в плоскости (x, y) полярные координаты (r, ϕ):

$$x = r\,\cos\phi, \qquad y = r\,\sin\phi.$$

Элемент длины и метрика имеют вид

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2, \qquad g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Скорость в полярных координатах:

$$v^\alpha = (\dot r, \dot\phi).$$

Используя метрику, переписываем кинетическую энергию:

$$\frac{\mu}{2} v^\alpha v^\beta g_{\alpha\beta} = \frac{\mu}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\phi^2).$$

Теперь функция Лагранжа приобретает вид

$$L(r, \phi, \dot r, \dot\phi) = \frac{\mu}{2}\dot r^2 + \frac{\mu}{2} r^2\dot\phi^2 - U(r),$$

ϕ оказывается циклической координатой (т.е. лагранжиан от ϕ не зависит), поэтому сохраняется соответствующая компонента импульса.

Момент импульса $L_z = |\mathbf{L}|$ — обобщённый импульс, канонически сопряжённый координате ϕ (с нижним индексом, в криволинейных координатах это надо помнить):

$$L_z = \frac{\partial L}{\partial\dot\phi} = \mu r^2\dot\phi = p_\phi = p_2 = p^\alpha g_{\alpha 2} = \underbrace{\mu\dot\phi}_{p^\phi \neq \text{const}}\, r^2.$$

Отсюда выражаем угловую скорость:

$$\dot\phi = \frac{L_z}{\mu r^2}. \tag{1.5.1}$$

Когда мы найдём, как зависит от времени радиальная координата $r(t)$, мы сможем, проинтегрировав это уравнение по времени, получить зависимость от времени угловой координаты:

$$\phi(t_1) = \phi(t_0) + \frac{L_z}{\mu}\int\limits_{t_0}^{t_1}\frac{dt}{r^2(t)}.$$

Подставив выражение (1.5.1) в энергию, получаем, что угловая часть кинетической энергии может рассматриваться как потенциальная энергия[1] — *центробежный потенциал*:

$$\mathcal{E} = \frac{\mu}{2}\dot r^2 + \frac{L_z^2}{2\mu r^2} + U(r). \tag{1.5.2}$$

Можно написать соответствующую (уже одномерную!) функцию Лагранжа:

$$L(r, \dot r) = \frac{\mu}{2}\dot r^2 - \frac{L_z^2}{2\mu r^2} - U(r), \tag{1.5.3}$$

хотя она нам уже не понадобится, т.к. у нас есть ещё один интеграл движения — энергия, которая сохраняется, т.к. предыдущие наши лагранжианы не зависели от времени.

Из уравнения (1.5.2) выражаем радиальную скорость. Теперь известны обе компоненты скорости как функции от r:

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(\mathcal{E} - \frac{L_z^2}{2\mu r^2} - U(r)\right)}, \qquad \frac{d\phi}{dt} = \frac{L_z}{\mu r^2}. \tag{1.5.4}$$

Возведя уравнение в степень -1 и проинтегрировав по r, получаем, как связано время с радиальной координатой:

$$t_1 - t_0 = \pm\int\limits_{r_0}^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(\mathcal{E} - \frac{L_z^2}{2\mu r^2} - U(r)\right)}}. \tag{1.5.5}$$

[1] Зависит от координаты и не зависит от скорости.

Чтобы получить зависимость $r(t)$, надо решить получившееся уравнение относительно r, т.е. мы *решили в квадратурах* задачу одного тела.

Можно поделить компоненты скорости $\frac{d\phi}{dr} = \frac{\dot\phi}{\dot r}$ и, проинтегрировав, получить уравнение траектории, исключив время:

$$\phi_1 - \phi_0 = \pm \int\limits_{r_0}^{r_1} \frac{\frac{L_z}{\mu r^2}\, dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(\mathcal{E} - \frac{L_z^2}{2\mu r^2} - U(r)\right)}} = \pm \int\limits_{r_1^{-1}}^{r_0^{-1}} \frac{\frac{L_z}{\mu}\, d\rho}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(\mathcal{E} - \frac{L_z^2}{2\mu}\rho^2 - U(\rho^{-1})\right)}}. \tag{1.5.6}$$

В конце мы переписали интеграл, введя новую переменную $\rho = r^{-1}$.

Формула (1.5.6), записанная через ϕ, ρ, с точностью до постоянных множителей и переобозначений совпадает с формулой (1.5.5) с заменой t на ϕ и r на ρ. Таким образом, естественно взять угол вместо времени и обратный радиус $\rho = r^{-1}$ вместо координаты.

1.5.4 Первый закон Кеплера

Задача Кеплера — это задача о движении планеты в гравитационном поле Солнца. Потенциальная энергия имеет вид

$$U_{\text{гр.}} = -\frac{Gm_1m_2}{r}.$$

По формуле (1.5.6) для задачи Кеплера получаем

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_0 = \pm \int\limits_{r_0}^{r_1} \frac{\frac{L_z}{\mu r^2}\, dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(\mathcal{E} - \frac{L_z^2}{2\mu r^2} + \frac{Gm_1m_2}{r}\right)}}.$$

Прежде чем брать интеграл, перейдём к более удобным единицам измерения. Естественный масштаб по r зададут точки $r_\pm$, в которых подкоренное выражение обращается в нуль:

$$\mathcal{E} - \frac{L_z^2}{2\mu r_\pm^2} + \frac{Gm_1m_2}{r_\pm} = 0,$$

$$r_\pm^2 + \frac{Gm_1m_2}{\mathcal{E}} r_\pm - \frac{L_z^2}{2\mu\mathcal{E}} = 0.$$

При $\mathcal{E} < 0$ имеем два корня, при $\mathcal{E} \geqslant 0$ имеем один корень. Рассмотрим сначала случай $\mathcal{E} < 0$:

$$r_\pm = -\frac{Gm_1m_2}{2\mathcal{E}} \pm \sqrt{\left(\frac{Gm_1m_2}{2\mathcal{E}}\right)^2 + \frac{L_z^2}{2\mu\mathcal{E}}}.$$

Обозначим[2]

$$a = -\frac{Gm_1m_2}{2\mathcal{E}}, \qquad c = \sqrt{\left(\frac{Gm_1m_2}{2\mathcal{E}}\right)^2 + \frac{L_z^2}{2\mu\mathcal{E}}}, \qquad b = \frac{L_z}{\sqrt{-2\mu\mathcal{E}}}, \qquad e = \frac{c}{a}.$$

$$r_\pm = a \pm c = a(1 \pm e), \qquad \frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}.$$

В качестве единицы расстояния выберем a, обозначим $R = \frac{r}{a}$.

$$\Delta\phi = \frac{L_z}{\sqrt{-2\mu\mathcal{E}}} \int \frac{\frac{1}{r}\, dr}{\sqrt{-(r^2 + 2ar + b^2)}} = \sqrt{1 - e^2} \int \frac{\frac{1}{R}\, dR}{\sqrt{(R + e - 1)(1 + e - R)}}.$$

Меняем переменную интегрирования на $\xi = \frac{1}{R}$

$$\Delta\phi = \sqrt{1 - e^2} \int \frac{\frac{1}{R^2}\, dR}{\sqrt{(1 + \frac{e-1}{R})(\frac{1+e}{R} - 1)}} = -\sqrt{1 - e^2} \int \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - [1 - e]\xi)([1 + e]\xi - 1)}}.$$

[2]Мы ведь на самом деле знаем, что при отрицательной энергии должен получиться эллипс с фокусом в центре потенциала, поэтому подбираем параметры, ориентируясь на это: a — большая полуось, b — малая полуось, c — половина расстояния между фокусами, $e = \frac{c}{a}$ — *эксцентриситет*. Кстати, *эксцентриситет* обычно определяют довольно путано, а это просто расстояние от центра кривой до фокуса, измеренное в больших полуосях. Это определение годится для эллипса без оговорок, для гиперболы, если большой полуосью считать половину минимального расстояния между ветвями, для параболы, если считать, что фокус и один из концов большой оси ушли на бесконечность ($e = 1$).

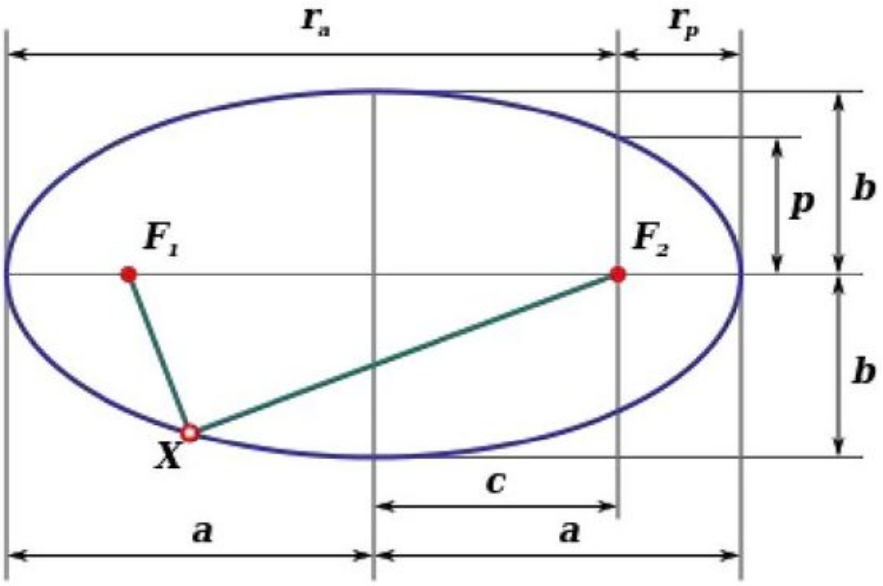
Выделяя в знаменателе квадрат и вводя переменную $\eta = \frac{(1-e^2)\xi - 1}{e} = \frac{\frac{b^2}{ar} - 1}{e}$,

$$\phi = -\int \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} = \arccos\eta = \arccos\frac{\frac{\mathfrak{p}}{r} - 1}{e}.$$

$$\frac{\mathfrak{p}}{r} = 1 + e\cos\phi, \qquad \mathfrak{p} = \frac{b^2}{a}.$$

Мы получили уравнение конического сечения (с фокусом в начале координат) в полярных координатах, т.е. мы вывели *первый закон Кеплера*. Величины $\mathfrak{p}$ и e называются *параметром* и *эксцентриситетом*.

Мы получили это уравнение для случая $e < 1$ (эллипс). Эта формула работает и для случаев $e > 1$ (гипербола) и $e = 1$ (парабола), в чём можно убедиться прямой проверкой[3].



Параметры эллипса.

(!!!) Зависимость $r(\phi)$ оказалась периодической с периодом 2π, т.е. траектория, если она не уходит на бесконечность, оказывается замкнутой! Этого мы не могли ожидать заранее для произвольного потенциала. В случае общего положения функция $r(\phi)$ для финитного движения периодична с периодом, несоизмеримым с 2π, и траектория оказывается незамкнутой. Если возмущение (отличие от потенциала $\sim 1/r$) мало, то это будет соответствовать движению по медленно вращающемуся эллипсу. Это явление называется прецессией перигелия. Его объяснение для Меркурия было одной из первых проверок общей теории относительности. Подробнее мы рассмотрим этот вопрос в дополнениях (см. с. 203, 264).

(*) Как обнаружил ещё Ньютон, среди центральных потенциалов, кроме потенциала $\sim -\frac{1}{r}$, похожим свойством замкнутости всех финитных траекторий обладает потенциал изотропного гармонического осциллятора $\sim r^2$, там период функции $r(\phi)$ всегда равен π, траектории тоже эллипсы, но притягивающий центр находится не в фокусе, а в центре.

1.5.5 Третий закон Кеплера

Выразим параметры кривой через условия задачи:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}L_z^2}{\mu(Gm_1m_2)^2}}, \qquad \mathfrak{p} = \frac{L_z^2}{\mu(Gm_1m_2)}. \tag{1.5.7}$$

Чтобы вычислить период, мы можем воспользоваться законом площадей. Мы уже получили $\frac{ds}{dt} = \frac{L_z}{2\mu}$. Поскольку площадь эллипса $s_э = \pi ab$, получаем

$$T = \pi\left(-\frac{Gm_1m_2}{2\mathcal{E}}\right)\left(\frac{L_z}{\sqrt{-2\mu\mathcal{E}}}\right)\frac{2\mu}{L_z} = \pi(Gm_1m_2)\sqrt{\frac{\mu}{-2\mathcal{E}^3}} = 2\pi\sqrt{\left(\frac{Gm_1m_2}{-2\mathcal{E}}\right)^3\frac{1}{G(m_1+m_2)}}.$$

[3]Случай гиперболического движения можно получить аналитическим продолжением на случаи мнимого a. Парабола — переходный случай между эллипсом и гиперболой, получается в пределе $a, b, c \to \infty$ при условии $a - c = \text{const}$, $\mathfrak{p} = \frac{b^2}{a} = \text{const}$.

Получаем *третий закон Кеплера* в уточнённом виде, выведенном Ньютоном (с отношением суммарных масс $M = m_1 + m_2$):

$$T = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{GM}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{T_1^2}{T_2^2}\frac{M_1}{M_2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

1.5.6 Теорема вириала

Решая задачу Кеплера, мы получили, что её решения допускают масштабные преобразования: частица может летать по подобным эллипсам (с одинаковым эксцентриситетом e), но разных размеров и с разным периодом. Если изменить масштаб единиц расстояния и времени, то эти движения будут описываться одинаково.

Таким образом, у нас имеется некоторая симметрия по отношению к масштабным преобразованиям. Подробнее в духе теоремы Нётер мы обсудим эту симметрию в дополнениях (см. с. 204).

Эта симметрия имеет место, когда потенциал является *однородной функцией* координат, т.е. при изменении масштаба координат он преобразуется следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\to \alpha\mathbf{r}, \\ U(\mathbf{r}_1, \dots \mathbf{r}_n) &\to U(\alpha\mathbf{r}_1, \dots \alpha\mathbf{r}_n) = \alpha^k U(\mathbf{r}_1, \dots \mathbf{r}_n). \end{aligned}$$

Функция, удовлетворяющая этому свойству самоподобия, называется *однородной функцией степени* k.

Определим следующую величину:

$$G = \sum_a (\mathbf{p}_a, \mathbf{r}_a).$$

$$\frac{d}{dt}G = \frac{d}{dt}\sum_a (\mathbf{p}_a, \mathbf{r}_a) = \underbrace{\sum_a (\mathbf{p}_a, \dot{\mathbf{r}}_a)}_{2\mathcal{E}_\text{к}} + \sum_a (\dot{\mathbf{p}}_a, \mathbf{r}_a) = 2\mathcal{E}_\text{к} + \sum_a \left(-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}, \mathbf{r}_a\right).$$

Для однородной функции U, с одной стороны,

$$\frac{d}{d\alpha}U(\alpha\mathbf{r}_1, \dots, \alpha\mathbf{r}_n) = \frac{d}{d\alpha}\alpha^k U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = k\alpha^{k-1}U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n),$$

с другой стороны, дифференцируя её как сложную функцию, находим

$$\frac{d}{d\alpha}U(\alpha\mathbf{r}_1, \dots, \alpha\mathbf{r}_n) = \sum_a \left(\frac{\partial U}{\partial(\alpha\mathbf{r}_a)}(\alpha\mathbf{r}_1, \dots, \alpha\mathbf{r}_n), \mathbf{r}_a\right).$$

Приравняв эти два выражения и положив $\alpha = 1$, получаем

$$kU = \sum_a \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}, \mathbf{r}_a\right).$$

В результате

$$\frac{d}{dt}G = 2\mathcal{E}_\text{к} - kU.$$

Пусть частицы совершают такое движение, что функция $G(t)$ ограничена (обычно этому условию удовлетворяет финитное движение). Производная от ограниченной функции при усреднении по большому времени стремится к нулю:

$$\overline{\frac{dG}{dt}} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\frac{dG}{dt}\,dt = \frac{G(t_0+\Delta t) - G(t_0)}{\Delta t} \to 0 \quad \text{при } \Delta t \to \infty.$$

Если движение периодическое, то при усреднении по периоду среднее также обнуляется.

Получаем соотношение между средней кинетической и средней потенциальной энергиями для финитного движения в однородном потенциале степени k, которое называется *теоремой вириала*:

$$2\overline{\mathcal{E}_\text{к}} = k\overline{U}.$$

1.5.7 Задачи 17–19

Задача 17. Вектор Рунге-Ленца. Нерелятивистская частица с зарядом $-e$ и массой m движется в кулоновском потенциале, создаваемом зарядом Ze с массой M. Покажите, что *вектор Рунге-Ленца* является интегралом движения:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = Ze^2\frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{1}{\mu}[\mathbf{p}\times\mathbf{L}], \qquad \mathbf{L} = [\mathbf{r}\times\mathbf{p}], \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{M}.$$

Задача 18. Теорема вириала: самые частые случаи.
Чаще всего теорема вириала встречается для случаев $U \sim r^2$ — *система* осцилляторов и $U \sim 1/r$ — *система* гравитирующих частиц или электрических зарядов (обратите внимание: частиц может быть много, главное, чтобы потенциальная энергия была однородной функцией координат). Выпишите для этих случаев соотношения между средней кинетической энергией, средней потенциальной энергией и полной энергией.

Задача 19. Пузырь[4]**.**
а) *При помощи теоремы вириала* найдите среднее давление P на стенки сферического пузыря с идеальным газом. Плотность числа частиц — n, средняя кинетическая энергия атома газа — ε.
б)* Как изменится решение, если взять сосуд произвольной формы?

[4]Задача составлена на основе задачи 7.58 из книги *Пятницкий Е.С., Трухан Н.М., Ханукаев Ю.И., Яковенко Г.Н.* Сборник задач по аналитической механике. М. Физматлит, 2002.

Глава 1.6

Кинематика и геометрия: от Ньютона к Минковскому (с. 206)

Кинематика — это величины, применяющиеся для описания эволюции системы, и соотношения между ними.

Динамика — это уравнения, в которые эти величины входят, основные блоки этих уравнений, их свойства и соотношения между ними.

Граница между кинематикой и динамикой не всегда чётко установлена. Импульс с точки зрения лагранжева формализма — это динамическая величина, а с точки зрения гамильтонова формализма — кинематическая.

Выбор кинематики — это выбор языка описания системы. Часто кинематика — это специальная геометрия.

Мы сейчас опишем и сравним кинематику точечной частицы в ньютоновской механике и в специальной теории относительности (СТО).

Ньютоновская кинематика точки — *геометрия параметризованных кривых в трёхмерном евклидовом пространстве*. В роли параметра выступает время. Ньютоновская кинематика может использоваться и в СТО, но там она менее удобна.

Кинематика СТО — *геометрия времениподобных кривых в четырёхмерном пространстве Минковского*. Кинематика СТО обеспечивает автоматическое выполнение ряда ключевых законов СТО и поэтому, как более специализированный инструмент, очень удобна для СТО[1], но малопригодна для теорий, не совместимых с СТО.

1.6.1 Кинематика точки и геометрия ньютоновской механики

1.6.1.1 Трёхмерное пространство ньютоновской механики

Ньютоновское пространство — евклидово пространство. Для евклидова пространства существуют предпочтительные системы координат — декартовы координаты $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$, в которых метрический тензор имеет вид

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = g^{\alpha\beta}, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

$$d\ell^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (d\mathbf{r}, d\mathbf{r})$$

— элемент длины (другая форма записи метрики).

Раз есть метрика, есть и скалярное произведение, с помощью которого можно вычислить длину любого вектора. Мы будем обозначать длину вектора $\mathbf{a}$ той же буквой a, но не жирной, или в виде модуля:

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}.$$

В силу того что метрический тензор задаётся единичной матрицей, в декартовых координатах можно не различать верхние и нижние индексы.

В декартовых (и любых аффинных) координатах параллельный перенос тривиален — компоненты тензора при таком переносе не меняются, и можно не обращать внимание на то, к какой точке пространства относится тензор.

[1] И, с соответствующими дополнениями, для электродинамики, из которой СТО и выросла.

В декартовых (и любых аффинных) координатах, если начало системы координат фиксировано, набор координат r_α можно считать вектором, который называется *радиус-вектором* и обозначается $\mathbf{r}$.

Дифференцируя по времени радиус-вектор, мы получаем вектор скорости:

$$v_\alpha = \dot{r}_\alpha, \qquad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}.$$

Дифференцируя по времени вектор скорости, мы получаем вектор ускорения:

$$a_\alpha = \dot{v}_\alpha = \ddot{r}_\alpha, \qquad \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}.$$

Геометрически вектор скорости — касательный вектор к траектории частицы, а вектор ускорения — касательный вектор к *годографу* (траектории точки $\mathbf{v}(t)$ в пространстве скоростей). Если вектор скорости не обращается в нуль, его можно отнормировать на единицу и получить единичную касательную к траектории:

$$\mathbf{l} = \frac{\mathbf{v}}{v}.$$

Вектор ускорения может быть разложен на продольную часть (параллельную скорости) и поперечную часть (перпендикулярную скорости):

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\parallel + \mathbf{a}_\perp, \quad \mathbf{a}_\parallel = \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v},\mathbf{a})}{v^2} = \mathbf{l}(\mathbf{l},\mathbf{a}), \quad \mathbf{a}_\perp = \mathbf{a} - \mathbf{a}_\parallel = \mathbf{a} - \mathbf{l}(\mathbf{l},\mathbf{a}).$$

Если $\mathbf{a}_\perp \neq 0$, его можно отнормировать на единицы и получить вектор нормали к траектории:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}_\perp}{a_\perp}.$$

Если в какой-то точке траектории определены векторы $\mathbf{l}$ и $\mathbf{n}$, то можно определить вектор бинормали:

$$\mathbf{b} = [\mathbf{l} \times \mathbf{n}], \qquad b_\gamma = l_\alpha n_\beta \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}.$$

Векторы $\mathbf{l}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ (если они определены) образуют ортонормированный правый базис.

Мы можем ввести вдоль траектории *естественный параметр* (длину):

$$\ell = \int |d\mathbf{r}| = \int \sqrt{(d\mathbf{r}, d\mathbf{r})} = \int \sqrt{\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)}\, dt = \int v\, dt.$$

Из математического анализа мы имеем следующие *кинематические тождества*:

$$\begin{aligned} v &= \frac{d\ell}{dt}, \quad \mathbf{l} = \frac{d\mathbf{r}}{d\ell}, \\ \frac{\mathbf{n}}{\rho} &= \frac{d\mathbf{l}}{d\ell}, \quad \text{где} \quad \rho \quad \text{— радиус кривизны}, \\ \mathbf{a}_\perp &= \mathbf{n}\frac{v^2}{\rho}, \quad \mathbf{a}_\parallel = \mathbf{l}\frac{dv}{dt}. \end{aligned}$$

1.6.1.2 Четырёхмерное пространство ньютоновской механики

Мы можем рассмотреть четырёхмерное *пространство-время* с координатами t, x, y, z в рамках ньютоновской механики. Это будет полезно с точки зрения геометризации принципа относительности и абсолютного времени, а также с точки зрения упрощения перехода к специальной теории относительности (СТО), в которой пространственно-временной взгляд оказывается наиболее естественным.

1. Имеется *множество точек* четырёхмерного пространства $\mathbb{R}^4$. Каждая точка задаёт место в пространстве и момент времени, поэтому эти точки естественно называть *событиями* (другое название — *мировые точки*).

2. Между любыми двумя событиями может быть определено *изменение времени* (по модулю), которое не зависит от выбора системы отсчёта. Эту структуру (можно назвать её расстоянием по времени) мы обозначим dt.

Определена именно разность времён, а не само время, т.к. начало отсчёта по времени (нуль на часах) может быть выбрано произвольно. Введя dt, мы разбиваем пространство-время на множество слоёв одновременных событий $dt = 0$.

3. *Между* любыми двумя *одновременными событиями* (для которых $dt = 0$) можно определить евклидово *расстояние*. Обозначим эту структуру $d\ell|_{dt=0}$.

(!) Расстояние (в ньютоновской механике) не зависит от выбора системы отсчёта только для одновременных событий. Если события произошли не одновременно, то в зависимости от движения системы отсчёта расстояние между ними может быть любым. Например, расстояние между событиями равно нулю с точки зрения наблюдателя, который пролетел сначала через одно событие, а потом через другое. Таким образом, мы ввели на каждом слое одновременных событий структуру евклидова пространства.

4. Ньютоновская механика выделяет среди всех возможных движений движение по инерции — движение по прямой с постоянной скоростью. Мировая линия такого движения — прямая, вдоль которой $dt \neq 0$. Поэтому нам необходима структура A (*аффинная структура* = множество всех прямых), которая отличала бы такие прямые от кривых.

В пределах каждого слоя $dt = 0$ прямые определяются из евклидовой геометрии как кривые экстремальной (минимальной) длины (аффинная структура должна быть согласована с этим), но при $dt \neq 0$ евклидова геометрия бесполезна, поэтому аффинная структура — это новая структура, не сводимая к предыдущим. Аффинная структура позволяет слоям одновременных событий скользить друг относительно друга, но только так, чтобы прямые оставались прямыми.

В итоге мы описываем *ньютоновское пространство-время* $\mathbf{N}$ как четвёрку объектов:

$$\mathbf{N} = (\mathbb{R}^4, dt, d\ell|_{dt=0}, \mathsf{A}),$$

где
1) $\mathbb{R}^4$ — *множество событий*;
2) dt — *изменение времени*;
3) $d\ell|_{dt=0}$ — *евклидова метрика на слое одновременных событий*;
4) A — *аффинная структура.*

В галилеевых координатах t, x, y, z имеем
1) $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ — *множество событий*, образованное четвёрками вещественных чисел;
2) $t = |t_1 - t_0|$ — *изменение времени* между событиями (t_0, x_0, y_0, z_0) и (t_1, x_1, y_1, z_1);
3) $\ell = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$ — *евклидова метрика (расстояние)* между одновременными событиями (t_0, x_0, y_0, z_0) и (t_0, x_1, y_1, z_1);
4) A — *аффинная структура*, определяющая прямые как кривые вида $x = x_0 + v_x t$, $y = y_0 + v_y t$, $z = z_0 + v_z t$ ($x_0, y_0, z_0, v_x, v_y, v_z = \text{const}$).

Симметрии пространства-времени $\mathbf{N}$, т.е. преобразования $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$, сохраняющие введённые структуры, — это переходы между произвольными инерциальными системами отсчёта в ньютоновской механике:
1) сдвиги по времени $t \to t + t_0$;
2) обращение времени $t \to -t$;
3) сдвиги пространства $\mathbf{r} \to \mathbf{r} + \mathbf{r}_0$;
4) инверсия пространства $\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$;
5) повороты $\mathbf{r} \to \hat{R}\mathbf{r}$, $\hat{R}\hat{R}^T = \hat{1}$, $\det \hat{R} = 1$;
6) преобразования Галилея $\mathbf{r} \to \mathbf{r} - \mathbf{v}_0 t$;
7) произвольные комбинации перечисленных преобразований.

(!) Трёхмерная кинематика ньютоновской механики применима в СТО. Четырёхмерная структура пространства-времени $\mathbf{N}$ в СТО не применима, т.к. она включает не зависящее от системы отсчёта изменение времени между двумя событиями dt и допускает преобразования Галилея. Поэтому для СТО мы построим другую геометрию пространства-времени, то же множество событий $\mathbb{R}^4$ будет оснащено другими структурами и будет иметь другие симметрии.

1.6.2 Постулаты специальной теории относительности

1. При скоростях, малых по сравнению со скоростью света в вакууме, $v \ll c$, справедлива ньютоновская механика.

2. Справедлив *принцип относительности*: законы природы одинаковы для неподвижного наблюдателя и наблюдателя, движущегося равномерно и прямолинейно.

3. Для всех инерциальных наблюдателей скорость света в вакууме одинакова.

Первые два постулата, кажется, не могут вызвать возражений. Оба они справедливы для обычной ньютоновской механики.

То, что никакое материальное тело не может превысить скорость света, следует из постулатов 1,2,3: если мы начнём «гнаться за светом», постепенно ускоряясь, то каждый раз будем обнаруживать, что свет

удирает от нас со скоростью c. Поэтому догнать, а тем более обогнать свет мы не сможем, для этого нам понадобилось бы ускориться не постепенно, а мгновенно, что запрещает ньютоновская механика (см. пункт 1).

Постулат 3 кажется противоречащим первым двум, но на самом деле это не так. О том, как всё совместить между собой, ниже будет два разговора: одно объяснение будет «на пальцах», а другое — с применением простых формул.

Объяснение «на пальцах», скорее всего, оставит ощущение некой незавершённости: «в этих случаях вы выкрутились, но никто не гарантирует, что такие фокусы будут удаваться и впредь».

Второе объяснение будет использовать по сути одну-единственную формулу, которая позволит вам вычислить, как будут идти движущиеся часы.

(!*) Когда в СТО говорится о скорости $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, которая не может быть больше скорости света c, всегда имеется в виду *скорость изменения положения* $\mathbf{r}$ какого-то объекта *относительно данной системы отсчёта по времени* t *данной системы отсчёта*. Если вы измеряете «скорость сближения» двух тел как $\frac{d(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}{dt}$, то она может оказаться больше c. Если вы измеряете положение $\mathbf{r}$ в одной системе отсчёта, а время t' — в другой, то скорость $\frac{d\mathbf{r}}{dt'}$ может оказаться больше c.

Ниже мы рассмотрим ряд мысленных экспериментов, которые помогут нам установить, как идут движущиеся часы, и построить геометрию специальной теории относительности (СТО).

1.6.3 Об отличиях современной физики от классической (ф)

Можно и по-простому, но сложнее выйдет.

1. В современной физике для теории создаётся **специализированный математический язык**, который автоматически исключает возможность описания систем, не удовлетворяющих некоторым ключевым постулатам теории. Такой язык часто основан на **специальной геометрии**. При построении такого языка, чтобы выделить основные понятия, могут использоваться **мысленные эксперименты**.

Теорию при этом можно описать и на стандартном для классической физики языке математического анализа и дифференциальных уравнений, но такое описание оказывается более сложным и менее прозрачным. Изложить теорию относительности «по-простому» можно, но выйдет сложнее, чем «со сложной математикой».

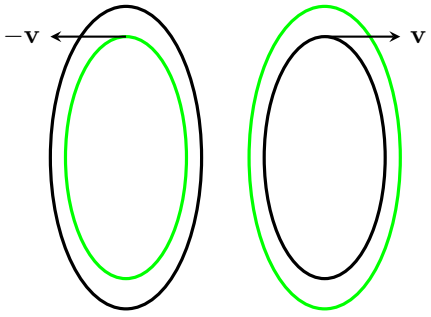
2. Современная физическая теория требует **развитой теории измерений**. Это значит, что для того, чтобы понять, что означают предсказания теории и почему они оказываются совместимы между собой, надо анализировать детали процесса измерений. Часто анализ процесса измерений проводится в форме **мысленных экспериментов**.

1.6.4 Мысленные эксперименты

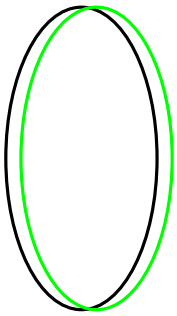
1.6.4.1 Неизменность поперечных размеров

Очевидно (в современной физике «очевидно» — очень опасное слово), что поперечные (т.е. измеренные в направлении поперёк скорости) размеры движущихся объектов должны оставаться прежними.

Пусть два одинаковых кольца летят навстречу друг другу (скорость перпендикулярна плоскости колец). Сядем в систему координат, в которой первое (чёрное) кольцо покоится. Если бы поперечные размеры для движущегося (второго) кольца изменялись (например, уменьшились), то одно кольцо могло бы пролететь через другое. Сядем теперь в систему координат, в которой второе кольцо покоится. В этом случае кольца меняются ролями.



Получается, что то, какое кольцо пролетит сквозь какое, зависит от точки зрения? Разумеется, нет! Если кольца затянуты плёнкой, то плёнка порвётся только в одном кольце, сквозь которое пролетело другое. Остаётся вариант, что кольца столкнутся лоб в лоб.



Отсюда следует, что поперечный размер предмета не зависит от скорости. Таким образом, в данном случае как раз никакого «чуда» нет.

1.6.4.2 Собственное время и интервал

> . . . время — это то, что измеряется часами.
>
> *Г. Бонди, «Гипотезы и мифы в физической теории»*

Рассмотрим теперь замедление времени на примере простейших «часов», состоящих из двух параллельных зеркал, между которыми колеблется световой импульс (тонкости технической реализации таких часов нас не интересуют).

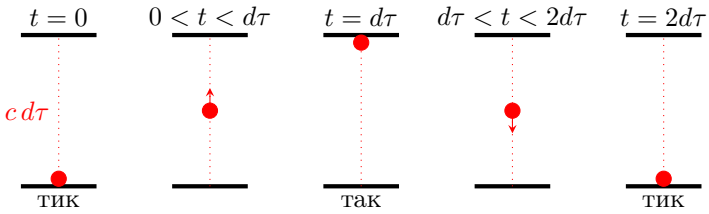
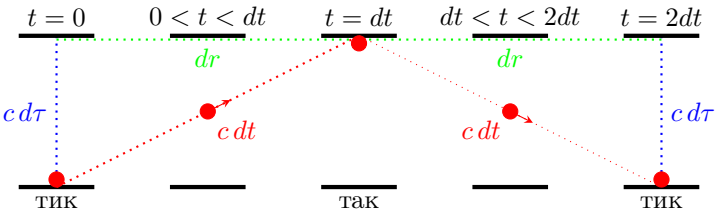


Рисунок показывает, как работают часы, если они неподвижны: $d\tau$ — такт часов (от «тика» до «така»); $c\,d\tau$ — расстояние между зеркалами.

Пусть теперь часы летят с постоянной скоростью в направлении поперёк линии, соединяющей зеркала. (На самом деле для нас не важно, летят часы боком или задом, просто при такой ориентации проще считать: поперечные размеры остаются прежними, а продольное сокращение на ход часов не влияет.)



Часы движутся. Свет идёт по гипотенузе прямоугольного треугольника со сторонами $c\,d\tau$, dr, $c\,dt$.

В системе часов от «тика» до «така» по-прежнему проходит время $d\tau$, расстояние между зеркалами по-прежнему составляет $c\,d\tau$, но по часам неподвижного наблюдателя время между «тиком» и «таком» $dt > d\tau$, так как от «тика» до «така» часы как целое смещаются на расстояние dx и свету приходится проходить большее расстояние $c\,dt = \sqrt{(c\,d\tau)^2 + dr^2}$.

За период (от «тика» до «тика») смещение часов составляет $2dr$, световой импульс проходит $2c\,dt$, а показания часов изменяются на $2\,d\tau$.

В евклидовой геометрии

$$dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Показания часов не зависят от того, из какой системы отсчёта на них смотрят, так что $d\tau$ — инвариант. Мы получили из теоремы Пифагора для треугольника на рисунке

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dr^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Таким образом, мы нашли, что для любой системы приращения пространственных и временны́х координат между событиями «тик» и «так», скомбинированные в такую квадратичную форму, дают одинаковый результат. События «тик» и «так» могут быть выбраны произвольно (часы могут быть с разным периодом и двигаться по-разному) с одним условием, чтобы от «тика» до «така» можно было долететь, не превышая скорости света c.

Инвариантность квадратичной формы в четырёхмерном пространстве достаточно проверить на четырёх линейно независимых векторах $(c\,dt, dx, dy, dz)$. Можно выбрать все векторы так, чтобы инвариантность проверялась с помощью рассмотренного мысленного эксперимента, то есть при условии $c\,dt > dr$.

После того как инвариантность квадратичной формы доказана, мы получаем, что для любой пары событий следующая величина (*метрика Минковского, интервал*)

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{1.6.1}$$

не зависит от выбора инерциальной системы отсчёта.

В последнем выражении мы поменяли знак, чтобы величину ds^2 можно было рассматривать как обобщение расстояния.

В ньютоновской механике расстояние могло быть определено независимым от выбора инерциальной системы отсчёта образом только между одновременными событиями, а новая величина *интервал* определена для любой пары событий.

Пространство-время, на котором введён интервал (1.6.1), называется *пространством Минковского* $\mathbf{M}$.

Мы описываем *пространство-время Минковского* $\mathbf{M}$ как пару объектов:

$$\mathbf{M} = (\mathbb{R}^4, ds^2),$$

где
1) $\mathbb{R}^4$ — *множество событий*;
2) ds^2 — *интервал*.

Интервал заменяет собой все три структуры, которые вводились в ньютоновском пространстве-времени.

Евклидову метрику интервал продолжает на неодновременные события:

$$ds^2|_{dt=0} = d\ell^2|_{dt=0}.$$

Изменение времени интервал уточняет, причём оно оказывается определено не для всякой пары событий, а только для случая $ds^2 \leqslant 0$ $(dr \leqslant c|dt|)$:

$$ds^2 = -c^2d\tau^2, \qquad d\tau|_{dr \ll c|dt|} \approx dt.$$

Аффинную структуру A теперь не надо задавать отдельно, т.к. она выводится из метрики Минковского: прямая — кривая в пространстве-времени $\mathbf{M}$, интервал вдоль которой экстремален.

Симметрии пространства-времени $\mathbf{M}$, т.е. преобразования $\mathbf{M} \to \mathbf{M}$, сохраняющие введённую структуру, — это переходы между произвольными инерциальными системами отсчёта в СТО:
1) сдвиги по времени $t \to t + t_0$;
2) обращение времени $t \to -t$;
3) сдвиги пространства $\mathbf{r} \to \mathbf{r} + \mathbf{r}_0$;
4) инверсия пространства $\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$;
5) повороты $\mathbf{r} \to \hat{R}\mathbf{r}$, $\hat{R}\hat{R}^T = \hat{1}$, $\det \hat{R} = 1$;
6') преобразования Лоренца (переход к движущейся системе отсчёта, пока приводим без вывода)

$$ct \to \frac{ct - \frac{v_0}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}, \qquad x \to \frac{x - v_0t}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}, \qquad y \to y, \qquad z \to z;$$

7) произвольные комбинации перечисленных преобразований.

Совокупность симметрий пространства Минковского образует *группу Пуанкаре*.

Как мы видим, за исключением пункта 6, симметрии совпадают с симметриями пространства $\mathbf{N}$. Пункт 6' (преобразования Лоренца) — это уточнённый вариант перехода в движущуюся инерциальную систему отсчёта (раньше это были преобразования Галилея).

Дополнительные мысленные эксперименты приведены в дополнении (см. с. 206), они не обязательны для последовательного изложения, но полезны для понимания. Поэтому, если читатель располагает временем, ему может быть полезно прочитать про дополнительные мысленные эксперименты хотя бы поверхностно.

1.6.5 О единицах измерения времени и расстояния в СТО

Учитесь не замечать скорость света в релятивистских формулах!

Формула для новой метрики (1.6.1) показывает, что скорость света c — естественный коэффициент перевода единиц времени в единицы расстояния. Более того, в современной метрологии для скорости света принято *точное значение*, с помощью которого значение метра определяется через эталон времени:

$$c = 299\,792\,458\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

С точки зрения СТО было бы естественно положить скорость света безразмерной единицей $c = 1$, т.е. использовать одинаковые единицы для пространственных и временны́х интервалов.

1 сантиметр времени — время, за которое свет в вакууме проходит расстояние 1 сантиметр.

1 секунда расстояния — расстояние, которое свет в вакууме проходит за 1 секунду.

Использование разных единиц для расстояния и времени похоже на ситуацию, в которой мы бы измеряли расстояния с востока на запад в сантиметрах, а расстояния с севера на юг — в милях. Конечно, и в такой странной системе единиц можно было бы строить геометрию, но в этом случае во многих формулах появлялась бы новая «фундаментальная» константа — коэффициент пересчёта миль в сантиметры.

Численное значение скорости света (коэффициент пересчёта секунд в сантиметры) столь же фундаментально, как коэффициент пересчёта миль в сантиметры: и то и другое — число, значение которого обусловлено исторически сложившимся выбором единиц измерения и которое в более удобной системе единиц может быть исключено. Тем не менее, *скорость света является фундаментальной константой*, поскольку задаёт нам *физически выделенную единицу скорости*. В ньютоновской механике выделенной единицы скорости не было.

Выбрав в качестве единицы скорости скорость света, мы получили, что расстояние и время стали измеряться в одних и тех же единицах. Одновременно мы получаем, что масса, энергия и импульс тоже стали измеряться в одних и тех же единицах. (Вспомните, что импульс в ньютоновской механике имеет вид $p = mv$, а кинетическая энергия — $\mathcal{E}_\text{к} = mv^2/2$, где v — скорость, а m — масса.)

В СТО мы часто будем полагать $c = 1$. При необходимости вернуться к обычным единицам измерения мы всегда можем вставить скорость света в формулы *из соображений размерности*.

(!) Для того чтобы упростить восстановление скорости света в формулах, мы постулируем, что все пространственно-временные (четырёхмерные) объекты имеют ту же размерность, что и их пространственные (трёхмерные) аналоги. Если в одном 4-мерном объекте (векторе или тензоре) совмещаются разные 3-мерные объекты, то будем «демократически» ориентироваться на объект с наибольшим числом компонент (у которого нет временны́х индексов, а есть только пространственные):

- интервал — размерность длины;
- собственное время — размерность времени;
- 4-скорость — размерность скорости;
- 4-ускорение — размерность ускорения;
- 4-импульс — размерность импульса;
- 4-плотность тока — размерность плотности тока;
- тензор энергии импульса (аналог тензора механических напряжений) — размерность давления (плотности энергии).

(!) Мы будем выбирать коэффициенты в определении физических величин так, чтобы в нерелятивистских теориях (не использующих теорию относительности) скорость света не появлялась. Электродинамику мы считаем релятивистской теорией вне зависимости от скоростей рассматриваемых частиц.

(*) Вообще, приравнивая единице фундаментальные константы, можно получить разные интересные системы единиц. Так, например, если принять равной единице ещё и гравитационную постоянную (так любят делать физики, работающие с общей теорией относительности), то можно будет измерять в сантиметрах не только время, но и массу («1 сантиметр массы»=«масса чёрной дыры радиусом 2 сантиметра»). А если приравнять единице ещё и постоянную Планка, то система единиц окажется полностью фиксированной (так называемые «планковские единицы»). Однако, с точки зрения экспериментаторов, фиксировать точное численное значение гравитационной постоянной не следует: эта постоянная известна со слишком большой погрешностью.

Глава 1.7

Кинематика и геометрия СТО (с. 212)

1.7.1 Геометрия Минковского

В специальной теории относительности удобно рассматривать время t как дополнительную координату $x^0 = ct$ (c — скорость света) наряду с тремя пространственными координатами $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$. Таким образом, получается четырёхмерное *пространство-время*, которое выступает как конфигурационное пространство в кинематике точечной частицы. Пространство-время — *псевдоевклидово пространство*, что означает, что существует система координат, в которой метрический тензор — постоянная матрица (как в евклидовом пространстве), но метрический тензор не является положительно определённым.

В СТО пространство-время называется также *пространством Минковского*. В пространстве Минковского существуют предпочтительные системы координат — *лоренцевы координаты*, в которых метрический тензор имеет вид[1]

$$g_{ij} = \eta_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = g^{ij}, \qquad i,j = 0,1,2,3. \tag{1.7.1}$$

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = (\underline{dx}, \underline{dx})$$

— элемент интервала (другая форма записи метрики).

Обозначение η_{ij} будет использоваться только для метрики Минковского в лоренцевых координатах, т.е. в стандартной форме (1.7.1).

Поскольку даже в лоренцевых координатах метрический тензор отличается от единичной матрицы, в пространстве-времени мы обязаны последовательно различать верхние и нижние индексы.

В лоренцевых (и любых аффинных) координатах, если начало системы координат фиксировано, набор координат x^i можно считать вектором, который называется *четырёхмерным радиус-вектором* и обозначается x^i или $\underline{x}$.

В лоренцевых (и любых аффинных) координатах параллельный перенос тривиален — компоненты тензора при таком переносе не меняются, и можно не обращать внимание на то, к какой точке пространства относится тензор.

Векторы в пространстве Минковского мы будем обозначать, как обычно, используя тензорные (индексные) обозначения v^i. Иногда мы будем обозначать векторы (с верхними индексами) в пространстве Минковского подчёркнутыми буквами $\underline{v}$. Пространственную часть 4-вектора часто будем обозначать как 3-вектор:

$$v^i = \underline{v} = (v^0; \underbrace{v^1; v^2; v^3}_{\mathbf{v}}) = (v^0; \mathbf{v}).$$

$$v_i = g_{ij}v^j = (v_0, \mathbf{v}) = (-v^0, \mathbf{v}) \neq \underline{v}.$$

Раз есть метрика, есть и скалярное произведение, однако квадрат ненулевого вектора не обязательно положителен:

$$(\underline{a}, \underline{b}) = g_{ij}a^ib^j = -a^0b^0 + (\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

В зависимости от знака скалярного квадрата векторы и пространственно-временные интервалы делятся на три типа:

[1] В литературе встречаются два варианта метрики Минковского, отличающихся общим знаком. Соответственно эквивалентные формулы в разных книгах могут иметь несколько разный вид. В курсе теоретической физики Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшица метрика Минковского используется с противоположным знаком.

- $(\underline{a},\underline{a}) = 0$ — *светоподобные векторы* (таковы касательные векторы к мировой линии частицы, движущейся со скоростью света);
- $(\underline{a},\underline{a}) > 0$ — *пространственноподобные векторы* (таковы базисные векторы по пространственным осям, а также касательные векторы к мировой линии частицы, движущейся со сверхсветовой скоростью);
- $(\underline{a},\underline{a}) < 0$ — *времениподобные векторы* (таков базисный вектор по временно́й оси, а также касательные векторы к мировой линии частицы, движущейся с досветовой скоростью).

Те же типы применимы к гладким кривым в пространстве-времени. Тип кривой определяется типом касательного вектора.

Как мы увидим при изучении симметрий пространства Минковского, любые два направления одного типа можно перевести друг в друга переходом от одних лоренцевых координат к другим лоренцевым координатам, в частности, любое пространственноподобное направление можно сделать направлением новой оси x, или любое времениподобное направление можно сделать направлением оси t, или любое светоподобное направление можно сделать направлением $x = ct$. Это позволяет установить физический смысл интервалов разного типа:

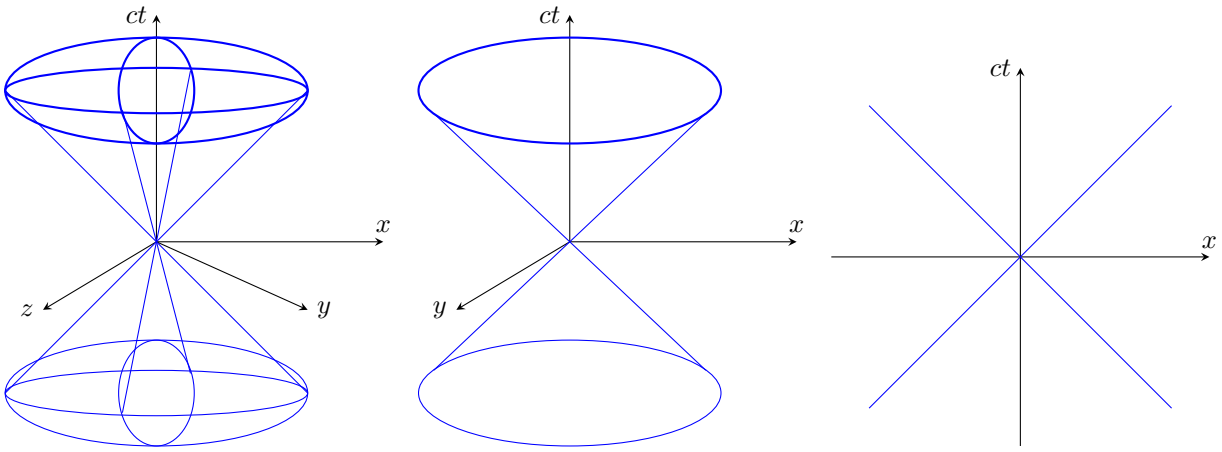
- $ds^2 = 0$, *светоподобный интервал* — через пару событий, разделённых таким интервалом, может пролететь (со скоростью света) безмассовая частица;
- $ds^2 > 0$, *пространственноподобный интервал* — существует лоренцева система отсчёта, в которой события, разделённые этим интервалом, будут одновременными; в этой системе расстояние между событиями составит $d\ell = ds$;
- $ds^2 < 0$, *времениподобный интервал* — через пару событий, разделённых таким интервалом, может пролететь (с досветовой скоростью) массивная частица, для лоренцевой системы отсчёта, связанной с такой частицей, события будут происходить в одной точке пространства, а время между этими событиями составит $d\tau = \frac{\sqrt{-ds^2}}{c}$, т.е. $ds = \pm \mathrm{i} c\, d\tau$.

Точки пространства-времени называют *событиями* или *мировыми точками*, а кривые, представляющие движение частиц, — *мировыми линиями*. В трёхмерной кинематике траектории были параметризованными кривыми, в роли параметра выступало время. Вводить параметр вдоль мировой линии не обязательно (но можно для удобства), так как время является одной из координат.

Массивная частица в СТО может двигаться только с досветовой скоростью, а безмассовая — только со скоростью света. На языке геометрии Минковского эти условия формулируются так: мировая линия массивной частицы времениподобна, а мировая линия безмассовой частицы светоподобна.

Для наглядного представления интервалов и векторов разного типа используется *световой конус* — множество событий $\underline{x} = (ct, x, y, z) = (ct, \mathbf{r})$, интервал от которых до фиксированного события (вершины конуса) $\underline{x}_0 = (ct_0, x_0, y_0, z_0) = (ct_0, \mathbf{r}_0)$ равен нулю. Световой конус задаётся уравнением

$$(\underline{x} - \underline{x}_0, \underline{x} - \underline{x}_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -(ct - ct_0)^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 0.$$



Световые конусы в 4-мерном, 3-мерном и 2-мерном пространствах Минковского ($\underline{x}_0 = 0$).
В большинстве случаев мы будем рисовать 2-мерное или 3-мерное сечение светового конуса.

Образующие конуса — всевозможные мировые линии свободных безмассовых частиц, которые встречаются в событии $\underline{x}_0$. Каждое сечение светового конуса $t = \mathrm{const}$ — сфера радиусом $|ct - ct_0|$. Нижняя половина конуса ($t < t_0$, *световой конус прошлого*) — фронт сходящейся сферической световой волны,

которая схлопывается в точке $\mathbf{r}_0$ в момент времени t_0, а верхняя половина конуса ($t > t_0$, *световой конус будущего*) — фронт расходящейся сферической световой волны, которая была испущена в точке $\mathbf{r}_0$ в момент времени t_0.

Мы видим, что векторы разного типа, если их откладывать из вершины светового конуса, оказываются по отношению к конусу в разных положениях:

- пространственноподобные лежат вне конуса;
- светоподобные лежат на поверхности конуса;
- времениподобные лежат внутри конуса.

Светоподобные/времениподобные векторы могут лежать на поверхности/внутри светового конуса будущего или светового конуса прошлого. В зависимости от этого различают светоподобные/времениподобные векторы, *направленные в будущее* и *направленные в прошлое*.

Все направления вне светового конуса, т.е. все пространственноподобные направления, могут быть непрерывно переведены друг в друга. (Как это сделать, станет видно, когда мы изучим преобразования Лоренца.) В частности, если бы мы могли запустить ракету со сверхсветовой скоростью, то её мировая линия лежала бы вне светового конуса и мы могли бы подобрать движущуюся систему отсчёта, в которой ракета движется назад по времени.

> Сегодня в полдень пущена ракета.
> Она летит куда скорее света
> И долетит до цели в семь утра
> Вчера...
>
> *Маршак С.Я. Английские эпиграммы разных времён.*
> *«По теории относительности».*

(*) Так что в СТО если вы можете двигаться со сверхсветовой скоростью, то вы можете путешествовать назад по времени[2]. Гипотетические частицы, которые движутся вдоль пространственноподобных мировых линий, т.е. могут двигаться со сверхсветовой скоростью и назад по времени, называются *тахионами*. Появление тахионов в теории означает, что в теории имеются большие проблемы с причинностью (можно передавать сигналы из будущего в прошлое).

Интервал вдоль кривой может быть вычислен интегрированием вдоль кривой элемента интервала ds:

$$s_{01} = \int\limits_{l_0}^{l_1} ds = \int\limits_{l_0}^{l_1} \sqrt{g_{ij}\, dX^i\, dX^j} = \int\limits_{l_0}^{l_1} \sqrt{g_{ij}\, \frac{dX^i}{dl}\, \frac{dX^j}{dl}}\, dl.$$

Здесь dl — монотонный параметр вдоль кривой $X^i(l)$. Естественный параметр вдоль кривой можно ввести как *интервал вдоль кривой*.

Если кривая времениподобна, то интервал вдоль неё оказывается мнимым, поэтому вместо интервала вводят вещественный параметр — *собственное время вдоль кривой* $d\tau = \frac{\sqrt{-ds^2}}{c}$. Знак собственного времени обычно выбирают так, чтобы оно росло от прошлого к будущему:

$$\tau_{01} = \int\limits_{l_0}^{l_1} d\tau = \int\limits_{l_0}^{l_1} \frac{1}{c}\sqrt{-g_{ij}\, dX^i\, dX^j} = \int\limits_{l_0}^{l_1} \frac{1}{c}\sqrt{-g_{ij}\, \frac{dX^i}{dl}\, \frac{dX^j}{dl}}\, dl = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt.$$

Собственное время — аналог длины вдоль времениподобных мировых линий.

Вдоль светоподобной мировой линии собственное время равно нулю, т.е. собственное время безмассовой частицы остановилось.

Невозможность движения частицы со сверхсветовой скоростью можно сформулировать как *условие вещественности собственного времени*.

1.7.2 Кинематика СТО

Дифференцировать *4-радиус-вектор* по координатному времени t можно, но, поскольку t не является инвариантом, получившийся объект не будет являться вектором. Поэтому при переходе от 3-мерных к 4-мерным кинематическим величинам мы будем как параметр вдоль мировой линии вместо координатного времени t использовать собственное время τ.

[2] Вперёд по времени мы все и так умеем путешествовать.

Дифференцируя по собственному времени τ 4-радиус-вектор $\underline{X}$, мы получаем вектор *4-скорости*

$$u^i = \frac{dX^i}{d\tau}, \qquad \underline{u} = \frac{d\underline{X}}{d\tau}.$$

Дифференцируя по времени вектор 4-скорости $\underline{u}$, мы получаем вектор *4-ускорения*

$$w^i = \frac{du^i}{d\tau} = \frac{d^2X^i}{d\tau^2}, \qquad \underline{w} = \frac{d\underline{u}}{d\tau} = \frac{d^2\underline{X}}{d\tau^2}.$$

Поскольку τ, с одной стороны, естественный параметр (аналог длины), а с другой стороны, собственное время, 4-скорость оказывается аналогом не только 3-скорости, но и единичной касательной:

$$\underline{u}^2 = (\underline{u}, \underline{u}) = \left(\frac{d\underline{X}}{d\tau}, \frac{d\underline{X}}{d\tau}\right) = \frac{(d\underline{X}, d\underline{X})}{d\tau^2} = \frac{ds^2}{d\tau^2} = -c^2,$$

а 4-ускорение — аналог не только 3-ускорения, но и вектора кривизны $\frac{\mathbf{n}}{\rho}$:

$$0 = \frac{d}{d\tau}\underbrace{(\underline{u}, \underline{u})}_{\text{const}} = 2\left(\underline{u}, \frac{d\underline{u}}{d\tau}\right) = 2(\underline{u}, \underline{w}) \quad \Rightarrow \quad (\underline{u}, \underline{w}) = 0.$$

(*) Мы можем использовать альтернативные геометрические определения 4-скорости и 4-ускорения (считая, что $c = 1$, а все геометрические термины понимаются в смысле метрики Минковского):

- *4-скоростъ* — единичная касательная к мировой линии частицы, направленная в будущее;
- *4-ускорение* — вектор кривизны к мировой линии частицы.

Будучи ортогональным[3] времениподобному вектору 4-скорости, вектор 4-ускорения всегда пространственноподобен:

$$(\underline{w}, \underline{w}) > 0 \quad \text{при} \quad \underline{w} \neq 0.$$

Выразим 4-скорость через 3-мерные величины:

$$\frac{u^0}{c} = \frac{dt}{d\tau} = \frac{dt}{\sqrt{dt^2 - d\mathbf{r}^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma,$$

$$\underline{u} = \frac{d}{d\tau}(ct; \mathbf{r}) = \frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt}(ct; \mathbf{r}) = \frac{dt}{d\tau}(c; \mathbf{v}) = (\gamma c; \gamma\mathbf{v}).$$

(!)

- Для неподвижной частицы 4-скорость $\underline{u}|_{\mathbf{v}=0} = (c; \vec{0})$ не обращается в нуль (нельзя остановиться по времени).
- Для движущейся частицы пространственные компоненты 4-скорости отличаются от пространственных компонент 3-скорости на множитель $\gamma > 1$ (*гамма-фактор*).
- Для безмассовой частицы $\tau \equiv 0$ и 4-скорость не определена (4-импульс при этом определён).

Выразим и 4-ускорение через 3-мерные величины:

$$\underline{w} = \frac{d\underline{u}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt}(c\gamma; \gamma\mathbf{v}) = \gamma\left(c\frac{d\gamma}{dt}; \frac{d\gamma}{dt}\mathbf{v} + \gamma\mathbf{a}\right),$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} = -\frac{1}{2}\frac{-2(\mathbf{v}, \mathbf{a})/c^2}{(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}} = \tfrac{1}{c^2}\gamma^3(\mathbf{v}, \mathbf{a}),$$

$$w^i = \underline{w} = \big(\gamma^4(\tfrac{\mathbf{v}}{c}, \mathbf{a}); \gamma^4(\tfrac{\mathbf{v}}{c}, \mathbf{a})\tfrac{\mathbf{v}}{c} + \gamma^2\mathbf{a}\big). \tag{1.7.2}$$

[3]Если мы говорим о векторах в пространстве Минковского, то скалярное произведение, ортогональность и другие геометрические понятия всегда подразумеваются в смысле метрики Минковского.

1.7.3 Импульс и соответствие с ньютоновской механикой

По аналогии с ньютоновской механикой определяют также 4-импульс

$$\underline{p} = m\underline{u}, \qquad \underline{p}^2 = -c^2m^2,$$

и 4-силу

$$\underline{f} = \frac{d\underline{p}}{d\tau}.$$

(!) *Масса* m в определении 4-импульса должна быть скаляром (инвариантом), т.к. формула $\underline{p} = m\underline{u}$ должна выполняться во всех системах координат (если два вектора равны в одной системе координат, то они равны в любой другой). Это та масса, которая в старой литературе называлась *массой покоя*. В современной литературе термин масса покоя не используется, пишут просто *масса*. Та «релятивистская масса», зависящая от скорости, которая вводилась в старой литературе, — это просто энергия, выраженная в единицах массы $\frac{\mathcal{E}}{c^2}$.

При малых скоростях $v \ll c$ имеем

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + o\left(\frac{v^2}{c^2}\right),$$

$$\underline{p} = (mc\gamma; m\mathbf{v}\gamma) = \left(\frac{1}{c}\left[mc^2 + \frac{mv^2}{2} + mc^2\, o\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right]; m\mathbf{v}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + o\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right]\right).$$

Используя *принцип соответствия*[4], мы можем определить физический смысл компонент 4-импульса:

- p^0 — энергия частицы (выраженная в единицах импульса);
- $\mathbf{p}$ — импульс.

При этом мы видим, что кроме кинетической энергии $\frac{mv^2}{2}$ с релятивистскими поправками $mc^2\, o\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$ имеется ещё и энергия покоя

$$\mathcal{E}_0 = mc^2.$$

В ньютоновской механике энергия была определена с точностью до произвольной постоянной добавки, теперь эта константа оказалась фиксирована. По существу мы дали определение массы: **масса — это энергия покоя системы**[5].

Таким образом[6],

$$\underline{p} = (mc\gamma; m\mathbf{v}\gamma) = (\tfrac{1}{c}\mathcal{E}; \mathbf{p}).$$

Теперь мы можем записать уточнённое выражение для 3-импульса[7]:

$$\mathbf{p} = \frac{\mathcal{E}}{c^2}\mathbf{v}.$$

Коэффициентом пропорциональности между скоростью и импульсом оказалась не масса, а энергия, просто, пока мы имели дело с маленькими скоростями, энергия была близка к энергии покоя (массе) и это различие было незаметно.

Из физического смысла 4-импульса ясно, что он определён и для безмассовых частиц:

$$\underline{p} = (\tfrac{1}{c}\mathcal{E}; \mathbf{p}), \qquad \underline{p}|^2_{m=0} = -\frac{1}{c^2}\mathcal{E}^2 + \mathbf{p}^2 = 0.$$

Теперь формула для квадрата 4-импульса даёт нам универсальный способ вычисления массы:

$$\underline{p}^2 = -\frac{1}{c^2}\mathcal{E}^2 + \mathbf{p}^2 = -c^2m^2.$$

(!) Эта же формула может использоваться для вычисления *эффективной массы системы* (энергии в системе центра инерции). Масса системы в общем случае не равна сумме масс отдельных частиц.

[4] СТО должна воспроизводить результаты ньютоновской механики в пределе $v \ll c$.

[5] Напоминаем, что в СТО удобно считать скорость света в вакууме равной безразмерной единице. Поэтому не обращайте внимания на степени c в формулах: это лишь коэффициенты пересчёта единиц измерения.

[6] Скорость уже не предполагаем малой, малость была нужна для установления соответствия.

[7] Мы уже использовали это выражение, когда строили специальную теорию относительности в задаче 13.

Разобравшись с 4-импульсом, мы можем определить смысл компонент 4-силы:

$$\underline{f} = \frac{d}{d\tau}(\tfrac{1}{c}\mathcal{E};\mathbf{p}) = \frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt}(\tfrac{1}{c}\mathcal{E};\mathbf{p}) = \gamma\Big(\tfrac{1}{c}\frac{d\mathcal{E}}{dt};\underbrace{\frac{d\mathbf{p}}{dt}}_{\mathbf{F}}\Big).$$

Используя уравнение для баланса энергии

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = (\mathbf{F},\mathbf{v}),$$

получаем

$$\underline{f} = \big(\tfrac{1}{c}\gamma(\mathbf{F},\mathbf{v});\gamma\mathbf{F}\big).$$

Таким образом, компоненты 4-силы связаны с мощностью силы $(\mathbf{F},\mathbf{v})$ и самой силой $\mathbf{F}$, которые умножаются на $\gamma = \frac{dt}{d\tau}$, поскольку в 4-силе дифференцирование идёт по собственному времени τ, а в 3-силе — по координатному времени t.

1.7.4 Частицы с переменной массой, упругие и неупругие процессы*

Когда мы используем 4-мерную форму 2-го закона Ньютона, следует помнить, что масса частицы может оказаться переменной:

$$\underline{f} = \frac{d\underline{p}}{d\tau} = \frac{d(m\underline{u})}{d\tau} = m\underline{w} + \frac{dm}{d\tau}\,\underline{u}.$$

В СТО переменные массы возникают во многих случаях, где в классике мы привыкли считать массу постоянной, например, когда тело нагревается или излучает энергию.

(*) Рассмотрим, например, звезду. Она светит равномерно во все стороны, и суммарная 3-сила, действующая на неё, равна нулю. Однако в инерциальной системе отсчёта, в которой звезда движется, свет, излучаемый вперёд по ходу движения звезды, уносит больший импульс, чем излучаемый назад, и возникает реактивная 3-сила, направленная против движения звезды. Как совместить одно и другое? Звезда — тело переменной массы. Это видно из того, что в системе покоя она теряет энергию, а энергия покоя — это и есть масса. Так что в системе покоя у 4-силы есть ненулевая компонента f^0, при переходе в движущуюся систему эта компонента порождает и 3-силу, но эта 3-сила не создаёт ускорения, импульс уносит излучение звезды, средняя скорость которого совпадает со скоростью самой звезды.

Изменение или постоянство массы оказываются связаны и с понятиями *упругого и неупругого процессов* (столкновений). Приведём таблицу сохраняющихся и несохраняющихся величин при упругом и неупругом процессах. В каждой клетке через косую линию стоят два символа «+» или «−», означающие сохранение или несохранение в ньютоновской механике (над чертой) и в СТО (под чертой).

НМ/СТО	упр.	неупр.
$\mathbf{p}$	$+/+$	$+/+$
$\mathcal{E}$	$+/+$	$-/+$
$\sum_a M_a$	$+/+$	$+/-$
$M_{\text{эф.}}$	$+/+$	$+/+$

Здесь M_a — масса частицы с номером a, а $M_{\text{эф.}}$ — эффективная масса системы в целом (в ньютоновской механике $M_{\text{эф.}} = \sum_a M_a$, в СТО $M_{\text{эф.}} = \frac{1}{c^2}\sqrt{(\sum_a \mathcal{E}_a)^2 - c^2(\sum_a \mathbf{p}_a)^2}$).

С чем связано различие между ньютоновской механикой и СТО? Если, например, механическая энергия обращается в тепло, то и она никуда не исчезает, но энергия покоя тела (его масса) становится больше. В ньютоновской механике мы это изменение массы не замечаем, т.к. механическая энергия много меньше энергии покоя и мы описываем процесс как «исчезновение» механической энергии при неизменной массе. В СТО энергия включает в себя энергию покоя, и мы видим, что энергия не пропадает, а меняет форму, за счёт чего меняются массы участвующих в соударении частиц.

(!) При неупругом процессе меняются массы отдельных частиц, но эффективная массы системы (её энергия в системе центра инерции) остаётся неизменной.

(*) В общем случае *упругий процесс* — это процесс, в котором сохраняется число частиц и их сорт (в том числе масса, заряд и пр.). Если меняется число частиц или сорт хотя бы одной частицы, то мы имеем *неупругий процесс*.

1.7.5 Импульс и волновой вектор*

В 1923 году Луи де Бройль догадался, что в квантовой теории соответствие волна-частица должно иметь место не только для электромагнитных волн и фотонов, но и для любых волн и частиц.

Плоскую монохроматическую волну можно описать с помощью комплексной экспоненты следующего вида:

$$\psi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{kr}-\omega t)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}.$$

Здесь $\mathbf{k} = (k_x; k_y; k_z)$, $|\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\text{длина волны}}$ — 3-мерный вектор в евклидовом пространстве, называемый *волновым вектором*, $\omega = \frac{2\pi}{\text{период}}$ — *циклическая частота* волны.

Плоскости постоянной фазы $\psi = \text{const}$ перпендикулярны волновому вектору $\mathbf{k}$. Эти плоскости движутся с *фазовой скоростью* вдоль волнового вектора. Величина фазовой скорости задаётся отношением циклической частоты к модулю волнового вектора:

$$v_{\text{ф.}} = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} = \frac{\text{длина волны}}{\text{период}}.$$

Для света в вакууме фазовая скорость равна скорости света: $v_{\text{ф.}} = c$.

Выражение в показателе экспоненты имеет вид скалярного произведения двух 4-мерных векторов с помощью метрики Минковского:

$$\mathbf{kr} - \omega t = -\tfrac{\omega}{c}\, ct + k_x x + k_y y + k_z z = k^i x^j g_{ij},$$

$$x^i = (ct; x; y; z), \qquad k^i = (\tfrac{\omega}{c}; k_x; k_y; k_z) = (\tfrac{\omega}{c}; \mathbf{k}), \quad g_{ij} = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1).$$

Здесь x^i — уже знакомый нам 4-мерный радиус-вектор, который является вектором по отношению к линейным однородным заменам координат в силу признака вектора. Поскольку скалярное произведение k^i на произвольный вектор x^i даёт скаляр, k^i действительно оказывается 4-мерным вектором *по отношению к линейным заменам координат*.

Итак, k^i — *4-мерный волновой вектор по отношению к линейным заменам координат*.

(!) То, что мы это установили, означает, что k^i — это не просто четвёрка чисел, при произвольных линейных преобразованиях координат (включая повороты и преобразования Лоренца) k^i ведёт себя как любой другой 4-мерный вектор. С помощью преобразования Лоренца 4-мерного волнового вектора легко получить эффект Доплера (преобразование частоты) и аберрацию (преобразование направления) для любых волн (включая электромагнитные).

Де Бройль догадался, что 4-мерный импульс на одну частицу прямо пропорционален 4-мерному волновому вектору, а коэффициентом пропорциональности является *постоянная Планка* $\hbar$:

$$p^i = \hbar k^i \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E} = \hbar\omega, \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}.$$

Для *фотонов* (частиц света = квантов электромагнитного излучения) это соответствие было уже известно из работ М. Планка по излучению чёрного тела и А. Эйнштейна по фотоэффекту, а де Бройль догадался, что это соотношение универсально.

Можно даже сказать, что 4-мерный импульс и 4-мерный волновой вектор — это один объект, выраженный в разных единицах измерения, а постоянная Планка — коэффициент пересчёта. Соответственно, энергия — это частота, а импульс — волновой вектор[8].

Для света в вакууме 4-мерный волновой вектор, как и 4-мерный импульс на один фотон, являются светоподобными векторами:

$$v_{\text{ф.}} = c \quad \Rightarrow \quad k^i k_i = p^i p_i = 0.$$

Квантовая теория лежит за пределами нашего курса, но соответствие 4-импульса и 4-мерного волнового вектора будет нам полезно для лучшего понимания классических физических эффектов и перенесения на волны физической интуиции, которая у нас имеется для частиц.

1.7.6 Задачи 20, 21

Задача 20. Пороги реакции. В ускорителе на встречных пучках идёт реакция превращения пары электрон-позитрон (позитрон=антиэлектрон) в пару мюон-антимюон:

$$e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^- .$$

Массы частицы и соответствующей ей античастицы равны

$$m_e = 0{,}511 \text{ МэВ}, \qquad m_\mu = 105 \text{ МэВ}.$$

[8] Такую систему единиц любят использовать в квантовой теории поля и (реже) в квантовой механике.

а) Является ли данный процесс упругим или неупругим?
б) Каков энергетический порог этой реакции?
в) Сравните с порогом в случае, когда ускоренные позитроны падают на неподвижные электроны.
г) Зная энергию каждого из пучков e^+ и e^-, найдите энергию и импульсы μ^+ и μ^-.

Задача 21. Комптон-эффект. Для получения γ-квантов (фотонов) высокой энергии навстречу пучку электронов с энергией $\mathcal{E} = 200$ ГэВ выстреливает лазер с энергией фотонов $\varepsilon = 2$ эВ.
а) Какие малые безразмерные параметры присутствуют в задаче?
б) Найдите зависимость энергии фотонов от угла рассеяния.
в) Какую энергию будут иметь фотоны, рассеянные назад?
г) Обсудите предельные случаи «очень маленького» и «достаточно большого» угла рассеяния.
д) Каков критерий малости угла?
е) Является ли данный процесс упругим или неупругим?
Указание. Калькулятором не пользуйтесь, т.к. ошибки округления могут оказаться слишком велики.

1.7.7 Ответы к задачам 20, 21

Задача 20. Пороги реакции.
а) Неупругий процесс. **б)** $\mathcal{E}_{e^+} = \mathcal{E}_{e^-} \geqslant m_\mu$. **в)** $\mathcal{E}_{e^+} \geqslant 2\frac{m_\mu}{m_e} m_\mu - m_e \approx 43{,}15$ ГэВ.

Задача 21. Комптон-эффект.
а) $\frac{m_e}{\mathcal{E}}$ и $\frac{\varepsilon}{m_e}$.
б) $E = \frac{(\mathcal{E}+p)\varepsilon}{\mathcal{E} - p\,\cos\alpha + \varepsilon(1+\cos\alpha)}$, $p = \sqrt{\mathcal{E}^2 - m^2}$, $\pi - \alpha$ — угол рассеяния.
в) $E = \frac{\mathcal{E}}{\frac{m^2}{4\mathcal{E}\varepsilon}+1} \approx 173$ ГэВ.
г) При малом угле $E = \frac{2\varepsilon}{1-\cos\alpha}$, при большом — $E = \frac{2\mathcal{E}}{\frac{\mathcal{E}}{\varepsilon}\frac{\alpha^2}{4} + \frac{m^2}{4\mathcal{E}\varepsilon}+1}$.
д) Малый угол рассеяния $\pi - \alpha$, где $\alpha \gg 10^{-5}$.
е) Процесс упругий.

Глава 1.8

Преобразования Лоренца и повороты (с. 222)

В этой главе мы будем считать, что $c = 1$.

Группа симметрий евклидова пространства — множество преобразований координат $r^\alpha = (x, y, z)$, переводящих метрику Евклида $d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ в себя.

Группа симметрий пространства Минковского (группа Пуанкаре) — множество преобразований координат $x^i = (t, x, y, z)$, переводящих метрику Минковского $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ в себя.

Поскольку евклидово пространство — подпространство $t = \text{const}$ пространства Минковского, все его симметрии одновременно являются симметриями пространства Минковского.

(!) Симметрии пространства Минковского — это также симметрии неоднородного (с источником) волнового уравнения в однородной изотропной среде. (В этом случае вместо скорости света следует взять скорость рассматриваемой волны.)

При изучении симметрий нам понадобится понятие *группы преобразований* некоторого пространства. Группа преобразований — это множество преобразований, для которого выполняются следующие свойства:

- группа содержит *тождественное* (*единичное*) *преобразование*;
- для каждого преобразования, входящего в группу, его *обратное преобразование* также входит в группу;
- для каждой пары преобразований группы преобразование, полученное их последовательным выполнением (*произведение преобразований*), также входит в группу.

Группа Лоренца — группа преобразований пространства Минковского, сохраняющих метрику Минковского и оставляющих неподвижным начало координат.

В дополнениях понятие группы обсуждено подробнее (см. с. 225).

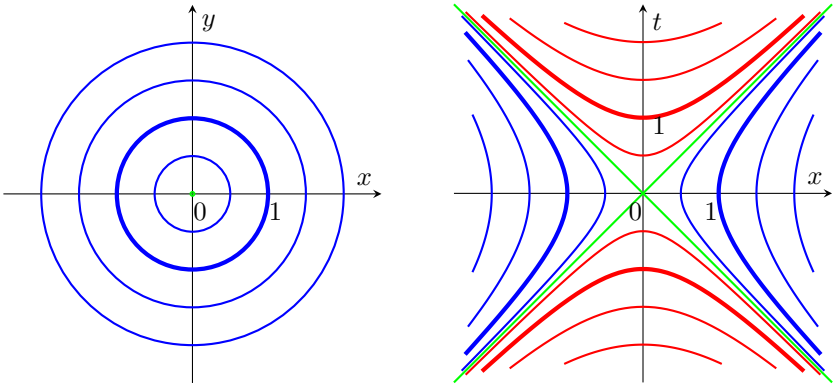
1.8.1 Поворот круговой и поворот гиперболический

Сейчас мы исследуем симметрии, сохраняющие неподвижным начало координат. Более того, сначала рассмотрим случай двумерных преобразований, которые можно выполнить, непрерывно деформируя исходную систему координат.

Мы рассмотрим *повороты* евклидовой плоскости $x - y$ и преобразования Лоренца (*бусты*) плоскости Минковского $t - x$ (обратите внимание на разную нумерацию координат на евклидовой плоскости и плоскости Минковского). Мы параллельно рассмотрим, как строятся поворот и буст, подчёркивая сходство и различия этих преобразований. Существенные различия будем помечать так: **(!)**.

Полностью группа симметрий пространства Минковского (*группа Пуанкаре*) может быть получена из сдвигов начала координат, отражений, поворотов и бустов в разных плоскостях.

Поскольку *по определению* поворот (буст) сохраняет расстояние (интервал), а начало координат остаётся неподвижным, точки перемещаются по окружностям/псевдоокружностям, задаваемым уравнением $x^2 + y^2 = \text{const}$ ($x^2 - t^2 = \text{const}$).

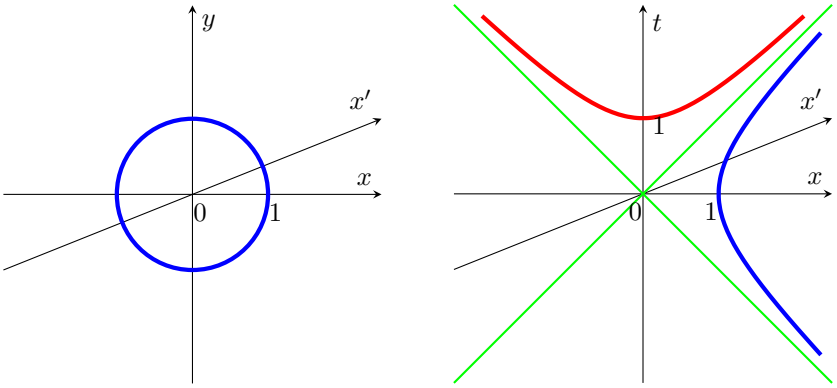


Семейство концентрических окружностей/псевдоокружностей на плоскости Евклида/Минковского.

Таким образом, мы сразу можем указать кривые, на которых могут располагаться единичные точки новых координатных осей. Для поворота это единичная окружность $x^2 + y^2 = 1$ (*калибровочная окружность*). Для буста — две ветви гипербол $x^2 - t^2 = \pm 1$, которые пересекают положительные полуоси координатных осей (*калибровочные гиперболы*).

Если мы проведём через начало координат новую ось x', то калибровочная окружность/гипербола отсекут на ней единичную точку.

(!) На евклидовой плоскости ось x' можно провести в любом направлении, а на плоскости Минковского ось x' обязательно должна идти вне светового конуса (в пространственноподобном направлении), иначе она не пересечёт нужную ветвь калибровочной гиперболы и на ней не будет точки, интервал от которой до начала координат равен 1.



Орбиты[1] единичных точек координатных осей (*калибровочная окружность* и *калибровочные гиперболы*).
На оси x' отсекается единичная точка.

Обозначим базисный вектор по оси x' на евклидовой плоскости как $\mathbf{e}_{x'}$, а на плоскости Минковского как $\underline{e}_{x'}$,

$$(\mathbf{e}_{x'}, \mathbf{e}_{x'}) = (\underline{e}_{x'}, \underline{e}_{x'}) = 1.$$

Теперь нам надо построить вторую ось y'/t'. Эта ось должна быть ортогональна оси x' в смысле метрики Евклида/Минковского. Как построить ортогональное направление? Мы уже видели (на примере 4-скорости), что производная от вектора, квадрат которого фиксирован, оказывается ортогональной ему.

Продифференцируем базисный вектор на евклидовой плоскости $\mathbf{e}_{x'}$ по какому-нибудь параметру вдоль окружности, например по углу $\phi = \angle xOx'$ между осями x и x':

$$0 = \frac{d}{d\phi}(\mathbf{e}_{x'}, \mathbf{e}_{x'}) = 2\left(\mathbf{e}_{x'}, \frac{d\mathbf{e}_{x'}}{d\phi}\right).$$

В такой параметризации мы «неожиданно» обнаруживаем, что вектор $\frac{d\mathbf{e}_{x'}}{d\phi}$ является не только ортогональным к $\mathbf{e}_{x'}$, но ещё и нормированным и может быть выбран как $\mathbf{e}_{y'}$:

$$\mathbf{e}_{x'} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{e}_{x'}}{d\phi} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} = \mathbf{e}_{y'}, \quad (\mathbf{e}_{x'}, \mathbf{e}_{y'}) = 0, \quad (\mathbf{e}_{y'}, \mathbf{e}_{y'}) = 1.$$

[1] *Орбита точки* относительно группы преобразований — множество всех точек, в которые может перейти данная точка под действием преобразований группы.

Почему при дифференцировании получился единичный вектор? Потому что для единичной окружности угол ϕ — это *естественный параметр*, он совпадает с длиной дуги вдоль окружности.

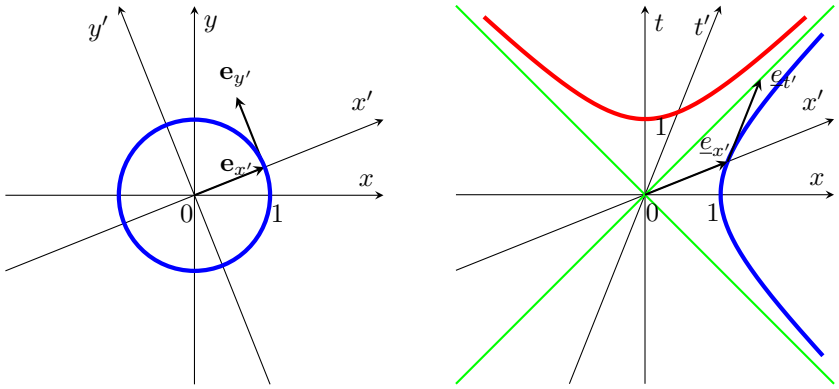
Проделаем аналогичные вычисления на плоскости Минковского:

$$0 = \frac{d}{d\vartheta}(\underline{e}_{x'}, \underline{e}_{x'}) = 2\left(\underline{e}_{x'}, \frac{d\underline{e}_{x'}}{d\vartheta}\right).$$

Если точку на окружности мы параметризовали тригонометрическими функциями, то здесь естественно попробовать гиперболические[2]:

$$\underline{e}_{x'} = \begin{pmatrix} \operatorname{sh}\vartheta \\ \operatorname{ch}\vartheta \end{pmatrix}, \quad \frac{d\underline{e}_{x'}}{d\vartheta} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\vartheta \\ \operatorname{sh}\vartheta \end{pmatrix} = \underline{e}_{t'}, \quad (\underline{e}_{x'}, \underline{e}_{t'}) = 0, \quad (\underline{e}_{t'}, \underline{e}_{t'}) = -1.$$

Нам снова повезло! Это значит, что для единичной гиперболы параметр ϑ является естественным, т.е. совпадает с собственным временем вдоль кривой.



Дифференцирование базисного вектора $\mathbf{e}_{x'}/\underline{e}_{x'}$ по естественному параметру вдоль окружности/гиперболы даёт второй базисный вектор.

Итак, мы нашли для плоскости Евклида (Минковского) новый базис, для которого матрица скалярных произведений базисных векторов (матрица Грама=метрический тензор) такая же, как для старого базиса. Таким образом, в новом базисе метрический тензор, а значит, также скалярное произведение и расстояние (интервал) имеют тот же вид, что в старом базисе.

Мы знаем компоненты векторов нового базиса в двух системах координат (старой — нештрихованной и новой — штрихованной):

$$(\mathbf{e}_{x'})^{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{e}_{y'})^{\alpha} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}, \qquad (\mathbf{e}_{x'})^{\alpha'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{e}_{y'})^{\alpha'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{e}_{\alpha'})^{\beta'} = \delta_{\alpha'}^{\beta'};$$

$$(\underline{e}_{t'})^{i} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\vartheta \\ \operatorname{sh}\vartheta \end{pmatrix}, \quad (\underline{e}_{x'})^{i} = \begin{pmatrix} \operatorname{sh}\vartheta \\ \operatorname{ch}\vartheta \end{pmatrix}, \qquad (\underline{e}_{t'})^{i'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\underline{e}_{x'})^{i'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\underline{e}_{i'})^{j'} = \delta_{i'}^{j'}.$$

Это позволяет построить матрицы преобразований поворота и буста.

$$r^{\alpha} = (\mathbf{e}_{\alpha'} r^{\alpha'})^{\alpha} = \underbrace{(\mathbf{e}_{\alpha'})^{\alpha}}_{R^{\alpha}_{\alpha'}} r^{\alpha'}; \qquad x^{i} = (\underline{e}_{i'} x^{i'})^{i} = \underbrace{(\underline{e}_{i'})^{i}}_{\Lambda^{i}_{i'}} x^{i'}.$$

Мы видим, что матрицы поворота $R^{\alpha}_{\alpha'}$ и буста $\Lambda^{i}_{i'}$ образованы компонентами новых базисных векторов, разложенных по старому базису. При этом верхний (первый, нумерует строки) индекс — номер компоненты, а нижний (второй, нумерует столбцы) индекс — номер базисного вектора. Таким образом, матрица составлена из компонент новых базисных векторов как из столбцов:

$$R^{\alpha}_{\alpha'} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \qquad \Lambda^{i}_{i'} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\vartheta & \operatorname{sh}\vartheta \\ \operatorname{sh}\vartheta & \operatorname{ch}\vartheta \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\vartheta & \operatorname{sh}\vartheta \\ \operatorname{sh}\vartheta & \operatorname{ch}\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}.$$

Поворот и буст сохраняют ориентированный объём:

$$\det R^{\alpha}_{\alpha'} = \det \Lambda^{i}_{i'} = 1.$$

[2]Координаты на плоскости Минковского мы нумеруем, начиная с времени. Мы воспользовались главным тождеством гиперболической тригонометрии $\operatorname{ch}^2\vartheta - \operatorname{sh}^2\vartheta = 1$. На всякий случай напоминаем определения *гиперболических функций*: $\operatorname{ch}\vartheta = \frac{e^{\vartheta}+e^{-\vartheta}}{2}$, $\operatorname{sh}\vartheta = \frac{e^{\vartheta}-e^{-\vartheta}}{2}$.

1.8.2 Быстрота и скорость

С преобразованием поворота всё ясно: мы записали его через угол поворота, а буст записан через некоторый пока непонятный параметр ϑ, который называется *быстротой*. Быстрота должна быть как-то связана со скоростью v новой системы отсчёта относительно старой.

Ось времени определяется условием $x = 0$ (также $y = 0$, $z = 0$), т.е. ось времени — мировая линия частицы, которая постоянно находится в начале отсчёта данной системы. Скорость этой частицы — скорость системы отсчёта. Таким образом, мы выражаем скорость через быстроту:

$$v = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{x'=0} = \frac{\operatorname{sh}\vartheta}{\operatorname{ch}\vartheta} = \operatorname{th}\vartheta.$$

Гиперболические функции быстроты мы выражаем через скорость:

$$1 - v^2 = 1 - \frac{\operatorname{sh}^2\vartheta}{\operatorname{ch}^2\vartheta} = \frac{\operatorname{ch}^2\vartheta - \operatorname{sh}^2\vartheta}{\operatorname{ch}^2\vartheta} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2\vartheta},$$

$$\operatorname{ch}\vartheta = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \gamma, \qquad \operatorname{sh}\vartheta = \operatorname{th}\vartheta\,\operatorname{ch}\vartheta = v\gamma.$$

Матрица буста принимает вид

$$\Lambda^i_{i'} = \begin{pmatrix} \gamma & v\gamma \\ v\gamma & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix}.$$

Теперь запишем преобразование Лоренца, восстановив в формулах скорость света и вспомнив про координаты y, z, которые не преобразуются:

$$ct = \frac{ct' + \frac{v}{c}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad x = \frac{vt' + x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad y = y', \qquad z = z'.$$

1.8.3 Преобразования Лоренца для разных объектов

Мы получили матрицу преобразования Лоренца, которая является матрицей Якоби соответствующей замены координат. Обратная матрица получается заменой знака скорости (мы снова опустили скорость света):

$$\Lambda^i_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda^{i'}_i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

С помощью этих двух матриц можно записать преобразования Лоренца для любого тензора. В частности, любой вектор преобразуется так же, как 4-мерный радиус-вектор:

$$A^0 = \frac{A^{0'} + vA^{x'}}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad A^x = \frac{vA^{0'} + A^{x'}}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad A^y = A^{y'}, \qquad A^z = A^{z'}.$$

Таким способом преобразуется и 4-мерная скорость $u^i = (\gamma, \mathbf{v}\gamma)$. Из преобразования 4-мерной скорости можно получить преобразование 3-мерной скорости, но можно поступить по-другому: продифференцировать $\mathbf{r}$ по t.

Скорость штрихованной системы отсчёта относительно нештрихованной обозначим $\mathbf{V} = (V, 0, 0)$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ будут обозначать скорость частицы в двух системах координат. Выпишем преобразование для дифференциалов координат:

$$dt = \frac{dt' + Vdx'}{\sqrt{1-V^2}} = dt'\frac{1 + Vv^{x'}}{\sqrt{1-V^2}}, \qquad dx = \frac{Vdt' + dx'}{\sqrt{1-V^2}}, \qquad dy = dy', \qquad dz = dz'.$$

Разделим dx, dy, dz на dt и получим преобразование 3-мерной скорости:

$$v^x = \frac{dx}{dt} = \frac{Vdt' + dx'}{dt' + Vdx'} = \frac{V + v^{x'}}{1 + Vv^{x'}}, \qquad v^y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'\sqrt{1-V^2}}{dt' + Vdx'} = \frac{v^{y'}\sqrt{1-V^2}}{1 + Vv^{x'}}, \quad v^z = \frac{dz}{dt} = \frac{v^{z'}\sqrt{1-V^2}}{1 + Vv^{x'}}.$$

В общем случае, когда $\mathbf{V} \not\| \mathbf{v}$, скорость системы отсчёта и скорость частицы входят в преобразование не симметрично. Поэтому правильнее называть эту формулу *преобразованием скоростей*, а не *сложением скоростей*.

4-мерное ускорение также преобразуется как любой 4-вектор. Преобразование 3-ускорения проще получить, продифференцировав преобразование 3-мерной скорости ещё раз по t.

$$\begin{aligned} dv^x &= \frac{dv^{x'}(1+Vv^{x'}) - (V+v^{x'})Vdv^{x'}}{(1+Vv^{x'})^2} = \frac{dv^{x'}(1-V^2)}{(1+Vv^{x'})^2}, \\ dv^y &= \sqrt{1-V^2}\frac{dv^{y'}(1+Vv^{x'}) - v^{y'}Vdv^{x'}}{(1+Vv^{x'})^2}, \quad dv^z = \sqrt{1-V^2}\frac{dv^{z'}(1+Vv^{x'}) - v^{z'}Vdv^{x'}}{(1+Vv^{x'})^2}. \end{aligned}$$

Поделив на dt, получаем *преобразования ускорения*:

$$a^x = \frac{a^{x'}(1-V^2)^{3/2}}{(1+Vv^{x'})^3}, \quad a^y = (1-V^2)\frac{a^{y'}(1+Vv^{x'}) - v^{y'}Va^{x'}}{(1+Vv^{x'})^3}, \quad a^z = (1-V^2)\frac{a^{z'}(1+Vv^{x'}) - v^{z'}Va^{x'}}{(1+Vv^{x'})^3}.$$

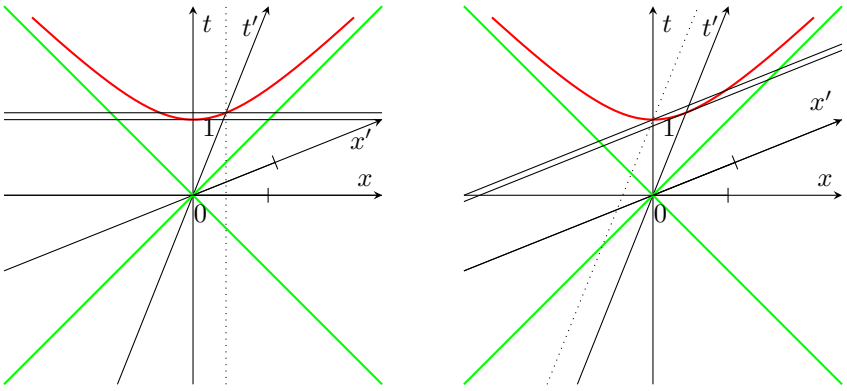
1.8.4 Снова кинематические эффекты

Выведем кинематические эффекты СТО ещё раз, глядя на рисунок замены координат при бусте.

(!) Мы проиллюстрируем каждый эффект чертежами два раза: с точки зрения условно неподвижной системы координат и с точки зрения движущейся системы координат. Из принципа относительности видно, что эти две точки зрения эквивалентны. И хотя левые и правые рисунки выглядят различно (мы привыкли мысленно поворачивать и сдвигать рисунки, но не привыкли мысленно подвергать их преобразованию Лоренца), на них изображён один и тот же процесс.

Изобразим на плоскости Минковского семейство параллельных прямых $t = \text{const}$ (параллельно оси x) и семейство параллельных прямых $t' = \text{const}$ (параллельно оси x'). (См. рисунки ниже.) Мы видим, что эти семейства прямых наклонены друг относительно друга. Это означает ***относительность одновременности***: события, одновременные в нештрихованной системе, не одновременны в штрихованной, и наоборот. Движущиеся часы, передние по ходу движения, отстают от задних.

На этих же рисунках мы видим ***релятивистское замедление времени***.[3]



Слева линии $t = 0$ (ось x), $t = 1$ (касается гиперболы), $t = \gamma$ (проходит через точку 1 на оси t').
Справа линии $t' = 0$ (ось x'), $t' = 1$ (касается гиперболы), $t' = \gamma$ (проходит через точку 1 на оси t).

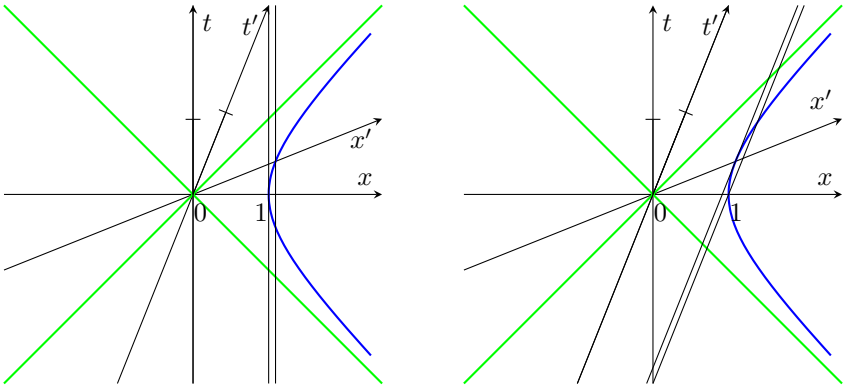
- Ось t' — мировая линия движущихся часов $x' = 0$. Эти часы показывают 0 при $t = 0$ и 1 при $t = \gamma > 1$, т.е. с точки зрения неподвижного наблюдателя движущиеся часы замедлены в γ раз. Чтобы установить этот факт, мы сравнили показания одних и тех же движущихся часов ($x' = 0$) с показаниями разных неподвижных часов ($x = 0$: мировая линия — ось t, и $x = v\gamma$: мировая линия отмечена пунктиром).

- Ось t — мировая линия неподвижных часов $x = 0$. Эти часы показывают 0 при $t' = 0$ и 1 при $t' = \gamma > 1$, т.е. с точки зрения движущегося наблюдателя неподвижные часы замедлены в γ раз. Чтобы установить этот факт, мы сравнили показания одних и тех же неподвижных часов ($x = 0$) с показаниями разных движущихся часов ($x' = 0$: мировая линия — ось t', и $x' = -v\gamma$: мировая линия отмечена пунктиром).

[3] Релятивистское замедление времени, одновременно отмечаемое каждой системой для другой, оказывается связанным с выпуклостью калибровочной гиперболы.

Изобразим на плоскости Минковского семейство параллельных прямых $x = \text{const}$ (параллельно оси t) и семейство параллельных прямых $x' = \text{const}$ (параллельно оси t'). (См. рисунки ниже.) Мы видим, что эти семейства прямых наклонены друг относительно друга. Это означает ***относительность пространства***: события, происходящие в одной точке пространства в нештрихованной системе, происходят в разных точках пространства в штрихованной, и наоборот. Этот эффект не является специфическим для СТО и имеет место уже в ньютоновской механике при преобразованиях Галилея.

На этих же рисунках мы видим ***релятивистское сокращение продольной длины***.[4]



Слева линии $x = 0$ (ось t), $x = 1$ (касается гиперболы), $x = \gamma$ (проходит через точку 1 на оси x').
Справа линии $x' = 0$ (ось t'), $x' = 1$ (касается гиперболы), $x' = \gamma$ (проходит через точку 1 на оси x).

- Пусть мировые линии меток на неподвижной линейке задаются условиями $x = 0$ (ось t), $x = 1$ (касается гиперболы), $x = \gamma$ (проходит через точку 1 на оси x'). Для движущегося наблюдателя эти метки движутся, поэтому при определении расстояния между ними надо отметить их положение одновременно. Пусть движущийся наблюдатель *одновременно* (со своей точки зрения!) при $t' = 0$ определит положение этих меток. Это будет происходить при пересечении мировых линий с осью x'. Мы видим, что при $t' = 0$ метка $x = 0$ даст $x' = 0$, а метка $x = \gamma$ даст $x' = 1$. Таким образом, движущийся наблюдатель обнаружит, что расстояние между метками на линейке неподвижного наблюдателя сжалось в γ раз. С точки зрения неподвижного наблюдателя положение меток было отмечено в разные моменты времени.

- Пусть мировые линии меток на движущейся линейке задаются условиями $x' = 0$ (ось t'), $x' = 1$ (касается гиперболы), $x' = \gamma$ (проходит через точку 1 на оси x). Для неподвижного наблюдателя эти метки движутся, поэтому при определении расстояния между ними надо отметить их положение одновременно. Пусть неподвижный наблюдатель *одновременно* (со своей точки зрения!) при $t = 0$ определит положение этих меток. Это будет происходить при пересечении мировых линий с осью x. Мы видим, что при $t = 0$ метка $x' = 0$ даст $x = 0$, а метка $x' = \gamma$ даст $x = 1$. Таким образом, неподвижный наблюдатель обнаружит, что расстояние между метками на линейке движущегося наблюдателя сжалось в γ раз. С точки зрения движущегося наблюдателя положение меток было отмечено в разные моменты времени.

1.8.5 Кинематическое и динамическое описание эффектов СТО

Следующие замечания очевидны из принципа относительности, но не всегда достаточно чётко осознаются начинающими.

(!) Мы получили релятивистское сокращение продольных размеров и релятивистское замедление времени как кинематические эффекты, используя преобразования Лоренца. Однако *те же эффекты могут быть получены как динамические эффекты* исходя из уравнений динамики полей и частиц.

Устройство часов и линеек можно описать на микроскопическом уровне через уравнения динамики заряженных частиц (электронов и атомных ядер) и электромагнитного поля. Неподвижные заряженные частицы взаимодействуют электростатически, однако если облако заряженных частиц (твёрдое тело на микроуровне) движется, то кроме электрического поля они создают магнитное и мы получаем систему параллельных и антипараллельных электрических токов. Параллельные токи притягиваются, что частично компенсирует кулоновское отталкивание образующих эти токи одноимённо заряженных частиц. Антипараллельные токи отталкиваются, что частично компенсирует кулоновское притяжение образующих эти токи разноимённо заряженных частиц. Аккуратный учёт этих эффектов показывает, что равновесная

[4] Релятивистское сокращение продольной длины, одновременно отмечаемое каждой системой для другой, оказывается связанным с выпуклостью калибровочной гиперболы.

конфигурация движущейся кристаллической решётки оказывается сжата (по сравнению с такой же неподвижной решёткой) в направлении движения в γ раз (*релятивистское сокращение продольной длины*). Также оказывается, что скорость всех процессов в движущемся теле замедлена (по сравнению с таким же неподвижным телом) в γ раз (*релятивистское замедление времени*). При этом те события, которые в неподвижном теле были бы синхронны, в движущемся теле происходят тем раньше, чем ближе к переднему концу тела, и тем позже, чем ближе к заднему концу. Эта рассинхронизация составляет $\delta t(x) = \gamma v x/c$ (*относительность одновременности*).

Мы начали рассмотрение СТО как раз с динамического описания релятивистского замедления времени на примере простейших часов, в которых световой импульс заперт между двумя зеркалами. Конструкция часов, которую мы рассмотрели, была выбрана исключительно по причине простоты анализа. Любые другие часы дали бы тот же эффект.

Для описания предметов вокруг нас достаточно электромагнитного взаимодействия, однако внутриядерные взаимодействия (сильное и слабое) обладают той же симметрией по отношению к преобразованиям Лоренца: можно рассчитать, что движущееся атомное ядро подвергается точно таким же релятивистским эффектам. Этими же свойствами обладает любая теория, совместимая со специальной теорией относительности.

Динамическое рассмотрение эффектов СТО сложнее кинематического, но оно возможно для любой теории, совместимой с СТО, т.е. для любой теории, для которой уравнения имеют те же симметрии, что уравнения специальной теории относительности (симметричны по отношению к преобразованиям группы Пуанкаре).

(!) В любой теории, совместимой с СТО, *скорость света в вакууме* играет фундаментальную роль. Эта скорость является скоростью любой безмассовой частицы, а не только фотона. Можно было бы назвать эту скорость *универсальной максимальной скоростью*, чтобы убрать излишние ассоциации со светом и электромагнитным взаимодействием, но по историческим причинам её принято называть скоростью света.

(*) Гравитационное поле стоит особняком: последовательное рассмотрение гравитационного поля невозможно в рамках СТО и требует построения общей теории относительности (ОТО), в которой пространственно-временная метрика уже не сводится к метрике Минковского. Тем не менее для слабых гравитационных полей мы можем рассматривать гравитационное поле как обычное поле в пространстве Минковского и применять СТО. При этом скорость света в вакууме оказывается также скоростью гравитационных волн.

1.8.6 Матричные экспоненты*

(*) В данном параграфе мы представим непрерывные симметрии пространства-времени (бусты, собственные повороты и их комбинации) как матричные экспоненты. Такое представление — это не счастливая случайность, а частный случай теории *групп Ли* и *алгебр Ли*. Немного более подробное (но далеко не исчерпывающее) знакомство с группами и алгебрами Ли приводится в § 2.8.5 «Группы и алгебры Ли*» (с. 229).

Мы перейдём к матрицам 4×4, дополнив ранее полученные матрицы поворота и буста нулями и единицами с учётом того, что вне рассматриваемой плоскости поворота/буста координаты не преобразуются. Это понадобится нам для того, чтобы вывести матрицы поворота вокруг произвольной оси и буста вдоль произвольного направления.

При этом последовательное выполнение преобразований соответствует умножению матриц.[5] При выполнении последовательных поворотов/бустов в одной плоскости углы/быстроты складываются. (Это легко проверить перемножением матриц.) Такое поведение напоминает поведение экспонент, при перемножении которых показатели степеней тоже складываются. Попробуем развить эту аналогию с учётом того, что раз множители представляют собой матрицы, то и экспоненты должны быть матричными.

Ряд для матричной экспоненты аналогичен ряду для обычной экспоненты с одним уточнением: матрица в нулевой степени равна единичной матрице,

$$\mathrm{e}^{\hat{M}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{M}^n}{n!} = \underbrace{\hat{1}}_{\hat{M}^0} + \hat{M} + \frac{\hat{M}^2}{2} + \frac{\hat{M}^3}{6} + \cdots + \frac{\hat{M}^n}{n!} + \cdots$$

Когда не указаны индексы, мы будем обозначать матрицы буквами в шляпках.

Мы хотим получить экспоненциальную запись для матриц поворота и буста вида

$$\hat{\Lambda}(\mathbf{n}, \vartheta) = \mathrm{e}^{\vartheta \hat{a}_{\mathbf{n}}}, \qquad \hat{R}(\mathbf{n}, \phi) = \mathrm{e}^{\phi \hat{b}_{\mathbf{n}}},$$

[5] По традиции если сначала выполняется преобразование g, а потом преобразование h, то соответствующее произведение преобразований записывается в обратном порядке: $h \circ g$. Эта традиция связана с тем, что часто g и h рассматриваются как матрицы, действующие на вектор-столбец, а действие матрицы на столбец происходит справа налево.

где $\mathbf{n}$ — единичный 3-вектор, который задаёт направление скорости для буста или направление оси поворота, а $\hat{a}_{\mathbf{n}}$ и $\hat{b}_{\mathbf{n}}$ называются *генераторами буста и поворота* — это некоторые матрицы, которые зависят от направления $\mathbf{n}$, но не зависят от ϑ и ϕ.

Мы нашли вид матриц для буста вдоль направления $\mathbf{e}_x$ (в плоскости $t-x$) и поворота вокруг оси $\mathbf{e}_z$ (в плоскости $x-y$):

$$\hat{\Lambda}(x,\vartheta)=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\vartheta & \operatorname{sh}\vartheta & 0 & 0\\ \operatorname{sh}\vartheta & \operatorname{ch}\vartheta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\underbrace{=}_{\text{хотим}}\mathrm{e}^{\vartheta\hat{a}_x},\qquad \hat{R}(z,\phi)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi & 0\\ 0 & \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\underbrace{=}_{\text{хотим}}\mathrm{e}^{\phi\hat{b}_z}.$$

Предположим, что матрицы $\hat{a}_x$ и $\hat{b}_z$, удовлетворяющие данному условию, действительно существуют, и попробуем их найти. Брать логарифм от матрицы можно, но сложно, проще взять производную. Если мы правы, то

$$\frac{d}{d\vartheta}\hat{\Lambda}(x,\vartheta)=\hat{a}_x\hat{\Lambda}(x,\vartheta),\qquad \frac{d}{d\phi}\hat{R}(z,\phi)=\hat{b}_z\hat{R}(z,\phi).$$

Чтобы получить искомые матрицы, можно умножить правую часть на обратное преобразование, но проще положить аргумент ϑ (ϕ) равным нулю:

$$\frac{d}{d\vartheta}\hat{\Lambda}(x,\vartheta)\Big|_{\vartheta=0}=\hat{a}_x,\qquad \frac{d}{d\phi}\hat{R}(z,\phi)\Big|_{\phi=0}=\hat{b}_z.$$

$$\hat{a}_x=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad \hat{b}_z=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Поскольку экспоненциальную форму буста и поворота мы не вывели, а угадали, надо сделать проверку: подставить найденные матрицы в экспоненты и убедиться, что получаются исходные матрицы буста и поворота. Для этого нам понадобится возвести матрицы $\hat{a}_x$ и $\hat{b}_z$ во все целые неотрицательные степени:

$$\hat{a}_x^0=\hat{1},\quad \hat{a}_x^1=\hat{a}_x,\quad \hat{a}_x^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \hat{a}_x^3=\hat{a}_x\quad\Rightarrow\quad \hat{a}_x^{2k}=\hat{a}_x^2,\quad \hat{a}_x^{2k+1}=\hat{a}_x.$$

Таким образом, для буста все нечётные степени генератора совпадают с $\hat{a}_x$, а все чётные степени, начиная со 2-й, совпадают с $\hat{a}_x^2$.

$$\hat{b}_z^0=\hat{1},\quad \hat{b}_z^1=\hat{b}_z,\quad \hat{b}_z^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \hat{b}_z^3=-\hat{b}_z\quad\Rightarrow\quad \hat{b}_z^{2k}=(-1)^{k+1}\hat{b}_z^2,\quad \hat{b}_z^{2k+1}=(-1)^k\hat{b}_z.$$

Таким образом, для поворота все нечётные степени генератора совпадают с $\pm\hat{b}_z$ (знак чередуется), а все чётные степени, начиная со 2-й, совпадают с $\pm\hat{b}_z^2$ (знак чередуется).

В обоих случаях степени генератора дают по 3 линейно независимые матрицы, и мы можем просуммировать ряды для экспонент, разбив их на три части[6]:

$$\mathrm{e}^{\vartheta\hat{a}_x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\vartheta^n\hat{a}_x^n}{n!}=\hat{1}+\hat{a}_x\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\vartheta^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\operatorname{sh}\vartheta}+\hat{a}_x^2\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\vartheta^{2k}}{(2k)!}}_{\operatorname{ch}\vartheta-1}=\hat{1}+\hat{a}_x\operatorname{sh}\vartheta+\hat{a}_x^2(\operatorname{ch}\vartheta-1).\tag{1.8.1}$$

$$\mathrm{e}^{\phi\hat{b}_z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\phi^n\hat{b}_z^n}{n!}=\hat{1}+\hat{b}_z\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\phi^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\sin\phi}-\hat{b}_z^2\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\phi^{2k}}{(2k)!}}_{\cos\phi-1}=\hat{1}+\hat{b}_z\sin\phi-\hat{b}_z^2(\cos\phi-1).\tag{1.8.2}$$

Подставив в получившиеся формулы матричные множители, получаем исходные матрицы $\hat{\Lambda}(x,\vartheta)$ и $\hat{R}(z,\phi)$.

[6] В суммах по чётным степеням отсутствует нулевая степень, которая дала бы 1. Поэтому соответствующие ряды дают $\operatorname{ch}\vartheta-1$ и $\cos\phi-1$.

Мы воспользуемся экспоненциальной записью, чтобы получить бусты в произвольном направлении и повороты вокруг произвольных осей. Прежде всего отметим, что если $\hat{A}$ и $\hat{B}$ не перестановочны, то произведение экспонент может не совпадать с экспонентой суммы:

$$\exists \hat{A}, \hat{B}: \quad \mathrm{e}^{\hat{A}}\mathrm{e}^{\hat{B}} \neq \mathrm{e}^{\hat{A}+\hat{B}}.$$

Для матричных экспонент есть ряд теорем, обобщающих второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}, \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = \mathrm{e}^{\alpha}.$$

Для матричных экспонент важны аналогичные пределы

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\hat{1}+\frac{\alpha\hat{M}}{x}\right)^x = \mathrm{e}^{\alpha\hat{M}}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{x}\hat{M}}\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{x}\hat{N}}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(\hat{1}+\frac{\alpha(\hat{M}+\hat{N})}{x}\right)^x = \mathrm{e}^{\alpha(\hat{M}+\hat{N})}.$$

Симметрии образуют группу, вследствие этого если $\mathrm{e}^{\alpha\hat{M}}$ и $\mathrm{e}^{\alpha\hat{N}}$ являются симметриями, то симметрией является их произведение $\mathrm{e}^{\alpha\hat{M}}\mathrm{e}^{\alpha\hat{N}}$, а, следовательно, симметрией является $\mathrm{e}^{\alpha(\hat{M}+\hat{N})}$ т.е. если $\hat{M}$ и $\hat{N}$ — генераторы симметрии, то $\hat{M}+\hat{N}$ — тоже генератор симметрии. С учётом того, что генератор симметрии можно умножать на произвольное вещественное число, получаем, что *генераторы симметрии образуют линейное пространство.*

Для элемента группы, близкого к единичному

$$\mathrm{e}^{\alpha\hat{M}} = \hat{1} + \alpha\hat{M} + o(\alpha). \tag{1.8.3}$$

Таким образом, генераторы симметрий задают элементы группы в бесконечномалой окрестности единицы.

(*) Рассмотрим *групповой коммутатор*[7] двух матричных экспонент. Разлагая экспоненты в ряд до α^2 и раскрывая скобки (следя за правильным порядком сомножителей!), получаем

$$\mathrm{e}^{\alpha\hat{M}}\mathrm{e}^{\alpha\hat{N}}\mathrm{e}^{-\alpha\hat{M}}\mathrm{e}^{-\alpha\hat{N}} = \hat{1} + \alpha^2\underbrace{(\hat{M}\hat{N}-\hat{N}\hat{M})}_{[\hat{M},\hat{N}]} + o(\alpha^2).$$

Мы видим, что *коммутатор*[8] генераторов

$$[\hat{M},\hat{N}] = \hat{M}\hat{N} - \hat{N}\hat{M}$$

тоже является генератором. Таким образом, на линейном пространстве генераторов оказывается определён ещё и коммутатор. Поскольку коммутатор линеен, антисимметричен и для него выполняется тождество Якоби (проверяется по определению коммутатора)

$$[\hat{M},[\hat{N},\hat{K}]] + [\hat{K},[\hat{M},\hat{N}]] + [\hat{N},[\hat{K},\hat{M}]] = 0,$$

коммутатор оказывается *скобкой Ли*, а пространство генераторов симметрии — *алгеброй Ли* (линейным пространством со скобкой Ли). Размерность алгебры Ли (как линейного пространства) соответствует размерности (числу вещественных параметров) соответствующей *группы преобразований* (*группы Ли*).

(*) Всякой группе Ли соответствует своя алгебра Ли генераторов этой группы. Так что экспоненциальная запись элементов группы Лоренца — это не счастливая случайность, а часть хорошо развитой математической теории групп и алгебр Ли.

Определим размерность группы Лоренца. Элемент группы определяется 4×4 матрицей $\hat{M}$, у которой 16 элементов. На эти 16 элементов накладываются условия инвариантности метрики Минковского (которые следуют из обычного тензорного закона преобразования метрики как тензора с двумя нижними индексами (1.2.26)):

$$\hat{M}\ \mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1)\,\hat{M}^T = \mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1).$$

В силу симметрии метрического тензора мы получаем 10 независимых условий (число независимых компонент у симметричной матрицы 4×4). Таким образом, размерность группы Лоренца равна $16-10=6$. В алгебре Ли группы Лоренца должно быть 6 линейно независимых генераторов. Мы знаем два ($\hat{a}_x$ и $\hat{b}_z$),

[7] *Групповой коммутатор* элементов группы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ — это выражение $\hat{A}\hat{B}\hat{A}^{-1}\hat{B}^{-1}$. В определении группового коммутатора используются только групповые операции: умножение и взятие обратного элемента. Групповой коммутатор равен единичному элементу группы тогда и только тогда, когда $\hat{A}\hat{B}=\hat{B}\hat{A}$.

[8] *Коммутатор* (иногда называемый *матричным коммутатором*) $[\hat{M},\hat{N}]=\hat{M}\hat{N}-\hat{N}\hat{M}$ не может быть определён для элементов группы, поскольку для элементов группы у нас есть умножение, но нет вычитания.

но можем легко получить ещё 4 для направлений скоростей и осей поворотов по другим осям координат (циклической перестановкой $x \to y \to z \to x$ получаем $\hat{a}_y$, $\hat{a}_z$, $\hat{b}_x$, $\hat{b}_y$):

$$\hat{a}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{a}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{a}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{1.8.4}$$

$$\hat{b}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{b}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{b}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.8.5}$$

Мы видим, что найденные 6 генераторов линейно независимы, а значит, вычисляя экспоненты от их линейных комбинаций, мы можем получить все элементы группы Лоренца, которые можно соединить непрерывной кривой с единицей группы. Таким образом, мы можем получить все элементы *специальной* ($\det \hat{\Lambda} = 1$) *ортохронной* (переводящей половинки светового конуса в себя) *группы Лоренца* $\mathrm{SO}_+(1,3)$.

Если записать тройки генераторов как два 3-вектора с матричными компонентами $\hat{\mathbf{a}} = (\hat{a}_x, \hat{a}_y, \hat{a}_x)$ и $\hat{\mathbf{b}} = (\hat{b}_x, \hat{b}_y, \hat{b}_z)$, то линейная комбинация генераторов общего вида может быть записана как

$$\hat{F} = (\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{E}) - (\hat{\mathbf{b}}, \mathbf{B}) = \hat{a}_x E_x + \hat{a}_y E_y + \hat{a}_z E_z - \hat{b}_x B_x - \hat{b}_y B_y - \hat{b}_z B_z = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.8.6}$$

где 3-векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ составлены из коэффициентов при генераторах.

(*) Знаки перед $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ и сами эти обозначения мы подобрали так, чтобы получившийся генератор общего вида выглядел в точности как тензор электромагнитного поля $F^i{}_j$. Почему возникает такое совпадение, мы обсудим далее в § 2.8.7 «Группа Лоренца и электромагнитное поле».

1.8.7 Поворот и буст в произвольном направлении*

Будем считать *чистым бустом* такое преобразование из специальной ортохронной группы Лоренца, что компоненты 3-мерной скорости первой системы относительно второй и второй системы относительно первой отличаются только знаками.

Если мы умеем делать буст вдоль оси x, а нам нужен буст вдоль вектора $\mathbf{n}$, то надо повернуть ось x вдоль вектора $\mathbf{n}$ вспомогательным поворотом $\hat{R}$, сделать буст $\hat{\Lambda}(x, \vartheta)$, а потом сделать обратный поворот $\hat{R}^{-1}$.

$$\hat{\Lambda}(\mathbf{n}, \vartheta) = \hat{R}\hat{\Lambda}(x, \vartheta)\hat{R}^{-1} = \hat{R}\mathrm{e}^{\vartheta \hat{a}_x}\hat{R}^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\vartheta^n}{n!} \hat{R}\hat{a}_x^n\hat{R}^{-1}.$$

Матричное произведение под суммой мы можем переписать как степень матрицы $(\hat{R}\hat{a}_x\hat{R}^{-1})$:

$$\hat{R}\hat{a}_x^n\hat{R}^{-1} = \hat{R}\underbrace{\hat{a}_x\hat{a}_x\cdots\hat{a}_x}_{n \text{ раз}}\hat{R}^{-1} = \hat{R}\hat{a}_x\underbrace{\hat{R}^{-1}\hat{R}}_{\hat{1}}\hat{a}_x\underbrace{\hat{R}^{-1}\hat{R}}_{\hat{1}}\cdots\underbrace{\hat{R}^{-1}\hat{R}}_{\hat{1}}\hat{a}_x\hat{R}^{-1} = (\hat{R}\hat{a}_x\hat{R}^{-1})^n.$$

После этого выражение может быть переписано как экспонента, в которой матрицы поворота оказались внесены в показатель экспоненты:

$$\hat{\Lambda}(\mathbf{n}, \vartheta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\vartheta^n}{n!}(\hat{R}\hat{a}_x\hat{R}^{-1})^n = \mathrm{e}^{\vartheta(\hat{R}\hat{a}_x\hat{R}^{-1})}.$$

Таким образом, мы выяснили, что генератор поворота в произвольном направлении имеет вид $(\hat{R}\hat{a}_x\hat{R}^{-1})$, но мы пока не уточнили вид матрицы $\hat{R}$ и явный вид нового генератора.

Матрица чистого поворота $\hat{R}$ не затрагивает время. Запишем её в блочном виде:

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{r} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\hat{r} \in \mathrm{SO}(3)$ (т.е. $\hat{r}^T = \hat{r}^{-1}$) — матрица поворота 3×3, нули в матрице $\hat{R}$ — это столбец и строка из трёх нулей каждая.

Матрицу генератора $\hat{a}_x$ также представим в блочном виде:

$$\hat{a}_x = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{e}_x^T \\ \mathbf{e}_x & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицы в блочном виде, получаем

$$\hat{R}\hat{a}_x\hat{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{e}_x^T \\ \mathbf{e}_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{r}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{e}_x^T \\ \hat{r}\mathbf{e}_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{r}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{e}_x^T\hat{r}^T \\ \hat{r}\mathbf{e}_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что в новом генераторе в первой строке и первом столбце вместо $\mathbf{e}_x$ находится повёрнутый (но тоже единичный) вектор $\hat{r}\mathbf{e}_x$. Этот вектор задаёт единственное выделенное направление для нового преобразования, поэтому мы отождествим его с $\mathbf{n}$ (знак выберем из сравнения с $\hat{a}_x$). Итак, генератор буста в направлении $\mathbf{n}$ имет вид

$$\hat{a}_\mathbf{n} = \hat{R}\hat{a}_x\hat{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{n}^T \\ \mathbf{n} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & n_x & n_y & n_z \\ n_x & 0 & 0 & 0 \\ n_y & 0 & 0 & 0 \\ n_z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = n_x\hat{a}_x + n_y\hat{a}_y + n_z\hat{a}_z = (\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{n}).$$

Как и для генератора буста по направлению x, генератор по произвольному направлению совпадает со своей 3-й степенью:

$$\hat{a}_\mathbf{n}^3 = (\hat{R}\hat{a}_x\hat{R}^{-1})^3 = \hat{R}\hat{a}_x^3\hat{R}^{-1} = \hat{R}\hat{a}_x\hat{R}^{-1} = \hat{a}_\mathbf{n},$$

поэтому полностью аналогично формуле (1.8.1) получаем

$$\mathrm{e}^{\vartheta\hat{a}_\mathbf{n}} = \hat{1} + \hat{a}_\mathbf{n}\operatorname{sh}\vartheta + \hat{a}_\mathbf{n}^2(\operatorname{ch}\vartheta - 1) = \tag{1.8.7}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \operatorname{sh}\vartheta\begin{pmatrix} 0 & n_x & n_y & n_z \\ n_x & 0 & 0 & 0 \\ n_y & 0 & 0 & 0 \\ n_z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (\operatorname{ch}\vartheta - 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_x^2 & n_xn_y & n_xn_z \\ 0 & n_yn_x & n_y^2 & n_yn_z \\ 0 & n_zn_x & n_zn_y & n_z^2 \end{pmatrix}.$$

У 4-мерной матрицы буста есть инвариантная плоскость поперечных к скорости направлений, перпендикулярная оси t и 4-вектору $\underline{n} = (0; \mathbf{n})$. Любой вектор в этой плоскости — собственный вектор с собственным числом 1. Ещё у матрицы буста есть два собственных числа $\mathrm{e}^{\pm\vartheta}$ и соответствующие им собственные векторы $(1; \pm\mathbf{n})$, как показано для буста на плоскости в § 2.8.2 (с. 224).

Поворот вокруг оси $\mathbf{n}$ мы можем вывести аналогично, но мы поступим по-другому. Чистый поворот не преобразует время и не зависит от времени. Мы уже получили все 6 генераторов группы Лоренца и видим, что генераторы $\hat{a}_x$, $\hat{a}_y$, $\hat{a}_z$ и любая их комбинация порождают преобразования, затрагивающие время, а генераторы $\hat{b}_x$, $\hat{b}_y$, $\hat{b}_z$ время не затрагивают, следовательно, мы можем утверждать, что генератор поворота общего вида имеет вид

$$\hat{b}_\mathbf{n} = (\hat{\mathbf{b}}, \mathbf{n}) = \hat{b}_xn_x + \hat{b}_yn_y + \hat{b}_zn_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n_z & n_y \\ 0 & n_z & 0 & -n_x \\ 0 & -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Пространственные компоненты этого генератора можно записать как

$$(\hat{b}_\mathbf{n})_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}n_\gamma.$$

Таким образом, единственное выделенное направление для этого генератора задаётся 3-вектором $\mathbf{n}$. Этот вектор и задаёт ось поворота (знак определяем путём сравнения с $\hat{b}_z$). Аналогично из того, что $\hat{b}_z^3 = -\hat{b}_z$, следует, что $\hat{b}_\mathbf{n}^3 = -\hat{b}_\mathbf{n}$, и, как при выводе формулы (1.8.2), мы получаем

$$\mathrm{e}^{\phi\hat{b}_\mathbf{n}} = \hat{1} + \hat{b}_\mathbf{n}\sin\phi - \hat{b}_\mathbf{n}^2(\cos\phi - 1) = \tag{1.8.8}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin\phi\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n_z & n_y \\ 0 & n_z & 0 & -n_x \\ 0 & -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix} + (\cos\phi - 1)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - n_x^2 & -n_xn_y & -n_xn_z \\ 0 & -n_yn_x & 1 - n_y^2 & -n_yn_z \\ 0 & -n_zn_x & -n_zn_y & 1 - n_z^2 \end{pmatrix}.$$

У 4-мерной матрицы поворота есть инвариантная плоскость, натянутая на ось t и 4-вектор $\underline{n} = (0; \mathbf{n})$. Любой вектор в этой плоскости — собственный вектор с собственным числом 1. Если откинуть время, то вместо инвариантной плоскости останется инвариантная прямая с направлением $\mathbf{n}$. Направление $\mathbf{n}$ можно искать как направление вещественного собственного вектора. Ещё у матрицы поворота есть два комплексных собственных числа $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\phi}$ и соответствующие им комплексные собственные векторы, как показано для поворота плоскости в § 2.8.3 (с. 225).

1.8.8 Задачи 22–28

Задача 22. Линейный ускоритель. Пучок π^+-мезонов (*пионов*) с начальным импульсом $p_0 = 200$ МэВ вводится в линейный ускоритель. Масса π^+-мезона — $m_{\pi^+} = 140$ МэВ. Пионы распадаются на антимюон μ^+ и мюонное нейтрино ν_μ:

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu.$$

Время жизни π^+-мезона равно $\tau_{\pi^+} = 2{,}6 \cdot 10^{-8}$ с, а время (период) полураспада — $\tau_{1/2} = \tau_{\pi^+} \ln 2$. Массы продуктов распада составляют

$$m_\mu = 105 \text{ МэВ}, \qquad m_\nu \approx 0.$$

а) Какова должна быть напряжённость ускоряющего поля E, чтобы половину пионов удалось ускорить до энергии $\mathcal{E} = 200$ ГэВ?
б) Какую длину ℓ должен при этом иметь ускоритель?
Указание. В данной задаче удобно положить $c = 1$ и измерять время в единицах длины (см). При этом массу, энергию и импульс удобно измерять в электрон-вольтах (эВ). Заряд удобно измерять в элементарных зарядах e. Тогда сила и напряжённость электрического поля измеряются в единицах В/см.

Задача 23. * Релятивистская задача Циолковского. Получите формулу Циолковского для СТО. Результат запишите через быстроту ракеты.

Задача 24. Преобразование Лоренца для скорости, непараллельной координатным осям. Начало координат системы $\tilde{K}$ движется со скоростью $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ относительно системы K, а оси координат составляют со скоростью $\mathbf{v}$ те же самые углы, что и оси системы K.
а) Запишите матрицу преобразования Лоренца от системы K к системе $\tilde{K}$.
б) Запишите матрицу обратного преобразования.
в) Определите положение осей (x', y') в системе K в момент времени $t = 0$ по часам системы K.

Задача 25. Преобразования Лоренца, образующие поворот. Система K' движется со скоростью v_x вдоль оси x системы K. Система K'' движется со скоростью v'_y вдоль оси y' системы K'. Скорость v'_y такова, что начало координат системы K'' движется относительно системы K со скоростью $\mathbf{v} = (v_x\,, v_y)$.
а) Выразите v'_y через v_x, v_y.
б) Покажите, что направление вектора относительной скорости системы K в системе K'' будет повернуто относительно направления $-\mathbf{v}$ на угол α. Выразите $\operatorname{tg}\alpha$ через скорость, ускорение и $\operatorname{tg}\phi = \frac{v_y}{v_x}$.

Задача 26. * Прецессия Томаса. На частицу, движущуюся со скоростью $\mathbf{v}$, действует сила, сообщающая ей ускорение $\dot{\mathbf{v}}$.
Определите, с какой угловой скоростью будет поворачиваться спин частицы относительно лабораторной системы отсчёта, если сила, действующая на частицу, не действует на её спин.
Указание. Используйте результат задачи 25.

Задача 27. Функции распределения при распадах. В системе покоя π-мезона распад $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$ происходит изотропно. Имеется пучок π-мезонов с энергией 6 ГэВ (масса π-мезона $\approx$ 140 МэВ, масса мюона $\approx$ 105 МэВ).
а) Определите энергетический спектр нейтрино, их максимальную и среднюю энергии.
б) Определите угловое распределение нейтрино.
Указание. Число частиц — инвариант (не зависит от системы отсчёта).

Задача 28. Движущееся зеркало. Плоское зеркало движется со скоростью v в направлении своей нормали. На зеркало падает монохроматическая волна с циклической частотой ω под углом α к нормали. Для покоящегося зеркала справедлив обычный закон отражения.
Определите направление и частоту отраженной волны.
Указание. Удобно использовать 4-мерные волновые векторы $k^i = (\omega, \mathbf{k})$ или векторы 4-импульса фотонов $p^i = \hbar k^i = (\mathcal{E}, \mathbf{p})$.

1.8.9 Ответы к задачам 22–28

Задача 22. Линейный ускоритель.

$$E = \frac{m}{ec\tau_{1/2}} \ln \frac{2\mathcal{E}}{p_0 + \sqrt{p_0^2 + m^2}},$$
$$\ell = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_0}{F} = \frac{c\tau_{1/2}}{m} \frac{\mathcal{E} - \sqrt{p_0^2 + m^2}}{\ln \frac{2\mathcal{E}}{p_0 + \sqrt{p_0^2 + m^2}}} \approx \frac{c\tau_{1/2}}{m} \frac{\mathcal{E}}{\ln \frac{2\mathcal{E}}{p_0 + \sqrt{p_0^2 + m^2}}}.$$

Задача 23. * Релятивистская задача Циолковского. $V = c\ \mathrm{th}\,\vartheta$, $\vartheta(t) - \vartheta_0 = \frac{u}{c}\ \ln \frac{m_0}{m(t)}$.

Задача 24. Преобразование Лоренца для скорости, непараллельной координатным осям.
а) См. формулу (1.8.7) с заменой $\vartheta \to -\vartheta$.
б) См. формулу (1.8.7).
в) Нештрихованные координаты единичной точки оси x' в момент времени $t = 0$:

$$\mathbf{r} = (1, 0, 0) - \frac{1 - \sqrt{1 - v^2}}{v^2}\, v_x\, (v_x, v_y, 0).$$

Задача 25. Преобразования Лоренца, образующие поворот.

а) $v_y' = \dfrac{v_y}{\sqrt{1 - v_x^2}}$, **б)** $\mathrm{tg}(\phi + \alpha) = \gamma\ \mathrm{tg}\,\phi\,, \quad \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\,, \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{(\gamma - 1)\,\mathrm{tg}\,\phi}{1 + \gamma\ \mathrm{tg}^2\,\phi}\,.$

Задача 26. * Прецессия Томаса. $\boldsymbol{\omega} = \frac{\gamma^2}{(\gamma+1)c^2}\,[\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{v}]$.

Задача 27. Функции распределения при распадах.
а) $\frac{dN_3}{N_0} = \frac{dE_\nu}{2E_0\gamma v} \cdot \theta(E_{\nu max} - E_\nu) \cdot \theta(E_\nu - E_{\nu min})$, $E_{\nu\,\frac{max}{min}} = E_0\sqrt{\frac{1 \pm v}{1 \mp v}}$, $E_0 = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi}$, $\gamma = \frac{E_\pi}{m_\pi}$, $v = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$.
б) $\frac{dN_2}{N_0} = \frac{d\Omega}{4\pi\gamma^2(1 - v\ \cos\theta)^2}$.

Задача 28. Движущееся зеркало.

$$\omega_{\text{о.}} = \omega(1 + 2\gamma^2 v(\cos\alpha + v)) = \omega\gamma^2(1 + v^2 + 2v\cos\alpha), \qquad \cos\beta = \frac{-\cos\alpha + 2\gamma^2(\cos\alpha + v)}{1 + 2\gamma^2 v(\cos\alpha + v)} = \frac{\cos\alpha(1 + v^2) + 2v}{1 + v^2 + 2v\cos\alpha}.$$

Глава 1.9

Время как координата и энергия как импульс* (с. 253)

В СТО энергия и импульс оказались компонентами одного 4-мерного вектора, а время оказалось удобным рассматривать как дополнительную обобщённую координату. Пока мы получили соответствующие утверждения исходя из постулатов СТО, используя соответствие с ньютоновской механикой. Однако было бы полезно рассмотреть эти факты в рамках лагранжева и гамильтонова формализмов. Также было бы интересно понять, является ли пространственно-временной подход спецификой СТО. Выше мы ввели пространство-время также и для ньютоновской механики. Можно ли и в этом случае объединить не только радиус-вектор со временем, но и импульс с энергией?

1.9.1 Лагранжев формализм в расширенном конфигурационном пространстве*

Пусть задан невырожденный лагранжиан $L(t, x, \dot{x})$, где $x^\alpha = (x^1, \dots, x^D)$ — обобщённые координаты, а $\dot{x} = dx/dt$ — обобщённые скорости, который явно зависит от времени. Мы можем переписать *неавтономную* (явно зависящую от времени) систему как *автономную*, записав время t как функцию от некоторого монотонного параметра l. Тем самым мы перешли от обычного конфигурационного пространства с координатами $x^\alpha = (x^1, \dots, x^D)$ к *расширенному конфигурационному пространству* с координатами $x^i = (x^0, x^1, \dots, x^D)$ (где $x^0 = t$).

Действие будет иметь вид

$$S[x^\alpha(t)] = \int L(t, x^\alpha, \dot{x}^\alpha)\, dt = \int L(t, x^\alpha, \acute{x}^\alpha/\acute{t})\, \acute{t}\, dl, \qquad \acute{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dl}. \tag{1.9.1}$$

Мы получаем новый (*расширенный*) функционал действия $S_\text{р}[x^i(l)]$ с новым (*расширенным*) лагранжианом $L_\text{р}$, который для любой траектории совпадает с исходным действием $S[x^\alpha(t)]$, но зависит от другого набора функций:

$$S_\text{р}[x^i(l)] = S_\text{р}[t(l), x^\alpha(l)] = \int L_\text{р}(t, \acute{t}, x^\alpha, \acute{x}^\alpha)\, dl, \qquad L_\text{р}(t, \acute{t}, x^\alpha, \acute{x}^\alpha) = L(t, x^\alpha, \acute{x}^\alpha/\acute{t})\, \acute{t}. \tag{1.9.2}$$

В расширенное действие время t входит как ещё одна обобщённая координата x^0. Обобщённые импульсы, канонически сопряжённые старым координатам x^α, совпадают с обычными обобщёнными импульсами:

$$p_\alpha = \frac{\partial L_\text{р}}{\partial \acute{x}^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, D, \tag{1.9.3}$$

а обобщённый импульс, канонически сопряжённый времени $t = x^0$, совпадает с энергией $\mathcal{E}$ со знаком минус:

$$p_0 = \frac{\partial L_\text{р}}{\partial \acute{t}} = L - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\, \dot{x}^\alpha = -\mathcal{E}. \tag{1.9.4}$$

Уравнения Лагранжа для расширенного лагранжиана для координат $x^\alpha(l)$ и времени $x^0(l) = t(l)$ с точностью до множителя $\acute{t}$ совпадают с уравнениями Лагранжа и уравнением баланса энергии (1.3.10) для исходного лагранжиана:

$$\frac{\delta S_\text{р}}{\delta x^\alpha(l)} = \acute{t}\, \frac{\delta S}{\delta x^\alpha(t)} = \acute{t} \left(\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{dp_\alpha}{dt} \right), \qquad \frac{\delta S_\text{р}}{\delta t(l)} = \acute{t} \left(\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right). \tag{1.9.5}$$

«Энергия» $\mathcal{E}_\text{р}$ для расширенного лагранжиана тождественно равна нулю:

$$\mathcal{E}_\text{р} = p_i \acute{x}^i - L_\text{р} = p_0 \acute{t} + p_\alpha \acute{x}^\alpha - L_\text{р} = \acute{t}(p_0 + \mathcal{E}) \equiv 0. \tag{1.9.6}$$

Расширенное действие описывает ту же физическую систему, что и исходное, но, поскольку выбор параметризации времени $t(l)$ произволен (любая гладкая монотонная функция), уравнения Лагранжа оказываются зависимыми (уравнение баланса энергии выражается через остальные уравнения).

1.9.2 Принцип Мопертюи и укороченное действие*

Выразим из равенства (1.9.6) расширенную функцию Лагранжа

$$L_\text{р} = p_0 \acute{t} + p_\alpha \acute{x}^\alpha = P_i(x^\alpha, t, \acute{x}^\alpha, \acute{t})\,\frac{dx^i}{dl}.$$

Мы можем записать расширенное действие как

$$S_\text{р}[x^i(l)] = \int\limits_{l_0}^{l_1} P_i(x^\alpha, t, \acute{x}^\alpha, \acute{t})\,\frac{dx^i}{dl}\,dl = \int\limits_{l_0}^{l_1} P_i(x^\alpha, t, \acute{x}^\alpha, \acute{t})\,dx^i = \int\limits_{l_0}^{l_1} \Big(P_\alpha\,dx^\alpha - \mathcal{E}\,dt\Big).$$

Импульсы и энергия — функции координат x^i и скоростей $\frac{dx^i}{dl}$.

Рассмотрим особо случай, когда лагранжиан не зависит от времени, $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$. В этом случае энергия сохраняется, так что мы знаем, что на экстремальной траектории $\mathcal{E}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha) = H\big(x^\alpha, P^\alpha(x^\alpha, \dot{x}^\alpha)\big) = \mathcal{E}_0 = \text{const}$. Таким образом, мы можем искать экстремум не среди всех траекторий, а только на подмножестве траекторий, на которых энергия сохраняется и равна $\mathcal{E}_0$. Это будет уже другой функционал, причём интеграл от второго члена берётся явно как интеграл от константы,

$$S_\text{р}\Big[x^i(l)\Big|\mathcal{E}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha) = \mathcal{E}_0\Big] = \int\limits_{l_0}^{l_1} \Big(P_\gamma(x^\alpha, \dot{x}^\alpha)\,dx^\gamma - \mathcal{E}_0\,dt\Big) = \int\limits_{l_0}^{l_1} P_\gamma(x^\alpha, \dot{x}^\alpha)\,dx^\gamma - \mathcal{E}_0(t_1 - t_0).$$

Последний член не даёт вклада в вариацию, поскольку включает только начальные и конечные значения координаты $x^0 = t$, поэтому мы можем его отбросить и перейти к *укороченному действию*:

$$S\Big[x^i(l)\Big|\mathcal{E}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha) = \mathcal{E}_0\Big] = \int\limits_{l_0}^{l_1} P_\gamma(x^\alpha, \dot{x}^\alpha)\,dx^\gamma. \tag{1.9.7}$$

Поскольку мы теперь рассматриваем не все вариации, а только вариации, удовлетворяющие одному условию (сохраняющие энергию вдоль траектории), среди функций $x^i(l)$ одну можно выразить через остальные. Воспользуемся условием сохранения энергии

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha) = \mathcal{E}(x^\alpha, \acute{x}^\alpha/\acute{t})$$

и решим его относительно $\acute{t} = \frac{dt}{dl}$:

$$\frac{dt}{dl} = f(\mathcal{E}_0, x^\alpha, \tfrac{dx^\alpha}{dl}). \tag{1.9.8}$$

Поскольку $\acute{t}$ теперь выражается через другие переменные, мы «потеряли» условие фиксированности конечного момента времени.

Окончательно укороченное действие имеет вид

$$S\big[x^\alpha(l)\big] = \int\limits_{l_0}^{l_1} P_\gamma\Big(x^\alpha, \frac{\acute{x}^\alpha}{f(\mathcal{E}_0, x^\alpha, \acute{x}^\alpha/\acute{t})}\Big)\,dx^\gamma, \qquad P_\alpha(x^\alpha, \dot{x}^\alpha) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}, \quad \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}\Big(x^\alpha, \frac{\acute{x}^\alpha}{f(\mathcal{E}_0, x^\alpha, \acute{x}^\alpha/\acute{t})}\Big). \tag{1.9.9}$$

Проварьировав укороченное действие, мы находим траекторию как непараметризованную кривую (параметр l произволен) в конфигурационном пространстве. Время вдоль траектории мы находим из условия постоянства энергии (1.9.8).

Мы получили *принцип Мопертюи*, исторически — первый принцип экстремального действия в механике. Ему предшествовал *принцип Ферма* в оптике, который также не предполагал варьирования по времени.

1.9.3 Задача 29

Задача 29. * Геометрическая оптика и геометрическая механика.
а) Запишите функционал времени распространения света в среде с переменным показателем преломления $n(\mathbf{r})$, проварьируйте и получите уравнение луча света в геометрической оптике.
б) Для какой метрики функционал длины соответствует функционалу времени из пункта **а**?
в) Запишите укороченное действие для нерелятивистской частицы в потенциале $U(\mathbf{r})$, проварьируйте и получите уравнение движения частицы в «геометрической механике».
г) Какой показатель преломления $n(\mathbf{r})$ соответствует потенциалу $U(\mathbf{r})$, если функционал времени распространения света совпадает с укороченным действием?

Глава 1.10

Релятивистская частица (с. 258)

1.10.1 Свободная релятивистская частица

Действие для свободной релятивистской частицы мы определим из следующих условий.

1. Действие определяется геометрией мировой линии в пространстве Минковского (инвариантно относительно группы Пуанкаре).
2. Лагранжиан содержит производные не выше первой.
3. Лагранжиан является скаляром (это условие не следует из первого).
4. На малом участке мировой линии прямая должна давать минимум действия.
5. Действие будем искать в виде функционала $S_{\mathrm{p}}[X^i(l)]$ от четырёх лоренцевых координат (включая время), заданных как функции от монотонного параметра вдоль мировой линии l.
6. При замене параметра интегрирования l действие $S_{\mathrm{p}}[X^i(l)]$ должно оставаться неизменным.

Соответствующий лагранжиан должен быть скаляром, из 4-вектора обобщённой скорости мы можем выразить скаляр только как скалярный квадрат, через него и должен выражаться лагранжиан:

$$L_{\mathrm{p}}(\tfrac{dX^i}{dl}) = L_{\mathrm{p}}(g_{ij}\tfrac{dX^i}{dl}\tfrac{dX^j}{dl}).$$

Единственная геометрическая характеристика, которую мы можем выразить в виде интеграла от лагранжиана такого вида, — собственное время вдоль мировой линии, так что действие должно быть ему пропорционально:

$$S_{\mathrm{p}}[X^i(l)] = \mathrm{const}\cdot\int\sqrt{-\frac{g_{ij}}{c^2}\frac{dX^i}{dl}\frac{dX^j}{dl}}\,dl = \mathrm{const}\cdot\int d\tau.$$

Константа должна иметь размерность энергии.

Мы знаем, что для времениподобных интервалов собственное время вдоль прямой максимально, значит, константу надо выбрать отрицательной. Константа может зависеть от каких-то характеристик частицы. В ньютоновской механике единственная константа, входящая в действие для свободной частицы, — это её масса. Значит, константа (с точностью до неизвестного безразмерного множителя, который мы пока опустим) должна равняться $(-mc^2)$.

$$S_{\mathrm{p}}[X^i(l)] = -mc^2\cdot\int\sqrt{-\frac{g_{ij}}{c^2}\frac{dX^i}{dl}\frac{dX^j}{dl}}\,dl = -mc^2\cdot\int d\tau; \tag{1.10.1}$$

$$L_{\mathrm{p}}(X^i,\tfrac{dX^i}{dl}) = -mc^2\sqrt{-\frac{g_{ij}}{c^2}\frac{dX^i}{dl}\frac{dX^j}{dl}},\qquad p_i = \frac{\partial L_{\mathrm{p}}}{\partial\frac{dX^i}{dl}} = m\frac{dX^j}{d\tau}g_{ij} = mu_i = (-\tfrac{1}{c}\mathcal{E},\mathbf{p}),\quad \mathcal{E}_{\mathrm{p}} = p_i\tfrac{dX^i}{dl} - L_{\mathrm{p}} \equiv 0.$$

Мы воспроизвели то же выражение для обобщённого импульса $p^i = mu^i$, которое вводили раньше, только с опущенным индексом[1]. Так что дополнительный безразмерный множитель здесь вставлять не нужно.

Действие (1.10.1) можно легко обобщить на случай криволинейных координат и даже искривлённого пространства-времени, как в общей теории относительности[2] (ОТО), для этого достаточно, чтобы метрика g_{ij} была функцией от координат.

[1] Как мы установили в § 1.3.4 «Уравнения Эйлера-Лагранжа с тензорной точки зрения», обобщённые импульсы, полученные из лагранжиана, всегда являются компонентами ковектора.

[2] В общей теории относительности искривлённое пространство-время описывает гравитационное поле. Можно сказать, что гравитационное поле в ОТО — это метрика пространства-времени, отличная от метрики Минковского.

Мы можем также определить действие как функционал от $\mathbf{r}(t)$, просто выбрав параметр интегрирования $l = t$:

$$S[\mathbf{r}(t)] = -mc^2 \cdot \int \sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{c^2}}\, dt = -mc^2 \cdot \int d\tau, \tag{1.10.2}$$

$$L(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)) = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{c^2}}, \qquad \mathbf{p} = \frac{dL}{d\dot{\mathbf{r}}} = \frac{m\dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{c^2}}}, \quad \mathcal{E} = \mathbf{p}\dot{\mathbf{r}} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{c^2}}}.$$

Эти два действия и соответствующие лагранжианы соотносятся друг с другом в точности так, как было описано в § 1.9.1 «Лагранжев формализм в расширенном конфигурационном пространстве».

Мы можем также получить функцию Гамильтона для свободной частицы. Можно было бы сделать преобразование Лежандра, но вместо этого мы воспользуемся тождеством

$$-m^2c^2 = p_i p^i = \mathbf{p}^2 - \tfrac{1}{c^2}\mathcal{E}^2$$

и получим функцию Гамильтона как энергию, выраженную через координаты и импульсы:

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathcal{E} = \sqrt{(mc^2)^2 + \mathbf{p}^2c^2}. \tag{1.10.3}$$

Действие для релятивистской частицы может быть определено разными способами, некоторые из них мы рассмотрим в задаче 30.

1.10.2 Релятивистская частица во внешнем поле

Рассмотрим релятивистскую частицу, взаимодействующую с внешним полем. Действие будем строить как сумму «действие для свободной частицы»+«действие для взаимодействия». В дальнейшем, чтобы рассмотреть само поле как динамическую систему, к сумме добавим ещё один член «действие для поля», но, пока мы рассматриваем внешнее поле, в этом нет необходимости.

Постараемся найти самое простое взаимодействие, такое, чтобы его лагранжиан не зависел от метрического тензора. Тогда внешнее поле должно описываться ковекторным полем A_i, которое назовём *4-потенциалом*, а *действие взаимодействия* — интеграл A_i вдоль мировой линии:

$$S_{\text{вз.р}}[X^i(l)] = \frac{q}{c}\int A_i(\underline{X}(l))\frac{dX^i}{dl}\, dl = \frac{q}{c}\int A_i(\underline{X}(l))\, dX^i.$$

Константа q здесь — некоторый коэффициент, характеризующий взаимодействие частицы с полем[3]. Назовём этот коэффициент зарядом частицы.

Полное действие для частицы во внешнем поле имеет вид

$$S_{\text{р}}[X^i(l)] = S_{\text{ч.р}} + S_{\text{вз.р}} = \int \left(-mc^2\sqrt{-\frac{g_{ij}}{c^2}\frac{dX^i}{dl}\frac{dX^j}{dl}} + \frac{q}{c}A_i(\underline{X})\frac{dX^i}{dl}\right) dl.$$

Если параметризовать мировую линию как $\mathbf{r}(t)$, то получаем

$$S[\mathbf{r}(t)] = S_{\text{ч.}} + S_{\text{вз.}} = \int \left(-mc^2\sqrt{1 - \dot{\mathbf{r}}^2/c^2} - q\varphi(\mathbf{r}(t), t) + \frac{q}{c}\big(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{A}(\mathbf{r}(t), t)\big)\right) dt.$$

В обобщённом импульсе появляется добавка, связанная с лагранжианом взаимодействия. Мы будем обозначать импульс свободной частицы (*кинематический импульс*) маленькой буквой $p_i = mu_i$, а *обобщённый импульс частицы в поле* — большой буквой P_i:

$$P_i = \frac{\partial L_{\text{ч.р}}}{\partial \frac{dX^i}{dl}} + \frac{\partial L_{\text{вз.р}}}{\partial \frac{dX^i}{dl}} = p_i + \frac{q}{c}A_i(\underline{X}).$$

Обозначим компоненты поля так: $A^i = (\varphi, \mathbf{A})$, $A_i = (-\varphi, \mathbf{A})$. Будем называть φ *скалярным потенциалом*, а $\mathbf{A}$ — *векторным потенциалом*:

$$P_i = (-\tfrac{1}{c}\mathcal{E}, \mathbf{P}), \qquad \mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{c^2}}} + q\varphi, \qquad \mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{q}{c}\mathbf{A}.$$

Мы видим, что к энергии свободной частицы добавилась потенциальная энергия $q\varphi$, т.е. φ — это действительно потенциал, также изменилась связь обобщённого 3-импульса и скорости частицы.

[3] То, что это именно электромагнитное поле, надо будет специально доказывать.

Функция Гамильтона имеет вид

$$H(\mathbf{r},\mathbf{P}) = q\,\varphi(\mathbf{r},t) + \sqrt{m^2c^4 + [c\mathbf{P} - q\,\mathbf{A}(\mathbf{r},t)]^2}. \tag{1.10.4}$$

Это равенство легко выводится, если учесть, что выражение в квадратных скобках — это кинематический импульс, умноженный на скорость света: $\mathbf{p} = \frac{\mathcal{E}}{c^2}\,\mathbf{v} = \mathbf{P} - \frac{q}{c}\,\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$.

Как и для нерелятивистской частицы, взаимодействие с электромагнитным полем вставляется в функцию Гамильтона частицы следующим образом:
1) добавляем потенциальную энергию в скалярном потенциале: $q\,\varphi(\mathbf{r},t)$;
2) выражаем кинематический импульс через обобщённый, $\mathbf{p} = \mathbf{P} - \frac{q}{c}\,\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$.

Проварьируем действие $S_\text{р}[X^i(l)]$ и получим уравнения Эйлера-Лагранжа в 4-мерном виде.

$$\delta S_\text{р} = \int \left(p_i \frac{d}{dl}\delta X^i + \frac{q}{c} A_i(\underline{X}) \frac{d}{dl}\delta X^i + \frac{q}{c}\frac{dX^j}{dl}\delta A_j \right) dl = \int \left(\left[p_i + \frac{q}{c}A_i\right]\frac{d}{dl}\delta X^i + \frac{q}{c}\frac{dX^j}{dl}\frac{\partial A_j}{\partial x^i}\delta X^i \right) dl =$$
$$= \int \left(-\frac{dp_i}{dl} - \frac{q}{c}\frac{dA_i(\underline{X}(l))}{dl} + \frac{q}{c}\frac{dX^j}{dl}\frac{\partial A_j}{\partial x^i} \right) \delta X^i\, dl = \int \left(-\frac{dp_i}{dl} - \frac{q}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x^j}\frac{dX^j}{dl} + \frac{q}{c}\frac{\partial A_j}{\partial x^i}\frac{dX^j}{dl} \right) \delta X^i\, dl.$$

Получаем вариацию действия

$$\delta S_\text{р} = \int \left(-\frac{dp_i}{dl} + \frac{q}{c}\left[\frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j}\right]\frac{dX^j}{dl} \right) \delta X^i\, dl$$

и вариационную производную

$$\frac{\delta S_\text{р}}{\delta X^i(l)} = \underbrace{-\frac{dp_i}{dl}}_{\frac{\delta S_\text{ч.р}}{\delta X^i(l)}} + \underbrace{\frac{q}{c}\left[\frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j}\right]\frac{dX^j}{dl}}_{\frac{\delta S_\text{вз.р}}{\delta X^i(l)}}. \tag{1.10.5}$$

Поскольку вариационная производная от $S_\text{вз.р}$ — ковектор, а $\frac{dX^j}{dl}$ — вектор, мы можем заключить, используя признак тензора, что выражение в квадратных скобках является тензором (*тензор электромагнитного поля*) по отношению к общекоординатным преобразованиям (в $S_\text{вз.р}$ метрика не входит, и лоренцевость координат не важна):

$$F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} = \partial_i A_j - \partial_j A_i. \tag{1.10.6}$$

Тензор электромагнитного поля по построению антисимметричен: $F_{ij} = -F_{ji}$.

Уравнение движения частицы теперь можно записать так:

$$\frac{dp_i}{dl} = \frac{q}{c}F_{ij}\frac{dX^j}{dl} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dp^i}{dl} = \frac{q}{c}F^i{}_j\frac{dX^j}{dl}.$$

Видно, что для данной мировой линии выполнение уравнения движения не зависит от выбора параметра l, умножением уравнения на производную $\frac{dl}{dl'}$ мы можем перейти к новому параметру l'.

Для нас интересны два выбора параметра l:

- собственное время вдоль мировой линии τ позволит записать уравнение движения через стандартные 4-мерные кинематические величины;
- координатное время t позволит переписать уравнение движения через стандартные 3-мерные кинематические величины и проинтерпретировать его с точки зрения физики.

Уравнения движения в собственном времени связывают между собой 4-скорость и 4-силу:

$$mw_i = \underbrace{\frac{dp_i}{d\tau}}_{f_i} = \frac{q}{c}F_{ij}\underbrace{\frac{dX^j}{d\tau}}_{u^j} = \frac{q}{c}F_{ij}u^j \quad \Leftrightarrow \quad mw^i = \frac{q}{c}F^i{}_j u^j.$$

Мы уже получали такие уравнения (2.8.3) как 4-мерные уравнения движения, линейные по 4-скорости, в § 2.8.7 «Группа Лоренца и электромагнитное поле*».

Чтобы проверить непротиворечивость такого уравнения движения, проверим, что выполняется кинематическое тождество $u_i w^i = 0$. Это тождество гарантирует нам, что скалярный квадрат 4-скорости постоянен[4]:

$$u_i w^i = u^i\left(\frac{q}{mc}F_{ij}u^j\right) = \frac{q}{mc}\underbrace{(u^i F_{ij} u^j)}_{0}.$$

[4]Мы уже проверяли такую непротиворечивость, показывая, что $F^i{}_j$ должно быть генератором группы Лоренца. Здесь мы доказываем эквивалентное утверждение, поскольку при опускании индекса генератор группы Лоренца становится антисимметричной матрицей общего вида F_{ij}.

Квадратичная форма $u^i F_{ij} u^j$ равна нулю в силу антисимметричности тензора F_{ij}. В этом легко убедиться, если подставить $F_{ij} = -F_{ji}$, а потом переименовать немые индексы i в j, а j в i:

$$u^i F_{ij} u^j \underbrace{=}_{F_{ij}=-F_{ji}} -u^i F_{ji} u^j \underbrace{=}_{i\leftrightarrow j} -u^i F_{ij} u^j \underbrace{=}_{(x=-x)\to x=0} 0.$$

1.10.3 Уравнения движения заряженной частицы в 3-мерном виде

Перепишем уравнение движения заряженной частицы, выбрав в качестве параметра координатное время t:

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{q}{c} F_{ij} \frac{dX^j}{dt}.$$

Для тензора электромагнитного поля используем следующую параметризацию с помощью двух 3-векторов[5]:

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}, \qquad F_{\alpha 0} = E_\alpha, \quad F_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} B^\gamma. \tag{1.10.7}$$

Исследуем сначала компоненту номер $i = 0$ (временну́ю компоненту) этого уравнения:

$$\frac{dp_0}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{d\mathcal{E}_{\text{ч.}}}{dt} = \frac{q}{c} F_{0j} \frac{dX^j}{dt} = \frac{q}{c} \underbrace{F_{00}}_{0} \frac{dX^0}{dt} + \frac{q}{c} F_{0\beta} \underbrace{\frac{dX^\beta}{dt}}_{v^\beta} = \frac{q}{c} F_{0\beta} v^\beta.$$

Мы получили уравнение баланса энергии частицы:

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{ч.}}}{dt} = q \underbrace{F_{\beta 0}}_{E_\beta} v^\beta = q(\mathbf{E}, \mathbf{v}).$$

Исследуем теперь пространственную часть уравнения $i = \alpha$:

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{q}{c} F_{\alpha j} \frac{dX^j}{dt} = \frac{q}{c} F_{\alpha 0} \underbrace{\frac{dX^0}{dt}}_{c} + \frac{q}{c} F_{\alpha\beta} \underbrace{\frac{dX^\beta}{dt}}_{v^\beta}.$$

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = q \underbrace{F_{\alpha 0}}_{E_\alpha} + \frac{q}{c} \underbrace{F_{\alpha\beta}}_{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} B^\gamma} v^\beta = qE_\alpha + \frac{q}{c} \underbrace{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} v^\beta B^\gamma}_{[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]_\alpha}.$$

Мы получили выражение для силы Лоренца, действующей на частицу во внешнем электромагнитном поле:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}].$$

Также мы убедились, что действительно q имеет смысл заряда, $\mathbf{E}$ — электрическое поле, а $\mathbf{B}$ — магнитное[6].

1.10.4 Задачи 30, 31

Задача 30. Релятивистская частица в поле Хиггса. Для заданного действия запишите обобщённый импульс и уравнения Эйлера-Лагранжа для релятивистской частицы в скалярном поле. Определите эффективную массу частицы:

а) $S[X^i(l)] = -mc \int (1 + \chi(\underline{X})) \sqrt{-\frac{dX^i}{dl}\frac{dX_i}{dl}}\, dl$;

[5] Тензор F_{ij} у нас отличается общим знаком от курса Ландау и Лифшица, поскольку мы выбрали противоположный знак метрики. Тензор со смешанными компонентами $F^i{}_j$ при этом совпадает.

[6] Мы используем для описания электромагнитного поля уравнения в форме, принятой в гауссовой системе СГС. Международная система СИ удобна для электрических цепей, но для электромагнитного поля оказывается крайне неудобной, поскольку не соответствует симметриям СТО. В частности, поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, которые являются компонентами одного тензора, в системе СИ имеют разную размерность.

б) $S[X^i(\tau)] = \int (1+\chi(\underline{X}))\frac{m}{2}\frac{dX^i}{d\tau}\frac{dX_i}{d\tau}\,d\tau$.

Задача 31. Движение в скрещенных полях. Найдите движение релятивистской частицы массой m с зарядом q в перпендикулярных электрическом и магнитном полях $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$.
а) В случае $E > B$.
б) В случае $E = B$.
в) В случае $E < B$.
г) Определите траекторию при $E \ll B$ в нерелятивистском случае.
Указание. Удобно писать уравнения движения в 4-мерной форме и искать решение через матричную экспоненту.

1.10.5 Ответ к задаче 31

Задача 31. Движение в скрещенных полях.

Уравнения движения частицы в 4-мерном виде: $\frac{du^i}{d\tau} = \frac{q}{mc}F^i{}_j u^j$.

Для постоянного однородного поля тензор $F^i{}_j$ — постоянная матрица. Таким образом,

$$u^i(\tau) = \exp\left(\frac{q\tau}{mc}F^i{}_j\right)u^j(0) = \left[\delta^i_j + \frac{q\tau}{mc}F^i{}_j + \frac{1}{2}\left(\frac{q\tau}{mc}\right)^2 F^i{}_k F^k{}_j + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{q\tau}{mc}\right)^n (F^n)^i{}_j + \cdots\right]u^j(0).$$

Выберем систему координат так, что $\mathbf{E} \uparrow\uparrow y$, $\mathbf{B} \uparrow\uparrow z$. Тогда

$$F^i{}_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 \\ E & -B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (F^2)^i{}_j = F^i{}_k F^k{}_j = \begin{pmatrix} E^2 & -EB & 0 & 0 \\ EB & -B^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E^2-B^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(F^3)^i{}_j = F^i{}_k F^k{}_l F^l{}_j = (E^2 - B^2)F^i{}_j.$$

Мы видим, что при $E = B$ ряд для экспоненты обрывается после 2-й степени. В других случаях определим генераторы, через которые удобно писать матричные экспоненты:

$$E > B: \quad a^i{}_j = \frac{F^i{}_j}{\sqrt{E^2-B^2}} = (a^3)^i{}_j, \qquad E < B: \quad b^i{}_j = \frac{F^i{}_j}{\sqrt{B^2-E^2}} = -(b^3)^i{}_j.$$

Глава 1.11

Антисимметричные тензоры* (с. 268)

Мы уже сталкивались с антисимметричными тензорами при описании определителей, пуассоновой структуры, электромагнитного поля, генераторов поворотов и бустов. Сейчас мы познакомимся с антисимметричными тензорами более подробно.

Антисимметричные тензоры обладают рядом удобных свойств, и над ними определяются некоторые полезные операции, которые отсутствуют для тензоров общего вида.

Тензор *антисимметричен по некоторому набору индексов*, если он меняет знак при перестановке любой пары индексов из этого набора. Все индексы, по которым тензор антисимметричен, должны быть одного типа (либо все верхние, либо все нижние), в этом случае антисимметричность не зависит от того, в каком базисе рассматривается тензор.

Тензор $A_{i_1\cdots i_k}$ или $B^{i_1\cdots i_n}$ является *полностью антисимметричным*, если при перестановке любой пары индексов он меняет знак. Такой тензор:

- с k нижними индексами называют *дифференциальной формой степени* k;
- с n верхними индексами называют *поливектором степени* n.

С помощью поливектора степени n можно описать касательную n-мерную гиперплоскость к n-мерной гиперповерхности в D-мерном пространстве. Это описание (при $n > 1$) удобнее, чем использование набора из n штук касательных векторов, т.к. касательный поливектор определён более однозначно (с точностью до одного ненулевого множителя, тогда как набор векторов определён с точностью до невырожденного линейного преобразования[1]).

При наличии метрики индексы можно поднимать и опускать, в этом случае поливекторы от дифференциальных форм не отличают.

Если тензор имеет ненулевые компоненты, то минимальное число индексов, по которым тензор антисимметричен, — 0, максимальное — размерность пространства D.

Тензоры без индексов (скаляры) и тензоры с одним индексом (векторы и ковекторы) всегда полностью антисимметричны!

Докажем это от противного, для этого построим отрицание к данному утверждению: у тензора без индексов или с одним индексом найдётся два индекса, при перестановке которых получится тензор, отличающийся от исходного знаком минус. Однако у тензора без индексов или с одним индексом двух индексов не найдётся, а значит, отрицание неверно, а верно исходное утверждение[2].

Независимые компоненты дифференциальной формы (поливектора) нумеруются наборами индексов без повторений. Если у дифференциальной формы (поливектора) k индексов, то *максимальное число ненулевых компонент* — это число размещений из D по k:

$$A_D^k = \underbrace{D(D-1)\cdots(D-k+1)}_{k} = \frac{D!}{(D-k)!},$$

[1] То есть с точностью до преобразования из группы $\mathrm{GL}(n)$.

[2] Для иллюстрации этого рассуждения докажем *теорему о зелёных слонах*:
если зелёных слонов не существует, то все зелёные слоны летают.

Доказательство. Докажем теорему от противного. Пусть теорема неверна. Тогда найдётся хотя бы один зелёный слон, который не летает. Однако по условиям теоремы зелёных слонов не существует. Получено противоречие, значит, теорема верна.

при этом каждый ненулевой элемент встречается $k!$ раз с разными знаками, так что *число независимых компонент* задаётся как число сочетаний (биномиальный коэффициент) из D по k:

$$C_D^k = \frac{A_D^k}{k!} = \frac{D!}{k!(D-k)!}.$$

Приведём таблицу биномиальных коэффициентов для размерностей пространства, которые нам чаще всего понадобятся, т.е. до $D = 4$.

$D \setminus k$	0	1	2	3	4	5
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0
4	1	4	6	4	1	0

Мы видим, что число независимых компонент у дифференциальной формы (поливектора) степени k и степени $D - k$ одинаково: $C_D^k = C_D^{D-k}$. Когда мы выбираем k индексов из D возможных, то мы одновременно не выбираем оставшиеся $D - k$ индексов. Это наводит на мысль, что между такими тензорами должно быть естественное взаимнооднозначное соответствие, и даже подсказывает, какие индексы должны нумеровать одинаковые компоненты при таком соответствии.

1.11.1 (Анти)симметризация

Для дальнейшей работы удобно ввести операции *антисимметризации* и *симметризации*:

$$A_{[m_1 \dots m_q]} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma(m_1 \dots m_q)} (-1)^{\sigma(m_1 \dots m_q)} A_{\sigma(m_1 \dots m_q)},$$

$$A_{(m_1 \dots m_q)} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma(m_1 \dots m_q)} A_{\sigma(m_1 \dots m_q)}.$$

Сумма берётся по всем перестановкам $\sigma(m_1 \dots m_q)$ индексов $m_1 \dots m_q$. Символ $(-1)^{\sigma(m_1 \dots m_q)}$ — это $+1$, если перестановка $\sigma(m_1 \dots m_q)$ чётная, и -1, если перестановка $\sigma(m_1 \dots m_q)$ нечётная. Чётность перестановки определяется тем, сколько раз надо менять местами пары индексов, чтобы вернуться к исходному порядку.

Определения даны для ковариантных (нижних) индексов. Точно так же можно определить (анти)симметризацию и для контравариантных (верхних) индексов. Однако все индексы, по которым проводится (анти)симметризация, должны быть одного типа.

Примеры:

$$A_{[klm]} = \frac{1}{3!}(A_{klm} + A_{lmk} + A_{mkl} - A_{lkm} - A_{kml} - A_{mlk}), \quad A_{(klm)} = \frac{1}{3!}(A_{klm} + A_{lmk} + A_{mkl} + A_{lkm} + A_{kml} + A_{mlk}),$$

$$A_{[k}B_{l]} = \frac{1}{2}(A_k B_l - A_l B_k), \qquad A_{(k}B_{l)} = \frac{1}{2}(A_k B_l + A_l B_k).$$

(!) *Пара квадратных или круглых скобок при антисимметризации/симметризации может заключать в себе индексы нескольких множителей* (см. предыдущую строку).

Утверждение 1. Справедливы равенства

$$A_{[\dots[\dots]\dots]} = A_{[\dots\dots\dots]}, \quad A_{(\dots[-]\dots)} = 0,$$
$$A_{(\dots(\dots)\dots)} = A_{(\dots\dots\dots)}, \quad A_{[\dots(-)\dots]} = 0.$$

Здесь точки обозначают произвольные (возможно, пустые) наборы индексов, одинаковые в левой и правой частях равенства, а «$-$» обозначает набор из двух или более индексов.

При свёртке тензора $T^{ij\cdots k}$ с антисимметричным (симметричным) тензором $A_{[ij\dots k]}$ ($A_{(ij\dots k)}$) тензор $T^{ij\cdots k}$ тоже можно антисимметризовать (симметризовать):

$$T^{ij\cdots k}A_{[ij\dots k]} = T^{[ij\cdots k]}A_{[ij\dots k]} = T^{[ij\cdots k]}A_{ij\dots k},$$
$$T^{ij\cdots k}A_{(ij\dots k)} = T^{(ij\cdots k)}A_{(ij\dots k)} = T^{(ij\cdots k)}A_{ij\dots k}.$$

У тензоров T и A при этом могут быть другие индексы, по которым свёртка не проводится.

1.11.2 Форма объёма

Дифференциальная форма (поливектор) максимальной степени имеет только одну независимую компоненту и может быть записана как

$$A_{m_1\cdots m_D} = a\,\varepsilon_{m_1\cdots m_D} \qquad (B^{m_1\cdots m_D} = b\,\varepsilon^{m_1\cdots m_D})\,.$$

Здесь $\varepsilon_{m_1\cdots m_D} = \varepsilon^{m_1\cdots m_D}$ — это полностью антисимметричный символ (1.1.4) (не тензор!), который равен нулю, если среди его индексов присутствуют повторяющиеся; $+1$, если индексы образуют чётную перестановку последовательности $1, 2, \ldots, D$; -1, если индексы образуют нечётную перестановку.

Дифференциальная форма (поливектор) максимальной степени полностью определяется своей компонентой $A_{12\,\ldots\,D}$ ($B^{12\,\cdots\,D}$) (для символа ε имеем $\varepsilon_{12\,\ldots\,D} = \varepsilon^{12\,\cdots\,D} = +1$). Рассмотрим преобразование этой компоненты при замене координат:

$$A_{1'\ldots\,D'} = a'\varepsilon_{1'\ldots\,D'} = a\,\varepsilon_{m_1\cdots\,m_D}\,\frac{\partial x^{m_1}}{\partial x^{1'}}\cdots\frac{\partial x^{m_D}}{\partial x^{D'}}$$

$$\left(B^{1'\ldots\,D'} = b'\varepsilon^{1'\cdots\,D'} = b\,\varepsilon^{m_1\cdots\,m_n}\,\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^{m_1}}\cdots\frac{\partial x^{D'}}{\partial x^{m_D}}\right).$$

Таким образом, $a' = a\,\frac{Dx}{Dx'}$ ($b' = b\,\frac{Dx'}{Dx}$).

Это значит, что единственная (независимая) компонента формы максимальной степени при замене координат преобразуется по той же формуле, по которой преобразуется элемент объёма, т.е. умножением на обратный якобиан преобразования. Компоненты поливектора максимальной степени умножаются на прямой якобиан преобразования.

Это позволяет установить взаимнооднозначное соответствие между дифференциальными формами и поливекторами максимальной степени (при условии, что и те и другие всюду отличны от нуля), положив $b = \frac{1}{a}$. Отметим, что для этого нам не понадобилась метрика. В этом случае будем символически писать (имея в виду только ненулевые компоненты)

$$B^{m_1\cdots m_D} = (A^{-1})^{m_1\cdots m_D}.$$

Дифференциальную форму максимальной степени, всюду отличную от нуля, называют *формой объёма*, потому что она преобразуется при замене координат как элемент объёма, и обозначают $\Omega_{m_1\cdots m_D}$.

В присутствии метрики g_{ij} форму объёма можно определить как

$$\Omega_{m_1\cdots m_D} = \sqrt{|g|}\varepsilon_{m_1\cdots m_D}, \qquad g = \det(g_{ij}).$$

Это возможно потому, что определитель метрического тензора (как и любого тензора с двумя нижними индексами) при замене координат умножается на квадрат обратного якобиана:

$$g_{i'j'} = \underbrace{\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}}_{\Lambda^T}\,g_{ij}\,\underbrace{\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}}_{\Lambda} \qquad \Rightarrow \qquad g' = \det(g_{i'j'}) = \det(g_{ij})\det{}^2\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right) = g\left(\frac{Dx}{Dx'}\right)^2.$$

Соответственно $\sqrt{|g|}$ преобразуется почти так же, как должна преобразовываться компонента формы максимальной степени, с единственным отличием — якобиан стоит под модулем:

$$\sqrt{|g'|} = \sqrt{|g|}\left|\frac{Dx}{Dx'}\right|.$$

Из-за этого отличия форма объёма, определённая через метрику, оказывается не тензором, а *псевдотензором* — при заменах с положительным якобианом она ведёт себя как тензор, а при заменах с отрицательным якобианом в законе преобразования по сравнению с тензорным законом появляется множитель -1.

Если поднять индексы у формы объёма с помощью метрического тензора, то мы получим

$$\Omega^{m_1\cdots m_D} = \frac{\operatorname{sgn}(g)}{\sqrt{|g|}}\varepsilon^{m_1\cdots m_D} = \operatorname{sgn}(g)(\Omega^{-1})^{m_1\cdots m_D}.$$

В фазовом пространстве нет метрического тензора, но есть пуассонова структура J^{MN}, её определитель отличен от нуля[3], следовательно, существует обратная матрица ω_{KM} ($\omega_{KM}J^{MN} = \delta^N_K$), которая тоже является тензором. Поэтому в фазовом пространстве тоже вводится естественная форма объёма:

$$\Omega_{M_1\cdots M_D} = \sqrt{\det(\omega_{KM})}\,\varepsilon_{M_1\cdots M_D} = \frac{1}{\sqrt{\det(J^{MN})}}\,\varepsilon_{M_1\cdots M_D}. \tag{1.11.1}$$

В канонических координатах, как уже упоминалось выше, $\det(J^{MN}) = 1$, откуда, как мы видим, следует, что *канонические замены координат сохраняют объём в фазовом пространстве.*

[3]Существуют обобщения, в которых это условие может не выполняться, но мы их не рассматриваем.

1.11.3 Ходжевская дуальность

С помощью формы объёма мы можем определить взаимнооднозначное отображение поливекторов степени k на дифференциальные формы степени $D-k$, которое называется *ходжевской дуальностью* (или просто *дуальностью*):

$$(*B)_{m_{k+1}\cdots m_D} = \frac{1}{k!}\, B^{m_1\cdots m_k}\, \Omega_{m_1\cdots m_k m_{k+1}\cdots m_D}.$$

(!) Здесь и далее при свёртке двух полностью антисимметричных тензоров по k индексам удобно делить такую свёртку на $k!$. Дело в том, что в такой свёртке имеется $k!$ подобных слагаемых, отличающихся только порядком сворачиваемых индексов. Если после деления свёртки на $k!$ привести подобные слагаемые, то в итоге все они будут идти с множителем ± 1.

Можно также определить операцию, обратную ходжевской дуальности $*^{-1}$, которая осуществляет обратное отображение $(D-k)$-форм на поливекторы степени k:

$$(*^{-1}A)^{m_1\cdots m_k} = \frac{1}{(D-k)!}\, (\Omega^{-1})^{m_1\cdots m_k m_{k+1}\cdots m_D}\, A_{m_{k+1}\cdots m_D}.$$

Для проверки этого равенства полезно предварительно вывести следующие формулы:

$$\begin{aligned}
*\Omega^{-1} = *^{-1}\Omega = \frac{1}{D!}\,\Omega_{m_1\cdots m_D}\,(\Omega^{-1})^{m_1\cdots m_D} &= 1,\\
\frac{1}{(D-1)!}\,\Omega_{n_1 m_2\cdots m_D}\,(\Omega^{-1})^{m_1 m_2\cdots m_D} &= \delta^{m_1}_{n_1},\\
\frac{1}{(D-k)!}\,\Omega_{n_1\cdots n_k m_{k+1}\cdots m_D}\,(\Omega^{-1})^{m_1\cdots m_k m_{k+1}\cdots m_D} &= k!\delta^{[m_1}_{[n_1}\cdots\delta^{m_k]}_{n_k]} = k!\delta^{[m_1}_{n_1}\cdots\delta^{m_k]}_{n_k},\\
\Omega_{n_1\cdots n_D}\,(\Omega^{-1})^{m_1\cdots m_D} &= \det\begin{pmatrix} \delta^{m_1}_{n_1} & \delta^{m_1}_{n_2} & \cdots & \delta^{m_1}_{n_D}\\ \delta^{m_2}_{n_1} & \delta^{m_2}_{n_2} & \cdots & \delta^{m_2}_{n_D}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \delta^{m_D}_{n_1} & \delta^{m_D}_{n_2} & \cdots & \delta^{m_D}_{n_D}\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

При наличии метрики можно превращать поливекторы в формы и наоборот опусканием и поднимением индексов, и поэтому можно применять $*$ и $*^{-1}$ и к тем и к другим. В этом случае $*$ и $*^{-1}$ совпадают с точностью до знака. Если два раза применить $*$ к k-форме, мы получим

$$**A = \mathrm{sgn}(g)\,(-1)^{k(D-k)}\,A = \mathrm{sgn}(g)\,(-1)^{k(D-k)}\;*^{-1}*A.$$

В 3-мерном евклидовом пространстве ($*^{-1} = *$) мы можем превращать вектор в антисимметричную матрицу и обратно. Такая матричная запись вектора встречалась нам при рассмотрении поворотов. В декартовых координатах

$$(*\mathbf{v})_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\gamma\alpha\beta}\, v^\gamma = \begin{pmatrix} 0 & v^z & -v^y\\ -v^z & 0 & v^x\\ v_y & -v^x & 0\end{pmatrix}.$$

Действие такой матрицы на вектор соответствует векторному умножению

$$(*\mathbf{v})_{\alpha\beta} r^\beta = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} r^\beta v^\gamma = [\mathbf{r}\times\mathbf{v}]_\alpha.$$

В 4-мерном пространстве Минковского тензор электромагнитного поля F_{ij} можно подвергнуть операции ходжевской дуальности и получить *дуальный тензор электромагнитного поля* $(*F)_{ij} = \tilde{F}_{ij}$, в котором электрическое и магнитное поле поменялись местами. В лоренцевых координатах

$$(*F)_{ij} = \tilde{F}_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{klij}F^{kl} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z\\ -B_x & 0 & E_z & -E_y\\ -B_y & -E_z & 0 & E_x\\ -B_z & E_y & -E_x & 0\end{pmatrix}, \qquad \text{где} \quad F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z\\ E_x & 0 & B_z & -B_y\\ E_y & -B_z & 0 & B_x\\ E_z & B_y & -B_x & 0\end{pmatrix}.$$

Таким образом, ходжевская дуальность в пространстве Минковского удобна для выявления симметрии между электрическим и магнитным полями.

1.11.4 Внешнее произведение**

Внешним произведением $A \wedge B$ тензоров (дифференциальных форм) A и B с компонентами $A_{m_1 \dots m_q}$ и $B_{n_1 \dots n_p}$ называется тензор с компонентами

$$(A \wedge B)_{m_1 \dots m_q n_1 \dots n_p} = \frac{(q+p)!}{q!\,p!} A_{[m_1 \dots m_q} B_{n_1 \dots n_p]}.$$

Внешнее произведение поливекторов определяется аналогично с заменой нижних индексов на верхние.
Если A — q-форма, а B — p-форма, то

$$A \wedge B = (-1)^{qp} B \wedge A.$$

(!) Не обращайте много внимания на множитель $\frac{(q+p)!}{q!\,p!}$, здесь главное — антисимметризация. Множитель можно определять по-разному, главное, чтобы в итоге получилась *ассоциативность*, благодаря которой скобки при внешнем умножении можно не ставить:

$$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C = A \wedge B \wedge C.$$

Если вспомнить множитель $\frac{1}{(q+p)!}$, который возникает при антисимметризации, и то, что через каждый независимый член A (B) выражается $q!$ ($p!$) компонент (отличающихся порядком индексов), то можно увидеть, что в окончательных формулах после приведения подобных членов все числовые коэффициенты становятся равными ± 1.

Примеры:

Внешнее произведение двух 1-форм (ковекторов): $(A \wedge B)_{km} = A_k B_m - A_m B_k$.

Внешнее произведение 1-формы A и 2-формы B: $(A \wedge B)_{klm} = A_k B_{lm} + A_l B_{mk} + A_m B_{kl}$.

В 3-мерном евклидовом пространстве внешнее произведение двух векторов соответствует матричному представлению векторного произведения:

$$(A \wedge B)^{\alpha\beta} = A^\alpha B^\beta - A^\beta B^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & A^1B^2 - A^2B^1 & A^1B^3 - A^3B^1 \\ A^2B^1 - A^1B^2 & 0 & A^2B^3 - A^3B^2 \\ A^3B^1 - A^1B^3 & A^3B^2 - A^2B^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

С помощью ходжевской дуальности эту матрицу можно превратить в вектор и получить обычное векторное произведение. В декартовых координатах

$$*(A \wedge B)_\gamma = \frac{1}{2}(A^\alpha B^\beta - A^\beta B^\alpha)\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = A^\alpha B^\beta\, \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_\gamma = \begin{pmatrix} A^2B^3 - A^3B^2 \\ A^3B^1 - A^1B^3 \\ A^1B^2 - A^2B^1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, векторное произведение можно разбить на две операции: внешнее произведение и дуальность. Обе эти операции определены в пространстве любой размерности, но только в 3-мерном пространстве в результате получается вектор.

Также в 3-мерном пространстве запишем внешнее произведение трёх векторов:

$$(A \wedge B \wedge C)^{\alpha\beta\gamma} = A^\alpha B^\beta C^\gamma + A^\beta B^\gamma C^\alpha + A^\gamma B^\alpha C^\beta - A^\beta B^\alpha C^\gamma - A^\gamma B^\beta C^\alpha - A^\alpha B^\gamma C^\beta = \det(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})\, \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}.$$

В декартовых координатах это внешнее произведение превращается в *смешанное произведение* трёх векторов:

$$*(A \wedge B \wedge C) = \det(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = A^\alpha B^\beta C^\gamma\, \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = (\mathbf{A}, [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]) = ([\mathbf{A} \times \mathbf{B}], \mathbf{C}).$$

1.11.5 Внешняя производная*

Внешней производной от q-формы A называется $(q+1)$-форма dA с компонентами

$$\begin{aligned} (dA)_{m_0 m_1 \dots m_q} &= (q+1)\, \partial_{[m_0} A_{m_1 \dots m_q]} = \sum_{j=0}^{q} (-1)^j \partial_{m_i} A_{m_1 \dots m_{j-1} m_{j+1} \dots m_q} = \\ &= \partial_{m_0} A_{m_1 m_2 \dots m_q} - \partial_{m_1} A_{m_0 m_2 \dots m_q} + \partial_{m_2} A_{m_0 m_1 \dots m_q} - \cdots \end{aligned}$$

Для скаляра внешняя производная совпадает с градиентом:

$$(d\varphi)_m = \partial_m \varphi.$$

Формулу для внешней производной легко запомнить с помощью следующего мнемонического правила:

$$dA = \partial \wedge A.$$

То, что внешняя производная от дифференциальной формы снова даёт дифференциальную форму (т.е. полностью антисимметричный ковариантный *тензор*), — нетривиальное утверждение, которое надо проверить. Рассмотрим, как преобразуется величина $\partial_{m_0} A_{m_1 m_2 \dots m_q}$:

$$\partial_{m'_0} A_{m'_1 m'_2 \dots m'_q} = \underbrace{\frac{\partial x^{m_0}}{\partial x^{m'_0}} \partial_{m_0}}_{\partial_{m'_0}} \left(A_{m_1 m_2 \dots m_q} \frac{\partial x^{m_1}}{\partial x^{m'_1}} \frac{\partial x^{m_2}}{\partial x^{m'_2}} \cdots \frac{\partial x^{m_q}}{\partial x^{m'_q}} \right) =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial x^{m_0}}{\partial x^{m'_0}} \frac{\partial x^{m_1}}{\partial x^{m'_1}} \frac{\partial x^{m_2}}{\partial x^{m'_2}} \cdots \frac{\partial x^{m_q}}{\partial x^{m'_q}} \partial_{m_0} A_{m_1 m_2 \dots m_q}}_{\text{тензорный закон преобразования}} + A_{m_1 m_2 \dots m_q} \underbrace{\frac{\partial^2 x^{m_1}}{\partial x^{m'_0} \partial x^{m'_1}}}_{\partial_{m'_0} \frac{\partial x^{m_1}}{\partial x^{m'_1}}} \frac{\partial x^{m_2}}{\partial x^{m'_2}} \cdots \frac{\partial x^{m_q}}{\partial x^{m'_q}} +$$

$$+ A_{m_1 m_2 \dots m_q} \frac{\partial x^{m_1}}{\partial x^{m'_1}} \frac{\partial^2 x^{m_2}}{\partial x^{m'_0} \partial x^{m'_2}} \cdots \frac{\partial x^{m_q}}{\partial x^{m'_q}} + \cdots + A_{m_1 m_2 \dots m_q} \frac{\partial x^{m_1}}{\partial x^{m'_1}} \frac{\partial x^{m_2}}{\partial x^{m'_2}} \cdots \frac{\partial^2 x^{m_q}}{\partial x^{m'_0} \partial x^{m'_q}}.$$

Получившееся для $\partial_{m'_0} A_{m'_1 m'_2 \dots m'_q}$ выражение соответствует тензорному закону преобразования, только если откинуть все члены со вторыми производными, т.е. мы получили тензор только *относительно линейных замен*.

Однако если выражение для $\partial_{m'_0} A_{m'_1 m'_2 \dots m'_q}$ антисимметризовать (и получить тем самым внешнюю производную), то в силу симметричности вторых производных $\frac{\partial^2 x^{m_k}}{\partial x^{m'_0} \partial x^{m'_k}} = \frac{\partial^2 x^{m_k}}{\partial x^{m'_k} \partial x^{m'_0}}$ при антисимметризации все члены со вторыми производными сократятся. Мы получили, что внешняя производная является тензором уже по отношению к общекоординатным (в том числе нелинейным) преобразованиям.

Мы не можем определить внешнюю производную для поливектора, т.к. индекс у производной стоит снизу, а антисимметризовать можно только индексы одного типа. Если определена метрика, то мы можем опустить у поливектора индексы, превратив его в дифференциальную форму, и только потом взять внешнюю производную.

Для внешней производной и внешнего произведения q-формы A и p-формы B справедливо следующее *правило Лейбница*:

$$d(A \wedge B) = dA \wedge B + (-1)^q A \wedge dB.$$

Справедливо равенство $d^2 = 0$, т.е. $ddA = 0$ для любой формы A. Это утверждение следует из симметричности второй производной.

Если для формы $dF = 0$, то форма F называется *замкнутой*.

Если $F = dA$, то форма F называется *точной*.

Всякая точная форма замкнута.

Примеры:

Внешняя производная 1-формы (ковектора) A:

$$(dA)_{km} = \partial_k A_m - \partial_m A_k. \tag{1.11.2}$$

Внешняя производная 2-формы F:

$$(dF)_{klm} = \partial_k F_{lm} + \partial_l F_{mk} + \partial_m F_{kl}. \tag{1.11.3}$$

1.11.6 Кинематические тождества для электромагнитного поля

Мы видим, что внешняя производная от ковекторного поля (1.11.2) имеет тот же вид, что тензор электромагнитного поля, выраженный через 4-потенциал (1.10.6). Таким образом,

$$F = dA \quad \Rightarrow \quad dF = 0.$$

Более того, если дифференциальные формы заданы на $\mathbb{R}^D$, то верно и обратное: $dF = 0 \Rightarrow F = dA$[4].

Таким образом, из выражения для электромагнитного поля через потенциалы мы получили условие, которому должен удовлетворять тензор электромагнитного поля:

$$(dF)_{klm} = \partial_k F_{lm} + \partial_l F_{mk} + \partial_m F_{kl} = 0.$$

[4]На пространствах с более сложной топологией это может быть неверно, например, это неверно, если поле задано в среде, имеющей форму бублика. Чтобы утверждение $dF_{ijk} = 0 \Leftrightarrow F_{ij} = dA_{ij}$ было верно в обе стороны, в пространстве не должно быть замкнутых петель, которые нельзя стянуть в точку непрерывной деформацией.

Чтобы понять смысл этих уравнений, запишем их компоненты:

$$(dF)_{123} = \partial_1 \underbrace{F_{23}}_{B_x} + \partial_2 \underbrace{F_{31}}_{B_y} + \partial_3 \underbrace{F_{12}}_{B_z} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

$$(dF)_{023} = \partial_0 \underbrace{F_{23}}_{B_x} + \partial_2 \underbrace{F_{30}}_{E_z} + \partial_3 \underbrace{F_{02}}_{-E_y} = \frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E}\right)_x = 0.$$

Получаем, что это тождество — те уравнения Максвелла, которые не содержат зарядов и токов. Их называют *первой парой уравнений Максвелла*:

$$F = dA \quad \Leftrightarrow \quad dF = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{cases} .$$

Также мы видим, что из равенства $d^2 = 0$ следует неоднозначность задания 4-потенциала, который описывает данное электромагнитное поле F:

$$dA = d(A + df) \quad \Rightarrow \quad A \sim A' = A + df.$$

4-потенциал A и 4-потенциал $A' = A + df$, полученный добавлением градиента произвольного гладкого скаляра f, физически эквивалентны, т.е. описывают одинаковые электромагнитные поля. Такое преобразование 4-потенциала называют *градиентным преобразованием* или *калибровочным преобразованием*. С учётом того, что $A_i = (-\varphi, \mathbf{A})$, получаем 3-мерную запись калибровочного преобразования:

$$A' = A + df \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}, \\ \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f \end{cases} .$$

1.11.7 Канонические преобразования**

Канонические координаты — координаты в фазовом пространстве, в которых *скобка Пуассона* имеет канонический вид (1.4.24):

$$\{F, H\} = \frac{\partial F}{\partial x^\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}.$$

При этом *пуассонова структура* $J^{MN} = \{X^M, X^N\}$ и обратная к ней *симплектическая форма* ω_{KM} имеют вид[5] (1.4.21)

$$J^{MN} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{1} \\ -\hat{1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \omega_{NK} = \begin{pmatrix} 0 & -\hat{1} \\ \hat{1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad J^{MN}\omega_{NK} = \omega_{KN}J^{NM} = \delta^M_K.$$

Некоторые виды канонических замен координат мы уже знаем.

- *Замена обобщённых координат* (*точечное преобразование*) $x'(x, t)$ с одновременным переопределением обобщённых импульсов $p' = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}'}$. Новая функция Гамильтона получается как старая, выраженная через другие переменные.
- *Калибровочное преобразование* $A'(x) = A(x) + df(x)$ не меняет обобщённые координаты x, но переопределяет обобщённые импульсы $p' = p + \frac{q}{c}df$. Если функция f зависит не только от обобщённых координат, но и от времени, то наряду с импульсами переопределяется также и энергия, функция Гамильтона не только выражается через новые переменные, но и получает добавку $H' = H - \frac{q}{c^2}\frac{\partial f}{\partial t}$.
- Калибровочное преобразование можно обобщить, рассматривая *потенциал* A и скалярную функцию f не на пространстве-времени, а *на расширенном конфигурационном пространстве* с координатами x, t. Можно применять калибровочное преобразование и для незаряженных частиц, приписав им фиктивный заряд и считая, что компоненты тензора F, соответствующие координатам незаряженных частиц, равны нулю.

Каноническая симплектическая форма имеет вид

$$\omega = \frac{1}{2}\omega_{KM}\, dX^K \wedge dX^M = dp_\mu \wedge dx^\mu.$$

[5] Большие индексы нумеруют координаты и импульсы, пробегая значения $1, \ldots, 2n$ (от 1 до n — координаты, от $n+1$ до $2n$ — импульсы), греческие — только координаты *или* импульсы, пробегая значения $1, \ldots, n$.

Из формы ω с помощью внешнего произведения можно получить форму объёма Ω_ω, которая, в отличие от полученной ранее формы (1.11.1), является тензором, а не псевдотензором (является тензором по отношению к преобразованиям с любым знаком якобиана):

$$\Omega_\omega = \frac{1}{n!}\omega^{\wedge n} = \frac{1}{n!}\underbrace{\omega \wedge \omega \wedge \ldots \omega}_{n \text{ раз}} = dp_1 \wedge dx^1 \wedge dp_2 \wedge dx^2 \wedge \ldots dp_n \wedge dx^n. \tag{1.11.4}$$

Отсюда мы видим, что форма объёма для любых канонических координат в фазовом пространстве одинакова, а значит, любое каноническое преобразование сохраняет ориентированный фазовый объём (канонических преобразований с якобианом -1 не бывает[6]).

Теперь мы рассмотрим более общие замены, перепутывающие обобщённые координаты и импульсы.

Рассмотрим более внимательно симплектическую форму ω_{KM}. В канонических координатах ω_{KM} задаётся постоянной матрицей, значит, для неё выполняется условие замкнутости, похожее на первую пару уравнений Максвелла:

$$(d\omega)_{KLM} = \partial_K \omega_{LM} + \partial_L \omega_{MK} + \partial_M \omega_{KL} = 0.$$

Как и для тензора электромагнитного поля, это позволяет ввести[7] для формы ω аналог потенциала — 1-форму A:

$$\omega_{KM} = (dA)_{KM} = \partial_K A_M - \partial_M A_K.$$

Возможны разные параметризации A, отличающиеся на калибровочное преобразование $A' = A + df$. Мы выберем

$$A_M = \begin{pmatrix} p_\mu \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A_{x^\mu} = p_\mu, \quad A_{p_\mu} = 0.$$

Удобно писать это в виде свёртки с набором дифференциалов координат в фазовом пространстве dX^M:

$$A = A_M dX^M = p_\mu dx^\mu.$$

При интегрировании этого выражения получается интеграл, совпадающий с укороченным действием (1.9.7):

$$S_{\text{укороч.}} = \int_{X_0}^{X_1} p_\mu dx^\mu.$$

Задание потенциала A_M определяет канонические координаты не однозначно, а с точностью до точечных преобразований. (Мы можем выделить в фазовом пространстве подпространство $A_M = 0$, оно будет соответствовать конфигурационному пространству.) Тем не менее всё, что касается «перепутывания» обобщённых координат и импульсов при канонических преобразованиях, таким образом описывается. Каноническое преобразование, не являющееся точечным, описывается как калибровочное преобразование:

$$A'_M dX'^M = p'_\mu dx'^\mu = A_M dX^M + df = p_\mu dx^\mu + df.$$

Если $f(X,t)$ зависит также от времени (которое само не преобразуется), то

$$p'_\mu dx'^\mu - H'dt = p_\mu dx^\mu - Hdt + df.$$

При этом преобразуется также функция Гамильтона (как при зависящем от времени калибровочном преобразовании)[8]:

$$H' = H - \frac{\partial f}{\partial t}.$$

1.11.8 Гамильтонова эволюция как каноническое преобразование

Рассмотрим временну́ю эволюцию гамильтоновой системы как замену координат, зависящую от времени. Используя симметричность второй производной и постоянство тензора пуассоновой структуры J^{MN}

[6] Ранее мы оставили это утверждение без доказательства. См. формулу (1.4.23), с. 69.

[7] По крайней мере локально — в области «без дырок». См. предыдущую сноску.

[8] Если вместо обычной функции Гамильтона $H(x^\alpha, p_\alpha, t)$ ($\alpha = 1, \ldots, D$) ввести расширенную $\mathcal{H}(x^i, p_i) = H(x^\alpha, p_\alpha, x^0) + p_0$ ($i = 0, 1, \ldots, D$), то время $x^0 = t$ становится одной из координат и временна́я компонента импульса преобразуется наряду со всеми остальными $p'_0 = p_0 + \frac{\partial f}{\partial t}$. Расширенная функция Гамильтона будет скаляром (инвариантом) относительно замен координат (включая время). Поэтому $\mathcal{H}' = \mathcal{H} \Rightarrow H' = H - \frac{\partial f}{\partial t}$.

в канонических координатах, находим производную по времени от пуассоновой структуры при $t = 0$:

$$\begin{aligned}\left.\frac{dJ^{KM}}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}\{X^K(t), X^M(t)\}\right|_{t=0} &= \{\dot{X}^K, X^M\} + \{X^K, \dot{X}^M\} = \\ &= \{\{X^K, H\}, X^M\} + \{X^K, \{X^M, H\}\} = \\ &= \{(J^{KL}\partial_L H), X^M\} + \{X^K, (J^{MN}\partial_N H)\} = \\ &= -J^{MN}\partial_N(J^{KL}\partial_L H) + J^{KL}\partial_L(J^{MN}\partial_N H) = \\ &= J^{MN}J^{KL}(-\partial_N\partial_L H + \partial_L\partial_N H) = 0.\end{aligned}$$

Мы видим, что пуассонова каноническая структура со временем не меняется, т.е. гамильтонова эволюция является каноническим преобразованием.

Как мы уже показали, канонические преобразования сохраняют ориентированный объём в фазовом пространстве, следовательно, выполняется следующая теорема.

Теорема Лиувилля. Гамильтонова эволюция сохраняет ориентированный объём в фазовом пространстве.

1.11.9 Задачи 32–35

Задача 32. От наблы к тензорам. Используя свёртки антисимметричных тензоров, раскройте выражения и вычислите:
а) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}$, $\operatorname{rot}[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]$, $\operatorname{rot}(f\mathbf{A})$, $\operatorname{div}(f\mathbf{A})$, $\operatorname{div}[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]$, $\operatorname{grad}(\mathbf{a},\mathbf{b})$, где $\mathbf{A}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и f — функции координат $\mathbf{r}$;
б) $\operatorname{rot}[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}]$, $\operatorname{grad}(\mathbf{a},\mathbf{r})$, где $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{a}$ — постоянные векторы;
в) $\operatorname{grad} r$, $\operatorname{div}\mathbf{r}$, $(\mathbf{a},\nabla)\mathbf{r}$, $\operatorname{grad} f(r)$, $\operatorname{rot}\mathbf{a}(r)$, $\operatorname{div}\mathbf{a}(r)$, где $r = |\mathbf{r}|$;
г) $\operatorname{grad}\frac{(\mathbf{r},\mathbf{a})}{(\mathbf{r},\mathbf{b})^2}$, где $\mathbf{a},\mathbf{b}$ — постоянные векторы.

Задача 33. Вектор-потенциал для однородного магнитного поля.
а) Покажите, что однородное магнитное поле $\mathbf{B}$, направленное по оси z, может быть описано векторным потенциалом $\mathbf{A} = (0, xB, 0)$.
б) Градиентным преобразованием перейдите к потенциалу $\mathbf{A}' = \frac{1}{2}[\mathbf{B}\times r]$.
в) Для обоих потенциалов напишите функцию Гамильтона нерелятивистской частицы в магнитном поле.
г) Какие компоненты импульса сохраняются для одной и другой функций Гамильтона?
д) Решите уравнения Гамильтона для нерелятивистской частицы в потенциале из пункта а).
е*) Решите уравнения Гамильтона для нерелятивистской частицы в потенциале из пункта б).

Задача 34. * Вектор-потенциал для произвольного магнитного поля. Прямыми вычислениями докажите, что векторный потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\int\limits_0^1 [\mathbf{r}\times\mathbf{B}(t\mathbf{r})]\,t\,dt$ описывает магнитное поле $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r})$ при условии $\operatorname{div}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$.

Задача 35. Усреднение по направлениям. Найдите средние значения произведений компонент единичного вектора n_α на единичной сфере $n_\alpha n_\alpha = 1$:

$$\langle n_\alpha\rangle,\ \langle n_\alpha n_\beta\rangle,\ \langle n_\alpha n_\beta n_\gamma\rangle,\ \langle n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\mu\rangle,\ \langle n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\mu n_\nu\rangle.$$

Указание. Интегралы не берите, используйте свёртки и соображения симметрии.

Глава 1.12

Интегрирование и дифференцирование полей (л) (с. 271)

Мы уже рассмотрели некоторые полезные свойства антисимметричных тензоров. Теперь мы углубим знакомство и поговорим о применении ковариантных полностью антисимметричных тензоров (дифференциальных форм) для записи инвариантных интегралов по поверхностям (кривым, объёмам) разной размерности.

Дадим короткий обзор (на физическом уровне строгости, не вникая в условия существования и требования гладкости) идей и понятий, применяющихся для дифференцирования и интегрирования скалярных и векторных полей в 3-мерном евклидовом пространстве в декартовых координатах.

В каждом случае будет дано некоторое поле (скалярное или векторное), способ его дифференцирования (градиент, дивергенция, ротор), описано интегрирование этой производной по некоторому ориентированному множеству (кривой, объёму, поверхности), дана теорема, связывающая этот интеграл с интегралом по ориентированной границе области (паре точек, поверхности, контуру) от исходного поля. Изложение каждый раз ведётся по общей схеме.

Дифференциальный оператор производной по координате *в декартовых координатах* мы также будем обозначать символом *набла*, $\partial_\alpha = \nabla_\alpha$, с которым будем обращаться как с вектором.

В криволинейных координатах символ набла ∇ используется для *ковариантной производной*, которая берётся с учётом параллельного переноса. Ковариантную производную мы пока использовать не будем.

Обобщения рассмотренного материала на случаи различной размерности приведены в дополнениях (см. главу 2.12 «Интегрирование антисимметричных тензоров*», с. 271).

1.12.1 Градиент (л)

Градиент — это ковектор, компоненты которого — частные производные от скалярного поля по координатам:

$$(\operatorname{grad}\varphi)_\alpha = \partial_\alpha\varphi = \nabla_\alpha\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}.$$

Эта формула справедлива также в криволинейных координатах.

В декартовых координатах мы можем не различать ковекторы и векторы, как часто и делают.

Градиент можно представить как векторное поле, указывающее в каждой точке направление наискорейшего роста функции φ, причём длина вектора равна производной от φ в данном направлении (производной по расстоянию!). Чтобы определить направление наискорейшего роста, надо уметь сравнивать расстояние в разных направлениях, т.е. нужен метрический тензор. Также метрика нужна, чтобы взять производную по расстоянию.

Также градиент можно представить как векторное поле, всюду ортогональное к поверхностям уровня $\varphi = \text{const}$, градиент направлен в сторону бóльших значений φ, причём длина вектора обратно пропорциональна расстоянию $d\ell$ между соседними близкими поверхностями уровня φ и $\varphi + d\varphi$, т.е. $|\partial\varphi| = \frac{d\varphi}{d\ell}$. Снова нам нужна метрика, чтобы определить ортогональность (нужно скалярное произведение) и определить $d\ell$.

Геометрический образ градиента $\partial_\alpha\varphi$, не зависящий от наличия метрики, — это набор ориентированных поверхностей уровня $\varphi = \text{const}$, построенных с фиксированным малым шагом по φ. Скалярное произведение градиента на вектор $v^\alpha\partial_\alpha\varphi$ — число таких поверхностей уровня, которое протыкает представляющая вектор v^α стрелка, число считается положительным, если вдоль вектора v^α функция φ растёт, и отрицательным, если φ вдоль стрелки убывает.

Градиенту, как и любому ковектору, удобно сопоставить свёртку с бесконечно малым вектором dx^α, причём для градиента эта свёртка даёт дифференциал поля φ:

$$\partial_\alpha \varphi \, dx^\alpha = d\varphi.$$

Как и любой ковектор, градиент можно проинтегрировать вдоль гладкой ориентированной кривой Γ:

$$\int\limits_\Gamma \partial_\alpha \varphi \, dx^\alpha = \int\limits_\Gamma d\varphi = \int\limits_{l_0}^{l_1} \partial_\alpha \varphi \, \frac{dX^\alpha(l)}{dl} \, dl, \qquad X^\alpha : [l_0, l_1] \to \Gamma.$$

Для такого интеграла при условии, что $\operatorname{grad}\varphi$ определён всюду на кривой Γ, справедлива следующая тривиальная интегральная теорема (*формула Ньютона-Лейбница*):

$$\int\limits_\Gamma d\varphi = \int\limits_\Gamma \partial_\alpha \varphi \, dx^\alpha = \varphi\Big|_{X(l_0)}^{X(l_1)}.$$

Пару точек $X(l_0)$, $X(l_1)$ назовём границей ориентированной кривой Γ и обозначим $\partial\Gamma$, причём точки тоже будут ориентированными. Начальной точке $X(l_0)$ припишем знак «$-$», а конечной точке $X(l_1)$ — знак «$+$». Введём следующий *нульмерный интеграл* по границе:

$$\int\limits_{\partial\Gamma} \varphi = \varphi\Big|_{X(l_0)}^{X(l_1)} = \varphi(X(l_1)) - \varphi(X(l_0)).$$

Под нульмерным интегралом дифференциал не пишем, можно считать, что дифференциал там в нулевой степени, а потому равен 1.

Теперь наша теорема имеет следующий вид:

$$\int\limits_\Gamma d\varphi = \int\limits_{\partial\Gamma} \varphi.$$

Как мы видим, интеграл от градиента зависит только от граничных точек кривой, но не зависит от того, как именно идёт кривая.

Все перечисленные свойства градиента справедливы в пространстве любой размерности $D \geqslant 1$.

1.12.2 Дивергенция (л)

Дивергенция от векторного поля v^α в декартовых координатах в евклидовом пространстве имеет вид

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \partial_\alpha v^\alpha = \nabla_\alpha v^\alpha = (\nabla, \mathbf{v}).$$

В данном случае предпочтительнее использовать символ набла как напоминание о тонкостях дифференцирования векторных полей в криволинейных координатах.

Для криволинейных координат приведём формулу без вывода (вывод см. на с.271):

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_n (\sqrt{|g|} v^n).$$

Представим себе, что поле v^α задаёт поле плотности потока некоторой жидкости, и зададимся вопросом, какой поток жидкости вытекает через замкнутую ориентированную кусочно-гладкую поверхность S. Для этого надо взять интеграл по S. Если провести всюду ориентированные (по полю) линии тока, которые касаются $\mathbf{v}$ и плотность которых пропорциональна $|\mathbf{v}|$, то поток — число линий, пересекающих поверхность. Поверхность считается ориентированной, поэтому линии, идущие наружу, считаются с плюсом, а внутрь — с минусом.

Если бесконечно малая площадка с площадью dS ортогональна $\mathbf{v}$, то поток через неё равен $\pm|\mathbf{v}|dS$. Если площадка наклонена от ортогонального направления на угол θ, то важна площадь её проекции на поверхность, нормальную к $\mathbf{v}$, т.е. $dS\cos\theta$. Поэтому удобно описывать площадку вектором $\mathbf{dS}$, который ортогонален к площадке и имеет длину dS. Выбор одного из двух возможных направлений $\mathbf{dS}$ определяет ориентацию поверхности. Теперь поток через элемент поверхности задаётся как скалярное произведение $(\mathbf{v}, \mathbf{dS})$.

Если нас интересует поток Φ, протекающий через S, то на всех элементах поверхности S векторы $\mathbf{dS}$ надо ориентировать согласованно. Тогда

$$\Phi = \int\limits_S (\mathbf{v}, \mathbf{dS}).$$

Пусть имеются две такие замкнутые поверхности S_1 и S_2, которые касаются друг друга, т. е. имеют общий кусок $S_{12} = S_1 \cap S_2$.

Пусть поверхность S_{12} как часть поверхности S_1 и та же поверхность S_{21} как часть поверхности S_2 имеют противоположную ориентацию (т.е. поверхности S_1 и S_2 *касаются внешним образом*), тогда потоки через S_{12} и S_{21} считаются с противоположными знаками и взаимно компенсируются:

$$\int\limits_{S_1} (\mathbf{v}, \mathbf{dS}) + \int\limits_{S_2} (\mathbf{v}, \mathbf{dS}) = \Bigg(\underbrace{\int\limits_{S_1 \setminus S_{12}} + \int\limits_{S_{12}}}_{\int\limits_{S_1}} + \underbrace{\int\limits_{S_2 \setminus S_{21}} + \int\limits_{S_{21}}}_{\int\limits_{S_2}} \Bigg) (\mathbf{v}, \mathbf{dS}) = \Bigg(\underbrace{\int\limits_{S_1 \setminus S_{12}} + \int\limits_{S_2 \setminus S_{21}}}_{\int\limits_{S}} + \underbrace{\int\limits_{S_{12}} + \int\limits_{S_{21}}}_{0} \Bigg) (\mathbf{v}, \mathbf{dS}).$$

Здесь $S = S_1 + S_2 = (S_1 \cap S_2) \setminus S_{12}$ — поверхность, полученная сложением S_1 и S_2 *с учётом знака*. Одинаковые участки с противоположной ориентацией S_{12} и S_{21} взаимно уничтожаются.

Таким образом, поток оказался аддитивным:

$$\int\limits_S (\mathbf{v}, \mathbf{dS}) = \int\limits_{S_1} (\mathbf{v}, \mathbf{dS}) + \int\limits_{S_2} (\mathbf{v}, \mathbf{dS}).$$

Рассмотрим поток, вытекающий из бесконечно малого элемента объёма $dx \times dy \times dz$. Вычислим сначала поток через левую и правую стенку. Площади этих стенок равны $dS_x = dy\, dz$.

Поток через левую стенку (нормаль к левой стенке смотрит налево) равен

$$-v^x(\mathbf{r}) dy\, dz.$$

Поток через правую стенку (нормаль к правой стенке смотрит направо) равен

$$v^x(\mathbf{r} + \mathbf{e}_x dx) dy\, dz = \left(v_x(\mathbf{r}) + \frac{\partial v^x}{\partial x}\, dx \right) dy\, dz.$$

Суммарный поток через левую и правую стенки равен

$$\frac{\partial v^x}{\partial x}\, dx\, dy\, dz.$$

Аналогично находим суммарный поток через переднюю и заднюю стенки $\frac{\partial v^y}{\partial y}\, dx\, dy\, dz$, через верхнюю и нижнюю стенки $\frac{\partial v^z}{\partial z}\, dx\, dy\, dz$.

Таким образом, суммарный поток, вытекающий из элемента объёма, равен

$$d\Phi = \left(\frac{\partial v^x}{\partial x} + \frac{\partial v^y}{\partial y} + \frac{\partial v^z}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz = \nabla_\alpha v^\alpha\, dx\, dy\, dz = \operatorname{div} \mathbf{v}\, dx\, dy\, dz.$$

Мы определили геометрический смысл дивергенции — это вытекающий поток на единицу объёма.

Если поверхность S можно представить как сумму бесконечномалых ячеек, т.е. если $S = \partial U$ является границей некоторого объёма U, то, разбив объём U на элементарные объёмчики $dV = dx\, dy\, dz$, при условии, что $\operatorname{div} \mathbf{v}$ определена всюду внутри U, получаем интегральную теорему (*теорема Гаусса-Остроградского*):

$$\int\limits_U (\nabla, \mathbf{v})\, dV = \int\limits_{\partial U} (\mathbf{v}, \mathbf{dS}).$$

Все перечисленные свойства дивергенции справедливы в пространстве любой размерности $D \geqslant 1$.

1.12.3 Ротор (л)

Ротор от ковекторного поля v_α в правых декартовых координатах в евклидовом пространстве имеет вид

$$(\operatorname{rot} \mathbf{v})^\gamma = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \nabla_\alpha v_\beta \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{rot} \mathbf{v} = [\nabla \times \mathbf{v}].$$

В данном случае снова предпочтительнее использовать символ набла как напоминание о тонкостях дифференцирования векторных полей в криволинейных координатах.

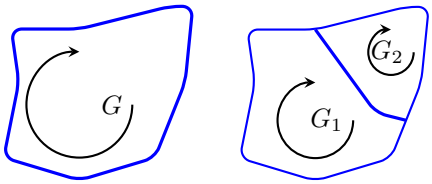
Для криволинейных координат приведём формулу без вывода (вывод см. на с. 271)

$$(\operatorname{rot}\mathbf{u})^\alpha = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\beta u_\gamma.$$

Снова (см. выше § 1.12.1 «Градиент») рассмотрим интеграл ковектора вдоль ориентированной кривой, но на этот раз в качестве кривой возьмём замкнутый контур G. Эта величина называется циркуляцией ковекторного поля $\mathbf{v}$ по контуру G:

$$C = \oint\limits_G v_\alpha dx^\alpha = \oint\limits_G (\mathbf{v}, \mathbf{dr}).$$

Проведём кривую Γ между двумя точками контура. При этом мы разобьём контур G на два контура G_1 и G_2. Направления обхода контуров выберем, как показано на рисунке.

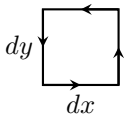


Контур G разбивается на контуры G_1 и G_2. Показаны согласованные направления обхода. В общем случае кривые не лежат в одной плоскости.

Мы видим, что вклад кривой Γ в интегралы по G_1 и G_2 компенсируется, и для циркуляции получаем свойство аддитивности

$$\oint\limits_G v_\alpha dx^\alpha = \oint\limits_{G_1} v_\alpha dx^\alpha + \oint\limits_{G_2} v_\alpha dx^\alpha.$$

Рассмотрим циркуляцию по бесконечно малому контуру g_z ($dx \times dy$), лежащему в плоскости $z = \text{const}$. Направление обхода мы выберем так, чтобы оно было связано с направлением оси z правилом правого винта:



Направление обхода бесконечно малого контура. Ось z смотрит на читателя.

$$\begin{aligned}
\oint\limits_{g_z} v_\alpha dx^\alpha &= v_x(\mathbf{r})\,dx + v_y(\mathbf{r}+\mathbf{e}_x dx)\,dy - v_x(\mathbf{r}+\mathbf{e}_y dy)\,dx - v_y(\mathbf{r})\,dy = \\
&= v_x(\mathbf{r})\,dx + \left(v_y(\mathbf{r}) + \frac{\partial v_y}{\partial x}dx\right)dy - \left(v_x(\mathbf{r}) + \frac{\partial v_x}{\partial y}dy\right)dx - v_y(\mathbf{r})\,dy = \\
&= \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)dx\,dy = (\operatorname{rot}\mathbf{v})_z\,dx\,dy.
\end{aligned}$$

Выражение $(\operatorname{rot}\mathbf{v})_z\,dx\,dy$ — это поток вектора $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ через элемент площади, натянутый на контур, нормаль к которому согласована с направлением обхода контура по правилу правого винта.

Циклической перестановкой $x \to y \to z \to x$ получаем аналогичные формулы для бесконечномалых контуров, перпендикулярных осям y и z.

Мы определили геометрический смысл ротора — это циркуляция на единицу ориентированной площади контура, перпендикулярного соответствующей компоненте ротора.

Поток ротора $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ через элемент площади равен циркуляции $\mathbf{v}$ по границе этой площадки. (Мы показали это для площадки, перпендикулярной оси координат, а если два скаляра равны в одной системе координат, то они равны в любой другой, значит, после поворота системы координат эта связь сохранится.)

Если контур можно разбить на бесконечно малые контуры, т.е. если контур $G = \partial\Sigma$ является границей некоторой поверхности Σ, при условии, что $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ определен всюду на поверхности Σ, получаем

интегральную теорему (*теорема Стокса*), которая связывает поток ротора через поверхность с циркуляцией вектора по контуру, ограничивающему эту поверхность:

$$\int\limits_{\Sigma} (\operatorname{rot}\mathbf{v}, \mathbf{dS}) = \oint\limits_{\partial\Sigma} (\mathbf{v}, \mathbf{dr}).$$

Перечисленные свойства дивергенции существенно используют 3-мерность пространства.

Если мы возьмём 2-мерный случай, то у ротора останется только компонента z, которая будет скаляром с точки зрения 2-мерной геометрии. В этом вырожденном случае теорема Стокса превратится в *теорему Грина*:

$$\int\limits_{\Sigma} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dx\, dy = \oint\limits_{\partial\Sigma} (\mathbf{v}, \mathbf{dr}).$$

В 1-мерном случае любой замкнутый контур имеет нулевую площадь, каждый участок проходится одинаковое число раз в обе стороны и интеграл по нему от вектора всегда обращается в нуль.

При $D > 3$ мы не можем определить ротор как вектор $[\nabla \times \mathbf{v}]$, поскольку в этом случае у нас нет операции векторного произведения.

(*) Тем не менее теорема Стокса обобщается на случай $D > 3$, если рассматривать ротор не как вектор, а как антисимметричную матрицу (см. дополнения).

1.12.4 Связи между градиентом, дивергенцией и ротором (л)

Для градиента, дивергенции и ротора выполняются следующие тождества:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0, \qquad \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0.$$

Докажем их, используя тензорные обозначения:

$$(\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi)^{\gamma} = \underbrace{\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}}_{\text{антисимметрично}} \underbrace{\nabla_\alpha \nabla_\beta}_{\text{симметрично}} \varphi = 0,$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{v} = \nabla_\alpha \underbrace{\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}}_{\text{const}} \nabla_\beta v_\gamma = \underbrace{\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}}_{\text{антисимметрично}} \underbrace{\nabla_\alpha \nabla_\beta}_{\text{симметрично}} v_\gamma = 0.$$

Естественно возникает вопрос, всегда ли можно представить поле $\mathbf{E}$, для которого $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$, как градиент некоторого скаляра $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$, а поле $\mathbf{B}$, для которого $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$, как ротор некоторого вектора $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$.

Потенциальное поле (л)

Интеграл от градиента зависит только от граничных точек кривой, но не зависит от того, как именно идёт кривая. Это эквивалентно тому, что циркуляция градиента по любому замкнутому контуру равна нулю (любой замкнутый контур — это путь из x_0 в x_1 вдоль одной кривой и возвращение обратно вдоль другой кривой).

Верно и обратное утверждение. Если циркуляция от ковекторного поля E_α по произвольному контуру G равна нулю:

$$\oint\limits_{G} E_\alpha\, dx^\alpha = 0$$

(такое поле называют *потенциальным*), то ковекторное поле является градиентом от некоторой скалярной функции $E_\alpha = \partial_\alpha \varphi$. Такая скалярная функция называется *потенциалом*, она определена с точностью до константы $\varphi(x_0)$ и имеет вид

$$\varphi(x) = \int\limits_{x_0}^{x} E_\alpha\, dx^\alpha + \varphi(x_0).$$

Интеграл здесь берётся по произвольной гладкой кривой, лежащей в области определения поля E_α, соединяющей точки x_0 и x.

Следует ли из равенства нулю ротора потенциальность поля? Не всегда. Могут существовать такие контуры, которые нельзя стянуть в точку, не выходя из области определения поля $\operatorname{rot}\mathbf{E}$. Циркуляция по такому контуру не может быть выражена как поток ротора и может оказаться ненулевой, даже если $\operatorname{rot}\mathbf{E} \equiv 0$. Например, пусть область определения поля — бублик, тогда контур, идущий внутри бублика и охватывающий дырку, не может быть стянут в точку без выхода из бублика.

Если в области определения $\operatorname{rot}\mathbf{E}$ все контуры стягиваемы в точку, то условие $\operatorname{rot}\mathbf{E} \equiv 0$ оказывается необходимым и достаточным для потенциальности поля $\mathbf{E}$.

Соленоидальное поле (л)

Если поток векторного поля $\mathbf{B}$ через любую замкнутую ориентированную поверхность равен нулю, то такое поле называется *соленоидальным*. В этом случае $\operatorname{div}\mathbf{B}\equiv 0$.

Могут быть замкнутые поверхности, которые нельзя стянуть в точку, не выходя из области определения $\operatorname{div}\mathbf{B}$, например, для кулоновского поля $\mathbf{E}=\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ дивергенция равна нулю всюду, где она определена: $\operatorname{div}\mathbf{E}|_{\mathbf{r}\neq 0}=0$. Однако в точке $\mathbf{r}=0$ дивергенция не определена. Таким образом, замкнутую поверхность, охватывающую начало координат, нельзя быть стянуть в точку, не выходя из области определения $\operatorname{div}\mathbf{E}$ (не пересекая начала координат). И для таких поверхностей поток поля $\Phi=4\pi\neq 0$.

Если любую замкнутую ориентированную поверхность можно стянуть в точку, не выходя из области определения $\operatorname{div}\mathbf{B}$, то для соленоидальности поля достаточно потребовать выполнения условия $\operatorname{div}\mathbf{B}\equiv 0$.

Соленоидальное поле $\mathbf{B}$ можно представить как ротор от векторного потенциала $\mathbf{A}$, который определён с точностью до градиента от произвольной функции $f(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{B}=\operatorname{rot}\mathbf{A},\qquad \mathbf{A}(\mathbf{r})=-\int\limits_0^1 t[\mathbf{r}\times\mathbf{B}(t\mathbf{r})]\,dt+\operatorname{grad}f.$$

Проверку приведённой формулы для векторного потенциала оставляем читателю (задача 34).

1.12.5 Лапласиан и уравнения математической физики (л)

Комбинируя градиент и дивергенцию, мы получаем *оператор Лапласа* (*лапласиан*):

$$\triangle\varphi=\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=\nabla_\alpha\nabla^\alpha\varphi=\delta_{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta=(\nabla,\nabla)\varphi.$$

Для криволинейных координат приведём формулу без вывода (вывод см. на с.271):

$$\triangle\varphi=\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\alpha(\sqrt{|g|}g^{\alpha\beta}\partial_\beta\varphi).$$

В декартовых координатах

$$\triangle=\nabla_\alpha\nabla^\alpha=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Усредним скалярную функцию φ по маленькому шару $D_a(\mathbf{R})$ радиусом a с центром в точке $\mathbf{R}$:

$$\begin{aligned}
\langle\varphi\rangle_{D_a(\mathbf{R})} &= \frac{1}{\frac43\pi a^3}\int\limits_{D_a(\mathbf{R})}\varphi(\mathbf{r})\,d^3\mathbf{r}=\frac{1}{\frac43\pi a^3}\int\limits_{|\mathbf{r}|<a}\left(\varphi(\mathbf{R})+r^\alpha\partial_\alpha\varphi(\mathbf{R})+\frac12 r^\alpha r^\beta\partial_\alpha\partial_\beta\varphi(\mathbf{R})\right)d^3\mathbf{r}=\\
&= \varphi(\mathbf{R})+\frac{1}{\frac43\pi a^3}\int\limits_{|\mathbf{r}|<a}\frac12 r^\alpha r^\beta\partial_\alpha\partial_\beta\varphi(\mathbf{R})\,d^3\mathbf{r}= \qquad \text{(проинтегрируем по углам)}\\
&= \varphi(\mathbf{R})+\frac{1}{\frac43\pi a^3}\int\limits_0^a\frac12 r^2\underbrace{\langle n^\alpha n^\beta\rangle}_{\frac13\delta_{\alpha\beta}}\partial_\alpha\partial_\beta\varphi(\mathbf{R})\,4\pi r^2\,dr= \qquad \text{(где }\langle\cdot\rangle\text{ — среднее по углам, } n_\alpha=\frac{r_\alpha}{r}\text{)}\\
&= \varphi(\mathbf{R})+\frac{1}{2a^3}\int\limits_0^a\triangle\varphi(R)\,r^4\,dr=\varphi(\mathbf{R})+\frac{a^2}{10}\triangle\varphi(\mathbf{R}).
\end{aligned}$$

Мы установили геометрический смысл лапласиана — он показывает, насколько среднее по маленькому шарику отличается от значения функции в его центре. Вместо усреднения по шарику можно усреднять по его поверхности — сфере $S_a(\mathbf{R})$ (результат приводим без вывода):

$$\triangle\varphi(\mathbf{R})=\frac{10}{a^2}\left(\langle\varphi\rangle_{D_a(\mathbf{R})}-\varphi(\mathbf{R})\right)=\frac{6}{a^2}\left(\langle\varphi\rangle_{S_a(\mathbf{R})}-\varphi(\mathbf{R})\right). \tag{1.12.1}$$

Становится понятным, что лапласиан естественным образом появляется в уравнениях, описывающих взаимодействие точек среды с соседями, для которых значение поля отличается.

$\triangle\varphi=0$ — *уравнение Лапласа* описывает тепловое равновесие, или равновесие диффузии, или электростатический потенциал без зарядов, когда среднее по окрестности каждой точки совпадает со значением функции в этой точке.

$\triangle\varphi=f$ — *уравнение Пуассона* описывает равновесие среды под действием *источника* (внешнего фактора) f, которой вывел её из равновесного состояния. Это тепловое равновесие с источниками тепла, или

равновесие диффузии с источниками частиц, или электростатический потенциал в присутствии плотности заряда.

$\triangle\varphi = C\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ — *уравнение теплопроводности (диффузии)* описывает релаксацию среды, все неравновесности которой стараются экспоненциально выровняться. Это развитие теплопроводности и диффузии во времени.

$\triangle\varphi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ — *волновое уравнение* описывает среду, частицы которой тянет к положению равновесия, но они обладают инерцией, а потому вместо релаксации получаются колебания и волны.

$\triangle\varphi = -\mathrm{i}\frac{2m}{\hbar}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ — *уравнение Шрёдингера* (для свободной нерелятивистской частицы) тоже описывает колебания и волны (волновой функции), но комплексные.

Для оператора Лапласа можно поставить задачу на *собственные числа* и *собственные функции* (*спектральную задачу*)

$$\triangle f = \lambda f.$$

Удобно использовать собственные функции в виде комплексных экспонент:

$$f(\mathbf{r}) = \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r}), \qquad \lambda = -\mathbf{k}^2.$$

Если нужны вещественные собственные функции, то вместо комплексных экспонент можно взять тригонометрические функции:

$$f_c(\mathbf{r}) = \cos(\mathbf{k}\mathbf{r}), \quad f_s(\mathbf{r}) = \sin(\mathbf{k}\mathbf{r}), \qquad \lambda = -\mathbf{k}^2.$$

В приведённых собственных функциях мы узнаём фурье-гармоники. Так что обычное преобразование Фурье — это разложение функции по собственным функциям оператора Лапласа[1].

Если искать решения уравнения теплопроводности, волнового уравнения и уравнения Шрёдингера в виде $\varphi(\mathbf{r},t) = x(t)\,f(\mathbf{r})$, то мы получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения на амплитуды $x(t)$:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -\mathbf{k}^2 C\,x,\\
\ddot{x} &= -\frac{\mathbf{k}^2}{c^2}\,x,\\
\dot{x} &= \mathrm{i}\frac{2m\mathbf{k}^2}{\hbar}\,x.
\end{aligned}$$

В этих уравнениях легко узнать *уравнение релаксации*, *уравнение гармонического осциллятора* и *уравнение вращения комплексной плоскости*. Их решения:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \exp(-\mathbf{k}^2 Ct)\,x_0,\\
x(t) &= \cos(tk/c)\,x_0 + \sin(tk/c)\,v_0 c/k,\\
x(t) &= \exp(\mathrm{i}\tfrac{2m\mathbf{k}^2}{\hbar}t)\,x_0.
\end{aligned}$$

Все перечисленные свойства лапласиана справедливы в пространстве любой размерности $D \geqslant 1$ (коэффициенты в уравнении (1.12.1) зависят от размерности).

[1] Для оператора Лапласа можно построить и другие наборы собственных функций, разложение по которым будет естественным образом обобщать преобразования Фурье.

Глава 1.13

Ньютоновская механика как предельный случай СТО (с. 277)

Основная тема этой главы — трансформационные свойства аддитивных интегралов движения в механике. Мы получим ряд теорем из ньютоновской механики предельным переходом $\frac{v}{c} \to 0$ (либо формальным[1] переходом $c \to \infty$) из специальной теории относительности. Эти теоремы можно было бы получить и напрямую из ньютоновской механики, но такой предельный переход часто будет проще.

(!!!) Во избежание путаницы между теориями обычный знак равенства «=» будет использоваться в формулах, справедливых для СТО (некоторые из них равно справедливы в ньютоновской механике), знак «≈» будет использоваться, когда мы переходим к нерелятивистскому приближению в промежуточных выкладках (там могут быть члены, «лишние» для ньютоновской механики, или могут отбрасываться члены, которые надо оставлять в других случаях), знак «≃» будет использоваться в формулах ньютоновской механики, которые не справедливы в СТО.

1.13.1 От преобразований Лоренца к преобразованиям Галилея

В ньютоновской механике скорость света в качестве фундаментальной скорости не возникает, поэтому перепишем обратное *преобразование Лоренца* для скорости, направленной по оси x, не через $x^0 = ct$, а через t:

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t'+x'v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ \frac{t'v+x'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} =$$

$$= \exp\left[c\vartheta \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c^2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\frac{v}{c}=\operatorname{th}\vartheta} \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

В пределе $v/c \to 0$ вместо быстроты аддитивным параметром становится скорость $c\vartheta \to v$ и мы получаем *преобразование Галилея*:

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t' \\ t'v + x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \exp\left[v \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

В случае преобразования Галилея разложение экспоненты в ряд Тейлора обрывается после линейного члена.

Преобразования Галилея и их генераторы по разным направлениям коммутируют между собой.

[1] Скорость света — размерная величина, её численное значение зависит от выбранных единиц измерения, поэтому переход $c \to \infty$ лишён физического смысла. На самом деле всегда, когда предельный переход делается по размерной величине, подразумевается предельный переход по безразмерному отношению двух величин одинаковой размерности.

Преобразование Галилея для произвольного направления скорости:

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t' \\ t'v_x + x' \\ t'v_y + y' \\ t'v_z + z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_x & 1 & 0 & 0 \\ v_y & 0 & 1 & 0 \\ v_z & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \exp\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_x & 0 & 0 & 0 \\ v_y & 0 & 0 & 0 \\ v_z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

1.13.2 Преобразование энергии и импульса

Рассмотрим *преобразование Лоренца для 4-импульса* с учётом того, что $p^0 = \frac{1}{c}\mathcal{E} \simeq mc + \frac{\mathcal{E}_{\text{кл.}}}{c}$, где $\mathcal{E}_{\text{кл.}}$ — энергия системы в классическом (ньютоновском) пределе,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{\mathcal{E}' + vp^{1'}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx (\mathcal{E}' + vp^{1'})\left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) \approx \mathcal{E}' + vp^{1'} + \frac{\mathcal{E}'}{c^2}\frac{v^2}{2} \approx \mathcal{E}' + vp^{1'} + \frac{mv^2}{2}, \\ p^1 &= \frac{p^{1'} + \frac{\mathcal{E}'}{c^2}v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx p^{1'} + \frac{\mathcal{E}'}{c^2}v \approx p^{1'} + mv, \\ p^2 &= p^{2'}, \quad p^3 = p^{3'}. \end{aligned}$$

В ньютоновском пределе, откинув энергию покоя mc^2, получаем *преобразование Галилея для энергии и импульса*:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{кл.}} &\simeq \mathcal{E}'_{\text{кл.}} + (\mathbf{v}, \mathbf{p}') + \frac{mv^2}{2}, \\ \mathbf{p} &\simeq \mathbf{p}' + m\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Эта формула, как и исходное преобразование Лоренца, справедлива как для отдельных частиц, так и для систем. В частности, мы видим (случай $\mathbf{p}' = 0$, т.е. штрихованная система — система центра инерции), что энергия системы — сумма энергии системы относительно центра инерции и кинетической энергии центра инерции.

В специальной теории относительности мы имеем непрерывные симметрии относительно сдвигов (в пространстве и времени), поворотов и бустов. В общем случае этим преобразованиям надо подвергать все части системы. Если система состоит из невзаимодействующих подсистем, то будут аналогичные симметрии для каждой подсистемы в отдельности и свои законы сохранения для каждой подсистемы.

Симметрии относительно сдвигов в пространстве дают сохранение импульса.

Симметрии относительно сдвигов по времени дают сохранение энергии (t-компоненты импульса).

1.13.3 Момент импульса и теорема о движении центра инерции

Рассмотрим теперь симметрии из группы Лоренца $\mathrm{SO}_+(1,3)$: вращения и бусты и их комбинации. В данном случае комбинации вращений и бустов и даже комбинации вращений с вращениями и бустов с бустами по разным осям координат можно не рассматривать, т.к. нас интересуют независимые интегралы движения.

Преобразования из группы Лоренца $\mathrm{SO}_+(1,3)$ могут быть представлены в экспоненциальном виде:

$$\underline{x}(\underline{x}', s) = \exp(s\hat{F})\underline{x}', \qquad x^i(x', s) = \exp(sF^i{}_j)x'^j.$$

Действие для релятивистских частиц инвариантно по отношению к преобразованиям из группы Лоренца.[2] В соответствии с теоремой Нётер интеграл движения имеет вид

$$p_s = p_i \left.\frac{\partial x^i}{\partial s}\right|_{s=0} = p_i F^i{}_j x^j = p^i F_{ij} x^j. \tag{1.13.1}$$

Таким образом, на каждый из линейно независимых генераторов группы Лоренца $F^i{}_j$ мы получили по закону сохранения. Для поворотов у генераторов (1.8.5) отличны от нуля только пространственные компоненты. *Генераторы поворотов* можно записать в следующем виде:

$$(b_\gamma)^\alpha{}_\beta = -\varepsilon^\alpha{}_{\beta\gamma}.$$

[2]Интересно, что, хотя уравнения движения для **не**релятивистских частиц инвариантны по отношению к преобразованиям Галилея, соответствующее стандартное действие не является галилеевски-инвариантным.

Соответствующие вращениям интегралы движения имеют вид

$$L_\gamma = p_\alpha(-\varepsilon^\alpha{}_{\beta\gamma})x^\beta = p^\alpha(-\varepsilon_{\alpha\beta\gamma})x^\beta = [\mathbf{r}\times\mathbf{p}]_\gamma.$$

Мы получили компоненты *момента импульса*. Если частиц несколько, то по ним надо просуммировать:

$$\mathbf{L} = \sum_n [\mathbf{r}_n \times \mathbf{p}_n].$$

Для *генераторов бустов* отличны от нуля только смешанные компоненты:

$$(a_\gamma)^0_\alpha = \delta_{\alpha\gamma}, \quad (a_\gamma)^\alpha_0 = \delta^\alpha_\gamma.$$

Соответствующие бустам интегралы движения имеют вид

$$N_\gamma = p_0 \underbrace{(a_\gamma)^0_\alpha}_{\delta_{\alpha\gamma}} x^\alpha + p_\alpha \underbrace{(a_\gamma)^\alpha_0}_{\delta^\alpha_\gamma} x^0 = -\tfrac{\mathcal{E}}{c}x_\gamma + p_\gamma ct.$$

Опять просуммируем по частицам:

$$-\frac{\mathbf{N}}{c} = \sum_n (\tfrac{\mathcal{E}_n}{c^2}\mathbf{r}_n - \mathbf{p}_n t) = \sum_n \frac{\mathcal{E}_n}{c^2}(\mathbf{r}_n - \mathbf{v}_n t).$$

Поскольку $\mathcal{E} = \sum_n \mathcal{E}_n$ тоже интеграл движения, поделим это выражение на $\frac{\mathcal{E}}{c^2}$. Введём радиус-вектор и скорость центра инерции:

$$\mathbf{r}_{\text{ц.и.}} = \frac{\sum_n \mathcal{E}_n\mathbf{r}_n}{\mathcal{E}}, \qquad \mathbf{v}_{\text{ц.и.}} = \frac{\sum_n \mathbf{p}_n}{\mathcal{E}/c^2} = \frac{\sum_n \mathcal{E}_n\mathbf{v}_n}{\mathcal{E}} = \frac{d}{dt}\frac{\sum_n \mathcal{E}_n\mathbf{r}_n}{\mathcal{E}} - \frac{\sum_n \frac{d\mathcal{E}_n}{dt}\mathbf{r}_n}{\mathcal{E}} = \frac{d}{dt}\mathbf{r}_{\text{ц.и.}}$$

Здесь $\sum_n \frac{d\mathcal{E}_n}{dt}\mathbf{r}_n = 0$, поскольку взаимодействие частиц в СТО осуществляется локально: энергия отдельной частицы $\mathcal{E}_n$ может зависеть от времени только в том случае, если в той же точке $\mathbf{r}_n$ присутствуют другие частицы (или поля), с которыми данная частица обменивается энергией и импульсом (если обмен энергией идёт с полем, то по полевым степеням свободы вместо суммы надо писать интеграл). Получаем

$$\mathbf{r}_0 = -\frac{\mathbf{N}}{\frac{\mathcal{E}}{c}} = \mathbf{r}_{\text{ц.и.}} - \mathbf{v}_{\text{ц.и.}}t.$$

Это начальный (при $t = 0$) радиус-вектор центра инерции системы частиц.

Мы получили *теорему о движении центра инерции замкнутой системы*:

$$\mathbf{r}_{\text{ц.и.}} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_{\text{ц.и.}}t.$$

В нерелятивистском пределе *центр инерции* превращается в *центр масс*:

$$\mathbf{r}_{\text{ц.и.}} = \frac{\sum_n \mathcal{E}_n\mathbf{r}_n}{\mathcal{E}} \simeq \frac{\sum_n m_n\mathbf{r}_n}{\sum_n m_n} = \mathbf{r}_{\text{ц.м.}}.$$

В нерелятивистской механике мы можем допустить дальнодействие (исключить поле, считая, что частицы взаимодействуют напрямую на расстоянии), но вышеприведённые выкладки остаются справедливыми, т.к. энергии $\mathcal{E}_n$ надо заменить на массы m_n, которые не зависят от времени.

Центр масс системы — это фиксированная точка, которая не меняется при преобразованиях Галилея (координаты меняются по тем же законам, что и координаты других точек).

Центр инерции в СТО определён хуже. При преобразованиях Лоренца он ведёт себя иначе, чем другие точки, например, для катящегося колеса центр инерции в системе, движущейся вместе с колесом, находится строго в центре, а для системы, связанной с землёй, центр инерции смещён относительно центра колеса вверх, т.к. выше оси точки колеса имеют бóльшие скорости и энергии, чем ниже оси.

Таким образом, центр инерции в СТО определён только применительно к системе отсчёта, а центр масс определён вне зависимости от системы отсчёта.

Однако скорость центра инерции в СТО ведёт себя так же, как и любая другая скорость, и мы можем определить систему центра инерции, в которой $\mathbf{p} = 0$ и центр инерции неподвижен.

Рассмотрим преобразование момента импульса $\mathbf{L}$ при изменении системы координат. При поворотах $\mathbf{L}$ ведёт себя как вектор. Поскольку в определение $\mathbf{L}$ входят радиус-векторы частиц, при сдвиге начала координат $\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}$ момент импульса изменяется:

$$\mathbf{L}' = \sum_n [\mathbf{r}'_n \times \mathbf{p}'_n] = \sum_n [(\mathbf{r}_n + \mathbf{a}) \times \mathbf{p}_n] = \mathbf{L} + [\mathbf{a} \times \sum_n \mathbf{p}_n]. \tag{1.13.2}$$

1.13.4 Тензор момента импульса

Для изучения преобразования момента импульса при бустах его следует включить в какой-то 4-мерный тензор. Перепишем интеграл движения (1.13.1), полученный из симметрии по отношению к группе Лоренца, опустив у генератора оба индекса, при этом генератор становится 2-формой (антисимметричным тензором с двумя нижними индексами) общего вида:

$$p_s = p_i \left.\frac{\partial x^i}{\partial s}\right|_{s=0} = p^i F_{ij} x^j = -\tfrac{1}{2} F_{ij} \underbrace{(x^i p^j - x^j p^i)}_{\underline{x}\wedge\underline{p}} = -\tfrac{1}{2} F_{ij} (\underline{x}\wedge\underline{p})^{ij}.$$

Поскольку матрица F_{ij} не зависит от времени и является произвольной антисимметричной матрицей, мы можем заключить, что интегралы движения образуют *4-мерный тензор момента импульса* (p_s — линейная комбинация компонент этого тензора):

$$L^{ij} = x^i p^j - x^j p^i = (\underline{x}\wedge\underline{p})^{ij}.$$

Это выражение — обобщение на 4-мерное пространство векторного произведения $[\mathbf{r}\times\mathbf{p}]$, записанного в виде антисимметричной матрицы.

Тензор момента импульса объединяет компоненты векторов $\mathbf{L}$ и $\mathbf{N}$ так же, как контравариантный тензор электромагнитного поля F^{ij} объединяет векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$:

$$L^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & N_x & N_y & N_z \\ -N_x & 0 & L_z & -L_y \\ -N_y & -L_z & 0 & L_x \\ -N_z & L_y & -L_x & 0 \end{pmatrix}, \qquad F^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор момента импульса L^{ij} является тензором по отношению к линейным однородным (не сдвигающим начало отсчёта) заменам координат. Это утверждение определяет его трансформационные свойства:

$$\underbrace{L^{ij}}_{\hat{L}} = \underbrace{\Lambda^i_{i'}}_{\hat{\Lambda}} \underbrace{L^{i'j'}}_{\hat{L}'} \underbrace{\Lambda^j_{j'}}_{\hat{\Lambda}^T}, \qquad \Lambda^i_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}.$$

Для буста по оси x получаем

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & N_x & N_y & N_z \\ -N_x & 0 & L_z & -L_y \\ \hline -N_y & -L_z & 0 & L_x \\ -N_z & L_y & -L_x & 0 \end{array}\right)}_{\hat{L}} = \underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} \gamma & \gamma\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ \gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{\hat{\Lambda}} \underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & N'_x & N'_y & N'_z \\ -N'_x & 0 & L'_z & -L'_y \\ \hline -N'_y & -L'_z & 0 & L'_x \\ -N'_z & L'_y & -L'_x & 0 \end{array}\right)}_{\hat{L}'} \underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} \gamma & \gamma\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ \gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{\hat{\Lambda}^T}$$

Матрица $\hat{\Lambda}$ действует на столбцы матрицы $\hat{L}'$, «перепутывая» в каждом столбце первые две строки и оставляя вторые две строки без изменений. Матрица $\hat{\Lambda}^T$ действует на строки матрицы $\hat{L}'$, «перепутывая» в каждой строке первые два столбца и оставляя вторые два столбца без изменений.

Запишем преобразования блоков 2×2 (в силу антисимметрии достаточно рассмотреть три блока):

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 & N_x \\ -N_x & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\frac{v}{c} \\ \gamma\frac{v}{c} & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & N'_x \\ -N'_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\frac{v}{c} \\ \gamma\frac{v}{c} & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & N'_x \\ -N'_x & 0 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 0 & L_x \\ -L_x & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & L'_x \\ -L'_x & 0 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} N_y & N_z \\ L_z & -L_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\frac{v}{c} \\ \gamma\frac{v}{c} & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N'_y & N'_z \\ L'_z & -L'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(N'_y + \frac{v}{c}L'_z) & \gamma(N'_z - \frac{v}{c}L'_y) \\ \gamma(L'_z + \frac{v}{c}N'_y) & -\gamma(L'_y - \frac{v}{c}N'_z) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем преобразование компонент $\mathbf{L}$ при бусте по x:

$$\begin{aligned}
L_x &= L'_x, \\
L_y &= \gamma(L'_y - \frac{v}{c}N'_z) = \gamma\left(L'_y + v\frac{\mathcal{E}}{c^2}z'_0\right) \approx L'_y + mvz'_0, \\
L_z &= \gamma(L'_z + \frac{v}{c}N'_y) = \gamma\left(L'_z - v\frac{\mathcal{E}}{c^2}y'_0\right) \approx L'_z - mvy'_0, \\
\mathbf{L} &\simeq \mathbf{L}' + [\mathbf{r}'_0 \times m\mathbf{v}].
\end{aligned}$$

Может показаться странным, что радиус-вектор центра инерции $\mathbf{r}'_0$ берётся в нулевой момент времени. Чем этот момент времени выделен? При бусте нулевой момент времени выделен тем, что в этот момент совпадают начала отсчёта движущейся и неподвижной систем. В другие моменты времени переход между системами отсчёта включает также сдвиг по x, при этом момент импульса меняется (1.13.2).

Преобразование компонент $\mathbf{N}$ при бусте по x имеет вид

$$\begin{aligned} N_x &= N'_x && \Leftrightarrow && -\frac{\mathcal{E}}{c}x_0 = -\frac{\mathcal{E}'}{c}x'_0, \\ N_y &= \gamma(N'_y + \frac{v}{c}L'_z) && \Leftrightarrow && -\frac{\mathcal{E}}{c}y_0 = \gamma\left(-\frac{\mathcal{E}'}{c}y'_0 + \frac{v}{c}L'_z\right), \\ N_z &= \gamma(N'_z - \frac{v}{c}L'_y) && \Leftrightarrow && -\frac{\mathcal{E}}{c}z_0 = \gamma\left(-\frac{\mathcal{E}'}{c}z'_0 - \frac{v}{c}L'_y\right). \end{aligned}$$

Мы не будем более подробно расписывать преобразование для $\mathbf{r}_0$ в рамках СТО.

В ньютоновской механике, считая, что $\mathcal{E} \approx \mathcal{E}' \approx mc^2$, $\gamma \approx 1$, $v/c \approx 0$, получаем

$$\mathbf{r}_0 \simeq \mathbf{r}'_0.$$

Аналогично выпишем *преобразование электромагнитного поля* при бусте по x:

$$\begin{aligned} &E_x = E'_x, \qquad E_y = \gamma(E'_y + \frac{v}{c}B'_z), \qquad E_z = \gamma(E'_z - \frac{v}{c}B'_y), \\ &B_x = B'_x, \qquad B_y = \gamma(B'_y - \frac{v}{c}E'_z), \qquad B_z = \gamma(B'_z + \frac{v}{c}E'_y). \end{aligned}$$

В нерелятивистском пределе $\gamma \approx 1$ и мы получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &\simeq \mathbf{E}' - [\tfrac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}'], \\ \mathbf{B} &\simeq \mathbf{B}' + [\tfrac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}']. \end{aligned}$$

Впрочем, это уже не ньютоновская механика: *последовательное изложение электродинамики возможно только в рамках теории относительности* (*специальной или общей*).

Глава 1.14

Неинерциальные системы отсчёта (с. 281)

1.14.1 Неинерциальные системы отсчёта в классической механике

В этой главе мы поступим наоборот: сначала рассмотрим неинерциальные системы отсчёта с точки зрения ньютоновской механики, а потом с точки зрения СТО.

Рассмотрение неинерциальных систем отсчёта будет естественной подготовкой к рассмотрению кинематики *абсолютно твёрдого тела*[1], поскольку при движении твёрдого тела с ним можно связать систему отсчёта (*лагранжевы координаты*), которая будет в большинстве случаев неинерциальной.

Рассмотрим функцию Лагранжа для системы нерелятивистских частиц, попарное взаимодействие которых описывается потенциалами, зависящими от расстояний между частицами, записанную в инерциальной системе отсчёта:

$$L(\mathbf{r}_a, \dot{\mathbf{r}}_a) = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - \sum_{a>b} U(r_{ab}),$$

где $v_a = |\mathbf{v}_a| = |\dot{\mathbf{r}}_a|$, $r_{ab} = |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|$.

Введём неинерциальную систему отсчёта, начало отсчёта которой задаётся радиус-вектором $\mathbf{R}(t)$ и движется со скоростью $\mathbf{V}(t) = \dot{\mathbf{R}}(t)$ и ускорением $\mathbf{W}(t) = \dot{\mathbf{V}}(t)$. Также неинерциальная система вращается с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}(t)$. Производные от $\mathbf{R}$, $\mathbf{V}$ и $\mathbf{\Omega}$ мы определим по отношению к невращающейся системе отсчёта, но разлагать их будем по вращающемуся базису. Поэтому введём промежуточную систему отсчёта (штрихованную), которая также движется со скоростью $\mathbf{V}(t)$, но не вращается.

Тогда скорости частиц в двух системах отсчёта связаны следующим образом:

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}'_a + \mathbf{V}.$$

Расстояния между частицами в обеих системах отсчёта одинаковы:

$$r_{ab} = r'_{ab}.$$

Кинетическая энергия одной частицы теперь имеет вид

$$\frac{m_a v_a^2}{2} = \frac{m_a v_a'^2}{2} + \frac{m_a V^2}{2} + m_a(\mathbf{v}'_a, \mathbf{V}) = \frac{m_a v_a'^2}{2} + \underbrace{\frac{m_a V^2}{2}} + \underbrace{\frac{d}{dt} m_a(\mathbf{r}'_a, \mathbf{V})} - (\mathbf{r}'_a, m_a \dot{\mathbf{V}})$$

Мы выделили в этом выражении полные производные по времени. В лагранжиане их можно отбросить, поскольку они не влияют на вариацию действия. После этого функция Лагранжа может быть переписана в следующем виде:

$$L'(\mathbf{r}'_a, \dot{\mathbf{r}}'_a) = \sum_a \left(\frac{m_a v_a'^2}{2} - (\mathbf{r}'_a, m_a \mathbf{W}) \right) - \sum_{a>b} U(r_{ab}).$$

Мы видим, что потенциальная энергия получила добавку

$$U_{\text{инерц.}} = \sum_a (\mathbf{r}'_a, m_a \mathbf{W}),$$

[1] Как мы увидим ниже, в теории относительности абсолютно твёрдых тел быть не может.

которая соответствует *силе инерции*, действующей на каждую частицу:

$$\mathbf{F}_{a\ \text{инерц.}} = -m_a\mathbf{W}.$$

Подобно гравитационной силе, сила инерции пропорциональна массе.

Перейдём теперь к системе отсчёта, которая в дополнение к движению со скоростью $\mathbf{V}$ ещё и вращается (система с двумя штрихами):

$$\mathbf{v}'_a = \mathbf{v}''_a + [\mathbf{\Omega}'' \times \mathbf{r}''_a].$$

Кинетическая энергия перепишется так:

$$\frac{m_a v'^2_a}{2} = \frac{m_a v''^2_a}{2} + \frac{m_a}{2}[\mathbf{\Omega}'' \times \mathbf{r}''_a]^2 + m_a(\mathbf{v}''_a, [\mathbf{\Omega}'' \times \mathbf{r}''_a]).$$

Поскольку начала координат штрихованной системы и дважды штрихованной системы совпадают, радиус-вектор преобразуется как вектор и его скалярное произведение оказывается инвариантным: $(\mathbf{r}'_a, \mathbf{W}') = (\mathbf{r}''_a, \mathbf{W}'')$. Теперь лагранжиан имеет вид

$$L''(\mathbf{r}''_a, \dot{\mathbf{r}}''_a) = \sum_a \left(\frac{m_a v''^2_a}{2} - m_a(\mathbf{r}''_a, \mathbf{W}'') + \frac{m_a}{2}[\mathbf{\Omega}'' \times \mathbf{r}''_a]^2 + m_a(\mathbf{v}''_a, [\mathbf{\Omega}'' \times \mathbf{r}''_a]) \right) - \sum_{a>b} U(r_{ab}).$$

Потенциальная энергия получает дополнительную добавку

$$U_{\text{ц.б.}} = -\sum_a \frac{m_a}{2}[\mathbf{\Omega}'' \times \mathbf{r}''_a]^2 = -\sum_a \frac{m_a \Omega^2 \rho_a^2}{2},$$

где ρ_a — расстояние от частицы с номером a до прямой, проходящей через начало координат и параллельной $\mathbf{\Omega}''$.

Мы можем ввести *скалярный потенциал сил инерции* $\varphi_{\text{и}}(\mathbf{r}'')$, в роли заряда, описывающего взаимодействие с потенциалом, выступает масса частицы m_a:

$$\varphi_{\text{и}}(\mathbf{r}'') = (\mathbf{r}'', \mathbf{W}'') - \frac{1}{2}[\mathbf{\Omega}'' \times \mathbf{r}'']^2.$$

Кроме того, в лагранжиане появляется добавка, описывающая взаимодействие с *векторным потенциалом сил инерции* $\mathbf{A}_{\text{и}}(\mathbf{r}'')$, в роли заряда, описывающего взаимодействие с векторным потенциалом, выступает масса частицы m_a:

$$L_{\text{в.п.}} = \sum_a m_a(\mathbf{v}''_a, \mathbf{A}_{\text{и}}(\mathbf{r}''_a)), \qquad \mathbf{A}_{\text{и}}(\mathbf{r}'') = [\mathbf{\Omega}'' \times \mathbf{r}''].$$

Через $\varphi_{\text{и}}$ и $\mathbf{A}_{\text{и}}$ лагранжиан записывается в виде

$$L''(\mathbf{r}''_a, \dot{\mathbf{r}}''_a) = \sum_a \left(\frac{m_a v''^2_a}{2} - m_a\varphi_{\text{и}}(\mathbf{r}'') + m_a(\mathbf{v}''_a, \mathbf{A}_{\text{и}}(\mathbf{r}''_a)) \right) - \underbrace{\sum_{a>b} U(r_{ab})}_{U}.$$

Мы уже имели дело с подобными лагранжианами, так что сразу напишем уравнения движения:

$$m_a\ddot{\mathbf{r}}''_a = m_a\mathbf{g}(\mathbf{r}''_a) + m_a[\mathbf{v}''_a \times \mathbf{h}(\mathbf{r}''_a)] - \boldsymbol{\nabla}_a U.$$

Здесь поле $\mathbf{g}$ — аналог электрического поля (и ускорения свободного падения), поле $\mathbf{h}$ — аналог магнитного поля:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= -\nabla\varphi_{\text{и}} - \frac{\partial \mathbf{A}_{\text{и}}}{\partial t} = -\mathbf{W}'' + [\mathbf{\Omega}'' \times [\mathbf{r}'' \times \mathbf{\Omega}'']] - [\dot{\mathbf{\Omega}}'' \times \mathbf{r}''], \\ \mathbf{h} &= \operatorname{rot} \mathbf{A}_{\text{и}} = 2\mathbf{\Omega}''. \end{aligned}$$

Силы инерции, действующие на частицу, имеют вид

$$\mathbf{F}_{\text{инерц.}} = m_a\mathbf{g} + m_a[\mathbf{v}''_a \times \mathbf{h}] = -m_a\mathbf{W}'' - m_a[\dot{\mathbf{\Omega}}'' \times \mathbf{r}''_a] + m_a[\mathbf{\Omega}'' \times [\mathbf{r}''_a \times \mathbf{\Omega}'']] + 2m_a[\mathbf{v}''_a \times \mathbf{\Omega}''].$$

Эти четыре члена называются соответственно:

- *силой инерции поступательного движения*;
- *силой инерции вращения*;

- *центробежной силой*;
- *силой Кориолиса.*

Аналогию с электромагнитным полем не стоит проводить слишком далеко. Потенциал гравитационного поля, как известно из общей теории относительности (ОТО), является не 4-мерным ковектором, а 4-мерной метрикой.

Теорема Лармора. Поведение системы зарядов с одинаковым удельным зарядом e_a/m_a в аксиально-симметричном электрическом поле и слабом однородном магнитном поле $\mathbf{B}$, параллельном оси симметрии, эквивалентно поведению той же системы зарядов в том же электрическом поле в системе координат, вращающейся с угловой скоростью $\mathbf{\Omega} = \frac{e\mathbf{B}}{2mc}$. Условие малости поля $\rho_{\max}\Omega = \rho_{\max}\frac{eB}{2mc} \ll v$ ($\rho_{\max}$ — максимальное удаление частицы от оси симметрии, v — характерная скорость частицы) — возможность пренебречь центробежным членом.

Теорема Лармора легко выводится из сравнения силы Кориолиса $2m_a[\mathbf{v}_a \times \mathbf{\Omega}]$ и силы Лоренца $\frac{e_a}{c}[\mathbf{v}_a \times \mathbf{B}]$.

1.14.2 Так что же мы получили?

Рассмотрим внимательнее процесс вывода сил инерции в предыдущем параграфе. Откуда взялись скалярный и векторный потенциалы? Почему они имеют такой специальный вид?

Как уже было упомянуто, неинерциальная система отсчёта — это лагранжевы координаты, связанные с абсолютно твёрдым телом. Рассмотрим более общий случай, когда *лагранжевы координаты связаны с некоторой деформируемой средой*,. С точки зрения исходной инерциальной системы отсчёта элемент среды имеет скорость $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$. Тогда скорости частицы в инерциальной и лагранжевой системах отсчёта связаны соотношением

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}'' + \mathbf{V}''.$$

Лагранжиан (кинетическая энергия) свободной частицы приобретает вид

$$L'' = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} = \frac{m\mathbf{v}''^2}{2} + m\underbrace{\frac{\mathbf{V}''^2}{2}}_{-\varphi} + m\underbrace{(\mathbf{v}'', \mathbf{V}'')}_{(\mathbf{v}'', \mathbf{A})},$$

т.е.

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}'', \qquad \varphi = -\frac{\mathbf{V}''^2}{2}. \tag{1.14.1}$$

Теперь эти потенциалы могут иметь произвольный вид.

Однако лагранжева система координат, связанная с не твёрдой средой, как правило, является криволинейной, причём зависящей от времени. Поэтому все квадраты векторов и скалярные произведения следует писать с соответствующей метрикой (при вариации действия эту метрику тоже надо варьировать!):

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = g_{\alpha''\beta''}(t, \mathbf{r}'')A^{\alpha''}B^{\beta''}.$$

В предыдущем параграфе потенциалы отличаются от (1.14.1), потому что мы сделали *калибровочное преобразование*, которое перенесло из векторного потенциала в скалярный вклад поступательного движения со скоростью $V(t)$. Это было сделано исключительно для удобства: потенциальную силу естественнее описывать скалярным потенциалом.

1.14.3 Неинерциальные системы отсчёта в СТО

Абсолютно твёрдых тел в специальной теории относительности не может быть, поскольку модель абсолютно твёрдого тела противоречит постулатам СТО: если твёрдое тело толкнуть, то толчок мгновенно (т.е. со сверхсветовой скоростью) передастся на другой конец тела. Вместо твёрдого тела надо рассматривать более реалистические модели упругих тел. По этой причине неинерциальные системы отсчёта в СТО оказываются определены неоднозначно. При переходе от рассмотрения неинерциальной системы отсчёта в ньютоновской механике к её рассмотрению в рамках СТО приходится вводить модель *упругого* тела, с которым связана система отсчёта.

Кроме того, в геометрии Минковского движение с постоянной скоростью геометрически выделено — ему соответствуют прямые мировые линии. Так что неинерциальным системам отсчёта в СТО соответствуют криволинейные координаты.

Некоторые примеры неинерциальных систем отсчёта в СТО мы рассмотрим в дополнительных материалах (см. с. 281).

1.14.4 Задача 36

Задача 36. Классический эффект Зеемана.
а) Найдите частоты колебаний заряженного трёхмерного осциллятора, помещённого в однородное магнитное поле.
б) Обсудите форму траектории движения.
в) Обсудите связь задачи с прецессией маятника Фуко.

Глава 1.15

Твёрдое тело (с. 286)

1.15.1 Кинематика твёрдого тела

Твёрдое тело — система материальных точек, расстояния между которыми фиксированы. Если не все точки, образующие тело, лежат на одной прямой, то конфигурационное пространство твёрдого тела — $\mathbb{R}^3 \times \mathrm{SO}(3)$. Положение твёрдого тела полностью описывается положением некоторой фиксированной точки тела в 3-мерном евклидовом пространстве (обычно или центра масс, или точки крепления) и поворотом тела вокруг этой точки из некоторой фиксированной исходной ориентации в текущее положение.

Во многих задачах положение одной из точек твёрдого тела фиксировано, тогда конфигурационное пространство сокращается до $\mathrm{SO}(3)$.

На пространстве $\mathrm{SO}(3)$ можно ввести естественную метрику, которая сопоставляет двум ориентациям тела минимальный угол поворота, переводящий одну ориентацию в другую. Это метрика кривого пространства, параллельный перенос в $\mathrm{SO}(3)$ оказывается зависящим от траектории, а параллельный перенос по замкнутому контуру даёт не тождественное преобразование, а поворот. Кроме того, $\mathrm{SO}(3)$ не может быть взаимнооднозначно покрыто одной системой координат без особенностей.

Нетривиальная геометрия пространства $\mathrm{SO}(3)$ является основной причиной сложностей в механике твёрдого тела.

Для наших целей пока будет достаточно считать, что ориентация тела задаётся просто матрицей из группы $\mathrm{SO}(3)$.

Производная от матрицы из группы $\mathrm{SO}(3)$ — это линейная комбинация генераторов поворотов (1.8.5), но сейчас нам удобнее обрезать эти матрицы до размера 3×3 выкинув первую строчку и первый столбец, которые соответствовали временно́й координате:

$$(\hat{b}_\alpha)_{\beta\gamma} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}, \qquad \hat{b}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{b}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{b}_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.15.1)$$

$$-(\widehat{*\Omega})_{\beta\gamma} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Omega^\alpha = (\hat{b}_\alpha)_{\beta\gamma}\Omega^\alpha, \qquad \Leftrightarrow \qquad (\hat{\mathbf{b}}, \boldsymbol{\Omega}) = \hat{b}_x\Omega^x + \hat{b}_y\Omega^y + \hat{b}_z\Omega^z = -\widehat{*\Omega}.$$

$$(\hat{\mathbf{b}}, \boldsymbol{\Omega})\mathbf{r} = [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}] = \mathbf{v}_{\text{вр.}}.$$

Здесь и далее радиус-вектор $\mathbf{r}$ соединяет центр масс (или точку крепления) с точкой тела.

Таким образом, вместо того чтобы вводить на $\mathrm{SO}(3)$ обобщённые координаты, а потом, дифференцируя их, определить обобщённую скорость, которая в каждой точке пространства $\mathrm{SO}(3)$ будет разложена по своему́ (для каждой точки-ориентации) базису, мы сразу ввели угловую скорость как 3-мерный вектор, не привязывая его к текущей ориентации тела.[1]

(!*) Параметризация скорости вращения через угловую скорость удобна, но для написания функции Лагранжа её приходится выражать через производные от каких-то обобщённых координат, описывающих ориентацию тела.

Теорема*. Не существует таких обобщённых координат ξ^α, описывающих ориентацию твёрдого тела, чтобы производные от координат совпадали с компонентами угловой скорости Ω^α:

$$\forall \xi^\alpha \quad \Omega^\alpha \neq \dot{\xi}^\alpha.$$

Доказательство

[1] Это не просто везение, а результат того, что $\mathrm{SO}(3)$ — группа Ли, а генераторы — элементы соответствующей алгебры Ли $\mathrm{so}(3)$. Каждый генератор задаёт не просто касательный вектор в какой-то одной точке пространства $\mathrm{SO}(3)$, а векторное поле на всей группе (поле скоростей, когда меняется ϕ в показателе экспоненты $\mathrm{e}^{\phi\hat{b}_\alpha}$), поэтому касательный вектор в любой точке может быть разложен по генераторам.

1. Сдвиги вдоль обобщённых координат коммутируют. Пусть $G : \xi^1 \mapsto \xi^1 + g$, $H : \xi^2 \mapsto \xi^2 + h$, тогда

$$G \circ H f(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = f(\xi^1 + g, \xi^2 + h, \xi^3) = H \circ G f(\xi^1, \xi^2, \xi^3),$$

что можно записать как $G \circ H = H \circ G$ ($\circ$ означает композицию операций справа налево).

2. Сдвиг вдоль координаты можно записать через движение с постоянной обобщённой скоростью вдоль соответствующей координаты:

$$Gf(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = F(\xi^1, \xi^2, \xi^3, g),$$
$$F(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t) = f(\Xi^1(t), \Xi^2(t), \Xi^3(t)), \quad \Xi^\alpha(0) = \xi^\alpha, \quad \dot{\Xi}^\alpha = \delta^\alpha_1.$$

3. Движение на протяжении времени g с постоянной угловой скоростью по оси 1 ($\Omega^\alpha = \delta^\alpha_1$) описывается матричной экспонентой от соответствующего генератора $G = \exp(g\hat{b}_1)$. Аналогично $H = \exp(h\hat{b}_2)$.

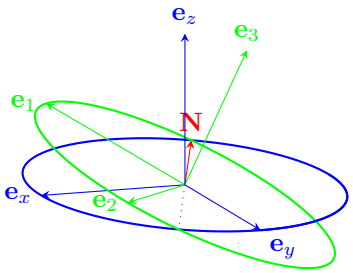
4. Выполнено неравенство $G \circ H \neq H \circ G$ (проверяется перемножением матриц, но достаточно проверить некоммутативность генераторов). Следовательно, $\Omega^\alpha \neq \dot{\xi}^\alpha$ для любого выбора ξ^α. **Ч.Т.Д.**

(*) Заметим, что мы можем так выбрать координаты, параметризующие ориентацию твёрдого тела, что какая-то одна компонента угловой скорости окажется производной от некоторой координаты, а импульсом, канонически сопряжённым к этой координате, окажется соответствующая компонента момента импульса.

1.15.1.1 Углы Эйлера в теоретической физике*

Углы Эйлера — один из стандартных способов параметризации ориентации твёрдого тела. Два угла Эйлера (θ и ϕ) задают направление выделенной оси тела (оси x^3) относительно условно неподвижной (*эйлеровой*) системы отсчёта, а третий угол (ψ) задаёт поворот тела вокруг выделенной оси.

Существуют разные традиции определения углов Эйлера. Мы будем придерживаться традиции, принятой в теоретической физике. В теоретической физике углы θ и ϕ, задающие направление выделенной оси тела (оси x^3), совпадают со сферическими углами.



Орты $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ связаны с условно неподвижной (эйлеровой) системой координат, а оси $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ вморожены в твёрдое тело (связаны с лагранжевой системой координат). Вектор $\mathbf{N}$ (направлен от читателя) задаёт направление линии узлов.

На рисунке изображены орты эйлеровой (неподвижной) и лагранжевой (вмороженной в тело) систем координат. Также изображена плоскость, натянутая на орты $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, и плоскость, натянутая на орты $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. Их линия пересечения — *линия узлов*, вдоль неё задан единичный вектор $\mathbf{N}$.

Переход от неподвижной системы к подвижной определяется следующим образом.

- Поворот вокруг $\mathbf{e}_z$ на угол ϕ (*угол прецессии*) совмещает ось y' с линией узлов.
- Поворот вокруг $\mathbf{N}$ на угол θ (*угол нутации*) совмещает ось z' с осью x^3.
- Поворот вокруг $\mathbf{e}_3$ на угол ψ (*угол собственного вращения*) совмещает оси x'' и y'' с x^1 и x^2.

Можно изменить первые два пункта и дать следующее эквивалентное определение.

- Поворот вокруг $\mathbf{e}_y$ на угол θ наклоняет ось z' по отношению к оси z.
- Поворот вокруг $\mathbf{e}_z$ на угол ϕ совмещает ось y' с линией узлов, а ось z'' с осью x^3.
- Поворот вокруг $\mathbf{e}_3$ на угол ψ совмещает оси x'' и y'' с x^1 и x^2.

Угловые координаты оси $\mathbf{e}_3$ — это θ и ϕ. Линия узлов и ось тела задаются соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \sin\phi\,\mathbf{e}_x + \cos\phi\,\mathbf{e}_y, \\ \mathbf{e}_3 &= \cos\theta\,\mathbf{e}_z + \sin\theta(\cos\phi\,\mathbf{e}_x - \sin\phi\,\mathbf{e}_y) \end{aligned}$$

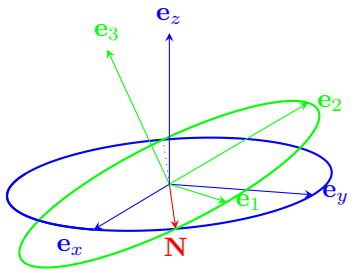
Вектор угловой скорости твёрдого тела имеет компоненты $(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$, если его разложить по векторам $\mathbf{e}_z, \mathbf{N}, \mathbf{e}_3$:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\,\mathbf{e}_z + \dot{\theta}\,\mathbf{N} + \dot{\psi}\,\mathbf{e}_3.$$

1.15.1.2 Углы Эйлера в теоретической механике**

В теоретической механике — свои традиции, и *углы Эйлера* определяются иначе, чем в принято в теоретической физике.

По-прежнему два угла Эйлера (θ и ϕ) задают направление выделенной оси тела (оси x^3) относительно условно неподвижной (эйлеровой) системы отсчёта, а третий угол (ψ) задаёт поворот тела вокруг выделенной оси.



На рисунке изображены орты *эйлеровой* (неподвижной) и *лагранжевой* (вмороженной в тело) систем координат. Также изображены плоскость, натянутая на орты $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, и плоскость, натянутая на орты $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. Их линия пересечения — *линия узлов*, вдоль неё задан единичный вектор $\mathbf{N}$ (направлен к читателю).

Переход от неподвижной системы к подвижной определяется следующим образом.

- Поворот вокруг $\mathbf{e}_z$ на угол ϕ совмещает ось x' с линией узлов.
- Поворот вокруг $\mathbf{N}$ на угол θ совмещает ось z' с осью x^3.
- Поворот вокруг $\mathbf{e}_3$ на угол ψ совмещает оси x'' и y'' с x^1 и x^2.

Можно изменить первые два пункта и дать следующее эквивалентное определение.

- Поворот вокруг $\mathbf{e}_x$ на угол θ наклоняет ось z' по отношению к оси z.
- Поворот вокруг $\mathbf{e}_z$ на угол ϕ совмещает ось x' с линией узлов, а ось z'' с осью x^3.
- Поворот вокруг $\mathbf{e}_3$ на угол ψ совмещает оси x'' и y'' с x^1 и x^2.

Угловые координаты оси $\mathbf{e}_3$ — это θ и $\frac{\pi}{2} - \phi$. Линия узлов и ось тела задаются соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \cos\phi\,\mathbf{e}_x + \sin\phi\,\mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_3 &= \cos\theta\,\mathbf{e}_z + \sin\theta(\sin\phi\,\mathbf{e}_x - \cos\phi\,\mathbf{e}_y) \end{aligned}$$

Вектор угловой скорости твёрдого тела имеет компоненты $(\dot\phi, \dot\theta, \dot\psi)$, если его разложить по векторам $\mathbf{e}_z, \mathbf{N}, \mathbf{e}_3$:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot\phi\,\mathbf{e}_z + \dot\theta\,\mathbf{N} + \dot\psi\,\mathbf{e}_3.$$

Углы Эйлера в традициях теоретической механики и теоретической физики связаны между собой следующим образом:

$$\phi_{\text{мех.}} = \phi_{\text{т.физ.}} + \frac{\pi}{2}, \qquad \theta_{\text{мех.}} = \theta_{\text{т.физ.}}, \qquad \psi_{\text{мех.}} = \psi_{\text{т.физ.}} - \frac{\pi}{2}.$$

1.15.1.3 Навигационные углы (крен, тангаж, рысканье)**

В авиации часто используются *навигационные углы*.

- *Угол рысканья* (*рысканье*), или *курсовой угол*, — угол проекции оси самолёта на горизонтальную плоскость с осью x (которая обычно направлена на север).
- *Угол тангажа* (*тангаж*) — угол, на который ось самолёта (от хвоста к носу) задрана над горизонтальной плоскостью.
- *Угол крена* (*крен*) — угол поворота самолёта вокруг своей оси по отношению к ориентации, в которой крылья симметричны относительно вертикальной плоскости, содержащей ось самолёта, а самолёт не перевёрнут.

Если ось самолёта принять за ось x^3, навигационные углы легко выражаются через углы Эйлера (здесь имеются в виду углы Эйлера, принятые в механике):

- рысканье $= \frac{\pi}{2} - \phi_{\text{мех.}} = -\phi_{\text{т.физ.}}$ связано с *углом прецессии*;
- тангаж $= \frac{\pi}{2} - \theta_{\text{мех.}} = \frac{\pi}{2} - \theta_{\text{т.физ}}$ связан с *углом нутации*;
- крен $= \psi_{\text{мех.}} = \psi_{\text{т.физ.}} - \frac{\pi}{2}$ связан с *углом собственного вращения.*

1.15.2 Момент инерции

Твёрдое тело в данный момент времени совершает вращение относительно некоторой точки, т.е. в данный момент времени скорость этой точки — нуль. Если выбрать эту точку в качестве начала координат, то поле скоростей в данный момент времени имеет вид $\mathbf{v} = [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}]$. Для твёрдого тела $\mathbf{\Omega}$ не зависит от $\mathbf{r}$ (одинакова для всех точек тела), но может зависеть от времени. Тогда кинетическая энергия вращения равна

$$\mathcal{E}_{\text{вр.}} = \sum_a \frac{m_a \mathbf{v}_a^2}{2} = \sum_a \frac{m_a [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_a]^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\Omega^2 r_a^2 - (\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}_a)^2) = \frac{1}{2} \Omega^\alpha \Omega^\beta \underbrace{\sum_a m_a \big(r_a^2 \delta_{\alpha\beta} - x_{a\alpha} x_{a\beta}\big)}_{I_{\alpha\beta}}.$$

Здесь

$$I_{\alpha\beta} = \sum_a m_a \big(r_a^2 \delta_{\alpha\beta} - x_{a\alpha} x_{a\beta}\big) = \begin{pmatrix} \sum m(y^2+z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(x^2+z^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

— *момент инерции* тела (*тензор момента инерции*, или *тензор инерции*). Момент инерции является тензором по отношению к поворотам.

Для непрерывного распределения масс сумму заменяем на интеграл по массе:

$$I_{\alpha\beta} = \int \big(r^2 \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta\big)\, dm.$$

Здесь $dm = \rho(\mathbf{r})\, dV$ для распределения массы по объёму, но можно использовать распределения масс по точкам, по кривым, по поверхностям (мы уже обсуждали интегралы по поверхностям разной размерности).

Квадратичную форму

$$I_{\mathbf{n}} = I_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = \int \big(r^2 - (\mathbf{r}, \mathbf{n})^2\big)\, dm = \int r_\perp^2\, dm, \qquad \mathbf{r}_\perp = \mathbf{r} - \mathbf{n}(\mathbf{n}, \mathbf{r}),$$

на единичном векторе $\mathbf{n}$ называют *моментом инерции относительно оси* $\mathbf{n}$. В частности, диагональные элементы тензора I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} являются моментами инерции относительно соответствующих осей координат.

Если тело вращается вокруг фиксированной оси, направление которой задаётся единичным вектором $\mathbf{n}$, то $\Omega^\alpha = \Omega n^\alpha$ и кинетическая энергия определяется через момент инерции относительно данной оси:

$$\mathcal{E}_{\text{вр.}} = \frac{\Omega^\alpha \Omega^\beta I_{\alpha\beta}}{2} = \frac{\Omega^2 n^\alpha n^\beta I_{\alpha\beta}}{2} = \frac{\Omega^2 I_{\mathbf{n}}}{2}.$$

Кинетическая энергия системы частиц может быть представлена как сумма кинетической энергии центра инерции (для нерелятивистского случая центр инерции можно называть центром масс) и кинетической энергии относительно центра инерции. Мы это уже выводили ранее предельным переходом из СТО, но можно легко проверить и прямо:

$$\sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} = \underbrace{\frac{MV^2}{2}}_{\mathcal{E}_{\text{ц.м.}}} + \underbrace{\sum_a \frac{m_a (\mathbf{v}_a - \mathbf{V})^2}{2}}_{\mathcal{E}_{\text{отн.}}}, \qquad M = \sum_a m_a, \quad \mathbf{V} = \frac{1}{M} \sum_a m_a \mathbf{v}_a.$$

Соответственно, момент инерции тела относительно начала координат $I_{\alpha\beta}$ можно представить как сумму двух членов: момента относительно центра инерции $I_{\alpha\beta}^{\text{ц.м.}}$ и момента самого центра инерции относительно начала координат. При этом, поскольку кинетическая энергия центра инерции записывается как энергия

материальной точки, момент инерции для него имеет такой же вид, как для материальной точки. Пусть $\mathbf{R}$ — радиус-вектор центра масс, тогда

$$I_{\alpha\beta} = I^{\text{ц.м.}}_{\alpha\beta} + M(R^2\delta_{\alpha\beta} - R_\alpha R_\beta).$$

Момент инерции зависит от ориентации тела, но если его вычислить в системе координат, вмороженной в тело (лагранжевы координаты), то он будет постоянным. По этой причине нам часто будет удобно писать угловую скорость, момент инерции и момент импульса в лагранжевых координатах. Как всякая квадратичная форма, момент инерции может быть диагонализован переходом к собственным осям координат. Его собственные числа обозначаются I_1, I_2, I_3.

(*) Вспомним теорему об одновременной диагонализации двух квадратичных форм, одна из которых положительно определена. В данном случае положительно определённая квадратичная форма — метрический тензор. Одновременная диагонализация означает, что собственные оси момента инерции могут быть выбраны ортогональными.

Момент инерции полностью определяет вращательные свойства твёрдого тела.

В задачах о твёрдом теле, вращающемся вокруг фиксированной точки, такое тело обычно называют *волчком* или *гироскопом*:

- $I_1 \neq I_2 \neq I_3 \neq I_1$ — *асимметрический волчок*;
- $I_1 = I_2 \neq I_3$ — *симметрический волчок*, в плоскости первых двух главных осей все направления собственные;
- $I_1 = I_2 = I_3$ — *шаровой волчок*, все направления собственные.

1.15.3 Момент импульса и эллипсоид инерции

Прямыми вычислениями убеждаемся, что, действуя матрицей момента инерции на угловую скорость и выделяя двойное векторное произведение (по формуле $\mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = [\mathbf{a}\times[\mathbf{b}\times\mathbf{c}]]$), получаем соотношение для момента импульса $\hat{I}\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{L}$:

$$I_{\alpha\beta}\Omega^\beta = \sum_a m_a\big(r_a^2\delta_{\alpha\beta} - x_{a\alpha}x_{a\beta}\big)\Omega^\beta = \sum_a m_a\big(\underbrace{\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}_a,\mathbf{r}_a)}_{\mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c})} - \underbrace{\mathbf{r}_a(\mathbf{r}_a,\boldsymbol{\Omega})}_{\mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b})}\big)_\alpha = \sum_a m_a[\mathbf{r}_a\times\underbrace{[\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}_a]}_{\mathbf{v}'_a}]_\alpha = L_\alpha.$$

Мы видим, что момент импульса параллелен угловой скорости, только если угловая скорость оказывается собственным вектором момента инерции.

По моменту инерции можно построить *эллипсоид инерции* — множество угловых скоростей, для которых кинетическая энергия вращения одинакова (и равна $\frac{1}{2}$):

$$\boldsymbol{\Omega}^T\hat{I}\boldsymbol{\Omega} = I_{\alpha\beta}\Omega^\alpha\Omega^\beta = 1.$$

Полуоси эллипсоида инерции равны $\frac{1}{\sqrt{I_i}}$.

Задав энергию вращательного движения

$$\mathcal{E}_{\text{вр.}} = \frac{1}{2}I_{\alpha\beta}\Omega^\alpha\Omega^\beta = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega},\mathbf{L}),$$

момент импульса можно получить дифференцированием по обобщённой (угловой) скорости:

$$L_\alpha = \frac{\partial\mathcal{E}_{\text{вр.}}}{\partial\Omega^\alpha} = I_{\alpha\beta}\Omega^\beta.$$

Таким образом, момент импульса $\mathbf{L}$ должен быть направлен по нормали к поверхности $\mathcal{E}_{\text{вр.}} = \text{const}$, т.е. по нормали к эллипсоиду инерции в той точке, где эллипсоид протыкается направлением вектора $\boldsymbol{\Omega}$.

(!) Энергия вращательного движения, заданная как функция угловой скорости, не является функцией Лагранжа, т.к. угловая скорость не является обобщённой скоростью (см. теорему* на с. 142). Чтобы задать функцию Лагранжа, надо выразить угловую скорость через обобщённые скорости (производные по времени от обобщённых координат, описывающих ориентацию твёрдого тела).

(**) Компоненты угловой скорости не являются разложением скорости по координатному базису в пространстве ориентаций твёрдого тела (это показала теорема* на с. 142). Тем не менее они являются компонентами вектора обобщённой скорости по некоторому базису $\mathbf{e}_\alpha$. Продифференцировав лагранжиан (энергию вращения) по Ω^α, мы получаем компоненты обобщённого импульса (момента импульса), но опять не по координатному базису в пространстве ориентаций твёрдого тела, а по некоторому базису

ковекторов $\mathbf{e}^\alpha$ ($(\mathbf{e}^\alpha, \mathbf{e}_\beta) = \delta^\alpha_\beta$). Однако теоремы теоретической механики доказываются для компонент импульса именно в координатном базисе.

Если существует матрица, обратная матрице момента инерции[2]:

$$(I^{-1})^{\alpha\beta} I_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma,$$

то энергию вращения можно переписать через момент импульса:

$$\mathcal{E}_{\text{вр.}} = \frac{1}{2}(I^{-1})^{\alpha\beta} L_\alpha L_\beta.$$

1.15.4 Свободный гироскоп

Рассмотрим вращение свободного твёрдого тела (на которое не действуют внешние силы) вокруг центра инерции. Также можно рассмотреть вращение твёрдого тела, закреплённого в одной точке (*точке подвеса*). В этом случае единственная внешняя сила — сила реакции подвеса — имеет нулевой момент и не влияет на вращение. Так что оба случая можно рассматривать одинаково.

Если ось вращения не совпадает с собственной осью гироскопа, то направление оси вращения меняется со временем. Это явление называется *свободной прецессией*.

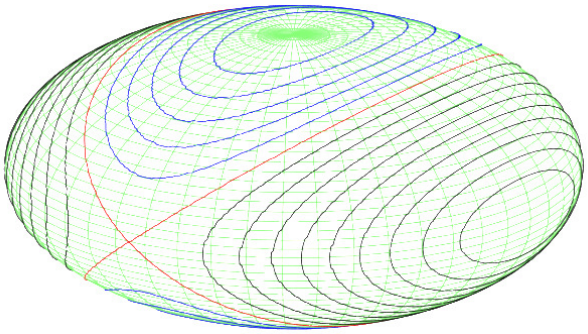
Очевидно, интегралами движения являются энергия и момент импульса:

$$\mathcal{E}_{\text{вр.}} = \frac{1}{2} I_{\alpha\beta}\Omega^\alpha\Omega^\beta = \frac{1}{2}(I^{-1})^{\alpha\beta} L_\alpha L_\beta, \qquad L_\alpha = I_{\alpha\beta}\Omega^\beta.$$

Нам будет удобно работать в лагранжевых (вмороженных в тело) координатах. В таких координатах направление момента импульса уже не является постоянным, но интегралом движения остаётся квадрат момента импульса. Мы получаем два скалярных интеграла движения, причём оба оказываются квадратичными формами на $\mathbf{L}$:

$$\begin{aligned} \frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3} &= 2\mathcal{E}_{\text{вр.}}, \\ L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 &= \mathbf{L}^2. \end{aligned}$$

Мы имеем эллипсоид[3] и сферу, линии пересечения которых дают возможные траектории вектора $\mathbf{L}$ в лагранжевых координатах[4].



Линии пересечения трёхосного эллипсоида с концентрическими сферами разного радиуса задают траектории, которые описывает вектор $\mathbf{L}$ в лагранжевых (вмороженных в тело) координатах.

Через каждую точку эллипсоида проходит одна траектория. На концах длинной и короткой полуосей траектории стягиваются в одну точку. Кроме того, на концах полуоси, соответствующей промежуточному собственному моменту импульса, пересекаются по две кривые, но, как мы увидим далее, точка пересечения — отдельная траектория, а система, двигаясь по кривой, приближается к точке пересечения асимптотически, но никогда её не достигает.

В инерциальной системе отсчёта для свободного гироскопа $\mathbf{L} = \text{const}$, а тело вращается с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$. В лагранжевых координатах (вмороженных в тело) тело неподвижно, а вектор $\mathbf{L}$ вращается с угловой скоростью $-\mathbf{\Omega}$. Так что в лагранжевых координатах

$$\dot{\mathbf{L}} = -[\mathbf{\Omega} \times \mathbf{L}].$$

[2]Матрица момента инерции обратима, если у неё нет нулевых собственных чисел, т.е. если нет такой оси вращения, что все точки твёрдого тела лежат на этой оси.

[3]Этот эллипсоид — эллипсоид инерции, но в координатах L_α, тогда как раньше мы его определяли в координатах Ω^α.

[4]Для шарового волчка $I_1 = I_2 = I_3$ имеет место вырожденный случай, эллипсоид совпадает со сферой, но в этом случае ситуация тривиальна: $\mathbf{\Omega} \| \mathbf{L} = \text{const}$, т.е. тело просто вращается вокруг фиксированной оси.

$$\dot{L}_\alpha = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(I^{-1})^{\beta\mu}L_\mu L_\gamma.$$

Перепишем эту систему в собственных осях момента инерции и получим *уравнения Эйлера для свободного гироскопа*:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{L}_1 &=& \left(\frac{1}{I_3}-\frac{1}{I_2}\right)L_2L_3,\\ \dot{L}_2 &=& \left(\frac{1}{I_1}-\frac{1}{I_3}\right)L_3L_1,\\ \dot{L}_3 &=& \left(\frac{1}{I_2}-\frac{1}{I_1}\right)L_1L_2. \end{array}\right.$$

Видим, что тело, вращающееся вокруг собственной оси, действительно будет так вращаться и далее.

Рассмотрим, как ведёт себя тело при малом отклонении оси вращения от собственной оси.

1.15.4.1 Вблизи оси с максимальным или минимальным моментом инерции*

Рассмотрим случай, когда $L_1 = |\mathbf{L}|\cos\alpha$, где $\alpha \ll 1$.

$$L_1 = |\mathbf{L}| + O(\alpha^2) \tag{1.15.2}$$

$$\dot{L}_2 \approx |\mathbf{L}|\underbrace{\left(\frac{1}{I_1}-\frac{1}{I_3}\right)}_{c_{13}}L_3 = |\mathbf{L}|c_{13}L_3, \tag{1.15.3}$$

$$\dot{L}_3 \approx |\mathbf{L}|\underbrace{\left(\frac{1}{I_2}-\frac{1}{I_1}\right)}_{-c_{12}}L_2 = -|\mathbf{L}|c_{12}L_2. \tag{1.15.4}$$

Продифференцируем первое уравнение по времени:

$$\begin{aligned} \ddot{L}_2 &\approx |\mathbf{L}|c_{13}\dot{L}_3 = -\mathbf{L}^2c_{12}c_{13}L_2,\\ L_3 &\approx \frac{\dot{L}_2}{|\mathbf{L}|c_{13}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega &= |\mathbf{L}|\sqrt{c_{12}c_{13}} = \frac{|\mathbf{L}|}{I_1}\sqrt{\frac{(I_2-I_1)(I_3-I_1)}{I_2I_3}},\\ L_2 &\approx A'\sin(\omega t+\phi_0),\\ L_3 &\approx \frac{A'\omega}{|\mathbf{L}|c_{13}}\sin(\omega t+\phi_0) = A'\sqrt{\frac{c_{12}}{c_{13}}}\sin(\omega t+\phi_0) = A'\sqrt{\frac{(1-I_1/I_2)}{(1-I_1/I_3)}}\sin(\omega t+\phi_0). \end{aligned}$$

Окончательно запишем

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{|\mathbf{L}|}{I_1}\sqrt{\frac{(I_2-I_1)(I_3-I_1)}{I_2I_3}},\\ L_2 &\approx A\sqrt{|1-I_1/I_3|}\sin(\omega t+\phi_0),\\ L_3 &\approx \operatorname{sgn}(I_3-I_1)\,A\sqrt{|1-I_1/I_2|}\cos(\omega t+\phi_0). \end{aligned}$$

Если I_1 — минимальное или максимальное собственное число, то $c_{12}, c_{13} > 0$ либо $c_{12}, c_{13} < 0$. В обоих случаях частота ω оказывается вещественной. В этих случаях на плоскости $L_2 - L_3$ момент импульса выписывает эллипс, т.е. начальные малые отклонения момента импульса от направления собственной оси остаются малыми, и, таким образом, вращение вокруг собственной оси с минимальным или максимальным моментом импульса оказывается устойчивым.

1.15.4.2 Вблизи оси с промежуточным моментом инерции*

Пусть теперь ось вращения близка к собственной оси с промежуточным моментом инерции $I_2 < I_1 < I_3$, тогда $c_{13} > 0$, $c_{12} < 0$. Частота прецессии ω оказывается мнимой.

Окончательно запишем

$$\begin{aligned} \lambda &= |\omega| = \frac{|\mathbf{L}|}{I_1}\sqrt{\frac{(I_1-I_2)(I_3-I_1)}{I_2I_3}},\\ L_2 &\approx A_+\sqrt{1-I_1/I_3}\,\mathrm{e}^{\lambda t} + A_-\sqrt{1-I_1/I_3}\,\mathrm{e}^{-\lambda t},\\ L_3 &\approx -A_+\sqrt{I_1/I_2-1}\,\mathrm{e}^{\lambda t} + A_-\sqrt{I_1/I_2-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Таким образом, вращение вокруг оси с промежуточным моментом инерции оказывается неустойчивым: исходные малые отклонения экспоненциально нарастают. Типичная траектория, описываемая на плоскости $L_2 - L_3$, при этом имеет вид гиперболы, точка пересечения асимптот которой соответствует собственной оси с промежуточным моментом инерции. Возможен также особый случай, когда асимптоты гиперболы сливаются и она вырождается в полупрямую, в этом случае точка удаляется от начала луча (или приближается к началу луча) за бесконечное время. На рисунке эллипсоида, пересекающегося со сферами, это соответствует малой окрестности точки пересечения линий, разделяющих эллипсоид на четыре части (красных). За время порядка $1/\lambda$ отклонение вектора $\mathbf{L}$ от собственной оси становится большим и используемое нами линейное приближение перестаёт работать. Рисунок даёт представление о движении вектора $\mathbf{L}$ в лагранжевых координатах также и при больших временах.

В случае общего положения малое отклонение момента импульса от оси с промежуточным моментом инерции приводит к тому, что это отклонение нарастает сперва очень (экспоненциально) медленно (*«спящий режим»*), потом экспоненциально быстро ускоряется, и вдруг тело переворачивается и момент импульса снова оказывается направлен почти вдоль оси с промежуточным моментом, но тело уже развернулось в противоположную сторону. Далее снова «спящий режим» почти стационарного вращения и снова переворот.

(☺) Для неподготовленного человека такая свободная прецессия, когда тело периодически переворачивается, выглядит загадочно. В прессе это явление получило название *эффект Джанибекова*. В 1985 году космонавт В.А. Джанибеков обнаружил, что в невесомости барашковая гайка, соскочив, вращаясь, с винта, периодически переворачивается. Про эффект Джанибекова в прессе часто утверждают, что он не объяснён, и сочиняют много небылиц и страшилок[5]. Обычно пугают, что Земля может вдруг сама перевернуться[6]. Но мы-то теперь знаем, в чём тут дело!

1.15.5 Вынужденная прецессия и нутация*

Под действием внешнего момента сил $\mathbf{K} = \sum_a [\mathbf{r}'_a \times \mathbf{F}_a]$ момент импульса изменяется, и в инерциальной системе отсчёта имеем

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{K}.$$

В лагранжевой системе отсчёта (вмороженной в тело), которая вращается с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$, на изменение вектора $\mathbf{L}$ под действием момента сил $\mathbf{K}$ накладывается вращение с угловой скоростью $-\mathbf{\Omega}$:

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{K} - [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{L}].$$

Перепишем эту систему в собственных осях момента инерции и получим *уравнения Эйлера*:

$$\begin{cases} \dot{L}_1 &= \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2}\right) L_2 L_3 + K_1, \\ \dot{L}_2 &= \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3}\right) L_3 L_1 + K_2, \\ \dot{L}_3 &= \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1}\right) L_1 L_2 + K_3. \end{cases}$$

Рассмотрим волчок массой M, закреплённый в одной точке, отстоящей от центра масс на расстояние R в поле силы тяжести $\mathbf{g}$. Пусть $\mathbf{R}$ — радиус-вектор центра масс относительно точки крепления. Предположим, что это симметрический волчок: $I_1 = I_2$ (относительно точки крепления), причём центр масс лежит на 3-й собственной оси $\mathbf{R} \| \mathbf{e}_3$.

Также предположим, что волчок быстро вращается так, что векторы $\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{R}$ почти параллельны друг другу (и 3-й собственной оси волчка).

В этом случае в инерциальной системе отсчёта (считаем, что ось вращения смотрит вверх, $\Omega_z > 0$) имеем

$$I_3 \dot{\mathbf{\Omega}} \approx \dot{\mathbf{L}} = \mathbf{K} = [\mathbf{R} \times M\mathbf{g}] \approx \frac{RM}{\Omega} [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{g}],$$

$$\dot{\mathbf{\Omega}} \approx \left[-\frac{RM\mathbf{g}}{I_3 \Omega} \times \mathbf{\Omega} \right].$$

Получаем угловую скорость вынужденной прецессии:

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{в.пр.}} = -\frac{RM\mathbf{g}}{I_3 \Omega} = -\frac{RM\mathbf{g}}{L_3}.$$

[5] Видеоролики на эту тему легко ищутся в интернете по запросу «эффект Джанибекова» или «эффект гайки Джанибекова».

[6] На больших временах Землю можно считать жидкой, поэтому под действием центробежных сил Земля приплюснута с полюсов. Соответственно ось вращения Земли близка к оси с максимальным моментом инерции, так что свободная прецессия Земли является устойчивой. А вот магнитные полюсы Земли время от времени меняются местами, но это уже совсем другой эффект, не связанный с твёрдотельным вращением Земли.

Условие применимости данного приближения: $\omega_{\text{в.пр.}} \ll \Omega$.

Мы можем легко учесть отклонения $\mathbf{L}$ от собственного направления $\mathbf{e}_3$ в линейном порядке малости, подобно тому как сделали это для свободной прецессии:

$$L_3 = |\mathbf{L}| \cos\alpha \approx |\mathbf{L}|$$

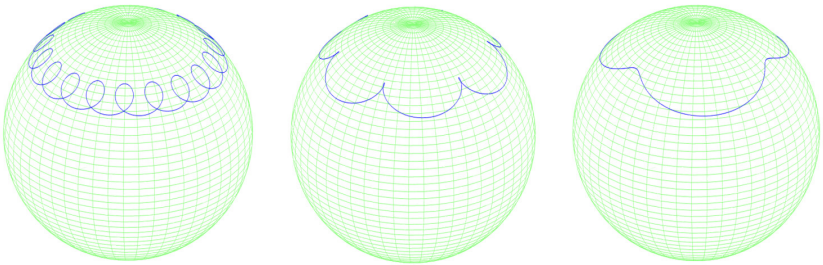
$$\begin{cases} \dot{L}_1 &= \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2}\right) L_2 |\mathbf{L}| + K_1, \\ \dot{L}_2 &= \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3}\right) L_1 |\mathbf{L}| + K_2, \\ \dot{L}_3 &= K_3. \end{cases}$$

Если считать, что $\mathbf{K}(t)$ — заданная функция времени, то получаем систему линейных неоднородных уравнений. К решению этой системы всегда можно добавить решение соответствующей системы линейных однородных уравнений (которые получаются при $\mathbf{K} = 0$), эта добавка соответствует свободной прецессии гироскопа. Если вместо заданной функции $\mathbf{K}(t)$ момент силы $\mathbf{K}$ определяется текущим положением гироскопа (как для гироскопа в поле силы тяжести), то для малых отклонений момента импульса от собственной оси мы можем пренебречь этим отклонением, пренебрегая тем самым влиянием свободной прецессии на вынужденную.

Мы получили, что при более аккуратном рассмотрении на вынужденную прецессию накладывается свободная прецессия, которую мы рассмотрели выше. Применительно к симметрическому волчку свободная прецессия — вращение с постоянной угловой скоростью 3-й собственной оси волчка вокруг вектора $\mathbf{L}$. На фоне вынужденной прецессии этот эффект принято называть *нутацией*.

Таким образом, вращение гироскопа в поле силы тяжести представляет собой комбинацию трёх вращений:

- быстрого вращения вокруг своей оси — *собственного вращения*;
- более медленного вращения вокруг текущего направления момента импульса — *нутации*;
- ещё более медленного вращения вокруг вертикальной оси — *вынужденной прецессии*.



Траектория оси симметрического волчка при нутации одинаковой амплитуды и разных отношениях частот прецессии и нутации.

(!*) Траектории, описываемые осью волчка на поверхности сферы, очень похожи на траектории дрейфа заряженной частицы в скрещенных электрическом (или гравитационном) и магнитном полях в условиях $B \gg E$, $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$. Частица «падает» по электрическому полю, но магнитное поле её разворачивает и частица поднимается до прежнего уровня, но со сдвигом в направлении $[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]$. При этом движение частицы — комбинация поступательного и кругового движения. Аналогия симметричного гироскопа и заряженной частицы на поверхности сферы является точной, мы разовьём её в дополнениях (см. с. 289).

1.15.6 Задача 37

Задача 37. Юла. Симметричный волчок с моментом инерции относительно точки опоры $I_{\alpha\beta} = \operatorname{diag}(I_1, I_1, I_3)$ и массой m, центр масс которого отстоит от точки опоры на расстояние h, быстро вращается в гравитационном поле $\mathbf{g}$.

а) Определите, при какой частоте ω_0 вертикальное положение оси перестанет быть устойчивым.

б) При частоте вращения $\omega > \omega_0$ определите частоту малых колебаний оси вращения около вертикали.

в*) При произвольной частоте вращения ω определите частоту вынужденной прецессии.

г*) При частоте вращения $\omega < \omega_0$ определите частоту нутации.

Часть II

Механика и специальная теория относительности (1-й семестр, дополнительный материал)

Глава 2.1

Введение и дифференцируемое многообразие (с. 25)

2.1.1 Решения задач 1—3

1. Задача Циолковского. Используя определение силы $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$, получите зависимость скорости ракеты в пустоте от начальной массы M_0, конечной массы M и скорости истечения u.

Решение

В соответствии с определением силы как $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ и третьим законом Ньютона сила, действующая на ракету, — это импульс, уносимый реактивной струёй в единицу времени, взятый с обратным знаком:

$$-F = -\dot{m}(V - u).$$

Обратите внимание на то, что сила, действующая на ракету (тело с переменной массой), зависит от скорости ракеты. Таким образом, для тела с переменной массой сила (в отличие от ускорения) меняется при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой.

С другой стороны

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mV)}{dt} = \dot{m}V + m\dot{V}.$$

Приравнивая два выражения для силы, действующей на ракету, получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$F = \dot{m}V - \dot{m}u = \dot{m}V + m\dot{V} \quad \Rightarrow \quad -\frac{dm}{dt}\,u = m\,\frac{dV}{dt} \quad \Rightarrow \quad dV = -u\frac{dm}{m} = -u\,d(\ln m).$$

Интегрируя получившееся выражение, получаем формулу Циолковского:

$$V(t) - V_0 = u \ln\left(\tfrac{m_0}{m(t)}\right).$$

Логарифм при больших аргументах — очень медленно растущая функция, и, таким образом, разгон ракеты до скоростей, больших по сравнению со скоростью истечения, требует многократного увеличения стартовой массы. Поэтому при создании реактивных двигателей очень важной задачей является увеличение скорости истечения.

(*) Скорость истечения для ракетного двигателя (когда ракета везёт с собой всё будущее рабочее тело, например, и топливо, и окислитель) совпадает с величиной, которая в ракетостроении называется *удельным импульсом* или *удельной тягой*, — отношением переданного импульса к массе рабочего тела или силы тяги к расходу рабочего тела в единицу времени. По традиции[1] удельный импульс обычно измеряется не в единицах скорости, а в единицах времени (секундах). В качестве коэффициента пересчёта метров в секунду в секунды используется ускорение свободного падения $g = 9{,}81$ м/с^2:

$$\text{удельный импульс в секундах} = \frac{u}{g}.$$

В более сложных ситуациях (например, когда аппарат получает окислитель из окружающей среды) удельный импульс может отличаться от скорости истечения. Удельный импульс — характеристика

[1] Истоки этой традиции — измерение силы тяги в «килограммах силы» (кгс): 1 кгс = 1 кг $\times$ g = 9,81 Н — вес килограммового груза при обычном земном ускорении свободного падения.

эффективности реактивного двигателя.

2. От действия к системе. Проварьируйте действия, запишите уравнения движения, обобщённые импульсы, обобщённые силы, энергию. Опишите словами и проиллюстрируйте графиками, какой системе может соответствовать такое действие.

Условия отдельных пунктов и решения

в) $S[x(t)] = \int \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + \dot{x}A(x,t)\right)\,dt$ ($m = \text{const}$, функция $A(x,t)$ — одномерный векторный потенциал).

Это пример действия, включающего взаимодействие с векторным потенциалом $A(x,t)$ (поскольку рассматривается система с одной степенью свободы, у вектора всего одна компонента). Взаимодействие с векторным потенциалом в лагранжиане $\dot{x}\,A(x,t)$, в отличие от кинетической энергии $\frac{m\dot{x}^2}{2}$, линейно по скорости. Получаем

$$-m\ddot{x} - \frac{\partial A}{\partial t} = 0, \quad p = m\dot{x} + A(x,t), \quad f = \dot{x}\,\frac{\partial A}{\partial x}, \quad \mathcal{E} = \frac{m\dot{x}^2}{2}.$$

Обратите внимание на то, что введение векторного потенциала не изменило энергию системы, но изменило выражение для импульса. Кроме того, обобщённая сила не совпадает с обычной силой $-\frac{\partial A}{\partial t}$, которая входит в уравнение движения.

Данные уравнения движения можно было бы описать и без помощи векторного потенциала, введя вместо этого потенциальную энергию $U(x,t) = \int \frac{\partial A}{\partial t}\,dx$. При большем числе степеней свободы избавиться от векторного потенциала в общем случае будет уже нельзя (см. задачу 10 г).

г*) $S[x(t)] = \int \left(-\frac{mx\ddot{x}}{2} + B\cos(kx)\right)\,dt$ ($m, B, k = \text{const}$).

Этот пример действия с лагранжианом, который содержит высшую (вторую) производную по времени. Тем не менее это не помешает нам его проварьировать:

$$\delta S = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(-\frac{m}{2}(\delta x\ddot{x} + x\delta\ddot{x}) - Bk\sin(kx)\,\delta x\right)\,dt.$$

Выражение $\frac{m}{2}\,x\delta\ddot{x}$ нам придётся проинтегрировать по частям два раза, чтобы вытащить δx из-под второй производной по времени:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} -\frac{m}{2}\,x\delta\ddot{x}\,dt = -\frac{m}{2}\,x\delta\dot{x}\Big|_{t_0}^{t_1} + \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{m}{2}\,\dot{x}\delta\dot{x}\,dt = -\frac{m}{2}\,x\delta\dot{x}\Big|_{t_0}^{t_1} + \frac{m}{2}\,\dot{x}\delta x\Big|_{t_0}^{t_1} - \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{m}{2}\,\ddot{x}\delta x\,dt.$$

Полагая вариацию координаты и скорости на границе области интегрирования равной нулю, $\delta x(t_{0,1}) = \delta\dot{x}(t_{0,1}) = 0$, получаем стандартное выражение для вариации действия, которое не содержит высших производных по времени[2]:

$$\delta S = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(-\frac{m}{2}(\delta x\ddot{x} + \ddot{x}\delta x) - Bk\sin(kx)\,\delta x\right)\,dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} (-m\ddot{x} - Bk\sin(kx))\,\delta x\,dt = 0.$$

Уравнение движения имеет вполне обычный вид:

$$-m\ddot{x} - Bk\,\sin(kx) = 0.$$

Однако мы не можем получить обобщённые импульс, силу и энергию из нашего лагранжиана $-\frac{mx\ddot{x}}{2} + B\cos(kx)$ по стандартным формулам, т.к. стандартные формулы предполагают, что лагранжиан содержит производные не выше первой. Но ведь уравнение движения имеет вполне обычный вид, без высших производных, это уравнение можно было бы получить из стандартного лагранжиана в виде разности кинетической и потенциальной энергий. Проинтегрируем член в действии $-\frac{m}{2}\,x\ddot{x}$ по частям, чтобы избавиться от второй производной:

$$S[x(t)] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(-\frac{mx\ddot{x}}{2} + B\cos(kx)\right)\,dt = -\frac{m}{2}\,x\dot{x}\Big|_{t_0}^{t_1} + \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + B\cos(kx)\right)\,dt.$$

[2] Для вариации действия и уравнений движения высшие производные начинаются с третьей.

Граничный член не зависит от поведения траектории внутри временно́го отрезка $[t_0, t_1]$ и не влияет на вариацию действия, поэтому его можно откинуть, после этого у нас остаётся действие вида (1.1.1) с лагранжианом $L_1(x, \dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + B\cos(kx)$, по которому без проблем определяются обобщённые импульс, сила и энергия:

$$p = \frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad f = \frac{\partial L_1}{\partial x} = -Bk\,\sin(kx), \quad \mathcal{E} = \dot{x}p - L_1 = \frac{m\dot{x}^2}{2} - B\,\cos(kx).$$

Глядя на уравнение движения или потенциальную энергию, легко догадаться, что рассматриваемая система *ведёт себя* как математический маятник с массой m, x — отклонение маятника, измеренное вдоль дуги окружности, kx — угол отклонения, соответственно $l = \frac{1}{k}$ — длина маятника, $B = mgl$. Разумеется, нельзя точно сказать, что это именно маленький грузик, качающийся на длинном невесомом жёстком стержне, но поведение этой системы описывается теми же уравнениями.

д) $S[\mathbf{r}(t)] = \int \left(\frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + \frac{kr^2}{2} - \frac{Cr^4}{4}\right) dt$ $(m, k, C = \text{const})$, сравните с п. а).

Это обычное действие с лагранжианом в виде разности кинетической энергии $\frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2}$ и потенциальной энергии $U(\mathbf{r}) = -\frac{kr^2}{2} + \frac{Cr^4}{4}$, аналогичным потенциалу из п. а). Различие с пунктом **а** в том, что имеется три степени свободы и вместо одной координаты $x(t)$ мы имеем радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$. Можно было бы проварьировать действие по трём обобщённым координатам (компонентам радиус-вектора) и получить три уравнения движения в компонентах, но удобнее проварьировать действие по радиус-вектору и получить одно векторное уравнение движения. При этом надо различать $\mathbf{r}$ и $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{\mathbf{r}^2}$.

Прежде чем варьировать действие, перепишем его через скалярные произведения:

$$\begin{aligned} S[\mathbf{r}(t)] &= \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\frac{m(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}})}{2} + \frac{k(\mathbf{r}, \mathbf{r})}{2} - \frac{C(\mathbf{r}, \mathbf{r})^2}{4}\right] dt, \\ \delta S &= \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[m(\dot{\mathbf{r}}, \delta\dot{\mathbf{r}}) + k(\mathbf{r}, \delta\mathbf{r}) - C(\mathbf{r}, \mathbf{r})(\mathbf{r}, \delta\mathbf{r})\right] dt. \end{aligned}$$

Как обычно, чтобы вытащить $\delta\mathbf{r}$ из-под производной, интегрируем по частям:

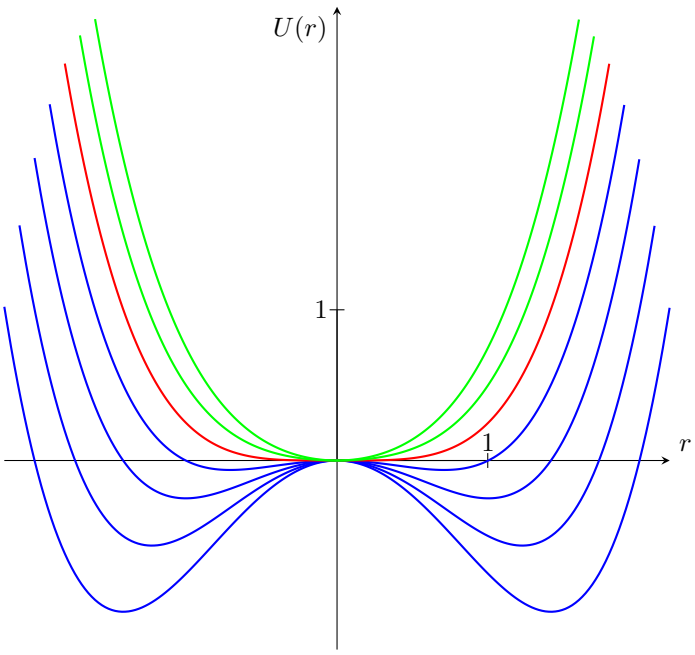
$$\int\limits_{t_0}^{t_1} m(\dot{\mathbf{r}}, \delta\dot{\mathbf{r}})\, dt = m(\dot{\mathbf{r}}, \delta\mathbf{r})\Big|_{t_0}^{t_1} - \int\limits_{t_0}^{t_1} m(\ddot{\mathbf{r}}, \delta\mathbf{r})\, dt, \qquad \delta S = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[-m\ddot{\mathbf{r}} + k\mathbf{r} - C(\mathbf{r}, \mathbf{r})\mathbf{r}\right] \delta\mathbf{r}\, dt.$$

Таким образом, получаем векторное уравнение движения:

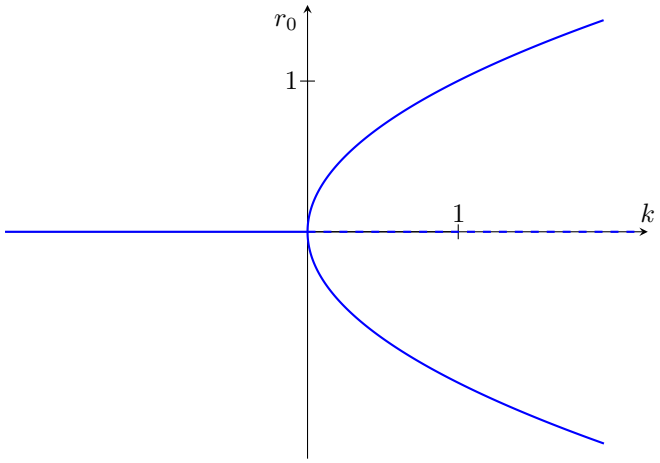
$$-m\ddot{\mathbf{r}} + k\mathbf{r} - Cr^2\mathbf{r} = 0, \quad \mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{f} = k\mathbf{r} - Cr^2\mathbf{r}, \quad \mathcal{E} = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - \frac{kr^2}{2} + \frac{Cr^4}{4}.$$

Обратите внимание на то, что выражение $\mathbf{r}^3$ не имело бы смысла, поэтому мы пишем $r^2\mathbf{r}$.

В пунктах а), д) нам встретился потенциал вида $U(r) = -\frac{kr^2}{2} + \frac{Cr^4}{2}$. Это потенциал «мексиканская шляпа». Он часто используется для описания *спонтанного нарушения симметрии*. При изменении знака k потенциал имеет один минимум в нуле или минимумы на одинаковом расстоянии от нуля со всех сторон.



Потенциал «мексиканская шляпа» при $C = 1$ и $k = 2, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1$. Чтобы увидеть мексиканскую шляпу с загнутыми вверх полями, представьте себе поверхность, заметаемую графиком при вращении вокруг оси $U(r)$. Такой график будет соответствовать случаю двумерного вектора $\mathbf{r}$. Минимумы потенциала при $k > 0$ располагаются на окружности $r = r_0$ в желобке «шляпы».



Положение экстремумов потенциала «мексиканская шляпа» в зависимости от k при $C = 1$. Пунктиром обозначено положение максимума (точки неустойчивого равновесия), сплошными линиями — положения минимумов (точек устойчивого равновесия). При $k = 0$ наблюдается бифуркация (разветвление) положения равновесия.

При спонтанном нарушении симметрии параметр k меняет знак с отрицательного на положительный, и ранее устойчивое положение равновесия (минимум потенциальной энергии) при $r = 0$ становится неустойчивым. В самой точке перехода (при $k = 0$) минимум ещё один, но при сколь угодно малом положительном значении k минимум при $r_0 \neq 0$ и положение устойчивого равновесия соответствует несимметричному состоянию.

Пример: для колонны под маленькой нагрузкой устойчивое состояние — прямая колонна, при увеличении нагрузки с какого-то момента колонна выгибается дугой. Если колонна была симметрична, то направление, в котором выгнулась колонна, оказывается случайным.

Другой пример спонтанного нарушения симметрии — фазовый переход второго рода (когда в точке перехода фазы становятся неразличимы). Здесь в роли обобщённой координаты выступает некоторый *параметр порядка*, а в роли потенциальной энергии — один из термодинамических потенциалов. В точке перехода и в *симметричной фазе* параметр порядка равен нулю, в несимметричной фазе параметр порядка отличен от нуля. К фазовым переходам второго рода относятся точка Кюри (переход ферромагнетика в парамагнитное состояние при нагревании, параметр порядка — намагниченность), переход в сверхпроводящее состояние (параметр порядка — волновая функция куперовских пар), переход в сверхтекучее состояние (параметр порядка — волновая функция сверхтекучей компоненты). В окрестности точки фа-

зового перехода второго рода параметр k обычно линейно растёт с ростом температуры $k \approx c(T - T_0)$ и переходит через нуль как раз при температуре перехода T_0.

Выбор потенциала $U(r) = -\frac{kr^2}{2} + \frac{Cr^4}{2}$ для описания спонтанного нарушения симметрии во многих случаях обусловлен соображениями простоты: нужно взять *какой-то модельный потенциал, у которого минимум при изменении параметра будет претерпевать бифуркацию.*

3. От системы к действию. Перечислите степени свободы, запишите действие, проварьируйте, запишите уравнения движения, обобщённые импульсы, обобщённые силы, энергию.

...
— А если в чайнике уже есть вода?
— Тогда выливаем воду из чайника и сводим задачу к предыдущей!

Анекдот про математика, которого попросили объяснить, как вскипятить чайник

Условия отдельных пунктов и решения

а) Грузик массой m на пружинке с жёсткостью k (он же — *гармонический осциллятор*).
Кинетическая энергия: $\frac{m\dot{x}^2}{2}$, потенциальная энергия: $\frac{kx^2}{2}$. Лагранжиан получаем как их разность:

$$S[x(t)] = \int \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \right) dt,$$

$$-m\ddot{x} - kx = 0, \quad p = m\dot{x}, \quad f = -kx, \quad \mathcal{E} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}.$$

Общее решение уравнения движения:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi_0), \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

где A и ϕ_0 — произвольные константы.

б) Крутильные весы (*крутильный маятник*) с моментом инерции I и жёсткость кручения (коэффициентом пропорциональности между углом поворота весов и возвращающим моментом силы) κ. Сравнив с п. а), определите период колебаний.
Кинетическая энергия: $\frac{I\dot{\phi}^2}{2}$, потенциальная энергия: $\frac{\kappa\phi^2}{2}$. Мы видим, что заменой

$$\phi \to x, \quad I \to m, \quad \kappa \to k$$

задача сводится к решённой выше в п. а).

в) Математический маятник массой m, длиной R, ускорение свободного падения — $\mathbf{g}$. Сравните с п. а).

Выберем в качестве обобщённой координаты угол отклонения маятника от вертикали ϕ. Скорость грузика: $R\dot{\phi}$. Кинетическая энергия: $\frac{mR^2\dot{\phi}^2}{2}$, потенциальная энергия: $-mgR\cos\phi$. Лагранжиан получаем как их разность:

$$S[\phi(t)] = \int \left(\frac{mR^2\dot{\phi}^2}{2} + mgR\cos\phi \right) dt,$$

$$-mR^2\ddot{\phi} - mgR\sin\phi = 0, \quad p = mR^2\dot{\phi}, \quad f = -mgR\sin\phi, \quad \mathcal{E} = \frac{mR^2\dot{\phi}^2}{2} - mgR\cos\phi.$$

При малых углах $\sin\phi \approx \phi$ и уравнение движения (с точностью до обозначений) совпадает с уравнением гармонического осциллятора с частотой $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$:

$$-mR^2\ddot{\phi} - mgR\phi = 0.$$

При больших амплитудах уравнение движения оказывается нелинейным, впрочем, поскольку у нас есть закон сохранения энергии, а степень свободы всего одна, оно легко решается в квадратурах:

$$\frac{d\phi}{dt} = \sqrt{2\frac{\mathcal{E} + mgR\cos\phi}{mR^2}}, \quad dt = \frac{d\phi}{\sqrt{2\frac{\mathcal{E}+mgR\cos\phi}{mR^2}}}, \quad t = \int \frac{d\phi}{\sqrt{2\frac{\mathcal{E}+mgR\cos\phi}{mR^2}}}.$$

С точки зрения теории дифференциальных уравнений это уже решение, т.к. задача нахождения $\phi(t)$ сведена к задаче взятия интеграла и последующего разрешения уравнения относительно ϕ.

г) Физический маятник с массой m и моментом инерции I, расстояние от точки подвеса до центра масс — R, ускорение свободного падения — $\mathbf{g}$. Сравнив с п. в), определите период колебаний.

Выберем в качестве обобщённой координаты угол отклонения маятника от вертикали ϕ. Кинетическая энергия: $\frac{I\dot\phi^2}{2}$, потенциальная энергия: $-mgR\cos\phi$.

Мы видим, что с точностью до переобозначения параметров задача совпадает с решённой в п. в) задачей про математический маятник.

д) Колесо радиусом R и массой m с моментом инерции I катится с наклонной плоскости с углом наклона α в гравитационном поле $\mathbf{g}$ без проскальзывания.

Поскольку колесо по условию задачи катится без проскальзывания, угол поворота колеса однозначно определяется его смещением и имеется одна степень свободы. В качестве обобщённой координаты выберем положение x центра масс колеса в проекции на ось, направленную вниз по наклонной плоскости. Угловая скорость колеса: $\dot\phi = \frac{\dot x}{R}$.

Примем без вывода (сославшись на курс общей физики или на раздел о динамике твёрдого тела данного пособия), что кинетическая энергия — сумма кинетической энергии центра масс и кинетической энергии вращения тела относительно центра масс:

$$\frac{m\dot x^2}{2} + \frac{I\dot\phi^2}{2} = \frac{m\dot x^2}{2} + \frac{I\dot x^2}{2R^2}.$$

Потенциальная энергия: $-mgx\sin\alpha$. Лагранжиан получаем как их разность:

$$S[x(t)] = \int \left(\frac{(m + \frac{I}{R^2})\dot x^2}{2} + mgx\sin\alpha \right) dt.$$

Мы видим, что (если в задаче 2 б положить $u = 0$) данная задача сводится к задаче о движении частицы с массой

$$m_{\text{эфф.}} = m + \tfrac{I}{R^2}$$

вдоль прямой под действием постоянной силы

$$F = mg\sin\alpha.$$

е) То же, что в п. д), но плоскость без трения.

В отличие от предыдущего пункта угловая скорость колеса не зависит от его линейной скорости и мы имеем систему с двумя степенями свободы.

Одну обобщённую координату x выберем так же, как в предыдущем пункте. В качестве второй обобщённой координаты возьмём угол поворота колеса по отношению к некоторой начальной ориентации (в силу симметричности колеса для записи действия знание начальной ориентации нам не важно).

Кинетическая энергия: $\frac{m\dot x^2}{2} + \frac{I\dot\phi^2}{2}$, потенциальная энергия: $-mgx\sin\alpha$. Лагранжиан получаем как их разность:

$$S[x(t),\phi(t)] = \int \left(\frac{m\dot x^2}{2} + \frac{I\dot\phi^2}{2} + mgx\sin\alpha \right) dt = \underbrace{\int \left(\frac{m\dot x^2}{2} + mgx\sin\alpha \right) dt}_{S_1[x(t)]} + \underbrace{\int \frac{I\dot\phi^2}{2}\, dt}_{S_2[\phi(t)]}.$$

Действие зависит от двух переменных $x(t)$ и $\phi(t)$, но оно распадается на сумму двух членов, каждый из которых зависит только от одной переменной и даёт вклад в вариацию только по своей переменной. Такая ситуация соответствует тому, что система распадается на две невзаимодействующие подсистемы. В данном случае одна подсистема (движение центра масс) ведёт себя как частица массой m под действием силы $F = mg\sin\alpha$, а другая подсистема (вращение колеса) ведёт себя как свободная частица массой I на окружности длиной 2π.

Может показаться странным, что движение центра масс и вращение одного и того же колеса отнесены к разным подсистемам, поскольку эти подсистемы реализованы одними и теми же атомами, и мы не можем разделить их физически. Тем не менее соответствующая динамика описывается как динамика независимых подсистем. Такая ситуация достаточно типична. Трёхмерное движение свободной частицы описывается как три одномерных движения разных частиц, и можно считать, что движение по каждой координате — отдельная независимая подсистема, хотя все три подсистемы реализованы одной частицей. Движение электрона в пространстве и динамика его спина (внутреннего момента вращения) могут

рассматриваться как независимые (или слабо взаимодействующие) подсистемы, хотя мы, разумеется, не можем физически разделить электрон и его спин.

ж*) Молекула водорода H_2. Параметры задачи подберите сами.

Эта задача преднамеренно сформулирована неоднозначно, для того чтобы побудить читателя задуматься. Реальные научные задачи тоже исходно бывают сформулированы неоднозначно, причём хорошая однозначная формулировка, попадающая в учебники, часто находится задним числом уже после того, как задача решена.

Если внимательно присмотреться к молекуле водорода, то становится неясным даже количество степеней свободы. Вот очевидные (каждый по-своему правильный) варианты.

- 5 степеней свободы: 3 координаты центра масс и две угловые координаты, задающие ориентацию молекулы.
- 6 степеней свободы: все вышеперечисленные плюс степень свободы, описывающая колебания атомов относительно друг друга, т.е. по 3 степени свободы на атом.
- 12 степеней свободы: по 3 на каждое атомное ядро плюс по 3 на каждый электрон.
- 24 степени свободы: по 3 на каждый электрон плюс по 3 на каждый из 6 кварков, образующих атомные ядра.
- Если пристально посмотреть на атомные ядра и электроны, то электроны и кварки — это возбуждения квантованного поля, а есть ещё электромагнитное и глюонное поля, с которыми они взаимодействуют. У поля может быть любое число частиц-возбуждений, так что число степеней свободы бесконечно.

Не во всех ситуациях для описания молекулы водорода применима классическая механика и вообще классическая (в смысле «не квантовая») физика.

Из всех перечисленных степеней свободы классической механикой хорошо описываются разве что 3 степени свободы, связанные с движением центра масс, но если ограничиться только ими, то молекула водорода ничем не отличается от точечной частицы. Ещё две вращательные и одна колебательная степени свободы могут быть описаны классической механикой более-менее удовлетворительно при условии попадания в соответствующий диапазон энергий: энергии должны быть достаточно велики, чтобы квантованием соответствующих квантовых чисел можно было пренебречь, но не слишком велики, чтобы молекула не распалась на атомы.

При энергиях, больших по сравнению с энергиями ионизаций атомов (но малых по сравнению с энергией покоя электрона $m_e c^2$), ядра и электроны будут вести себя практически как свободные частицы и классическая механика снова более-менее заработает. Впрочем, в этом случае речи о молекуле водорода уже не идёт. При энергиях, при которых станет существенна структура протона, тем более говорить о молекуле водорода бессмысленно.

Так что если оставаться в рамках классической механики и рассматривать условия, при которых молекула водорода существует и обладает какой-то спецификой по сравнению с материальной точкой, то выбор не так уж и богат: первые 5 или 6 степеней свободы.

Впрочем, правильное решение задачи зависит от контекста, в котором она поставлена. Зачем нам надо описать молекулы водорода? Интересует ли нас, например, теплоёмкость H_2? В каком диапазоне температур? Для низких температур «неинтересная» модель точечной частицы может оказаться адекватной.

Интересует ли нас химия? Если считать химию честно, то нужна квантовая механика. Конечно, квантовая механика выходит за рамки нашего пособия, но реальная научная задача ставится без оглядки на то, какими теориями умеет пользоваться исследователь. А с другой стороны, некоторые химические процессы в органической химии могут удовлетворительно описываться на основе механических моделей молекул как шарнирных механизмов плюс каких-то модельных потенциалов взаимодействия между отдельными «деталями». Конечно, молекула водорода — это далеко не такой шарнирный механизм, но если нам надо посмотреть на то, как она будет взаимодействовать с каким-нибудь белком, то адекватной моделью может оказаться твёрдая гантелька, несущая электрический квадрупольный момент.

2.1.2 Дифференцируемое многообразие

Для понимания того, что такое обобщённые координаты и что представляют собой пространства, на которых они вводятся, полезно ознакомиться с понятием *дифференцируемого многообразия*.

Понятие многообразия обобщает впервые математически описанный Гауссом процесс картографирования земной поверхности: пространство покрывается *картами* (локальными системами координат), в

областях пересечения карт устанавливаются однозначные правила перехода. Набор карт образует *атлас*. Очевидно, что мы не можем непрерывно и взаимнооднозначно отобразить на плоскость даже поверхность земли (сферу с точки зрения топологии), поэтому нам и бывает нужен атлас, содержащий несколько карт.

Конфигурационные и фазовые пространства в механике также не всегда можно покрыть одной системой координат (картой) без особых точек, так что ознакомимся с аккуратными определениями.

Определение. Пусть множество $\mathbf{M}$ является объединением некоторого конечного или счётного набора множеств U_A, причём для каждого U_A задана функция $f_A : U_A \to \mathbb{R}^D$ ($\mathbb{R}^D$ — D-мерное вещественное пространство, образ $f_A(U_A)$ — открытая область в $\mathbb{R}^D$, функция f_A задаёт локальные координаты на U_A), $U_{AB} = U_A \cap U_B$. Пусть

$$F_{AB} = f_A \circ f_B^{-1} : f_B(U_{AB}) \to f_A(U_{AB})$$

— взаимнооднозначная функция определённого класса гладкости $\mathcal{K}$ (например, C^2 или C^∞) с якобианом, отличным от нуля.

Здесь f_B^{-1} — функция, обратная к f_B. Кружок ($\circ$) обозначает *композицию функций*, т.е. что левая функция действует на значение правой.

Тогда $\mathbf{M}$ называется *гладким дифференцируемым многообразием класса гладкости* $\mathcal{K}$.

Определение. Области U_A с заданными на них функциями f_A из предыдущего определения называются *картами*, а весь набор таких областей — *атласом*.

При первом прочтении обычно неясно, почему гладкость определяется таким неочевидным образом, однако следует помнить, что само по себе пространство $\mathbf{M}$, не оснащённое картами, не имеет топологии и дифференцируемости. Поэтому мы не можем говорить о гладкости или непрерывности функций f_A. Однако пространство $\mathbb{R}^D$ имеет естественную топологию, для него определены классы гладкости, а функции F_{AB} как раз отображают одну область в $\mathbb{R}^D$ на другую. Впрочем, после того как на $\mathbf{M}$ введена структура многообразия, $\mathbf{M}$ приобретает топологию и дифференцируемость, которые наследуются у пространства $\mathbb{R}^D$, т.е. определяются с помощью координат.

Благодаря этому на дифференцируемом многообразии можно решать дифференциальные уравнения, но только такие, для которых допустимы преобразования класса гладкости $\mathcal{K}$. Так, если $\mathcal{K} = C^2$ (дважды непрерывно дифференцируемые функции), то дифференциальное уравнение третьего порядка на соответствующем многообразии не определено, т.к. функция из C^3 после замены координат из C^2 может «потерять» третью производную.

Отметим, что всегда можно ввести такой атлас, в котором всякая координатная окрестность U_A отображалась бы функцией f_A на всё пространство $\mathbb{R}^D$ (например, тангенс растягивает открытый отрезок $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ на всю прямую). Это делает глобальные свойства многообразий неочевидными. Если, например, мы решили для каких-то координат уравнения Эйнштейна и нашли решение для всех значений координат, то это ещё не значит, что мы описали всё пространство-время, на самом деле это лишь одна карта, за пределами которой решение может иметь продолжение.

Упражнение 1. Рассмотрим 2-мерную сферу (2-мерную поверхность $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ в 3-мерном пространстве). Введём на ней атлас из двух карт, проецируя её поверхность на плоскость, пересекающую сферу в экваториальной плоскости из северного и южного полюсов. Какие области будут покрыты этими картами? Какие функции будут описывать переход от одной карты к другой?

Упражнение 2. Рассмотрим *тор* $T^2 = S_1 \times S_1$ (прямое произведение двух окружностей, или квадрат, у которого склеены противоположные стороны так, что направления склеенных сторон совпадают). Какое минимальное количество карт содержит атлас тора? Как изменится ответ для D-мерного тора $T^D = \underbrace{S_1 \times \cdots \times S_1}_{D \text{ раз}}$?

Упражнение 3. Какое минимальное количество карт достаточно для того, чтобы покрыть произвольное связное (состоящее из одного куска) D-мерное многообразие?

Замечание. Многообразие может быть представлено как D-мерная поверхность в пространстве большей размерности, но на самом деле внутренняя геометрия самого многообразия не зависит от того, как оно реализовано. В Упражнении 1 сфера рассматривается как поверхность в 3-мерном пространстве $\mathbb{R}^3$, но это совсем не обязательно. Существование внешнего пространства, в которое погружено многообразие, нигде не предполагается. Так, пространство-время в общей теории относительности искривлено, но это не значит, что оно погружено в некое плоское пространство большей размерности.

(**/)

Определение. *Окрестностью точки* называется произвольное открытое множество, содержащее эту точку.

Из топологии.

1. Объединение двух открытых множеств является открытым.
2. Пусть $x \in U_A \subset \mathbf{M}$ — точка многообразия, и пусть u_{Ax} — окрестность точки $f_A(x) \in \mathbb{R}^D$. Тогда $f_1^{-1}(u_{Ax}) \subset U_A$ — окрестность точки x (по определению).

Определение. Пространство называется *хаусдорфовым пространством*, если для любой пары несовпадающих точек найдутся непересекающиеся окрестности.

Обычно при рассмотрении многообразий дополнительно предполагается условие хаусдорфовости.

Это условие позволяет отсечь некоторые необычные (нехаусдорфовы) способы склейки карт.

Пример нехаусдорфова многообразия. Имеется атлас из двух карт, $f_1(U_1) = f_2(U_2) = \mathbb{R}$. Пусть $f_1(U_{12}) = f_2(U_{12}) = (-\infty, 0)$, $F_{12}(x) = x$, т. е. пусть мы склеили (отождествили) отрицательные полуоси двух прямых, оставив нулевые точки 0_1 и 0_2 не склеенными. Наше пространство представляет собой «вилочку»: отрицательные числа (один экземпляр каждого), два нуля 0_1 и 0_2 и по два экземпляра каждого положительного числа. В евклидово пространство вложить такую вилочку не удастся (в евклидовом пространстве нули неизбежно склеятся), но нам это и не нужно. Окрестность точки 0_1 включает в себя интервал $(-\varepsilon, 0)$ отрицательных чисел и полуинтервал $[0_1, \varepsilon_1)$ неотрицательных чисел с первой прямой. Окрестность точки 0_2 включает в себя интервал $(-\delta, 0)$ отрицательных чисел и полуинтервал $[0_2, \delta_2)$ неотрицательных чисел с первой прямой. Мы видим, что любые окрестности точек 0_1 и 0_2 пересекаются своими отрицательными частями.

(фф) Обычно нехаусдорфовы многообразия в физике не рассматривают как «нефизические», однако они могут быть полезны для рассмотрения дифференциальных уравнений, для которых не выполняются условия единственности решения. Конечно, такие дифференциальные уравнения обычно тоже считаются «нефизическими» под тем предлогом, что если наши уравнения взяты из физики, то они заведомо «хорошие», что должно обеспечивать для них существование и единственность решения в том или ином смысле. И уже задача математиков — это строго математически сформулировать. Однако неединственность решения дифференциального уравнения сама по себе может иметь физический смысл, например, при рассмотрении классического предела квантовой динамики неединственность может быть связана с квантовыми случайностями. Так что нехаусдорфовы многообразия ещё могут найти применение в физике.

(/**)

Глава 2.2

Тензоры и ковариантная производная (с. 36)

2.2.1 Решения задач 4, 5, 7, 8

4. От матриц к тензорам в 3-мерном евклидовом пространстве в декартовых координатах.

Условия отдельных пунктов и решения

а) В трёхмерном пространстве вычислите свертки: $\delta_{\alpha\alpha}$, $\delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\gamma}$, $\delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\gamma}\delta_{\gamma\alpha}$.

Компоненты $\delta_{\alpha\beta}$ образуют единичную матрицу 3×3, которую будем обозначать как $\hat{1}$.
Свёртка двух индексов матрицы — след:

$$\delta_{\alpha\alpha} = \operatorname{tr}\hat{1} = \sum_{\alpha=1}^{3}\delta_{\alpha\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{3} 1 = 3.$$

Свёртка второго индекса первой матрицы с первым индексом второй — произведение матриц:

$$\delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\gamma} = (\hat{1}\hat{1})_{\alpha\gamma} = (\hat{1})_{\alpha\gamma} = \delta_{\alpha\gamma}.$$

Наконец, используя оба этих правила, получаем

$$\delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\gamma}\delta_{\gamma\alpha} = \operatorname{tr}(\hat{1}\hat{1}\hat{1}) = \operatorname{tr}\hat{1} = 3.$$

б) Выразите $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\nu\lambda}$ (см. определение (1.1.4)) через δ-символы.

Очевидно, что

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\nu\lambda} = \det\begin{pmatrix} \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} & \delta_{\alpha\lambda} \\ \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} & \delta_{\beta\lambda} \\ \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} & \delta_{\gamma\lambda} \end{pmatrix}.$$

Почему это очевидно? Зададимся конкретными значениями индексов $\alpha,\beta,\gamma,\mu,\nu,\lambda$. Если в наборе α,β,γ или в наборе μ,ν,λ есть совпадающие индексы, то левая часть равенства обращается в нуль из антисимметрии, а правая часть обращается в нуль, т.к. в определителе будут две одинаковые строки (если совпадения в наборе α,β,γ) или два одинаковых столбца (если совпадения в наборе μ,ν,λ).

Если индексы в наборе α,β,γ разные и в наборе μ,ν,λ тоже разные, то оба набора — это $1,2,3$ в каком-то порядке. При этом набор μ,ν,λ может быть получен из набора α,β,γ с помощью парных перестановок в количестве N (это число определено по модулю 2, т.е. с точностью до чётной добавки). Левая часть равенства даёт $(-1)^N$ по определению символа $\varepsilon_{\ldots}$. Правая часть равенства — определитель, в котором в каждой строке и в каждом столбце одна единица, а остальные — нули, такой определитель по определению равен $(-1)^N$.

в) Используя антисимметрию символа $\varepsilon_{\ldots}$ и соображения симметрии относительно поворотов, определите свёртки: $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$, $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\beta\gamma}$, $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\nu\gamma}$.

Рассмотрим свёртку по трём парам индексов:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma})^2.$$

Поскольку $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \in \{0, -1, +1\}$, данная сумма — число ненулевых элементов символа $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ (таких элементов, у которых все три индекса различаются), т.е. число возможных упорядочений индексов 1,2,3:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma})^2 = 3 \times 2 \times 1 = 3! = 6.$$

Рассмотрим свёртку по двум парам индексов:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\beta\gamma}.$$

В этом выражении есть два свободных индекса α, μ. Из пунктов а), б) мы знаем, что ответ может содержать только дельта-символы и числовые константы, так что

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\beta\gamma} = c_1\delta_{\alpha\mu}.$$

Чтобы определить константу, свернём индексы α и μ (т.е. подставим вместо μ индекс α и просуммируем по получившейся паре повторяющихся индексов):

$$\underbrace{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}}_{3!=6} = c_1 \underbrace{\delta_{\alpha\alpha}}_{3}.$$

Воспользовавшись вычисленными ранее свёртками, получаем, что $c_1 = 2! = 2$:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\beta\gamma} = 2\delta_{\alpha\mu}.$$

Рассмотрим свёртку по одной паре индексов:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\nu\gamma}.$$

В этом выражении 4 свободных индекса: α, β, μ, ν. Поскольку, как мы уже выяснили, ответ должен строиться из дельта-символов, в каждом слагаемом ответа должно присутствовать два дельта-символа. Выражение антисимметрично по паре индексов $\alpha\beta$ и по паре индексов $\mu\nu$, тогда как дельта-символы симметричны относительно перестановки индексов. Это значит, что индексы одной пары не должны стоять у одного дельта-символа.

Выражение, построенное из дельта-символов, содержащее индексы α, β, μ, ν и антисимметричное относительно перестановки пар индексов $\alpha\beta$ и $\mu\nu$, определяется однозначно, с точностью до общего множителя:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\nu\gamma} = c_2(\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}).$$

Чтобы определить множитель c_2, свернём индексы β и ν и воспользуемся результатами предыдущих пунктов:

$$\underbrace{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\beta\gamma}}_{2!\delta_{\alpha\mu}} = c_2(\delta_{\alpha\mu}\underbrace{\delta_{\beta\beta}}_{3} - \underbrace{\delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\mu}}_{\delta_{\alpha\mu}}) = 2c_2\delta_{\alpha\mu}.$$

Таким образом, $c_2 = 1! = 1$ и

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\nu\gamma} = \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}. \tag{2.2.1}$$

Конечно, вы можете при вычислении свёрток из пункта **в** раскрывать определитель из п. б), но в этом случае я обычно предлагаю обобщить п. в) на 10-мерное евклидово пространство и вычислить такие свёртки (ответы получатся аналогичные с точностью до множителей):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{m_1m_2m_3m_4m_5m_6m_7m_8m_9m_{10}}\varepsilon_{m_1m_2m_3m_4m_5m_6m_7m_8m_9m_{10}} &= 10!,\\
\varepsilon_{m_1m_2m_3m_4m_5m_6m_7m_8m_9m_{10}}\varepsilon_{n_1m_2m_3m_4m_5m_6m_7m_8m_9m_{10}} &= 9!\delta_{m_1n_1},\\
\varepsilon_{m_1m_2m_3m_4m_5m_6m_7m_8m_9m_{10}}\varepsilon_{n_1n_2m_3m_4m_5m_6m_7m_8m_9m_{10}} &= 8!(\delta_{m_1n_1}\delta_{m_2n_2} - \delta_{m_1n_2}\delta_{m_2n_1}).
\end{aligned}$$

Вы вряд ли захотите выписывать определитель матрицы 10×10, который содержит $10! = 3\,628\,800$ членов.

г) Вычислите свёртки $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}A_{\alpha1}A_{\beta2}A_{\gamma3}$, $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}A_{\alpha\mu}A_{\beta\nu}A_{\gamma\lambda}$.

Выразим первую свёртку в виде суммы:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}A_{\alpha1}A_{\beta2}A_{\gamma3} = \sum_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}A_{\alpha1}A_{\beta2}A_{\gamma3}.$$

В данной сумме отличны от нуля только слагаемые, в которых все три индекса α, β, γ различны. В этих случаях $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ даёт $+1$ для чётных перестановок индексов $1, 2, 3$ и -1 для нечётных.

Получается сумма, каждое слагаемое которой представляет собой произведение трёх элементов матрицы A, взятых из разных строк и разных столбцов, со знаком $+1$, если номера строк и столбцов образуют чётные перестановки, и -1, если номера строк и столбцов образуют нечётные перестановки.

В этом описании легко узнать полное разложение определителя матрицы 3×3:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}A_{\alpha1}A_{\beta2}A_{\gamma3} = \det A. \tag{2.2.2}$$

Выражение

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}A_{\alpha\mu}A_{\beta\nu}A_{\gamma\lambda}$$

несёт три свободных индекса μ, ν, λ. Если приравнять эти индексы $1, 2, 3$ соответственно, то мы получим предыдущее выражение.

Посмотрим, что будет, если переставить пару свободных индексов:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}A_{\alpha\nu}A_{\beta\mu}A_{\gamma\lambda} = (\text{переименуем } \alpha \leftrightarrow \beta) = \varepsilon_{\beta\alpha\gamma}A_{\beta\nu}A_{\alpha\mu}A_{\gamma\lambda} = \underbrace{\varepsilon_{\beta\alpha\gamma}}_{-\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}} A_{\alpha\mu}A_{\beta\nu}A_{\gamma\lambda} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}A_{\alpha\mu}A_{\beta\nu}A_{\gamma\lambda}.$$

Легко видеть, что во всех случаях перестановка индексов μ, ν, λ сводится к аналогичной перестановке индексов α, β, γ у символа[1] $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$.

Таким образом, рассматриваемое выражение полностью антисимметрично, т.е. меняет знак при перестановке любой пары свободных индексов.

д) При каких преобразованиях $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ ведёт себя как тензор?

Мы определили $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ независимо от системы координат, т. е. нас интересуют такие замены координат, при которых $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ остаётся инвариантным. Рассмотрим полностью антисимметричный тензор $f_{\alpha\beta\gamma}$ ($\alpha, \beta\gamma = 1, 2, 3$). В силу антисимметрии этот тензор имеет одну независимую компоненту f_{123} (остальные компоненты — либо нули, либо получаются из f_{123} перестановкой индексов). Таким образом,

$$f_{\alpha\beta\gamma} = f_{123}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}.$$

Применим к $f_{\alpha\beta\gamma}$ тензорный закон преобразования:

$$f_{1'2'3'}\,\varepsilon_{\alpha'\beta'\gamma'} = f_{\alpha'\beta'\gamma'} = f_{\alpha\beta\gamma}\,\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}} = f_{123}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}}.$$

Множитель при f_{123} совпадает с $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}A_{\alpha\mu}A_{\beta\nu}A_{\gamma\lambda}$, если в качестве индексов μ, ν, λ взять α', β', γ', а в качестве матрицы $A_{\alpha\alpha'}$ взять матрицу Якоби $\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}$. Получаем

$$f_{\alpha'\beta'\gamma'} = f_{123}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}} = f_{123}\,\underbrace{\frac{Dx}{Dx'}}_{\det\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}}\,\varepsilon_{\alpha'\beta'\gamma'},$$

$$f_{1'2'3'} = f_{123}\frac{Dx}{Dx'}.$$

Таким образом, условие, при котором $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ можно считать тензором, т.е. условие инвариантности этого объекта (условие, при котором $f_{123} = f_{1'2'3'} = 1$), — сохранение заменой координат ориентированного объёма:

$$\frac{Dx}{Dx'} = 1.$$

Если взять $\frac{Dx}{Dx'} = \pm 1$, то при отрицательном якобиане закон преобразования будет отличаться от тензорного знаком, т. е. при преобразованиях, сохраняющих неориентированный объём, $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ оказывается псевдотензором.

[1] После приобретения соответствующего опыта такого рода симметрии и антисимметрии видны сразу. При этом особенно легко видеть такие свойства в диаграммных обозначениях.

5. От векторов к тензорам. Проверьте, что скалярное произведение $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ равно $a_\alpha b_\alpha$ и компоненты векторного произведения $\mathbf{c}=[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]$ равны $c_\alpha=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}a_\beta b_\gamma$. Покажите (используя результат предыдущего упражнения), что выполняются три тождества из условия.

Решение

Скалярное произведение в декартовых координатах сводится к свёртке:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})=\sum_{\alpha=1}^{3}a_\alpha b_\alpha=a_\alpha b_\alpha.$$

Для векторного произведения в декартовых координатах используем формулу через определитель:

$$\mathbf{c}=[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]=\det\begin{pmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{pmatrix},$$

где $\mathbf{e}_\alpha$ — базисный вектор по оси x_α.

Воспользуемся формулой (2.2.2). Положим $A_{\alpha1}=\mathbf{e}_\alpha$, $A_{\alpha2}=a_\alpha$, $A_{\alpha3}=b_\alpha$, тогда

$$\mathbf{c}=[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]=\det A=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\mathbf{e}_\alpha a_\beta b_\gamma.$$

Компоненты вектора — коэффициенты его разложения по базисным векторам:

$$\mathbf{c}=\mathbf{e}_\alpha c_\alpha=\mathbf{e}_\alpha\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,a_\beta b_\gamma\quad\Rightarrow\quad c_\alpha=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,a_\beta b_\gamma.$$

Выведем в тензорных обозначениях формулу для двойного векторного произведения (формулу «бац минус цаб»):

$$[\mathbf{a}\times[\mathbf{b}\times\mathbf{c}]]=\mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b}).$$

Распишем выражение для компонент двойного векторного произведения (следим, чтобы индексы не встречались более двух раз в одном члене, при необходимости индексы переименовываем):

$$[\mathbf{a}\times[\mathbf{b}\times\mathbf{c}]]_\alpha=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,a_\beta[\mathbf{b}\times\mathbf{c}]_\gamma=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,a_\beta\,\varepsilon_{\gamma\mu\nu}\,b_\mu c_\nu=\underbrace{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\varepsilon_{\mu\nu\gamma}}_{(\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}-\delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu})}\,a_\beta\,b_\mu c_\nu.$$

В конце мы переставили множители (их порядок теперь не важен, т.к. теперь всё определяют индексы) и сделали чётную перестановку у индексов антисимметричного символа $\varepsilon_{\gamma\mu\nu}=\varepsilon_{\mu\nu\gamma}$, чтобы удобнее было воспользоваться формулой (2.2.1) для свёртки двух антисимметричных символов по одной паре индексов. Получаем

$$(\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}-\delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu})a_\beta\,b_\mu c_\nu=\delta_{\alpha\mu}\overbrace{\delta_{\beta\nu}a_\beta\,b_\mu}c_\nu-\delta_{\alpha\nu}\overbrace{\delta_{\beta\mu}a_\beta\,b_\mu}c_\nu=b_\alpha\,a_\beta c_\beta-c_\alpha\,a_\beta b_\beta=(\mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b}))_\alpha.$$

Формула «бац минус цаб» получена.

Оставшиеся формулы предлагаем читателю доказать самостоятельно, действуя аналогичным образом:

$$[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]\,[\mathbf{c}\times\mathbf{d}]=(\mathbf{a},\mathbf{c})(\mathbf{b},\mathbf{d})-(\mathbf{a},\mathbf{d})(\mathbf{b},\mathbf{c}),$$

$$[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]\,[[\mathbf{b}\times\mathbf{c}]\times[\mathbf{c}\times\mathbf{a}]]=(\mathbf{a},[\mathbf{b}\times\mathbf{c}])^2.$$

7. Полярные координаты и «центробежная сила».

Условия отдельных пунктов и решения

а) Выпишите действие для свободной нерелятивистской частицы на плоскости в декартовых и полярных координатах. Выпишите обобщённые импульсы. Проварьируйте действие и получите уравнения движения.

Для свободной нерелятивистской частицы лагранжиан совпадает с кинетической энергией и выражается через скалярный квадрат скорости $v^\alpha=\dot{x}^\alpha$:

$$L=\frac{m\mathbf{v}^2}{2}=\frac{m}{2}\,g_{\alpha\beta}\,v^\alpha\,v^\beta.$$

В декартовых координатах $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ (далее нештрихованные индексы нумеруют декартовы координаты), и мы получаем:

$$L = \frac{m}{2}\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \qquad \Rightarrow \qquad p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}.$$

Действие и уравнения движения в декартовых координатах тривиальны:

$$S[x(t), y(t)] = \int \frac{m}{2}\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\,dt, \qquad \Rightarrow \qquad -m\ddot{x} = 0, \quad -m\ddot{y} = 0.$$

Выведем метрику в полярных координатах через элемент длины. Сначала запишем элемент длины в декартовых координатах:

$$d\ell^2 = g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta = dx^2 + dy^2.$$

Декартовы координаты выражаются через полярные:

$$x = r\,\cos\phi, \qquad y = r\,\sin\phi.$$

Возьмём от них дифференциалы, считая новыми независимыми переменными полярные координаты r и ϕ:

$$dx = dr\,\cos\phi - r\,\sin\phi\,d\phi, \qquad dy = dr\,\sin\phi + r\,\cos\phi\,d\phi.$$

Подставив дифференциалы в выражение для элемента длины, получаем (далее штрихованные индексы нумеруют полярные координаты в порядке r, ϕ)

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 = (dr\,\cos\phi - r\,\sin\phi\,d\phi)^2 + (dr\,\sin\phi + r\,\cos\phi\,d\phi)^2 = dr^2 + r^2\,d\phi^2 = g_{\alpha'\beta'}\,dx^{\alpha'}\,dx^{\beta'}.$$

Теперь мы можем выписать метрический тензор в полярных координатах как матрицу квадратичной формы:

$$g_{\alpha'\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

С помощью полученной метрики переписываем лагранжиан и получаем обобщённые импульсы:

$$L = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} = \frac{m}{2}\,g_{\alpha'\beta'}\,v^{\alpha'}\,v^{\beta'} = \frac{m}{2}\,(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) \qquad \Rightarrow \qquad p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}.$$

Соответствующее действие и уравнения движения имеют вид

$$S[r(t), \phi(t)] = \int \frac{m}{2}\,(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2)\,dt \qquad \Rightarrow \qquad -m\ddot{r} + mr\dot{\phi}^2 = 0, \quad -\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = 0.$$

б) Выпишите вектор скорости. Опустите индекс и убедитесь, что обобщённые импульсы — компоненты ковектора.

Компоненты вектора скорости — обобщённые скорости, производные по времени от обобщённых координат:

$$v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}, \qquad v^{\alpha'} = \frac{dx^{\alpha'}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}.$$

Соотношение между импульсом и скоростью $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ — это соотношение пропорциональности (коэффициент пропорциональности m — инвариант = скаляр) между двумя векторами. Это соотношение обязано одинаково хорошо работать в любой системе координат (если два вектора равны в одной системе координат, то они равны в любой другой):

$$p^\alpha = mv^\alpha = \begin{pmatrix} m\dot{x} \\ m\dot{y} \end{pmatrix}, \qquad p^{\alpha'} = mv^{\alpha'} = \begin{pmatrix} m\dot{r} \\ m\dot{\phi} \end{pmatrix}.$$

Компоненты импульса в декартовых координатах совпадают с обобщёнными импульсами, полученными дифференцированием лагранжиана по скорости, но для компонент импульса в полярных координатах это не так! В чём же дело?

Мы записали импульс как вектор, т.е. выписали его контравариантные (с верхним индексом) компоненты. Опустим индекс с помощью метрического тензора:

$$p_\alpha = g_{\alpha\beta}p^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m\dot{x} \\ m\dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\dot{x} \\ m\dot{y} \end{pmatrix}, \qquad p_{\alpha'} = g_{\alpha'\beta'}p^{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m\dot{r} \\ m\dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\dot{r} \\ mr^2\dot{\phi} \end{pmatrix}.$$

Теперь всё стало на свои места: обобщённые импульсы — ковариантные (с нижним индексом) компоненты импульса.

Именно для ковариантных компонент импульса формулируются все теоремы теоретической механики, в частности, симметрии нашего лагранжиана относительно сдвигов по ϕ (т.е. относительно поворотов[2]) соответствует сохранение $p_\phi = mr^2\dot\phi$ (момента импульса), $p^\phi = m\dot\phi$ при этом не сохраняется.

в*) Убедитесь, что «центробежная сила» получается дифференцированием базисных ковекторов.

Описание движения свободной частицы в криволинейных координатах приближает нас к рассмотрению движения частицы в общей теории относительности, где искривлено само пространство-время и, как правило, любые координаты оказываются криволинейными.

Уравнение движения свободной частицы в декартовых координатах мы можем записать в векторной форме как закон сохранения импульса:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} m\dot x \\ m\dot y \end{pmatrix} = 0.$$

Казалось бы, уравнение движения в векторной форме не должно зависеть от системы координат (если два вектора равны в одной системе координат, то они равны в любой другой), но в полярных координатах у нас появляется ненулевая обобщённая сила по радиальной координате r:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} m\dot r \\ mr^2\dot\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mr\dot\phi^2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Так в чём же дело?

Дело в том, что в декартовых координатах векторы во всём пространстве разлагаются по одному базису, а в криволинейных координатах в каждой точке пространства используется собственный базис. Это видно из того, что при переходе от декартовых координат к криволинейным замена координат оказывается нелинейной и матрица преобразования компонент (ко)вектора (соответствующая матрица Якоби) зависит от точки пространства.

Поскольку в нашем пространстве имеется метрика, мы можем, поднимая и опуская индексы, установить взаимнооднозначное соответствие между векторами и ковекторами. Это позволяет считать векторы и ковекторы разными представлениями объектов одного сорта и говорить, что один и тот же вектор имеет и контравариантные (векторные), и ковариантные (ковекторные) компоненты:

$$\mathbf{p} = p^\alpha \mathbf{e}_\alpha = p_\alpha \mathbf{e}^\alpha, \qquad p^\alpha = g^{\alpha\beta}p_\beta, \quad \mathbf{e}_\alpha = g_{\alpha\beta}\mathbf{e}^\beta, \quad (\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}^\beta) = \delta^\beta_\alpha.$$

Здесь $\mathbf{e}_\alpha$ — базисный вектор с номером α (буква жирная, так что α — номер вектора, а не компоненты!), а $\mathbf{e}^\alpha$ — базисный ковектор с номером α, его можно считать базисным вектором взаимного базиса.

От базисных векторов тоже можно брать контравариантные и ковариантные компоненты как в той же системе координат:

$$(\mathbf{e}_\alpha)^\beta = (\mathbf{e}^\beta)_\alpha = \delta^\beta_\alpha, \qquad (\mathbf{e}_\alpha)_\beta = g_{\alpha\beta}, \qquad (\mathbf{e}^\alpha)^\beta = g^{\alpha\beta},$$

так и в другой системе координат:

$$(\mathbf{e}_\alpha)^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}, \qquad (\mathbf{e}^\alpha)_{\alpha'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}.$$

При замене координат компоненты вектора и базисные векторы преобразуются, но сам вектор остаётся прежним:

$$\mathbf{p} = p^\alpha \mathbf{e}_\alpha = p_\alpha \mathbf{e}^\alpha = p^{\alpha'}\mathbf{e}_{\alpha'} = p_{\alpha'}\mathbf{e}^{\alpha'}, \qquad p^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}p^\alpha, \quad \mathbf{e}_{\alpha'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\mathbf{e}_\alpha, \quad p_{\alpha'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}p_\alpha, \quad \mathbf{e}^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}\mathbf{e}^\alpha.$$

Компоненты вектора могут быть выражены через его скалярные произведения с векторами взаимного базиса:

$$p^\alpha = (\mathbf{p}, \mathbf{e}^\alpha), \qquad p_\alpha = (\mathbf{p}, \mathbf{e}_\alpha).$$

В случае полярных координат разложим базисные векторы полярных координат по декартову базису:

$$(\mathbf{e}_{\alpha'})^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \qquad \Rightarrow \qquad (\mathbf{e}_r)^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{e}_\phi)^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \end{pmatrix};$$

[2]Эта симметрия выражается в том, что лагранжиан не зависит от координаты ϕ, хотя может зависеть от соответствующей скорости $\dot\phi$. Подробнее о связи симметрий и законов сохранения см. § 1.3.5 «Теорема Нётер».

$$(\mathbf{e}^{\alpha'})_\alpha = (\mathbf{e}_{\beta'})^\beta\, g^{\alpha'\beta'}\, g_{\alpha\beta}, \qquad (\mathbf{e}^r)_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{e}^\phi)_\alpha = \begin{pmatrix} -r^{-1}\sin\phi \\ r^{-1}\cos\phi \end{pmatrix}.$$

Распишем декартовы компоненты импульса через компоненты импульса в полярных координатах:

$$p_\alpha = p_r(\mathbf{e}^r)_\alpha + p_\phi(\mathbf{e}^\phi)_\alpha = p_r \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} + p_\phi \begin{pmatrix} -r^{-1}\sin\phi \\ r^{-1}\cos\phi \end{pmatrix},$$

продифференцируем получившееся выражение по времени и переразложим результат по базисным векторам полярных координат, используя равенства $p_r = m\dot{r}$, $p_\phi = mr^2\dot{\phi}$:

$$\begin{aligned}
\frac{dp_\alpha}{dt} &= \dot{p}_r(\mathbf{e}^r)_\alpha + p_r \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}\dot{\phi} + \dot{p}_\phi(\mathbf{e}^\phi)_\alpha + p_\phi \begin{pmatrix} r^{-2}\sin\phi \\ -r^{-2}\cos\phi \end{pmatrix}\dot{r} + p_\phi \begin{pmatrix} -r^{-1}\cos\phi \\ -r^{-1}\sin\phi \end{pmatrix}\dot{\phi} = \\
&= \dot{p}_r(\mathbf{e}^r)_\alpha + p_r r\dot{\phi}(\mathbf{e}^\phi)_\alpha + \dot{p}_\phi(\mathbf{e}^\phi)_\alpha - p_\phi\frac{\dot{r}}{r}(\mathbf{e}^\phi)_\alpha - \frac{p_\phi\dot{\phi}}{r}(\mathbf{e}^r)_\alpha = \\
&= \left(\dot{p}_r - \frac{p_\phi\dot{\phi}}{r}\right)(\mathbf{e}^r)_\alpha + \left(\dot{p}_\phi + p_r r\dot{\phi} - \frac{p_\phi\dot{r}}{r}\right)(\mathbf{e}^\phi)_\alpha = \\
&= \left(\dot{p}_r - mr\dot{\phi}^2\right)(\mathbf{e}^r)_\alpha + \dot{p}_\phi(\mathbf{e}^\phi)_\alpha = 0.
\end{aligned}$$

Мы получили уравнения движения в полярных координатах путём дифференцирования базисных векторов.

Правда, мы использовали декартовы координаты, т.е. предполагали, что рассматриваемое пространство плоское. В следующем параграфе мы увидим, что можно обойтись и без этой подпорки.

г)** Напишите уравнение движения свободной частицы в произвольных координатах как условие постоянства ковектора импульса (дифференцируйте с учётом базисных векторов).

Решение п. г)** вынесено в отдельный параграф 2.2.2 «Свободная частица в обобщённых координатах» (с. 168).

8. *** Одномерные тензоры и теория размерности и подобия.

Условия отдельных пунктов и решения

а) Выпишите закон преобразования тензора с валентностью (n_1, n_2) в одномерном пространстве.

У тензора в одномерном пространстве индексы пробегают одно значение, так что для нумерации компонент индексы не нужны: тензор с любой валентностью имеет только одну компоненту. Тем не менее индексы важны для определения трансформационных свойств тензора, т.е. для определения закона его преобразования.

С учётом того, что в одномерном пространстве имеется только одна координата, а все индексы пробегают только одно значение, получаем

$$T' = T^{k'_1\ldots k_{n'_1}}{}_{m'_1\ldots m'_{n_2}} = T^{k_1\ldots k_{n_1}}{}_{m_1\ldots m_{n_2}} \frac{\partial x^{k'_1}}{\partial x^{k_1}}\cdots\frac{\partial x^{k'_{n_1}}}{\partial x^{k_{n_1}}}\frac{\partial x^{m_1}}{\partial x^{m'_1}}\cdots\frac{\partial x^{m_{n_2}}}{\partial x^{m'_{n_2}}} = T\left(\frac{dx'}{dx}\right)^{n_1}\left(\frac{dx}{dx'}\right)^{n_2} = T\left(\frac{dx'}{dx}\right)^{n_1-n_2}.$$

б) В чём особенность одномерного случая? Как можно обобщить понятие тензора в одномерном случае?

Закон преобразования одномерного тензора определяется только одним целым числом $N = n_1 - n_2$ — валентностью одномерного тензора:

$$T' = T\left(\frac{dx'}{dx}\right)^N.$$

В частности, одномерный тензор с валентностью (n, n) неотличим от скаляра, с валентностью $(n+1, n)$ — от вектора и т.д.

Свёртка одномерных тензоров сводится к одновременному зачёркиванию верхнего и нижнего индекса.

Очевидно, что в одномерном случае при $\frac{dx'}{dx} > 0$ мы можем рассматривать тензоры с дробной валентностью, т.е. с произвольным вещественным N (не обязательно целым). Одномерные тензоры с дробной валентностью, как и любые одномерные тензоры, имеют только одну компоненту, а валентность важна только для определения закона преобразования.

в) Как теория одномерных тензоров связана с теорией размерности и подобия для случая одной основной единицы измерения?

Рассмотрим преобразование координаты $x \to cx$. Если обозначить размерность координаты как L, то величина T с размерностью L^N преобразуется как $T \to c^N T$. Этот закон соответствует закону преобразования одномерного тензора с валентностью N при линейных заменах координат, т.е. в случае $\frac{dx'}{dx} = c = \text{const}$.

Преобразование координаты $c \to cx$ может быть как пассивным преобразованием (изменение масштаба единицы измерения), так и активным преобразованием (преобразование точек пространства). То, что величины с заданной размерностью одинаково преобразуются при пассивных и активных преобразованиях, означает, что теория размерности оказывается также теорией подобия.

Теория преобразования тензоров и теория размерности имеют очень похожую структуру. В обоих случаях

- в теории присутствует нечто описывающее измерительный прибор (система координат и базисы для тензора, система единиц для размерной величины);
- каждый объект помимо числового значения (для тензора многокомпонентного), представляющего результат измерения, имеет трансформационные свойства, которые зависят от валентности тензора или размерности переменной;
- теория позволяет приравнивать (а также складывать и вычитать) только величины с одинаковыми трансформационными свойствами;
- при арифметических операциях трансформационные свойства преобразуются по определённым законам (размерности умножаются и делятся, валентности тензоров складываются при умножении и уменьшаются на одинаковое число верхних и нижних индексов при свёртке), что позволяет проверять согласованность формул и иногда угадывать ответы с точностью до численного множителя (исходя из соображений размерности или баланса индексов);
- в теории особую роль играют инвариантные величины (безразмерные величины и скаляры);
- каждый объект может быть представлен инвариантным образом как комбинация численной величины и объекта, описывающего прибор (единица измерения или базис):

  $$X = \{X\}[X], \qquad \mathbf{V} = V^\alpha \mathbf{e}_\alpha, \qquad T = T^\alpha{}_{\beta\gamma}\, \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}^\beta \otimes \mathbf{e}^\gamma \quad \text{и т.д.}$$

  Здесь $\{X\}$ — числовое значение, а $[X]$ — единица измерения величины X, $\mathbf{e}_\alpha$ — базисный вектор номер α, $\mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}^\beta \otimes \mathbf{e}^\gamma$ — базисный тензор номер (α, β, γ) валентности $(1, 2)$.

2.2.2 Свободная частица в обобщённых координатах

В задаче 7 г нам надо написать уравнение движения свободной нерелятивистской частицы в произвольных координатах как условие постоянства ковектора импульса (дифференцировать с учётом базисных векторов).

Действие для нерелятивистской свободной частицы в произвольных координатах имеет вид

$$S[X^\alpha(t)] = \int \frac{m\mathbf{v}^2}{2}\, dt = \int \frac{m}{2}\, g_{\alpha\beta}(X(t))\, \dot X^\alpha \dot X^\beta\, dt = \int \frac{m}{2} \underbrace{\big(\mathbf{e}_\alpha\big(X(t)\big), \mathbf{e}_\beta\big(X(t)\big)\big)}_{g_{\alpha\beta}(X(t))} \dot X^\alpha \dot X^\beta\, dt. \tag{2.2.3}$$

2.2.2.1 В плоском пространстве

Вариация действия (2.2.3) имеет вид

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int m \Big((\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta) \dot X^\alpha \delta \dot X^\beta + (\mathbf{e}_\alpha, \delta \mathbf{e}_\beta) \dot X^\alpha \dot X^\beta \Big)\, dt = \\
&= \int m \left(g_{\alpha\gamma} \dot X^\alpha \delta \dot X^\gamma + \left(\mathbf{e}_\alpha, \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^\gamma} \delta X^\gamma \right) \dot X^\alpha \dot X^\beta \right) dt = \\
&= \int \left(-\frac{d}{dt}(m g_{\alpha\gamma} \dot X^\alpha) + m \left(\mathbf{e}_\alpha, \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^\gamma} \right) \dot X^\alpha \dot X^\beta \right) \delta X^\gamma\, dt.
\end{aligned}$$

Получаем уравнения движения в виде

$$-\frac{d}{dt} \underbrace{(m g_{\alpha\gamma} \dot X^\alpha)}_{p_\gamma} + m \underbrace{\left(\mathbf{e}_\alpha, \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^\gamma} \right)}_{\Gamma_{\alpha\gamma\beta}} \dot X^\alpha \dot X^\beta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{Dp_\gamma}{dt} = \frac{dp_\gamma}{dt} - p_\alpha \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta} \frac{\partial X^\beta}{dt} = 0.$$

Последняя формула записана через *ковариантную производную* ковектора p_γ. Ковариантная производная учитывает изменение базиса от точки к точке.

Ковариантная производная использует *коэффициенты связности* $\Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}$, которые не образуют тензора, что видно из того, что ковариантная производная $\frac{Dp_\gamma}{dt}$ — ковектор, тогда как обычная производная $\frac{dp_\gamma}{dt}$ тензором не является.

В евклидовом пространстве есть выделенные системы координат (в число которых входят декартовы координаты), в которых базисные векторы одинаковы во всех точках пространства и коэффициенты связности равны нулю. Воспользуемся этим для вычисления коэффициентов связности в криволинейных координатах в евклидовом пространстве. При этом нештрихоованные индексы относятся к декартовым координтам, а штрихованные к криволинейным:

$$p_{\beta'} = p_\beta \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} = (\mathbf{p}, \mathbf{e}_{\beta'}) = p_\alpha (\mathbf{e}_{\beta'})^\beta.$$

Отсюда следует, что

$$(\mathbf{e}_{\beta'})^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial (\mathbf{e}_{\beta'})^\beta}{\partial x^{\gamma'}} = \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\gamma'}} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \Gamma^{\alpha'}{}_{\gamma'\beta'} = \left(\mathbf{e}^{\alpha'}, \frac{\partial \mathbf{e}_{\beta'}}{\partial x^{\gamma'}}\right) = (\mathbf{e}^{\alpha'})_\alpha \frac{\partial (\mathbf{e}_{\beta'})^\alpha}{\partial x^{\gamma'}} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\gamma'}}.$$

Мы ещё вернёмся к обобщению этого выражения при изучении правил преобразования коэффициентов связности. Пока же отметим, что получившееся выражение заведомо не является тензором, так как если тензор равен нулю в одной системе координат (декартовой), то он равен нулю в любой другой системе координат, тогда как коэффициенты связности в декартовой системе координат равны нулю, но отличны от нуля в криволинейных координатах. Также отметим, что получившиеся коэффициенты связности симметричны по нижним индексам $\gamma'\beta'$.

2.2.2.2 В искривлённом пространстве

Мы получили коэффициенты связности и ковариантную производную для криволинейных координат в плоском пространстве. Но как быть, если не только координаты, но и само пространство искривлено, тогда ведь никаких декартовых координат в нём не существует?

Те же уравнения движения мы можем записать через метрику, что применимо и в искривлённом пространстве:

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int \frac{m}{2} \left(g_{\alpha\beta} \dot{X}^\alpha \delta \dot{X}^\beta + g_{\alpha\beta} \delta \dot{X}^\alpha \dot{X}^\beta + \delta g_{\alpha\beta}\, \dot{X}^\alpha \dot{X}^\beta \right) dt = \\
&= \int \frac{m}{2} \left(g_{\alpha\gamma} \dot{X}^\alpha \delta \dot{X}^\gamma + g_{\gamma\beta} \delta \dot{X}^\gamma \dot{X}^\beta + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \delta X^\gamma\, \dot{X}^\alpha \dot{X}^\beta \right) dt = \\
&= \int \frac{m}{2} \left(-\frac{d}{dt}(g_{\alpha\gamma} \dot{X}^\alpha + g_{\gamma\beta} \dot{X}^\beta) + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\, \dot{X}^\alpha \dot{X}^\beta \right) \delta X^\gamma\, dt = \\
&= \int \left(-\frac{dp_\gamma}{dt} + \underbrace{m\dot{X}^\alpha}_{p^\alpha} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \right] \dot{X}^\beta \right) \delta X^\gamma\, dt.
\end{aligned}$$

Выражение $\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\right]$ не годится на роль $\Gamma_{\alpha\gamma\beta}$, т.к. оно не симметрично по $\gamma\beta$, но оно сворачивается с симметричным по $\dot{X}^\alpha \dot{X}^\beta$ выражением, а значит, мы можем к нему добавить выражение, антисимметричное по $\alpha\beta$, так, чтобы результат стал симметричен по $\gamma\beta$:

$$\delta S = \int \left(-\frac{dp_\gamma}{dt} + \underbrace{m\dot{X}^\alpha}_{p^\alpha} \underbrace{\frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} \right]}_{\Gamma_{\alpha\gamma\beta}} \dot{X}^\gamma \right) \delta X^\gamma\, dt.$$

Снова (теперь уже для произвольной метрики!) получаем равенство нулю ковариантной производной от импульса:

$$\frac{Dp_\gamma}{dt} = \frac{dp_\gamma}{dt} - p_\mu \Gamma^\mu{}_{\gamma\beta} \frac{dX^\beta}{dt} = 0, \qquad \Gamma^\mu{}_{\gamma\beta} = \frac{g^{\mu\alpha}}{2} \left[\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} \right].$$

Запишем также наше уравнение движения не через ковектор импульса, а через вектор скорости. Для этого вернёмся к третьей строчке выкладок для δS:

$$\begin{aligned}\delta S &= \int \frac{m}{2}\left(-\frac{d}{dt}(g_{\alpha\gamma}\dot{X}^\alpha + g_{\gamma\beta}\dot{X}^\beta) + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\,\dot{X}^\alpha\dot{X}^\beta\right)\delta X^\gamma\,dt = \\ &= \int m\left(-g_{\alpha\gamma}\ddot{X}^\alpha - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta}\dot{X}^\beta\,\dot{X}^\alpha + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\alpha}\dot{X}^\alpha\,\dot{X}^\beta\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\,\dot{X}^\alpha\dot{X}^\beta\right)\delta X^\gamma\,dt = \\ &= \int m\Bigg(-g_{\alpha\gamma}\ddot{x}^\alpha - \underbrace{\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\right]}_{\Gamma_{\gamma\alpha\beta}}\dot{X}^\alpha\dot{X}^\beta\Bigg)\delta X^\gamma\,dt.\end{aligned}$$

Уравнения движения частицы имеют вид

$$\frac{\delta S}{\delta X^\gamma} = -m g_{\alpha\gamma}\ddot{x}^\alpha - m\Gamma_{\gamma\alpha\beta}\dot{X}^\alpha\dot{X}^\beta = 0.$$

Если поднять индекс, то получается уравнение, которое обобщает условие постоянства скорости (и переходит в условие постоянства скорости при $\Gamma = 0$). Можно назвать это уравнение условием ковариантного постоянства скорости, потому что оно соответствует равенству нулю ковариантной производной. Это уравнение является *уравнением геодезической*:

$$\ddot{X}^\lambda + \Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta}\dot{X}^\alpha\dot{X}^\beta = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{D\dot{X}^\lambda}{dt} = \frac{d\dot{X}^\lambda}{dt} + \dot{X}^\alpha\Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta}\frac{dX^\beta}{dt} = 0.$$

Мы специально записали в одном случае $\dot{X}$, а в другом $\frac{dX}{dt}$, чтобы было видно, где дифференцируемый вектор, а где вектор, вдоль которого идёт дифференцирование.

Для ковариантной производной вектора скорости мы получили не такое выражение, как для ковариантной производной ковектора импульса. Так и должно быть. Как мы увидим далее, эти выражения согласованы друг с другом.

Теперь уравнения движения (и входящие в них коэффициенты связности) оказались выражены через компоненты метрического тензора и их производные. Отсюда видно, что пространство, в котором движется частица, может не быть плоским (можно рассмотреть частицу на искривлённой поверхности или пространство ориентаций твёрдого тела), это не мешает обобщить на случай такого пространства описание движения по инерции.

(**) Такой подход применим при описании движения частицы в гравитационном поле в общей теории относительности (ОТО), в которой гравитационное поле описывается как искривлённая метрика пространства-времени. В ОТО, по сравнению с данным случаем, надо только вместо координатного времени t взять собственное время частицы τ и добавить дополнительную временну́ю координату, например $X^0 = ct$. Кроме того, в теории относительности (как в общей, так и в специальной) метрика пространства-времени не является положительно определённой, а имеет сигнатуру $(-,+,+,+)$.

2.2.3 Кривая экстремальной длины

В евклидовой геометрии отрезок прямой обладает минимальной длиной среди всех кривых, соединяющих данные точки. Нам может понадобиться работать с евклидовой геометрией в криволинейных координатах, а также работать с искривлёнными пространствами, где вообще нет прямых линий. Рассмотрим в качестве обобщения прямых кривые экстремальной длины (*экстремали*).

Чтобы решить задачу о кривой экстремальной длины, соединяющей заданные точки, надо проварьировать следующий функционал длины кривой:

$$S[X(l)] = \int \sqrt{\frac{dX^\alpha}{dl}\frac{dX^\beta}{dl}\,g_{\alpha\beta}(X(l))}\,dl. \tag{2.2.4}$$

Здесь l — произвольный монотонный параметр вдоль кривой. Получаем

$$\delta S = \int \frac{\frac{d\delta X^\alpha}{dl}\frac{dX^\beta}{dl}\,g_{\alpha\beta}(X(l)) + \frac{dX^\alpha}{dl}\frac{d\delta X^\beta}{dl}\,g_{\alpha\beta}(X(l)) + \frac{dX^\alpha}{dl}\frac{dX^\beta}{dl}\,\delta g_{\alpha\beta}(X(l))}{2\sqrt{\frac{dX^\alpha}{dl}\frac{dX^\beta}{dl}\,g_{\alpha\beta}(X(l))}}\,dl$$

Поскольку

$$\sqrt{\frac{dX^\alpha}{dl}\frac{dX^\beta}{dl}\,g_{\alpha\beta}(X(l))} = \frac{d\ell}{dl},$$

где ℓ — расстояние вдоль кривой, получаем

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int \frac{1}{2}\frac{dl}{d\ell}\left(\frac{d\delta X^\alpha}{dl}\frac{dX^\beta}{dl}\,g_{\alpha\beta} + \frac{dX^\alpha}{dl}\frac{d\delta X^\beta}{dl}\,g_{\alpha\beta} + \frac{dX^\alpha}{dl}\frac{dX^\beta}{dl}\,(\partial_\gamma g_{\alpha\beta})\delta X^\gamma\right) dl = \\
&= \int \frac{1}{2}\left(\frac{d\delta X^\alpha}{d\ell}\frac{dX^\beta}{d\ell}\,g_{\alpha\beta} + \frac{dX^\alpha}{d\ell}\frac{d\delta X^\beta}{d\ell}\,g_{\alpha\beta} + \frac{dX^\alpha}{d\ell}\frac{dX^\beta}{d\ell}\,(\partial_\gamma g_{\alpha\beta})\delta X^\gamma\right) d\ell = \\
&= \int \frac{1}{2}\left(-\delta X^\alpha\frac{d}{d\ell}\left(\frac{dX^\beta}{d\ell}\,g_{\alpha\beta}\right) - \delta X^\beta\frac{d}{d\ell}\left(\frac{dX^\alpha}{d\ell}\,g_{\alpha\beta}\right) + \frac{dX^\alpha}{d\ell}\frac{dX^\beta}{d\ell}\,(\partial_\gamma g_{\alpha\beta})\delta X^\gamma\right) d\ell = \\
&= \int \frac{1}{2}\left(-\delta X^\alpha\frac{d}{d\ell}\left(\frac{dX^\beta}{d\ell}\,g_{\alpha\beta}\right) - \delta X^\beta\frac{d}{d\ell}\left(\frac{dX^\alpha}{d\ell}\,g_{\alpha\beta}\right) + \frac{dX^\alpha}{d\ell}\frac{dX^\beta}{d\ell}\,(\partial_\gamma g_{\alpha\beta})\delta X^\gamma\right) d\ell = \\
&= \int \frac{1}{2}\left(-\delta X^\gamma\frac{d}{d\ell}\left(\frac{dX^\beta}{d\ell}\,g_{\gamma\beta}\right) - \delta X^\gamma\frac{d}{d\ell}\left(\frac{dX^\alpha}{d\ell}\,g_{\alpha\gamma}\right) + \frac{dX^\alpha}{d\ell}\frac{dX^\beta}{d\ell}\,(\partial_\gamma g_{\alpha\beta})\delta X^\gamma\right) d\ell = \\
&= \int \frac{1}{2}\left(-2\frac{d^2X^\beta}{d\ell^2}\,g_{\gamma\beta} - \frac{dX^\beta}{d\ell}\frac{d}{d\ell}\,g_{\gamma\beta} - \frac{dX^\alpha}{d\ell}\frac{d}{d\ell}\,g_{\alpha\gamma} + \frac{dX^\alpha}{d\ell}\frac{dX^\beta}{d\ell}\,(\partial_\gamma g_{\alpha\beta})\right)\delta X^\gamma\, d\ell = \\
&= -\int\left(\frac{d^2X^\beta}{d\ell^2}\,g_{\gamma\beta} + \frac{dX^\alpha}{d\ell}\frac{dX^\beta}{d\ell}\underbrace{\frac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\gamma\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta})}_{\Gamma_{\gamma\alpha\beta}}\right)\delta X^\gamma\,\frac{d\ell}{dl}\,dl.
\end{aligned}$$

В последней строчке выкладок появились *коэффициенты симметричной метрической связности* $\Gamma_{\gamma\alpha\beta}$, они несут индексы, но тензора не образуют. Поднимем у коэффициентов связности первый индекс, как будто у тензора: $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = g^{\mu\gamma}\Gamma_{\gamma\alpha\beta}$.

Уравнения Эйлера-Лагранжа для функционала длины кривой задают уравнение кривой экстремальной длины, или *экстремали*.

Поскольку $\frac{dX^\mu}{d\ell}$ — вектор, то $\frac{d^2X^\mu}{d\ell^2}$ — производная от компонент вектора вдоль кривой без учёта того, что в каждой точке свой базис вектором (и вообще тензором) не является. Уравнение Эйлера-Лагранжа имеет следующий вид:

$$\underbrace{\frac{\delta S}{\delta X^\gamma}}_{\text{ковектор}} = -g_{\gamma\mu}\underbrace{\left(\overbrace{\frac{d^2X^\mu}{d\ell^2}}^{\text{не тензор}} + \overbrace{\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}}^{\text{не тензор}}\overbrace{\frac{dX^\alpha}{d\ell}\frac{dX^\beta}{d\ell}}^{\text{тензор}}\right)}_{\text{вектор}}\frac{d\ell}{dl} = 0. \tag{2.2.5}$$

Выражение в скобках образует вектор, причём слагаемое с коэффициентами связности компенсирует нетензорность $\frac{d^2X^\mu}{d\ell^2}$:

$$\frac{d^2X^\mu}{d\ell^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{dX^\alpha}{d\ell}\frac{dX^\beta}{d\ell} = \left(\delta^\mu_\alpha\frac{d}{d\ell} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{dX^\beta}{d\ell}\right)\frac{dX^\alpha}{d\ell} = \nabla_{\frac{dX}{d\ell}}\frac{dX^\mu}{d\ell} = \frac{D}{d\ell}\frac{dX^\mu}{d\ell}.$$

Здесь $\nabla_{\frac{dX}{d\ell}} = \frac{D}{d\ell}$ — *ковариантная производная* вдоль вектора $\frac{dX^\beta}{d\ell}$, или, что то же самое, вдоль кривой $X(\ell)$ по параметру ℓ.

Мы ещё обсудим свойства ковариантной производной в более общем случае, пока только заметим, что она всегда превращает вектор в вектор.

Уравнение экстремали показывает, что

$$\frac{D}{d\ell}\frac{dX^\mu}{d\ell} = 0,$$

в таком случае говорят, что касательная к кривой $\frac{dX^\mu}{d\ell}$ *ковариантно постоянна вдоль кривой*, такие кривые называют *геодезическими кривыми* или просто *геодезическими*.

Для введённой нами симметричной метрической связности геодезическая и экстремаль — синонимы. Но для других видов связности геодезическая и экстремаль могут не совпадать.

В силу произвольности монотонного параметра l лагранжиан в действии (2.2.4) является вырожденным.

2.2.4 Ковариантная производная

Ковариантная производная полезна при работе с криволинейными координатами, особенно в искривлённом пространстве[3]. Если у вас уже есть дифференциальное уравнение для «хороших» (например,

[3] В искривлённом пространстве некриволинейных координат не существует. Искривлёнными являются конфигурационные пространства для многих механических систем со связями, включая абсолютно твёрдое тело. В общей теории относительности искривлённым является пространство-время, а также его пространственные сечения $t = \text{const}$.

декартовых) координат, то простейшее обобщение на криволинейные координаты часто можно получить, заменив в уравнении все производные на ковариантные.

Тем не менее ковариантная производная не попала в основной материал курса. Почему? В первую очередь, по причине ограниченности времени. А во вторую очередь — потому что без неё можно (хотя и не всегда удобно) обойтись. Это связано с тем, что при решении конкретной задачи вместо того, чтобы переписывать уравнения движения из одних координат в другие, мы можем вернуться к действию, переписать его в новых координатах и заново проварьировать. Так мы поступали в задаче 7.

2.2.5 Базисные векторы и ковекторы

Если в нашем пространстве имеется метрика, мы можем, поднимая и опуская индексы, установить взаимнооднозначное соответствие между векторами и ковекторами. Но в данном параграфе мы предпочтём этого не делать. Ковариантная производная может быть определена вне зависимости от наличия в пространстве метрики.

Если метрика отсутствует, мы будем ставить над векторами стрелку слева направо ($\vec{a}$), а над ковекторами стрелку справа налево ($\overleftarrow{a}$). При наличии метрики векторы и ковекторы можно рассматривать как разные представления одних и тех же объектов и одинаково обозначать их полужирными буквами $\mathbf{a}$. Таким образом,

$$\vec{p} = p^i \vec{e}_i, \quad \overleftarrow{p} = p_i \overleftarrow{e}^i.$$

Здесь $\vec{e}_i$ — базисный вектор с номером i (над буквой стоит стрелка, так что i — номер вектора, а не компоненты!), а $\overleftarrow{e}^i$ — базисный ковектор с номером i.

Векторный и ковекторный базисы связаны между собой соотношением

$$(\overleftarrow{e}^j, \vec{e}_i) = \delta^j_i.$$

Мы будем называть эти базисы взаимными друг к другу.

(!) Круглые скобки $(\overleftarrow{a}, \vec{b}) = a_i b^i$ — это не скалярное произведение, а свёртка ковектора с вектором, для этой операции метрика не нужна! При наличии метрики векторы и ковекторы оказываются разными представлениями объектов одного типа, и такие свёртки оказываются скалярными произведениями.

От базисных (ко)векторов тоже можно брать компоненты как в той же системе координат:

$$(\vec{e}_i)^j = (\overleftarrow{e}^j)_i = \delta^j_i = \frac{\partial x^j}{\partial x^i},$$

так и в другой системе координат:

$$(\vec{e}_i)^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \qquad (\overleftarrow{e}^i)_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}.$$

При замене координат компоненты (ко)вектора и базисные (ко)векторы преобразуются, но сам (ко)вектор остаётся прежним:

$$\vec{p} = p^i \vec{e}_i = p^{i'} \vec{e}_{i'}, \quad \overleftarrow{p} = p_i \overleftarrow{e}^i = p_{i'} \overleftarrow{e}^{i'}, \qquad p^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} p^i, \quad \vec{e}_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \vec{e}_i, \quad p_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} p_i, \quad \overleftarrow{e}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \overleftarrow{e}^i.$$

Компоненты (ко)вектора могут быть выражены через его свёртки с (ко)векторами взаимного базиса:

$$p^i = (\overleftarrow{e}^i, \vec{p}), \qquad p_i = (\overleftarrow{p}, \vec{e}_i).$$

При наличии метрики мы можем не различать векторы и ковекторы:

$$\mathbf{p} = \vec{p} = p^i \underbrace{\mathbf{e}_i}_{\vec{e}_i} = \overleftarrow{p} = p_i \underbrace{\mathbf{e}^i}_{\overleftarrow{e}^i},$$

$$p_i = g_{ij} p^j, \quad p^i = g^{ij} p_j, \quad \mathbf{e}_i = g_{ij} \mathbf{e}^j, \quad \mathbf{e}^j = g^{ij} \mathbf{e}_j.$$

При наличии метрики у нас есть полноценное скалярное произведение, позволяющее перемножать не только векторы и ковекторы, но и два вектора или два ковектора:

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = p^i q_i = p_i q^i = p^i q^j g_{ij} = p_i q_j g^{ij},$$

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j) = \delta^j_i, \quad (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = g_{ij}, \quad (\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j) = g^{ij}.$$

2.2.6 Дифференцируем ковектор вдоль кривой

Обсудим результаты задачи 7 в более общем контексте. Поскольку импульс — ковектор, мы рассмотрим ковариантное дифференцирование ковектора вдоль кривой. Полностью аналогичные выкладки можно провести и для вектора.

Вычитать компоненты ковекторов, разложенных по разным базисам, — операция не очень хорошая — она, как правило, не даёт ковектор. Производная компонент импульса вдоль траектории частицы — это предел отношения

$$\frac{dp_i}{dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{p_i(t+\delta t) - p_i(t)}{\delta t},$$

в котором импульсы $p_i(t+\delta t)$ и $p_i(t)$ берутся в разных точках пространства с координатами $x^i(t+\delta t)$ и $x^i(t)$. Таким образом, дифференцирование компонент импульса по времени в криволинейных координатах не даёт компонент какого-либо ковектора.

Как исправить операцию дифференцирования так, чтобы производная компонент ковектора давала снова компоненты ковектора? Надо перед вычитанием ковекторов, заданных в разных точках, сначала перенести их в одну точку, используя операцию *параллельного переноса*, и разложить там по одному базису. В общем случае параллельный перенос — операция нетривиальная, но в евклидовом пространстве его можно легко определить, используя декартовы координаты (как мы и сделали при рассмотрении движения в полярных координатах). При параллельном переносе в декартовых координатах компоненты вектора не меняются.

В общем случае параллельный перенос зависит от траектории. Такое пространство называется искривлённым. Декартовых координат в искривлённом пространстве не существует, в нём любые координаты будут криволинейными. Именно в этом смысле искривлено пространство-время общей теории относительности. Впрочем, даже в классической механике нам могут встретиться искривлённые пространства, например пространство направлений в 3-мерной пространстве (единичная сфера) или пространство поворотов твёрдого тела (группа SO(3)).

Так что «правильное» (переводящее ковектор в ковектор) дифференцирование — это не дифференцирование компонент, а дифференцирование ковектора целиком (как мы и сделали в задаче 7 в):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(p_i\vec{e}^{\,i})}{dt} = \frac{dp_i}{dt}\vec{e}^{\,i} + p_i\frac{d\vec{e}^{\,i}}{dt} = \frac{dp_i}{dt}\vec{e}^{\,i} + p_i\frac{\partial\vec{e}^{\,i}}{\partial x^j}\frac{dX^j}{dt}.$$

Это дифференцирование можно записать и через компоненты, в этом случае мы будем использовать для него обозначение $\frac{D}{dt}$:

$$\frac{Dp_k}{dt} = \left(\frac{d\vec{p}}{dt}, \vec{e}_k\right) = \frac{dp_i}{dt}\underbrace{(\vec{e}^{\,i}, \vec{e}_k)}_{\delta^i_k} + p_i\underbrace{\left(\frac{\partial\vec{e}^{\,i}}{\partial x^j}, \vec{e}_k\right)}_{-\Gamma^i{}_{kj}}\frac{dx^j}{dt} = \frac{dp_k}{dt} - p_i\Gamma^i{}_{kj}\frac{dX^j}{dt}.$$

Такая производная называется *ковариантной производной*:

$$\underbrace{\frac{Dp_k}{dt}}_{\text{тензор}} = \underbrace{\frac{dp_k}{dt}}_{\text{не тензор}} - \underbrace{\overbrace{p_i}^{\text{тензор}}\ \overbrace{\Gamma^i{}_{kj}}^{\text{не тензор}}\ \overbrace{\frac{dx^j}{dt}}^{\text{тензор}}}_{\text{не тензор}}.$$

Коэффициенты связности

$$\Gamma^i{}_{kj} = -\left(\frac{\partial\vec{e}^{\,i}}{\partial x^j}, \vec{e}_k\right)$$

зависят от того, как определён параллельный перенос, т.к. без параллельного переноса мы не можем продифференцировать базисный ковектор. Они несут индексы, но не являются компонентами какого-либо тензора.

Уравнение движения по инерции (сохранение импульса для отдельной частицы) имеет вид

$$\frac{Dp_k}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dp_k}{dt} = \Gamma^i{}_{kj}p_i\dot{X}^j = \frac{1}{m}\Gamma^i{}_{kj}p_ip^j.$$

В общей теории относительности (ОТО) гравитационное поле описывается с помощью искривления пространства-времени. В ОТО аналогичный вид имеет уравнение движения частицы в гравитационном поле, с той разницей, что вместо координатного времени t надо взять собственное время частицы τ, а вместо 3-мерного импульса — 4-мерный (дополнительная координата $x^0 = ct$).

Если наше пространство плоское, то имеется выделенная система координат, в которой параллельный перенос не меняет компонент тензора (таковы декартовы координаты для евклидова пространства), в таких координатах $\Gamma^i{}_{kj} = 0$. В этом случае можно вычислить коэффициенты связности в криволинейных координатах, расписав базисные векторы криволинейных координат и их производные по базису, связанному с выделенной системой координат.

2.2.7 Дифференцируем ковекторное поле по координатам

Мы определили ковариантную производную от ковектора вдоль кривой $X(t)$:

$$\frac{Dp_k}{dt} = \frac{dp_k}{dt} - p_i \Gamma^i{}_{kj} \dot{X}^j.$$

В случае, если ковектор определён не только вдоль кривой, но и в некоторой области пространства, мы можем расписать производную $\frac{dp_k}{dt}$ как производную сложной функции $\frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial p_k}{\partial x^j}\,\dot{X}^j$. Тогда

$$\frac{Dp_k}{dt} = \frac{\partial p_k}{\partial x^j}\,\dot{X}^j - p_i \Gamma^i{}_{kj} \dot{X}^j = \left(\frac{\partial p_k}{\partial x^j} - p_i \Gamma^i{}_{kj}\right) \dot{X}^j.$$

Выражение

$$\nabla_j\, p_k = \frac{\partial p_k}{\partial x^j} - p_i\, \Gamma^i{}_{kj}$$

— это ковариантная производная ковектора $\overleftarrow{p}$ по координате x^j. Можно сказать, что это производная вдоль базисного вектора $\vec{e}_j$. Поскольку при свёртке $\nabla_j\, p_k$ с произвольным вектором $\dot{x}^j$ получается тензор (ковектор) $\frac{Dp_k}{dt}$, по признаку тензора $\nabla_j\, p_k$ является тензором.

Ковариантная производная вдоль вектора $\vec{v}$ от ковекторного поля $\overleftarrow{p}$ может быть выражена как

$$\nabla_{\vec{v}} p_k = v^j \nabla_j\, p_k = \partial_{\vec{v}} p_k - p_i \Gamma^i{}_{kj}\, v^j.$$

В частности,

$$\nabla_{\dot{\vec{X}}}\, p_k = \dot{X}^j \nabla_j\, p_k = \frac{Dp_k}{dt}, \qquad \nabla_{\vec{e}_j} = (\vec{e}_j)^k \nabla_k = \nabla_j.$$

(!) Теперь символ набла ∇ и символ частной производной ∂ надо различать. Набла используется для ковариантной производной, а ∂ — для обычной производной по направлению. Далее мы увидим, что совпадают эти операции только тогда, когда они действуют на скаляр.

2.2.8 Определение ковариантной производной в общем случае

В принципе, мы могли бы определить ковариантные производные (и параллельный перенос) тензоров разных валентностей независимым образом, но мы постулируем, что

- для ковариантной производной выполняется правило Лейбница для тензорного умножения;
- если под ковариантной производной выполнить свёртку, то результат не зависит от того, какая операция сделана раньше: ковариантное дифференцирование или свёртка;
- для скаляра $\nabla = \partial$, т.е. $\nabla_j\, \varphi = \partial_j\, \varphi$, $\nabla_{\vec{v}}\, \varphi = \partial_{\vec{v}}\, \varphi$;
- для ковектора справедливы ранее введённые соотношения

$$\nabla_j\, p_k = \partial_j\, p_k - p_i\, \Gamma^i{}_{kj}, \qquad \nabla_{\vec{v}} p_k = \partial_{\vec{v}} p_k - p_i \Gamma^i{}_{kj}\, v^j.$$

2.2.9 Дифференцируем вектор

Поскольку мы уже нашли выражение для ковариантной производной от ковектора через коэффициенты связности, воспользуемся этим, чтобы найти ковариантную производную от вектора.

Распишем ковариантную производную от свёртки вектора и ковектора.

С одной стороны, поскольку это производная от скаляра,

$$\nabla_i (v^j u_j) = \partial_i (v^j u_j) = (\partial_i v^j) u_j + v^j (\partial_i u_j).$$

С другой стороны, по правилу Лейбница для ковариантной производной

$$\nabla_i(v^j u_j) = (\nabla_i v^j)u_j + v^j(\nabla_i u_j) = (\nabla_i v^j)u_j + v^j(\partial_i u_j - u_k \Gamma^k{}_{ji}).$$

Приравняв эти два выражения друг другу, получаем

$$(\partial_i v^j)u_j + \cancel{v^j(\partial_i u_j)} = (\nabla_i v^j)u_j + \cancel{v^j(\partial_i u_j)} - v^j u_k \Gamma^k{}_{ji}.$$

Отсюда следует, что

$$(\nabla_i v^j)u_j = (\partial_i v^j)u_j + v^k u_j \Gamma^j{}_{ki} = u_j \left(\partial_i v^j + \Gamma^j{}_{ki} v^k\right).$$

Поскольку поле u_j выбирается произвольно, возьмём $\overset{\leftarrow}{u} = \overset{\leftarrow}{e}{}^l$, т.е. $u_j = (\overset{\leftarrow}{e}{}^l)_j = \delta^l_j$. Получаем ковариантную производную от вектора

$$\nabla_i v^l = \partial_i v^l + \Gamma^l{}_{ki} v^k.$$

2.2.10 Дифференцируем тензор общего вида

Тензор общего вида можно представить в виде суммы членов, каждый из которых — тензорное произведение скаляра и набора векторов и ковекторов:

$$T = T^{k_1 \ldots k_{n_1}}{}_{m_1 \ldots m_{n_2}} \vec{e}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{k_{n_1}} \otimes \overset{\leftarrow}{e}{}^{m_1} \otimes \cdots \otimes \overset{\leftarrow}{e}{}^{m_{n_2}}.$$

Мы уже умеем брать ковариантные производные от векторов и ковекторов, так что легко видеть, что

$$\begin{aligned} \nabla_i T^{k_1 \ldots k_{n_1}}{}_{m_1 \ldots m_{n_2}} \;=\; & \partial_i T^{k_1 \ldots k_{n_1}}{}_{m_1 \ldots m_{n_2}} + \\ & + \Gamma^{k_1}{}_{ji} T^{j \ldots k_{n_1}}{}_{m_1 \ldots m_{n_2}} + \cdots + \Gamma^{k_{n_1}}{}_{ji} T^{k_1 \ldots j}{}_{m_1 \ldots m_{n_2}} - \\ & - \Gamma^j{}_{m_1 i} T^{k_1 \ldots k_{n_1}}{}_{j \ldots m_{n_2}} - \cdots - \Gamma^j{}_{m_{n_2} i} T^{k_1 \ldots k_{n_1}}{}_{m_1 \ldots j}. \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

На каждый верхний индекс приходится один член с плюсом, где этот индекс стоит у коэффициента связности. На каждый нижний индекс приходится один член с минусом, где этот индекс стоит у коэффициента связности. На последней позиции у коэффициента связности всегда стоит тот же индекс, что у производной.

2.2.11 Как преобразуются коэффициенты связности

Как уже упоминалось выше, хотя коэффициенты связности несут индексы, они не являются компонентами тензора. Выведем закон преобразования коэффициентов связности.

С одной стороны,

$$\nabla_{k'} p_{m'} = \partial_{k'} p_{m'} - p_{n'} \Gamma^{n'}{}_{m'k'} = \underbrace{\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}}_{\partial_{k'}} \partial_k \underbrace{\left(\frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}} p_m\right)}_{p_{m'}} - \underbrace{p_n \frac{\partial x^n}{\partial x^{n'}}}_{p_{n'}} \Gamma^{n'}{}_{m'k'} =$$

$$= \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}} \partial_k p_m + p_m \frac{\partial^2 x^m}{\partial x^{m'} \partial x^{k'}} - p_n \frac{\partial x^n}{\partial x^{n'}} \Gamma^{n'}{}_{m'k'}.$$

С другой стороны,

$$\nabla_{k'} p_{m'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}} \nabla_k p_m = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}} (\partial_k p_m - p_n \Gamma^n{}_{mk}) = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}} \partial_k p_m - p_n \Gamma^n{}_{mk} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}.$$

Приравняв эти два выражения (и переименовав в одном из членов немой индекс $m \to n$), получаем

$$p_n \frac{\partial^2 x^n}{\partial x^{m'} \partial x^{k'}} - p_n \frac{\partial x^n}{\partial x^{n'}} \Gamma^{n'}{}_{m'k'} = -p_n \Gamma^n{}_{mk} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}.$$

В силу произвольности ковектора p_n на него можно сократить:

$$\frac{\partial x^n}{\partial x^{n'}} \Gamma^{n'}{}_{m'k'} = \frac{\partial^2 x^n}{\partial x^{m'} \partial x^{k'}} + \Gamma^n{}_{mk} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}.$$

Домножим обе части равенства на $\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^n}$:

$$\underbrace{\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^n} \frac{\partial x^n}{\partial x^{n'}} \Gamma^{n'}{}_{m'k'}}_{\delta^{l'}_{n'} \Gamma^{n'}{}_{m'k'} = \Gamma^{l'}{}_{m'k'}} = \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^n} \frac{\partial^2 x^n}{\partial x^{m'} \partial x^{k'}} + \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^n} \Gamma^n{}_{mk} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}.$$

Окончательно получаем (переименовав $l' \to n'$)

$$\Gamma^{n'}{}_{m'k'} = \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^n}\frac{\partial^2 x^n}{\partial x^{m'}\partial x^{k'}} + \Gamma^n{}_{mk}\frac{\partial x^{n'}}{\partial x^n}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}.$$

Мы видим, что второе слагаемое выглядит как тензорный закон преобразования, но первое слагаемое заведомо не тензорное: оно содержит вторую производную от старых координат по новым, причём не зависит от коэффициентов связности.

Поскольку нетензорый член симметричен относительно перестановки нижних индексов $m' \leftrightarrow k'$, антисимметричная по нижним индексам комбинация коэффициентов связности оказывается тензором, который называется *тензором кручения*:

$$T^n{}_{mk} = \Gamma^n{}_{mk} - \Gamma^n{}_{km}. \tag{2.2.7}$$

Связность с нулевым тензором кручения называется *симметричной связностью.*

Из того, что нетензорный член не зависит от коэффициентов связности, следует, что, хотя сами коэффициенты связности не образуют тензора, разность двух разных наборов коэффициентов связности Γ и $\tilde\Gamma$ является тензором $\hat\Gamma$, который мы будем называть ***тензором*** *относительной связности*:

$$\hat\Gamma^n{}_{mk} = \Gamma^n{}_{mk} - \tilde\Gamma^n{}_{mk}. \tag{2.2.8}$$

Коэффициентам связности $\Gamma^n{}_{mk}$ и $\tilde\Gamma^n{}_{mk}$ соответствуют разные ковариантные производные ∇ и $\tilde\nabla$, которые связаны друг с другом очевидным соотношением

$$\begin{aligned}\nabla_i T^{k_1\ldots k_{n_1}}{}_{m_1\ldots m_{n_2}} \;=\;& \tilde\nabla_i T^{k_1\ldots k_{n_1}}{}_{m_1\ldots m_{n_2}} + \\ &+ \hat\Gamma^{k_1}{}_{ji}T^{j\ldots k_{n_1}}{}_{m_1\ldots m_{n_2}} + \cdots + \hat\Gamma^{k_{n_1}}{}_{ji}T^{k_1\ldots j}{}_{m_1\ldots m_{n_2}} - \\ &- \hat\Gamma^{j}{}_{m_1 i}T^{k_1\ldots k_{n_1}}{}_{j\ldots m_{n_2}} - \cdots - \hat\Gamma^{j}{}_{m_{n_2} i}T^{k_1\ldots k_{n_1}}{}_{m_1\ldots j},\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

т.е. ковариантная производная ∇ расписывается через другую ковариантную производную $\tilde\nabla$ и относительную связность $\hat\Gamma$ точно так же, как через частную производную ∂ и коэффициенты связности Γ.

2.2.12 Параллельный перенос

Тензор T *ковариантно постоянен вдоль кривой* $X(t)$, если ковариантная производная от него вдоль кривой равна нулю,

$$\nabla_{\dot X} T = 0.$$

В этом случае можно выбрать на кривой точку $x_0 = X(t_0)$ и говорить, что тензор вдоль кривой получен параллельным переносом вдоль этой кривой из точки x_0.

Параллельный перенос возможен не только для вектора, но и для тензора любого типа (но для скаляра параллельный перенос тривиален).

Пространство называется искривлённым, если результат параллельного переноса из точки x_0 в точку x_1 зависит от кривой, соединяющей эти точки.

Параллельный перенос — линейная операция. Параллельный перенос вдоль одной кривой из точки x_0 в точку x_1 и обратно даёт тождественное преобразование. В силу этого если параллельный перенос из точки x_0 в точку x_1 вдоль кривых γ_1 и γ_2 даёт разные результаты, то параллельный перенос по замкнутому контуру, который от x_0 до x_1 проходит по кривой γ_1, а обратно — по кривой γ_2, даёт преобразование, отличающееся от тождественного.

Можно переформулировать определение искривлённого пространства: *пространство называется искривлённым, если параллельный перенос по замкнутому контуру меняет тензор.*

Пример. Определим параллельный перенос векторов, касательных к поверхностям цилиндра и конуса, как евклидов параллельный перенос на их развёртке. Хотя поверхности конуса и цилиндра при вложении их в трёхмерное евклидово пространство оказываются изогнуты, кривизна на них (кроме вершины конуса) отсутствует: параллельный перенос по любому контуру, не обходящему вокруг вершины конуса, даёт тождественное преобразование. При обходе вершины конуса перенос даёт поворот на угол, равный угловому дефициту конуса. Таким образом, поверхность конуса искривлена, но кривизна сосредоточена в вершине.

Пример. Мы можем определить параллельный перенос векторов, касательных к сфере, следующим образом: (1) длина вектора при параллельном переносе не меняется; (2) при переносе по дуге большого круга угол между вектором и дугой остаётся неизменным. Если рассмотреть сферический треугольник, составленный из двух меридианов от полюса до экватора и дуги экватора, соединяющей их концы, то легко

видеть, что перенос по такому контуру даёт поворот на угол, равный углу между меридианами. Более внимательное рассмотрение позволяет понять, что угол поворота равен телесному углу (ориентированной площади, делённой на R^2), ограниченному контуром, по которому совершался параллельный перенос. Поверхность сферы является примером поверхности постоянной кривизны.

2.2.13 Геодезическая

Геодезическая линия, или просто *геодезическая*, — кривая, касательная к которой ковариантно параллельна самой себе вдоль этой кривой. Это значит, что если касательную в какой-то точке геодезической переносить параллельно вдоль самой геодезической, то вдоль всей кривой она останется касательной:

$$\frac{D}{dl}\frac{dX^i}{dl} \equiv \nabla_{\frac{\overrightarrow{dX}}{dl}}\frac{dX^i}{dl} = c(l)\,\frac{dX^i}{dl},$$

где l — произвольный неособый (такой, что $\frac{dX^i}{dt} \neq 0$) параметр вдоль кривой.

Можно выбрать вдоль геодезической такой параметр (натуральный, или естественный), что касательная, полученная дифференцированием по этому параметру, будет ковариантно постоянна:

$$\frac{D}{d\tau}\frac{dX^i}{d\tau} \equiv \nabla_{\frac{\overrightarrow{dX}}{d\tau}}\frac{dX^i}{d\tau} = 0,$$

где τ — натуральный параметр вдоль кривой.

Уравнение геодезической через натуральный параметр τ можно расписать так:

$$\frac{D}{d\tau}\frac{dX^i}{d\tau} \equiv \nabla_{\frac{\overrightarrow{dX}}{d\tau}}\frac{dX^i}{d\tau} \equiv \frac{d^2X^i}{d\tau^2} + \Gamma^i{}_{jk}\frac{dX^j}{d\tau}\frac{dX^k}{d\tau} = 0.$$

Мы уже сталкивались с этим уравнением в задаче 7 г.

Геодезическая — аналог прямой в искривлённом пространстве. На поверхности сферы (для параллельного переноса, заданного в рассмотренном выше примере) геодезические — дуги больших кругов.

В общей теории относительности (ОТО) именно по геодезическим движутся частицы в гравитационном поле (которое описывается как искривление пространства-времени). Уравнение геодезической можно переписать так, что оно станет похоже на второй закон Ньютона:

$$m\frac{d^2X^i}{d\tau^2} = -m\Gamma^i{}_{jk}\frac{dX^j}{d\tau}\frac{dX^k}{d\tau}. \tag{2.2.10}$$

«Сила» в правой части — это не настоящая сила, а эффект криволинейных координат. Таким способом в ОТО наравне с силами инерции описывается и гравитационная сила.

2.2.14 Связность и метрика

В общем случае связность задаётся независимо от метрики. Это две разные геометрические структуры. Однако при наличии метрики можно задать *симметричную метрическую связность*, которая полностью определяется метрикой. Мы уже видели такую связность в задаче 7г, а сейчас выведем её из других постулатов.

- Связность симметрична: $\Gamma^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{kj}$.
- Метрика ковариантно постоянна: $\nabla_i g_{jk} = 0$.

Симметричность связности означает тождественное равенство нулю тензора кручения, т.е. связность определяется *только* метрикой.

Ковариантное постоянство метрики позволяет вносить её под ковариантные производные и, в частности, опускать и поднимать индексы под ковариантной производной. Например, мы можем или параллельно перенести вектор вдоль кривой, а потом опустить у него индекс и сделать ковектором, или сразу опустить индекс, а потом сделать параллельный перенос. Если метрика ковариантно постоянна, то результат будет одинаков. Это означает, что для такого параллельного переноса вектор и полученный из него ковектор не различаются и могут рассматриваться как разные представления одного объекта.

Получим из наших постулатов явное выражение коэффициентов связности:

$$\nabla_i g_{jk} = \partial_i g_{jk} - \underbrace{g_{sk}\Gamma^s{}_{ji}}_{\Gamma_{kji}} - \underbrace{g_{js}\Gamma^s{}_{ki}}_{\Gamma_{jki}} = 0.$$

Мы ввели коэффициенты связности с тремя нижними индексами[4].

Перепишем получившееся уравнение и ещё два, отличающиеся циклической перестановкой индексов $i \to j \to k \to i$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{kji} + \Gamma_{jki} &= \partial_i g_{jk}, \\ \Gamma_{ikj} + \Gamma_{kij} &= \partial_j g_{ki}, \\ \Gamma_{jik} + \Gamma_{ijk} &= \partial_k g_{ij}. \end{aligned}$$

Сложим два первых уравнения и вычтем из них третье:

$$\underline{\Gamma_{kji}} + \cancel{\Gamma_{jki}} + \cancel{\Gamma_{ikj}} + \underline{\Gamma_{kij}} - \cancel{\Gamma_{jik}} - \cancel{\Gamma_{ijk}} = \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}. \tag{2.2.11}$$

С учётом симметрии связности получаем

$$\Gamma_{kij} = \frac{1}{2}\left[\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}\right], \qquad \Gamma^m{}_{ij} = \frac{g^{mk}}{2}\left[\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}\right]. \tag{2.2.12}$$

Такие коэффициенты связности уже возникали выше в задаче 7г.

(!) Мы можем выбрать систему координат так, что в любой выбранной точке коэффициенты симметричной связности обратятся в нуль.

2.2.15 Метрическая связность с кручением*

Обобщим предыдущий параграф на случай, когда тензор кручения может быть отличен от нуля.

В общем случае связность задаётся независимо от метрики. Это две разные геометрические структуры. Однако при наличии метрики можно задать ***не****симметричную метрическую связность*, которая полностью определяется метрикой *и тензором кручения*. Такую связность мы выведем из следующих постулатов.

- Связность *не* обязательно симметрична: $\Gamma^i{}_{jk} - \Gamma^i{}_{kj} = T^i{}_{jk}$.
- Метрика ковариантно постоянна: $\nabla_i g_{jk} = 0$.

Несимметричность связности означает отличие от нуля тензора кручения, т.е. связность определяется *не только* метрикой, но и тензором кручения.

Ковариантное постоянство метрики позволяет вносить её под ковариантные производные и, в частности, опускать и поднимать индексы под ковариантной производной. Например, мы можем или параллельно перенести вектор вдоль кривой, а потом опустить у него индекс и сделать ковектором, или сразу опустить индекс, а потом сделать параллельный перенос. Если метрика ковариантно постоянна, то результат будет одинаков. Это означает, что для такого параллельного переноса вектор и полученный из него ковектор не различаются и могут рассматриваться как разные представления одного объекта.

Получим из наших постулатов явное выражение коэффициентов связности:

$$\nabla_i g_{jk} = \partial_i g_{jk} - \underbrace{g_{sk}\Gamma^s{}_{ji}}_{\Gamma_{kji}} - \underbrace{g_{js}\Gamma^s{}_{ki}}_{\Gamma_{jki}} = 0.$$

Мы ввели коэффициенты связности с тремя нижними индексами[5].

Перепишем получившееся уравнение и ещё два, отличающиеся циклической перестановкой индексов $i \to j \to k \to i$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{kji} + \Gamma_{jki} &= \partial_i g_{jk}, \\ \Gamma_{ikj} + \Gamma_{kij} &= \partial_j g_{ki}, \\ \Gamma_{jik} + \Gamma_{ijk} &= \partial_k g_{ij}. \end{aligned}$$

Сложим два первых уравнения и вычтем из них третье, как выше при получении уравнения (2.2.11):

$$\underline{\Gamma_{kji}} + \underbrace{\Gamma_{jki}} + \overbrace{\Gamma_{ikj}} + \underline{\Gamma_{kij}} - \underbrace{\Gamma_{jik}} - \overbrace{\Gamma_{ijk}} = \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}. \tag{2.2.13}$$

[4]Поскольку коэффициенты связности не образуют тензора, поднимание и опускание индексов для них лучше оговаривать явно.

[5]Поскольку коэффициенты связности не образуют тензора, поднимание и опускание индексов для них лучше оговаривать явно.

С учётом равенства $\Gamma_{kji} + \Gamma_{kij} = 2\Gamma_{kij} + T_{kji}$ получаем

$$2\Gamma_{kij} + T_{kji} + T_{jki} + T_{ikj} = \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij},$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{kij} &= \frac{1}{2}\left[\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}\right] + \frac{1}{2}\left[T_{kij} + T_{jik} + T_{ijk}\right], \\ \Gamma^m{}_{ij} &= \frac{g^{mk}}{2}\left[\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}\right] + \frac{1}{2}\left[T^m{}_{ij} + T_{ji}{}^m + T_{ij}{}^m\right]. \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

(!) Мы можем выбрать систему координат так, что в любой выбранной точке симметричная часть связности обратится в нуль и *в данной точке* будет выполняться равенство $\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}T^i{}_{jk}$.

Глава 2.3

Лагранжев формализм и производная Ли (с. 51)

2.3.1 Решения задач 9—11

9. * Матрица масс.
Кинетическая энергия в классической механике, выраженная через обобщённые скорости, имеет вид положительно-определённой квадратичной формы: $\mathcal{E}_\text{к} = \frac{1}{2} m_{\alpha\beta}(x)\, \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$. В криволинейных координатах матрица массовых коэффициентов $m_{\alpha\beta}(x)$ может зависеть от координат. *Рассматриваемые замены координат не зависят от времени.*

Условия отдельных пунктов и решения

а) Как матрица $m_{\alpha\beta}$ преобразуется при замене координат?

Кинетическая энергия задаётся как квадратичная форма от скорости $\mathcal{E}_\text{к}(\dot{x})$ и является скаляром. Матрицу $m_{\alpha\beta}$ будем считать симметричной, т.к. только её симметричная часть вносит вклад в квадратичную форму.

Для двух произвольных векторов скорости $\dot{x}^\alpha$ и $\dot{y}^\alpha$ мы можем построить билинейную форму, которая также является скаляром, т.к. выражается через кинетическую энергию:

$$\frac{\mathcal{E}_\text{к}(\dot{x}+\dot{y}) - \mathcal{E}_\text{к}(\dot{x}-\dot{y})}{2} = m_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha \dot{y}^\beta.$$

Из того, что $m_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha \dot{y}^\beta$ — скаляр для произвольных $\dot{x}^\alpha$ и $\dot{y}^\alpha$, по признаку тензора следует, что матрица масс $m_{\alpha\beta}$ — тензор с двумя нижними индексами.

При замене координат матрица масс преобразуется, как и полагается такому тензору:

$$m_{\alpha'\beta'} = m_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}}.$$

Если для всякой ненулевой скорости кинетическая энергия положительна, то матрица масс оказывается ещё и положительно определённой.

Тензор с двумя нижними индексами, который задаётся симметричной положительно определённой матрицей, естественно использовать как метрический тензор. И действительно, в ньютоновской механике, когда кинетическая энергия задаётся квадратичной формой по скоростям, матрица масс оказывается естественной метрикой в конфигурационном пространстве.

Для одной частицы матрица масс равна метрическому тензору, умноженному на массу, $m_{\alpha\beta} = m g_{\alpha\beta}$. Для нескольких частиц мы могли бы определить расстояние в конфигурационном пространстве через сумму квадратов расстояний для всех частиц:

$$d\ell^2 = \sum_a g_{\alpha\beta}(x_a)\, dx_a^\alpha\, dx_a^\beta,$$

где a — номер частицы. Но для такой метрики смещение лёгкой частицы и смещение тяжёлой учитываются одинаково. При использовании в качестве метрики матрицы масс смещение тяжёлой частицы при вычислении расстояния учитывается с бóльшим весом, что естественно:

$$d\ell^2 = \sum_a m_a g_{\alpha\beta}(x_a)\, dx_a^\alpha\, dx_a^\beta.$$

Такую метрику и обобщает наша матрица масс. Почему обобщает? Потому что в системе могут быть связи и некоторые степени свободы могут быть связаны сразу с системой частиц, например, угловые координаты твёрдого тела связаны сразу со всеми частицами, образующими тело.

Другие удобства такой метрики мы увидим ниже.

б) Что такое свёртка $m_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta$?

Если мы рассматриваем матрицу масс как метрику, то свёртка $m_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta$ — это скорость с опущенным индексом. С другой стороны, $m_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta = \frac{\partial \mathcal{E}_\text{к}}{\partial \dot{x}^\alpha}$. Если лагранжиан для нашей системы содержит скорости только в выражении для кинетической энергии, то

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = \frac{\partial \mathcal{E}_\text{к}}{\partial \dot{x}^\alpha} = m_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta$$

и скорость с опущенным с помощью матрицы масс индексом оказывается импульсом.

На всякий случай мы проявим осторожность и скажем, что наше выражение — это *кинематический импульс*, т.е. импульс, не учитывающий вхождение скорости куда-либо, кроме кинетической энергии. Случаи, когда кинематический импульс не совпадает с обобщённым, встретятся нам в задаче 10б,г.

в) Как преобразуется при замене координат обратная матрица $(m^{-1})^{\alpha\beta}$ ($(m^{-1})^{\alpha\beta}m_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma$)?

Раз $m_{\alpha\beta}$ ведёт себя как метрический тензор, то обратная матрица $(m^{-1})^{\alpha\beta}$ ведёт себя как обратный метрический тензор и преобразуется как тензор с двумя верхними индексами:

$$(m^{-1})^{\alpha'\beta'} = (m^{-1})^{\alpha\beta}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta}.$$

г) Запишите кинетическую энергию через кинематические импульсы.

Скалярное произведение можно записать или через контравариантные компоненты векторов и прямую метрику, или через ковариантные компоненты векторов и обратную метрику:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = g_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta = g^{\alpha\beta}a_\alpha b_\beta.$$

Кинетическую энергию, которая равна половине скалярного квадрата вектора скорости, также можно записать или через контравариантные компоненты скорости и прямую метрику (матрицу масс), или через ковариантные компоненты скорости (кинематические импульсы) и обратную метрику (обратную матрицу масс):

$$\mathcal{E}_\text{к} = \frac{1}{2}m_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = \frac{1}{2}(m^{-1})^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta.$$

д*) Вернитесь в контексте данной задачи к задаче 7.

В задаче 7 рассматривалась одна частица, и матрица масс для неё равнялась метрике пространства, умноженной на массу. Соответственно матрица масс в декартовых и полярных координатах равнялась

$$m_{\alpha\beta} = \operatorname{diag}(m,m), \qquad m_{\alpha'\beta'} = \operatorname{diag}(m, mr^2).$$

Подчеркнём в заключение ещё раз, что все полученные нами результаты об использовании матрицы масс в качестве метрики предполагали, что кинетическая энергия квадратична по скорости, т.е. это относится в первую очередь к ньютоновской механике в обобщённых (не обязательно декартовых) координатах. В теории относительности такой подход не работает[1].

10. От действия к системе-2.
Проварьируйте действия, запишите уравнения движения, определите обобщённые импульсы, обобщённые силы, энергию. Опишите словами и проиллюстрируйте графиками, какой системе может соответствовать такое действие.

Условия отдельных пунктов и решения

а) $S[\mathbf{r}_1(t),\mathbf{r}_2(t)] = \int\left(\frac{m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2}{2} - U(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\right)dt$ ($m_1, m_2 = \text{const}$).

Проварьируем действие:

$$\delta S = \int\left(m_1\dot{\mathbf{r}}_1\delta\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2\delta\dot{\mathbf{r}}_2 - \delta\mathbf{r}_1\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_1}U(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) - \delta\mathbf{r}_2\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_2}U(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\right)dt;$$

[1] Точнее, *как правило*, не работает. Иногда с некоторыми ухищрениями его можно применить.

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \boldsymbol{\nabla} U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \qquad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = -\boldsymbol{\nabla} U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2),$$

где $\boldsymbol{\nabla} = (\nabla_1, \nabla_2, \nabla_3)$, ∇_α — производная по компоненте номер α аргумента функции U. Проинтегрировав по частям члены, содержащие $\delta\dot{\mathbf{r}}_{1,2}$, находим

$$\delta S = \int \Big(\left[-m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 - \boldsymbol{\nabla} U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\right] \delta \mathbf{r}_1 + \left[-m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 + \boldsymbol{\nabla} U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\right] \delta \mathbf{r}_2 \Big)\, dt.$$

Получаем уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$-m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 - \boldsymbol{\nabla} U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = 0, \qquad -m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 + \boldsymbol{\nabla} U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = 0.$$

Выражения для импульсов, сил и энергии получаются стандартным образом:

$$\mathbf{p}_1 = m_1 \dot{\mathbf{r}}_1, \quad \mathbf{p}_2 = m_2 \dot{\mathbf{r}}_2, \quad \mathbf{f}_1 = -\boldsymbol{\nabla} U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad \mathbf{f}_2 = \boldsymbol{\nabla} U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = -\mathbf{f}_1, \quad \mathcal{E} = \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2}{2} + U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

Действие описывает систему из двух частиц, потенциал взаимодействия которых определяется их относительным положением $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$.

У системы имеется симметрия относительно одновременного сдвига обоих частиц:

$$\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}, \quad \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}.$$

Этой симметрии соответствует сохранение суммарного импульса системы[2] $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$. Для двухчастичной системы закон сохранения импульса — это закон Ньютона 3а:

$$\mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}_2.$$

Если потенциал U зависит только от расстояния между частицами:

$$U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|),$$

то появляется симметрия относительно одновременного поворота обоих частиц. Такой симметрии соответствует закон сохранения суммарного момента импульса:

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1] + [\mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2].$$

Для двухчастичной системы закон сохранения момента импульса — это закон Ньютона 3б который с учётом закона 3а можно записать как условие параллельности сил вектору, соединяющему частицы,

$$\mathbf{f}_1 \parallel \mathbf{f}_2 \parallel (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

г) $S[\mathbf{r}(t)] = \int \left(\frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + \frac{q}{c}(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)) - q\varphi(\mathbf{r}, t) \right) dt$ ($m, q, c = \text{const}$, ср. с задачей 2 в).

В лагранжиане данной задачи мы легко узнаём кинетическую энергию $\frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2}$, квадратичную по скорости, и потенциальную энергию $q\varphi(\mathbf{r}, t)$, которая не зависит от скорости и связана со скалярным потенциалом φ, но также появляется линейный по скорости член $\frac{q}{c}(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{A}(\mathbf{r}, t))$, который связан с новым для нас объектом — *векторным потенциалом* $\mathbf{A}$.

Рассмотрим задачу для произвольной размерности пространства, после чего перейдём к частным случаям одномерного пространства (задача 2в) и трёхмерного пространства. Задачу будем решать в декартовых координатах, используя тензорные обозначения:

$$S[r_\alpha(t)] = \int \left(\frac{m\dot{r}_\alpha \dot{r}_\alpha}{2} + \frac{q}{c} \dot{r}_\alpha A_\alpha(\mathbf{r}, t) - q\varphi(\mathbf{r}, t) \right) dt,$$

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int \left(m\dot{r}_\alpha\, \delta\dot{r}_\alpha + \tfrac{q}{c}\, \delta\dot{r}_\alpha A_\alpha(\mathbf{r}, t) + \tfrac{q}{c} \dot{r}_\alpha\, \delta A_\alpha(\mathbf{r}, t) - q\, \delta\varphi(\mathbf{r}, t) \right) dt = \\
&= \int \Big(\underbrace{[m\dot{r}_\alpha + \tfrac{q}{c} A_\alpha(\mathbf{r}, t)]}_{P_\alpha} \delta\dot{r}_\alpha + \tfrac{q}{c} \underbrace{\dot{r}_\alpha\, \delta r_\beta\, \partial_\beta A_\alpha(\mathbf{r}, t)}_{\alpha \leftrightarrow \beta} - q\, \delta r_\alpha\, \partial_\alpha \varphi(\mathbf{r}, t) \Big)\, dt = \\
&= \int \Big([-m\ddot{r}_\alpha - \tfrac{q}{c} \tfrac{d}{dt} A_\alpha(\mathbf{r}, t)]\, \delta r_\alpha + \tfrac{q}{c} \dot{r}_\beta\, \delta r_\alpha\, \partial_\alpha A_\beta(\mathbf{r}, t) - q\, \delta r_\alpha\, \partial_\alpha \varphi(\mathbf{r}, t) \Big)\, dt = \\
&= \int \Big(- m\ddot{r}_\alpha \underbrace{- \tfrac{q}{c} \tfrac{\partial}{\partial t} A_\alpha(\mathbf{r}, t) - \tfrac{q}{c} \dot{r}_\beta\, \partial_\beta A_\alpha(\mathbf{r}, t)}_{-\frac{q}{c}\frac{d}{dt} A_\alpha(\mathbf{r}, t)} + \tfrac{q}{c} \dot{r}_\beta\, \partial_\alpha A_\beta(\mathbf{r}, t) - q\, \partial_\alpha \varphi(\mathbf{r}, t) \Big)\, \delta r_\alpha\, dt = \\
&= \int \Big(- m\ddot{r}_\alpha + q[-\tfrac{1}{c} \tfrac{\partial}{\partial t} A_\alpha - \partial_\alpha \varphi] + \tfrac{q}{c} [\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha]\, \dot{r}_\beta \Big)\, \delta r_\alpha\, dt.
\end{aligned}$$

[2] Связь законов сохранения энергии, импульса и момента импульса с соответствующими симметриями разобрана в п. 1.3.5.5 «Главные примеры применения теоремы Нётер».

Уравнения Эйлера-Лагранжа имеют вид

$$-m\ddot{r}_\alpha + q[-\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial}{\partial t}A_\alpha - \partial_\alpha\varphi] + \tfrac{q}{c}[\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha]\,\dot{r}_\beta = 0.$$

Перепишем его в виде второго закона Ньютона:

$$m\ddot{r}_\alpha = q[-\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial}{\partial t}A_\alpha - \partial_\alpha\varphi] + \tfrac{q}{c}[\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha]\,\dot{r}_\beta.$$

Теперь правую часть можно назвать силой (обычной, не обобщённой), действующей на частицу:

$$F_\alpha = q[-\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial}{\partial t}A_\alpha - \partial_\alpha\varphi] + \tfrac{q}{c}[\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha]\,\dot{r}_\beta.$$

Обобщённый импульс теперь зависит не только от массы и скорости, но и от векторного потенциала:

$$P_\alpha = m\dot{r}_\alpha + \tfrac{q}{c}A_\alpha(\mathbf{r},t).$$

Обобщённая сила в данном случае отличается от обычной, потому что обобщённый импульс P_α отличается от кинематического импульса $m\dot{r}_\alpha$:

$$f_\alpha = \tfrac{q}{c}\dot{r}_\beta\,\partial_\alpha A_\beta(\mathbf{r},t) - q\,\partial_\alpha\varphi(\mathbf{r},t).$$

В энергию векторный потенциал $\mathbf{A}$ вклада не даёт, и мы легко получаем, что энергия — это просто сумма кинетической и потенциальной энергий:

$$\mathcal{E} = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + q\varphi(\mathbf{r},t).$$

Исследуем силу, действующую на частицу. Она состоит из двух слагаемых. Одно слагаемое пропорционально некоторому векторному полю $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{F}_1 = q\mathbf{E}, \qquad \mathbf{E} = -\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} - \boldsymbol{\nabla}\varphi.$$

Сила $\mathbf{F}_1$ была бы потенциальной в отсутствие векторного потенциала.

Другое слагаемое пропорционально антисимметричной матрице, действующей на вектор скорости, которую мы обозначим dA:

$$\mathbf{F}_2 = \tfrac{q}{c}\,dA\,\dot{\mathbf{r}}, \qquad dA_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha.$$

Мощность такой силы всегда равна нулю: $(\dot{\mathbf{r}},\mathbf{F}_2) = \dot{\mathbf{r}}^T dA\,\dot{\mathbf{r}} = 0$ (здесь мы считаем вектор столбцом) в силу антисимметричности матрицы dA. Такие силы называются *гироскопическими силами*.

В одномерном случае (задача 2 в) антисимметричная матрица неизбежно равна нулю и гироскопическая сила отсутствует.

К векторному потенциалу можно добавить градиент произвольной скалярной функции:

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}f(\mathbf{r},t) \quad \Leftrightarrow \quad A_\alpha \to A'_\alpha = A_\alpha + \partial_\alpha f(\mathbf{r},t).$$

На матрицу dA и гироскопическую силу $\mathbf{F}_2$ это не повлияет (проверьте!). Для того чтобы поле $\mathbf{E}$ и сила $\mathbf{F}_1$ также остались неизменными, надо также сделать добавку к скалярному потенциалу (проверьте!):

$$\varphi \to \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f(\mathbf{r},t)}{\partial t}.$$

Такое одновременное преобразование скалярного и векторного потенциалов называется *калибровочным* или *градиентным преобразованием*. Оно не влияет на уравнения движения частицы, а влияет лишь на потенциалы, т.е. на способ описания сил.

Рассмотрим случай трёхмерного пространства. Антисимметричная матрица 3×3 имеет три независимые компоненты, т.е. столько же компонент, как 3-мерный вектор. Попытаемся переписать силу $\mathbf{F}_2$ полностью на векторном языке. Сначала воспользуемся тем, что дельта-символы позволяют нам переименовывать индексы, и вынесем ∂A за скобки:

$$\begin{aligned}(\mathbf{F}_2)_\alpha &= \tfrac{q}{c}[\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha]\,\dot{r}_\beta = \tfrac{q}{c}\underbrace{[\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}]}_{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\nu\gamma}}(\partial_\mu A_\nu)\,\dot{r}_\beta = \\ &= \tfrac{q}{c}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\underbrace{(\varepsilon_{\mu\nu\gamma}\partial_\mu A_\nu)}_{[\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}]_\gamma}\dot{r}_\beta = \tfrac{q}{c}[\dot{\mathbf{r}}\times[\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}]]_\alpha.\end{aligned}$$

У нас возникло выражение, которое записывается как векторное произведение оператора $\boldsymbol{\nabla}$ на вектор $\mathbf{A}$:

$$\varepsilon_{\mu\nu\gamma}\partial_\mu A_\nu = [\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}]_\gamma.$$

Оно называется *ротором векторного поля* $\mathbf{A}$ и обозначается

$$[\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}] = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Теперь гироскопическую силу можно переписать через векторное произведение скорости на псевдовекторное поле[3] $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{F}_2 = \tfrac{q}{c}[\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}], \qquad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Уравнение движения приняло вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E} + \tfrac{q}{c}[\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}].$$

В этом уравнении легко узнать уравнение движения нерелятивистской частицы (т.е. частицы, скорость которой мала по сравнению со скоростью света) с электрическим зарядом q в электрическом поле $\mathbf{E}$ и магнитном поле $\mathbf{B}$.

Остаётся один вопрос. Электромагнитное поле в данном уравнении движения не может быть произвольным полем, поскольку поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ параметризованы определённым образом с помощью скалярного потенциала φ и векторного потенциала $\mathbf{A}$. Какие ограничения эта параметризация накладывает на поля? Имеем

$$\mathbf{E} = -\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} - \boldsymbol{\nabla}\varphi, \qquad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = [\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}].$$

Дифференциальный оператор $[\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}]$ всегда даёт нуль, поскольку $[\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}]_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial_\beta\partial_\gamma$, вторая производная $\partial_\beta\partial_\gamma$ для достаточно гладких функций симметрична, а $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ антисимметрично. Это наблюдение позволяет вывести из определений $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ тождества

$$(\operatorname{rot}\mathbf{E})_\gamma = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha E_\beta = -\tfrac{1}{c}\underbrace{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha\tfrac{\partial}{\partial t}}_{\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha} A_\beta - \underbrace{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha\partial_\beta}_{0}\varphi = -\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha A_\beta) = -\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}\mathbf{A})_\gamma = -\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}_\gamma;$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = (\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{B}) = \partial_\alpha B_\alpha = \underbrace{\partial_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial_\beta}_{0} A_\gamma = 0.$$

Здесь мы использовали ещё одну дифференциальную операцию, которая называется *дивергенцией*: $\operatorname{div}\mathbf{B} = (\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{B}) = \partial_\alpha B_\alpha$.

Наше тождество $[\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}] = 0$ получило два представления $\operatorname{rot}\operatorname{grad} = 0$ и $\operatorname{div}\operatorname{rot} = 0$, с их помощью мы вывели два тождества на электромагнитные поля, которые допускают параметризацию через скалярный и векторный потенциалы:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0.$$

В этих тождествах можно узнать два уравнения Максвелла из четырёх. Эти уравнения называют *первой парой уравнений Максвелла*. Как мы увидим позже, их физический смысл — отсутствие магнитных зарядов (*магнитных монополей*).

Мы показали, что первая пара уравнений Максвелла выполняется автоматически, если поле задано через скалярный и векторный потенциалы, т. е. показали необходимость этих уравнений для такой параметризации. Можно показать, что первая пара для данной параметризации является не только необходимой, но и достаточной, если поля заданы во всём евклидовом пространстве. Это доказательство будет приведено позже в главе 2.12 «Интегрирование антисимметричных тензоров».

11. ** Лагранжева механика с высшими производными (М.Г. Иванов)

Задача давалась на олимпиаде МФТИ по теоретической физике 2021 г.
Исследуйте действие с высшими производными

$$S[x_\alpha(t)] = \int_{t_1}^{t_0} L(x_\alpha, \dot{x}_\alpha, \ddot{x}_\alpha, \ldots, x_\alpha^{(n)}, t)\,dt, \quad \dot{x}_\alpha = \frac{dx_\alpha}{dt}, \quad \ddot{x}_\alpha = \frac{d^2x_\alpha}{dt^2}, \quad \ldots \quad x_\alpha^{(n)} = \frac{d^nx_\alpha}{dt^n}. \tag{2.3.1}$$

При решении задачи можно использовать метод множителей Лагранжа (см. главу 1.4).

Условия отдельных пунктов и решения

а) Из принципа экстремального действия найдите уравнения движения.

[3]Напоминаем, что псевдотензор (в том числе псевдовектор) ведёт себя как тензор (вектор) при преобразованиях с положительным якобианом, а при преобразованиях с отрицательным якобианом его закон преобразования отличается общим знаком от тензорного закона. Так как $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ — псевдотензор, ротор вектора — псевдовектор.

Уравнения движения для действия (2.3.1) имеют вид

$$\frac{\delta S}{\delta x_\alpha} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{d^i}{dt^i} \frac{\partial L}{\partial x_\alpha^{(i)}} = \frac{\partial L}{\partial x_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_\alpha} + \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\frac{\partial L}{\partial x_\alpha^{(n)}} = 0. \tag{2.3.2}$$

б) Определите энергию через функцию L.
в) Вычислите для определённой вами энергии $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$ при условии выполнения уравнений движения.
г) Убедитесь, что для автономного лагранжиана (при $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$) введённая энергия сохраняется.

Мы можем понизить порядок дифференциального уравнения, рассмотрев производные с нулевой по $(n-1)$-ю в качестве новых координат $x_{\alpha,i} = x_\alpha^{(i-1)}$, $i = 1, \ldots, n$.

С помощью неопределённых множителей Лагранжа мы можем ввести лагранжиан без высших производных, который даст те же уравнения движения, что и исходное действие (2.3.1):

$$L_\lambda(x_{\alpha,i}, \dot{x}_{\alpha,i}, \lambda_{\alpha,i}, t) = L(x_{\alpha,1}, x_{\alpha,2}, \ldots, x_{\alpha,n}, \dot{x}_{\alpha,n}, t) + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_\alpha \lambda_{\alpha,i}(\dot{x}_{\alpha,i} - x_{\alpha,i+1}). \tag{2.3.3}$$

Соответствующее действие

$$S_\lambda[x_{\alpha,i}(t), \lambda_{\alpha,i}(t)] = \int L_\lambda(x_{\alpha,i}, \dot{x}_{\alpha,i}, \lambda_{\alpha,i}, t)\, dt \tag{2.3.4}$$

при вариации даёт следующие уравнения движения:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S_\lambda}{\delta \lambda_{\alpha,i}} &= \dot{x}_{\alpha,i} - x_{\alpha,i+1} = 0, \quad i = 1, \ldots, n-1, && (2.3.5)\\
\frac{\delta S_\lambda}{\delta x_{\alpha,1}} &= \frac{\partial L}{\partial x_{\alpha,1}} - \frac{d\lambda_{\alpha,1}}{dt} = 0, && (2.3.6)\\
\frac{\delta S_\lambda}{\delta x_{\alpha,i}} &= \frac{\partial L}{\partial x_{\alpha,i}} - \lambda_{\alpha,i-1} - \frac{d\lambda_{\alpha,i}}{dt} = 0, \quad i = 2, \ldots, n-1, && (2.3.7)\\
\frac{\delta S_\lambda}{\delta x_{\alpha,n}} &= \frac{\partial L}{\partial x_{\alpha,n}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\alpha,n}} - \lambda_{\alpha,n-1} = 0. && (2.3.8)
\end{aligned}$$

Мы можем стандартным образом (поскольку от высших производных мы уже избавились) определить импульсы

$$p_{\alpha,i} = \frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{x}_{\alpha,i}} = \lambda_{\alpha,i}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \qquad p_{\alpha,n} = \frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{x}_{\alpha,n}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\alpha,n}} \tag{2.3.9}$$

и энергию

$$\mathcal{E}_\lambda = \sum_{i=1}^{n}\sum_\alpha \dot{x}_{\alpha,i} p_{\alpha,i} - L_\lambda = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_\alpha \dot{x}_{\alpha,i}\lambda_{\alpha,i} + \dot{x}_{\alpha,n}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\alpha,n}} - L_\lambda = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_\alpha x_{\alpha,i+1}\lambda_{\alpha,i} + \dot{x}_{\alpha,n}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\alpha,n}} - L. \tag{2.3.10}$$

Уравнение баланса энергии имеет обычный вид (1.3.10)

$$\frac{d\mathcal{E}_\lambda}{dt} = -\frac{\partial L_\lambda}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \tag{2.3.11}$$

потому что мы получили эту энергию из лагранжиана без высших производных.

Осталось избавиться от лишних переменных. Из уравнений (2.3.5) получаем

$$x_{\alpha,i} = x_\alpha^{(i-1)}, \quad \text{где} \quad x_\alpha = x_{\alpha,1}.$$

Из уравнений (2.3.7)–(2.3.8), решая их в обратном порядке, выражаем лагранжевы множители $\lambda_{\alpha,i}$:

$$\begin{aligned}
\lambda_{\alpha,n-1} &= \frac{\partial L}{\partial x_\alpha^{(n-1)}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha^{(n)}},\\
\lambda_{\alpha,n-2} &= \frac{\partial L}{\partial x_\alpha^{(n-2)}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha^{(n-1)}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha^{(n)}},\\
&\cdots\\
\lambda_{\alpha,i} &= \sum_{j=0}^{n-i}(-1)^j \frac{d^j}{dt^j}\frac{\partial L}{\partial x_\alpha^{(i+j)}}, \quad i = 1, \ldots, n-1. && (2.3.12)
\end{aligned}$$

Уравнение (2.3.6) после подстановки $\lambda_{\alpha,1}$ воспроизводит уравнения движения для исходного лагранжиана с высшими производными (2.3.2). Мы обосновали тем самым переход от действия (2.3.1) к действию (2.3.4) (впрочем, этот переход и без того обоснован применением метода множителей Лагранжа). Выражение в левой части формулы (2.3.2) имеет вид $\lambda_{\alpha,0}$, вычисленного по формуле (2.3.12).

Также по формуле (2.3.12) может быть вычислено $p_{\alpha,n} = \lambda_{\alpha,n}$. Таким образом, мы можем определить $\lambda_{\alpha,i}$ при $i = 0, 1, \ldots, n$.

Окончательно получаем

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha} x_{\alpha}^{(i)} \lambda_{\alpha,i} - L, \qquad \lambda_{\alpha,i} = \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \frac{\partial L}{\partial x_{\alpha}^{(i+j)}}. \tag{2.3.13}$$

Полученная энергия (2.3.13) уже не содержит вспомогательных переменных и полностью выражена в терминах исходного лагранжиана.

д) Выпишите уравнения движения и энергию в частном случае $n = 2$.

При $n = 2$ имеем

$$\mathcal{E} = \sum_{\alpha} \left[\dot{x}_{\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\alpha}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_{\alpha}} \right) + \ddot{x}_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^{\alpha}} \right] - L.$$

е) Проверьте, что предложенное определение энергии работает для лагранжиана вида

$$L(x, \dot{x}, \ddot{x}) = -\frac{m\, x\ddot{x}}{2} - U(x). \tag{2.3.14}$$

Для лагранжиана (2.3.14) получаем обычное выражение для энергии нерелятивистской частицы в потенциале:

$$\mathcal{E} = \dot{x}_{\alpha} \left(-\frac{d}{dt} \left[-\frac{mx}{2} \right] \right) + \ddot{x}_{\alpha} \left[-\frac{mx}{2} \right] - \left(-\frac{mx\ddot{x}}{2} - U(x) \right) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x).$$

Это неудивительно, ведь лагранжиан (2.3.14) сводится к стандартному (кинетическая энергия минус потенциальная) добавлением полной производной по времени.

(!) Решение данной задачи показало, что введение в лагранжиан высших производных не позволяет описать ничего такого, чего нельзя было бы описать без высших производных: случай с высшими производными использованием метода лагранжевых множителей сводится к обычной лагранжевой механике без высших производных.

Альтернативные способы решения

1) По аналогии с обычной энергией можно искать энергию из уравнения

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Сведение $\frac{\partial L}{\partial t}$ к полной производной по времени требует аккуратных вычислений, но некоторые участники олимпиады смогли пройти этот путь.

2) По аналогии с выводом уравнения Гамильтона-Якоби (см. с. 405) мы можем догадаться, что

$$\mathcal{E} = \frac{dS}{dt},$$

где полная производная по времени берётся вдоль траектории, удовлетворяющей уравнению движения.

То, что данная догадка верна, следует из приведённого выше решения, которое сводит задачу с высшими производными к стандартному лагранжеву формализму без высших производных. В случае если эта догадка взята за основу, после нахождения выражения для энергии следует сделать проверку и убедиться, что $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$.

2.3.2 Производная Ли

Однопараметрические группы симметрий конфигурационного пространства $x' = X(x, s)$ ($X(x, 0) = x$, $X(X(x, s_1), s_2) = X(x, s_1 + s_2)$), которые используются в теореме Нётер, можно рассматривать либо как пассивные преобразования (замены координат), либо как активные преобразования (отображения пространства на себя).

Мы будем рассматривать преобразования как активные. При этом и до и после преобразования используется одна и та же система координат, но точки пространства сдвигаются вдоль некоторого векторного поля $\mathbf{v}$ в соответствии с законом $x' = X(x,s)$.

Рассмотрим, как при таком преобразовании координат отображаются тензоры. Соответствующая формула идентична закону преобразования тензора при замене координат, но имеет другую интерпретацию: преобразование тензора при отображении пространства на себя.

Чтобы проверить, является ли данная группа преобразований симметрией лагранжиана, полезно исследовать, как она преобразует различные параметры, входящие в лагранжиан. Такие параметры во многих случаях являются тензорными полями на конфигурационном пространстве. Например, как мы уже видели в задачах 7, 9, это может быть метрика (матрица масс).

Для тензоров T и T' мы используем одинаковые индексы, поскольку эти тензоры заданы в одной и той же системе координат. При этом важно следить за аргументами всех входящих в формулу величин, т.к. T и T' заданы в разных точках пространства.

Преобразование в одну сторону имеет вид

$$T'^{i_1 i_2 \cdots}{}_{j_1 j_2 \ldots}(x',s) = T^{m_1 m_2 \cdots}{}_{n_1 n_2 \ldots}(X(x',-s)) \frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{m_1}} \frac{\partial x'^{i_2}}{\partial x^{m_2}} \cdots \frac{\partial x^{n_1}}{\partial x'^{j_1}} \frac{\partial x^{n_2}}{\partial x'^{j_2}} \cdots \tag{2.3.15}$$

В силу того, что преобразования образуют однопараметрическую группу, их легко обратить, поменяв знак s:

$$x' = X(x,s), \qquad x = X(x',-s).$$

В обратную сторону преобразование имеет вид

$$T^{m_1 m_2 \cdots}{}_{n_1 n_2 \ldots}(x,s) = T'^{i_1 i_2 \cdots}{}_{j_1 j_2 \ldots}(X(x,s)) \frac{\partial x^{m_1}}{\partial x'^{i_1}} \frac{\partial x^{m_2}}{\partial x'^{i_2}} \cdots \frac{\partial x'^{j_1}}{\partial x^{n_1}} \frac{\partial x'^{j_2}}{\partial x^{n_2}} \cdots \tag{2.3.16}$$

Если зафиксировать точку x' и непрерывно менять s, то мы сидим в некоторой точке пространства, а мимо нас со скоростью $v^i = \left.\frac{dX^i}{ds}\right|_{s=0}$ проплывают тензорные поля, что удобно описывать формулой (2.3.15). В частности, если мы будем дифференцировать (при фиксированном x') проплывающее мимо скалярное поле, то получим

$$\frac{d}{ds}\varphi(X(x',-s))_{s=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\frac{dX^i}{ds}(-1) = -v^i \partial_i \varphi.$$

Мы получили дифференцирование вдоль векторного поля $-v^i$.

Если зафиксировать точку x и непрерывно менять s, то мы плывём со скоростью $v^i = \left.\frac{dX^i}{ds}\right|_{s=0}$ по пространству мимо тензорных полей, что удобно описывать формулой (2.3.16). В частности, если мы будем дифференцировать (при фиксированном x) проплывающее мимо скалярное поле, то получим

$$\frac{d}{ds}\varphi'(X(x,s))_{s=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\frac{dX^i}{ds} = v^i \partial_i \varphi.$$

Мы получили дифференцирование вдоль векторного поля v^i.

Аналогично мы можем дифференцировать по s не только скаляры, но и тензоры других видов. Тем самым мы обобщим дифференцирование вдоль векторного поля v^i на тензоры произвольной валентности.

Продифференцируем по s при фиксированном x формулу (2.3.16).

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}T^{m_1 m_2 \cdots}{}_{n_1 n_2 \ldots}(x,s)_{s=0} \;=\; & \left[\frac{d}{ds}T'^{i_1 i_2 \cdots}{}_{j_1 j_2 \ldots}(X(x,s))\right] \frac{\partial x^{m_1}}{\partial x'^{i_1}} \frac{\partial x^{m_2}}{\partial x'^{i_2}} \cdots \frac{\partial x'^{j_1}}{\partial x^{n_1}} \frac{\partial x'^{j_2}}{\partial x^{n_2}} \cdots + \\
& + T'^{i_1 i_2 \cdots}{}_{j_1 j_2 \ldots}(X(x,s)) \left[\frac{d}{ds}\frac{\partial x^{m_1}}{\partial x'^{i_1}}\right] \frac{\partial x^{m_2}}{\partial x'^{i_2}} \cdots \frac{\partial x'^{j_1}}{\partial x^{n_1}} \frac{\partial x'^{j_2}}{\partial x^{n_2}} \cdots + \\
& + T'^{i_1 i_2 \cdots}{}_{j_1 j_2 \ldots}(X(x,s)) \frac{\partial x^{m_1}}{\partial x'^{i_1}} \left[\frac{d}{ds}\frac{\partial x^{m_2}}{\partial x'^{i_2}}\right] \cdots \frac{\partial x'^{j_1}}{\partial x^{n_1}} \frac{\partial x'^{j_2}}{\partial x^{n_2}} \cdots + \\
& + \cdots + \\
& + T'^{i_1 i_2 \cdots}{}_{j_1 j_2 \ldots}(X(x,s)) \frac{\partial x^{m_1}}{\partial x'^{i_1}} \frac{\partial x^{m_2}}{\partial x'^{i_2}} \cdots \left[\frac{d}{ds}\frac{\partial x'^{j_1}}{\partial x^{n_1}}\right] \frac{\partial x'^{j_2}}{\partial x^{n_2}} \cdots + \\
& + T'^{i_1 i_2 \cdots}{}_{j_1 j_2 \ldots}(X(x,s)) \frac{\partial x^{m_1}}{\partial x'^{i_1}} \frac{\partial x^{m_2}}{\partial x'^{i_2}} \cdots \frac{\partial x'^{j_1}}{\partial x^{n_1}} \left[\frac{d}{ds}\frac{\partial x'^{j_2}}{\partial x^{n_2}}\right] \cdots + \\
& + \cdots
\end{aligned}$$

При малых s замену можно разложить до линейного члена, который задаётся векторным полем v^i:

$$x'^i = x^i + s\,v^i(x) + o(s), \qquad v^i = \left.\frac{dX^i}{ds}\right|_{s=0}.$$

Соответствующая матрица Якоби имеет вид

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^m} = \delta^i_m + s\,\partial_m v^i + o(s), \qquad \frac{d}{ds}\frac{\partial x'^i}{\partial x^m}_{s=0} = \partial_m v^i.$$

Обратное преобразование отличается знаком s, соответственно,

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^m} = \delta^i_m - s\,\partial_m v^i + o(s), \qquad \frac{d}{ds}\frac{\partial x^i}{\partial x'^m}_{s=0} = -\partial_m v^i;$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}T^{m_1m_2\ldots}{}_{n_1n_2\ldots}(x,s)_{s=0} \;=\; & \left[v^l\partial_l T^{i_1i_2\ldots}{}_{j_1j_2\ldots}(x)\right]\delta^{m_1}_{i_1}\delta^{m_2}_{i_2}\cdots\delta^{j_1}_{n_1}\delta^{j_2}_{n_2}\cdots + \\
& + T^{i_1i_2\ldots}{}_{j_1j_2\ldots}(x)\left[-\partial_{i_1}v^{m_1}\right]\delta^{m_2}_{i_2}\cdots\delta^{j_1}_{n_1}\delta^{j_2}_{n_2}\cdots + \\
& + T^{i_1i_2\ldots}{}_{j_1j_2\ldots}(x)\delta^{m_1}_{i_1}\left[-\partial_{i_2}v^{m_2}\right]\cdots\delta^{j_1}_{n_1}\delta^{j_2}_{n_2}\cdots + \\
& + \cdots + \\
& + T^{i_1i_2\ldots}{}_{j_1j_2\ldots}(x)\delta^{m_1}_{i_1}\delta^{m_2}_{i_2}\cdots\left[\partial_{n_1}v^{j_1}\right]\delta^{j_2}_{n_2}\cdots + \\
& + T^{i_1i_2\ldots}{}_{j_1j_2\ldots}(x)\delta^{m_1}_{i_1}\delta^{m_2}_{i_2}\cdots\delta^{m_1}_{i_1}\left[\partial_{n_2}v^{j_2}\right]\cdots + \\
& + \cdots
\end{aligned}$$

Мы получили выражение, которое называется *производной Ли вдоль векторного поля* $\mathbf{v}$:

$$\begin{aligned}
L_{\mathbf{v}}T^{m_1m_2\ldots}{}_{n_1n_2\ldots} \;=\; & v^l\partial_l T^{m_1m_2\ldots}{}_{n_1n_2\ldots} - \\
& - T^{lm_2\ldots}{}_{n_1n_2\ldots}\partial_l v^{m_1} - T^{m_1l\ldots}{}_{n_1n_2\ldots}\partial_l v^{m_2} - \cdots + \\
& + T^{m_1m_2\ldots}{}_{ln_2\ldots}\partial_{n_1}v^l + T^{m_1m_2\ldots}{}_{n_1l\ldots}\partial_{n_2}v^l + \cdots .
\end{aligned} \tag{2.3.17}$$

(!) Для того чтобы задать производную Ли от тензорного поля вдоль векторного поля, нам не нужны ни связность, ни метрика, ни какие-либо другие структуры, кроме структуры дифференцируемого многообразия. Но нам нужно гладкое векторное поле (хотя бы в некоторой области пространства), вдоль которого мы будем дифференцировать. Для задания ковариантной производной вдоль вектора нам была нужна связность, но зато мы могли продифференцировать тензор вдоль вектора, который задан только в одной точке, или вдоль кривой.

2.3.3 Вектор Киллинга

Если пространство может скользить само по себе изометрически (без растяжений и сжатий) вдоль векторного поля $\mathbf{v}$, то условие такой изометричности удобно выразить через производную Ли от метрики:

$$L_{\mathbf{v}}g_{\alpha\beta} = 0.$$

Векторное поле, для которого это условие выполняется, называется *векторным полем Киллинга* или просто *вектором Киллинга*:

$$L_{\mathbf{v}}g_{\alpha\beta} = v^\gamma\partial_\gamma g_{\alpha\beta} + g_{\gamma\beta}\partial_\alpha v^\gamma + g_{\alpha\gamma}\partial_\beta v^\gamma.$$

Мы можем выбрать такую систему координат, что в интересующей нас точке первые производные от метрики обращаются в нуль: $\partial_\gamma g_{\alpha\beta} = 0$. Тогда *в этой точке* обращаются в нуль коэффициенты симметричной метрической связности и частные производные совпадают с ковариантными. Мы всегда можем внести метрический тензор под ковариантную производную, которая согласована с метрикой:

$$L_{\mathbf{v}}g_{\alpha\beta} = v^\gamma\partial_\gamma g_{\alpha\beta} + g_{\gamma\beta}\partial_\alpha v^\gamma + g_{\alpha\gamma}\partial_\beta v^\gamma = g_{\gamma\beta}\nabla_\alpha v^\gamma + g_{\alpha\gamma}\nabla_\beta v^\gamma = \nabla_\alpha(g_{\gamma\beta}v^\gamma) + \nabla_\beta(g_{\alpha\gamma}v^\gamma) = \nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha.$$

Мы показали,[4] что равенство

$$L_{\mathbf{v}}g_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha \tag{2.3.18}$$

[4]Если приведённое (вполне строгое) доказательство вас не убедило, вы можете проверить полученное равенство, явно расписав ковариантные производные через коэффициенты связности, а коэффициенты связности — через производные от метрики.

выполняется для произвольной точки в специально выбранной системе координат, но если два тензора равны в одной системе координат, то они равны и в любой другой.

Так что условие на вектор Киллинга мы можем теперь записать через симметричную, согласованную с метрикой ковариантную производную:

$$\nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha = 0.$$

В силу линейности данного условия видно, что умножение вектора Киллинга на константу и сложение векторов Киллинга снова дают вектор Киллинга. Таким образом, векторные поля Киллинга для данного пространства образуют линейное пространство. Например, для трёхмерного евклидова пространства существует 6 линейно независимых векторов Киллинга, в качестве базиса можно выбрать (запишем компоненты в декартовых координатах) векторы

$$\mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{l}_x = [\mathbf{e}_x \times \mathbf{r}] = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{l}_y = [\mathbf{e}_y \times \mathbf{r}] = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{l}_z = [\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}] = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор $\mathbf{e}_\alpha$ — поле скоростей при сдвиге пространства по оси x^α с единичной скоростью.

Вектор $\mathbf{l}_\alpha$ — поле скоростей при повороте пространства вокруг оси x^α с единичной угловой скоростью.

Скалярное произведение импульса на вектор Киллинга даёт величину, которая сохраняется в силу теоремы Нётер, если метрика была единственным тензорным параметром лагранжиана.

Для трёхмерного евклидова пространства $(\mathbf{p}, \mathbf{e}_\alpha) = p_\alpha$ — декартова компонента импульса, а

$$(\mathbf{p}, \mathbf{l}_\alpha) = p_\mu \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \delta_{\nu\alpha} r_\lambda = p_\mu \varepsilon_{\alpha\lambda\mu} r_\lambda = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]_\alpha$$

— компонента момента импульса.

Разумеется, для евклидова пространства векторы Киллинга не слишком интересны, т.к. симметрии очевидны из геометрических соображений, однако для более сложных конфигурационных пространств, а также для пространства-времени общей теории относительности векторы Киллинга оказываются очень полезным инструментом нахождения симметрий и связанных с ними интегралов движения.

Глава 2.4

Гамильтонов формализм и коммутаторы векторных полей (с. 61)

2.4.1 Преобразование Лежандра на графике

Покажем, как построить преобразование Лежандра гладкой функции $f(x)$ по её графику.

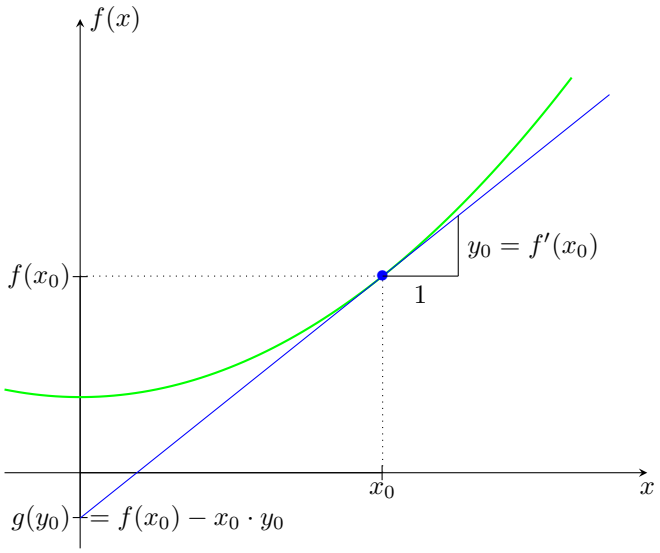
Пусть $f'(x)$ — гладкая монотонная функция, тогда $f'(x)$ задаёт взаимнооднозначное отображение $y = f'(x)$ области определения D параметра x на множество $f'(D)$. Мы можем решить уравнение $y = f'(x)$ относительно x и получить зависимость

$$x = X(y).$$

Преобразование Лежандра

$$g(y_0) = f(X(y_0)) - y_0 \cdot X(y_0)$$

соответствует точке пересечения касательной к графику функции $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$ с осью ординат. Аргумент функции $g(y_0)$ — наклон этой касательной.



2.4.2 Решения задач 12—15

12. От лагранжиана к функции Гамильтона.
а) Для всех лагранжианов из задач 2, 3, 10 (кроме пунктов со звёздочками) напишите функции Гамильтона.
б) Для пунктов 3 д), 2 б), 10 г) указанных задач запишите уравнения Гамильтона и проверьте их эквивалентность уравнениям Эйлера-Лагранжа. С помощью преобразований Лежандра перейдите обратно от функции Гамильтона к лагранжиану.

Решение

Мы не будем разбирать все лагранжианы из данной задачи, а ограничимся двумя случаями.

1. $L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2} m_{\alpha\beta}(x)\,\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta - U(x)$, $\alpha,\beta = 1,2,\ldots,n$, $\det m_{\alpha\beta} \neq 0$.

Здесь матрица масс — произвольная симметричная невырожденная матрица, которая может зависеть от координат. Скорости входят в лагранжиан только квадратичным образом.

Это общий лагранжиан вида «кинетическая энергия минус потенциальная». Имеем

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = m_{\alpha\beta}(x)\,\dot{x}^\beta, \qquad \dot{x}^\alpha = (m^{-1})^{\alpha\beta}(x)\,p_\beta;$$

$$\begin{aligned} H(x,p) &= p_\alpha\,\dot{x}^\alpha(x,p) - L(x,\dot{x}(x,p)) = p_\alpha (m^{-1})^{\alpha\beta}(x)\,p_\beta - \frac{1}{2} m_{\alpha\beta}(x)\,\underbrace{(m^{-1})^{\alpha\mu}(x) p_\mu}_{\dot{x}^\alpha}\,\underbrace{(m^{-1})^{\beta\nu}(x)\,p_\nu}_{\dot{x}^\beta} + U(x) = \\ &= (m^{-1})^{\alpha\beta}\,p_\alpha p_\beta - \frac{1}{2}\underbrace{\left(m_{\alpha\beta}(m^{-1})^{\alpha\mu}(m^{-1})^{\beta\nu}\right)}_{(m^{-1})^{\mu\nu}}\,p_\mu p_\nu + U(x) = \frac{1}{2}(m^{-1})^{\alpha\beta}(x)\,p_\alpha p_\beta + U(x). \end{aligned}$$

Получилась функция Гамильтона вида «кинетическая энергия плюс потенциальная»:

$$H(x,p) = \frac{1}{2}(m^{-1})^{\alpha\beta}(x)\,p_\alpha p_\beta + U(x).$$

Уравнения Гамильтона имеют вид

$$\dot{x}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = (m^{-1})^{\alpha\beta}(x)\,p_\beta, \qquad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha} = -\frac{1}{2}\frac{\partial (m^{-1})^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\,p_\mu p_\nu - \partial_\alpha U(x).$$

2. Лагранжиан из задачи 10г, описывающий нерелятивистскую частицу в присутствии скалярного и векторного потенциалов:

$$L(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) = \frac{m\dot{r}_\alpha \dot{r}_\alpha}{2} + \tfrac{q}{c}\dot{r}_\alpha A_\alpha(\mathbf{r},t) - q\varphi(\mathbf{r},t);$$

$$P_\alpha = m\dot{r}_\alpha + \tfrac{q}{c}A_\alpha(\mathbf{r},t), \qquad \dot{r}_\alpha = \frac{P_\alpha - \frac{q}{c}A_\alpha(\mathbf{r},t)}{m};$$

$$\begin{aligned} H(\mathbf{r},\mathbf{P}) &= P_\alpha\,\dot{r}_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{P}) - L(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r},\mathbf{P})) = \\ &= \mathbf{P}\,\frac{\mathbf{P} - \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{m} - \frac{(\mathbf{P} - \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t))^2}{2m} - \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\frac{\mathbf{P} - \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{m} + q\varphi(\mathbf{r},t) = \\ &= \frac{(\mathbf{P} - \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t))^2}{2m} + q\varphi(\mathbf{r},t). \end{aligned}$$

Гамильтониан по-прежнему представляет собой сумму кинетической и потенциальной энергии, но в выражение для кинетической энергии проник векторный потенциал, который входит в выражение для скорости через обобщённый импульс:

$$H(\mathbf{r},\mathbf{P}) = \underbrace{\frac{(\mathbf{P} - \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t))^2}{2m}}_{\text{кин. энергия}} + q\varphi(\mathbf{r},t).$$

Уравнения Гамильтона:

$$\dot{r}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial P_\alpha} = \frac{P_\alpha - \frac{q}{c}A_\alpha(\mathbf{r},t)}{m}, \qquad \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial r_\alpha} = \frac{q}{c}\,\frac{P_\beta - \frac{q}{c}A_\beta(\mathbf{r},t)}{m}\,\partial_\alpha A_\beta(\mathbf{r},t) - q\,\partial_\alpha\varphi(\mathbf{r},t).$$

Подстановка во второе уравнение P_α, выраженного через $\dot{r}_\alpha$ и A_α, приведёт к уравнению

$$\frac{d}{dt}\left[m\dot{r}_\alpha + \tfrac{q}{c}A_\alpha(\mathbf{r},t)\right] = \frac{q}{c}\dot{r}_\beta\,\partial_\alpha A_\beta(\mathbf{r},t) - q\partial_\alpha\varphi(\mathbf{r},t),$$

которое переписывается в уже знакомом из задачи 10 г виде:

$$m\ddot{r}_\alpha = q[-\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial}{\partial t}A_\alpha - \partial_\alpha\varphi] + \tfrac{q}{c}[\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha]\,\dot{r}_\beta.$$

13. Строим теорию относительности. В данной задаче скорость света $c = 1$.

Пусть коэффициент пропорциональности между скоростью и импульсом частицы — не масса, а энергия:

$\mathbf{p} = \mathcal{E}\mathbf{v}$, а энергия неподвижной частицы — это масса: $\mathcal{E}(p=0) = m$.

Условия отдельных пунктов и решения

а) Выведите энергию $\mathcal{E}(\mathbf{v})$ и функцию Гамильтона свободной частицы $H(\mathbf{p})$.

Запишем уравнение баланса энергии при движении вдоль прямой со скоростью v:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = Fv = \underbrace{\frac{dp}{dt}}_{F} v = \frac{d(\mathcal{E}v)}{dt}v = \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}v + \mathcal{E}\frac{dv}{dt}\right)v,$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt}(1-v^2) = \mathcal{E}v\frac{dv}{dt} = \mathcal{E}\frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{dt}.$$

Переменные разделяются:

$$\frac{d\mathcal{E}}{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{1-v^2} \quad \Rightarrow \quad \ln\mathcal{E} = -\tfrac{1}{2}\ln(1-v^2) + \text{const}' \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = \frac{\text{const}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

С учётом начальных условий $\mathcal{E}(v=0) = m$ получаем

$$\mathcal{E} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}.$$

По условию задачи импульс выражается через энергию и скорость:

$$p = \mathcal{E}v = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2}} \quad \Rightarrow \quad p^2(1-v^2) = m^2v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{p}{\sqrt{m^2+p^2}} = \frac{p}{\mathcal{E}}.$$

Отсюда выражаем энергию через импульс и получаем функцию Гамильтона:

$$H(\mathbf{p}) = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}.$$

б) Сделайте преобразование Лежандра и получите функцию Лагранжа свободной частицы и действие в 3-мерной форме как интеграл по времени.

$$L(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\mathbf{p}(\mathbf{v}) - H(\mathbf{p}(\mathbf{v})) = \frac{m\mathbf{v}^2}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}} - \mathcal{E}(\mathbf{v}) = \frac{m\mathbf{v}^2}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}} - \frac{m}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}} = -m\sqrt{1-\mathbf{v}^2},$$

$$S[\mathbf{r}(t)] = -m\int\sqrt{1-\mathbf{v}^2}\,dt.$$

в) Получите из действия в 3-мерной форме импульс и энергию.

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}, \quad \mathcal{E} = \mathbf{v}\mathbf{p} - L = \frac{m\mathbf{v}^2}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}} + m\sqrt{1-\mathbf{v}^2} = \frac{m}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}.$$

Зачем мы снова получаем формулы, которые были получены ранее? Это проверка. Мы не могли заранее знать, что теория, которую мы строим, может быть непротиворечиво описана в рамках лагранжева формализма.

г*) Задайте время как дополнительную координату, функцию от монотонного параметра l, и перепишите действие в 4-мерном виде как интеграл по монотонному параметру l.

Рассмотрению времени в качестве дополнительной координаты у нас посвящена отдельная глава 1.9 «Время как координата и энергия как импульс». Здесь мы познакомимся с частным случаем разобранного там подхода.

Обозначим $t = x^0$, и пусть l — новый монотонный параметр вместо времени. Индексы i, j пробегаю значения $0, 1, 2, 3$. Действие в новых переменных приобретает вид

$$S[x^i(l)] = S[\mathbf{r}(t)] = -m\int\sqrt{1-\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2}\,dt = -m\int\sqrt{1-\left(\frac{\frac{d\mathbf{r}}{dl}}{\frac{dt}{dl}}\right)^2}\,\frac{dt}{dl}\,dl = -m\int\sqrt{\left(\frac{dt}{dl}\right)^2 - \left(\frac{d\mathbf{r}}{dl}\right)^2}\,dl.$$

Введём диагональную матрицу $g_{ij} = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1)$, тогда выражение можно переписать в виде

$$S[x^i(t)] = -m \int \sqrt{-g_{ij} \frac{dx^i}{dl} \frac{dx^j}{dl}}\, dl.$$

Если мы хотим, чтобы действие было инвариантным по отношению к замене обобщённых координат x^i, матрица g_{ij} должна быть тензором (подобное рассуждение мы проводили для матрицы масс в задаче 9 а). Тензор, заданный невырожденной симметричной матрицей с двумя нижними индексами, может быть выбран в качестве метрического тензора. Полученная нами метрика называется *метрикой Минковского* и является метрикой для 4-мерного пространства-времени.

В отличие от чисто пространственных метрик, с которыми мы имели дело ранее, метрика Минковского не является положительно определённой, но это даже хорошо: подкоренное выражение больше нуля только тогда, когда скорость меньше единицы, $\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| < 1$. Если единичная скорость — это скорость света в вакууме, то чисто математическое условие вещественности действия имеет физический смысл: массивная частица не может двигаться быстрее скорости света в вакууме.

д*) Получите из 4-мерного действия 4-импульс.

$$L\left(\frac{dx^i}{dl}\right) = -m\sqrt{-g_{ij} \frac{dx^i}{dl} \frac{dx^j}{dl}},$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \frac{dx^i}{dl}} = -m \frac{2(-g_{ij} \frac{dx^j}{dl})}{2\sqrt{-g_{ij} \frac{dx^i}{dl} \frac{dx^j}{dl}}} = g_{ij} \frac{\frac{dx^j}{dl}}{\sqrt{-g_{ij} \frac{dx^i}{dl} \frac{dx^j}{dl}}}.$$

Обозначим

$$\tau = \int \sqrt{-g_{ij} \frac{dx^i}{dl} \frac{dx^j}{dl}}\, dl = \int \sqrt{1 - \dot{\mathbf{r}}^2}\, dt, \qquad \frac{d\tau}{dl} = \sqrt{-g_{ij} \frac{dx^i}{dl} \frac{dx^j}{dl}}, \quad \frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \dot{\mathbf{r}}^2}.$$

τ — выделенный параметр (именно его особенно удобно выбрать в качестве l). Получаем

$$p_i = m g_{ij} \frac{\frac{dx^j}{dl}}{\frac{d\tau}{dl}} = m g_{ij} \frac{dx^j}{d\tau}.$$

Как мы увидим далее, τ — собственное время частицы, и вектор $u^j = \frac{dx^j}{d\tau}$ естественно назвать 4-мерной скоростью. Теперь 4-мерный импульс приобрёл простой и красивый вид:

$$p_i = m u_i.$$

Разберёмся со смыслом компонент 4-импульса.

Для пространственных компонент $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ имеем

$$p_\alpha = m \underbrace{g_{\alpha\beta}}_{\delta_{\alpha\beta}} \frac{dx^\beta}{d\tau} = m \frac{dx_\alpha}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{m\dot{x}_\alpha}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{r}}^2}}.$$

Это выражение совпало с компонентой обычного пространственного импульса.

Для временно́й компоненты 4-импульса

$$p_0 = m \underbrace{g_{00}}_{-1} \frac{dx^0}{d\tau} = -m \frac{dt}{d\tau} = -\frac{m}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{r}}^2}} = -\mathcal{E}$$

ковариантная компонента импульса дала энергию со знаком минус. Если индекс поднять, то энергия приобретёт знак плюс: $p^0 = g^{00} p_0 = -p_0 = \mathcal{E}$.

14. Движение под действием постоянной силы.

Пусть функция Гамильтона свободной частицы зависит только от модуля импульса: $H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = H(|\mathbf{p}|)$. Частица движется вдоль оси x под действием постоянной внешней силы $\mathbf{F} \| x$.

Условия отдельных пунктов и решения

а) Найдите $x(t)$.

Для одномерного движения под действием постоянной силы

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = F\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = F\cdot(x-x_0),$$

$$\frac{dp}{dt} = F \quad \Rightarrow \quad p = F\cdot(t-t_0).$$

В уравнение подставляем энергию и импульс, полученные выше:

$$\mathcal{E} = H(p),$$

$$F(x-x_0) = H(F\cdot(t-t_0)) \quad \Rightarrow \quad x(t)-x_0 = \frac{1}{F}H(F\cdot(t-t_0)).$$

Получается, что частица, движущаяся вдоль прямой под действием постоянной силы, рисует на плоскости $t-x$ график функции Гамильтона свободной частицы. Сила определяет масштаб, а сдвиг графика как целого определяется начальными условиями.

б) Примените результат к классической частице.

Для классической частицы $H(p) = \frac{p^2}{2m}$.

Получаем параболу:

$$x(t)-x_0 = \frac{F\cdot(t-t_0)^2}{2m}.$$

в) Примените результат к релятивистской частице (используя результат задачи 13 а).

Для релятивистской частицы, если считать, что $c=1$, согласно задаче 13 а гамильтониан имеет вид $H(p) = \sqrt{m^2+p^2}$.

Скорость света можно вставить в формулу из соображений размерности: $H(p) = \sqrt{m^2c^4+p^2c^2}$.

Получаем гиперболу:

$$x(t)-x_0 = \frac{1}{F}\sqrt{m^2c^4+c^2F^2\cdot(t-t_0)^2}.$$

В пределе малых скоростей, т. е. в случае $|F\cdot(t-t_0)| \ll mc$, мы можем разложить корень:

$$\begin{aligned} x(t)-x_0 &= \frac{1}{F}\sqrt{m^2c^4+c^2F^2\cdot(t-t_0)^2} = \frac{mc^2}{F}\sqrt{1+\tfrac{F^2\cdot(t-t_0)^2}{m^2c^2}} = \\ &= \frac{mc^2}{F}\left[1+\frac{F^2\cdot(t-t_0)^2}{2m^2c^2}+o\left(\tfrac{F^2\cdot(t-t_0)^2}{2m^2c^2}\right)\right] = \frac{mc^2}{F}+\frac{F\cdot(t-t_0)^2}{2m}+o\left(\tfrac{F\cdot(t-t_0)^2}{2m}\right). \end{aligned}$$

Мы видим, что квадратичный по $(t-t_0)$ член разложения совпадает с выражением для классической (нерелятивистской) частицы. Различие на константу не существенно и может быть компенсировано выбором x_0. Сама константа возникает из-за того, что классическая функция Гамильтона не учитывает энергию покоя частицы mc^2.

15. Модель хищник-жертва Ло́тки–Вольте́рры в гамильтоновых переменных.

Рассмотрим взаимодействие хищников («волков») и жертв («зайцев»):

$$\dot{Z} = \alpha Z - \beta ZW, \tag{2.4.1}$$

$$\dot{W} = -\gamma W + \delta ZW, \tag{2.4.2}$$

где Z — численность зайцев, W — численность волков, $\alpha,\beta,\gamma,\delta = \text{const}$ — параметры модели.

Условия отдельных пунктов и решения

а) Покажите, что переменные Z, W не являются гамильтоновыми.

Гамильтонова динамика в канонических переменных сохраняет фазовый объём (для одной степени свободы — фазовую площадь). Это условие удобно выразить через дивергенцию в фазовом пространстве:

$$\dot{x}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \qquad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha},$$

$$\operatorname{div}\dot{X} = \frac{\partial \dot{X}^M}{\partial X^M} = \frac{\partial \dot{x}^\alpha}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial \dot{p}^\alpha}{\partial p^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}+\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\left(-\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}\right) = 0. \tag{2.4.3}$$

Условие (2.4.3) для системы (2.4.1),(2.4.2) не выполняется:

$$\frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} + \frac{\partial \dot{W}}{\partial W} = \frac{\partial(\alpha Z - \beta ZW)}{\partial Z} + \frac{\partial(-\gamma W + \delta ZW)}{\partial W} = \alpha - \beta W - \gamma + \delta Z \not\equiv 0.$$

Значит, переменные Z, W не являются каноническими гамильтоновыми переменными.

б) Найдите для системы уравнений (2.4.1),(2.4.2) гамильтоновы переменные, функцию Гамильтона, интеграл движения.

Если все слагаемые дивергенции равны нулю, то равна нулю и сама дивергенция. Это достигается, если модифицировать дифференциальные уравнения (2.4.1),(2.4.2) так, чтобы в правой части каждого уравнения отсутствовала переменная, которая присутствует в левой части:

$$\frac{\dot{Z}}{Z} = \alpha - \beta W, \tag{2.4.4}$$

$$\frac{\dot{W}}{W} = -\gamma + \delta Z. \tag{2.4.5}$$

Введём новые переменные $z = \ln Z$, $w = \ln W$:

$$\dot{z} = \alpha - \beta \mathrm{e}^{w}, \tag{2.4.6}$$

$$\dot{w} = -\gamma + \delta \mathrm{e}^{z}. \tag{2.4.7}$$

В новых переменных площадь, очевидно, сохраняется:

$$\frac{\partial \dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial w} = 0.$$

Для двумерного фазового пространства этого достаточно, чтобы динамика была гамильтоновой.

Подберём подходящую функцию Гамильтона, взяв в качестве обобщённой координаты w, а в качестве обобщённого импульса — z (можно и наоборот, но удобнее, когда при большом импульсе координата растёт):

$$\dot{w} = -\gamma + \delta \mathrm{e}^{z} = \frac{\partial H}{\partial z} \;\Rightarrow\; H(w,z) = -\gamma z + \delta \mathrm{e}^{z} + A(w), \tag{2.4.8}$$

$$\dot{z} = \alpha - \beta \mathrm{e}^{w} = -\frac{\partial H}{\partial w} \;\Rightarrow\; H(w,z) = -\alpha w + \beta \mathrm{e}^{w} + B(z). \tag{2.4.9}$$

Здесь константы интегрирования A и B зависят от той переменной, по которой интегрирование не проводилось.

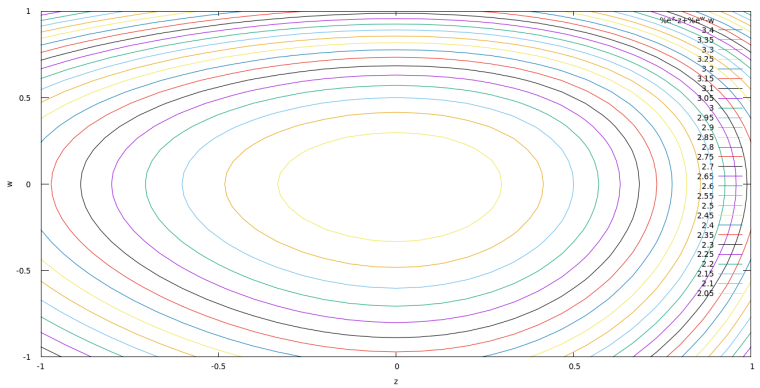
Из уравнений (2.4.8),(2.4.9) получаем функцию Гамильтона:

$$H(w,z) = -\alpha w + \beta \mathrm{e}^{w} - \gamma z + \delta \mathrm{e}^{z}. \tag{2.4.10}$$

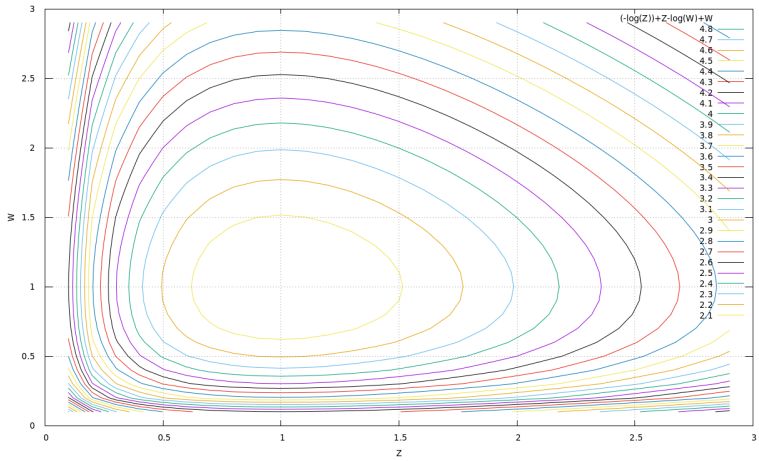
Функция (2.4.10) не зависит от времени, а значит, «энергия», задаваемая этой функцией, сохраняется. В исходных переменных Z, W «энергия» имеет вид

$$\mathcal{E} = -\alpha \ln W + \beta W - \gamma \ln Z + \delta Z.$$

Траектории системы хищник-жертва на фазовой плоскости $w - z$ (или на плоскости исходных параметров $Z - W$) задаются как кривые постоянной «энергии».



Система хищник-жертва в канонических переменных z, w; $\alpha = \beta = \gamma = 1$, точка равновесия — $(0, 0)$.



Система хищник-жертва в исходных переменных Z, W; $\alpha = \beta = \gamma = 1$, точка равновесия — $(1, 1)$.

2.4.3 От симметрии к закону сохранения

В п. 1.4.9.2 мы оставили без доказательства обратный переход от симметрии к закону сохранения.

Каждому однопараметрическому каноническому преобразованию

$$X' = X'(X, s), \quad X'(X'(X, s_1), s_2) = X'(X, s_1 + s_2), \quad X'(X, 0) = X,$$

$$\{X'^K, X'^L\} = \{X^K, X^L\}, \qquad H(X'(X, s)) = H(X)$$

соответствует интеграл движения F, локально (в некоторой окрестности заданной точки фазового пространства) такой, что $\frac{\partial X'}{\partial s} = \{X', F\}$.

Описанной симметрии мы можем сопоставить некоторое векторное поле $\mathbf{v}$, которое задаёт скорость перемещения точек фазового пространства при изменении параметра s:

$$v^M = \left.\frac{\partial X'^M(X, s)}{\partial s}\right|_{s=0}.$$

Нам надо показать, что локально поле имеет вид

$$v^M = \{X^M, F\} = J^{MK}\,\partial_K F, \tag{2.4.11}$$

где F — некоторая наблюдаемая, а $J^{MK} = \{X^M, X^K\}$ — пуассонова структура (1.4.25).

Пусть $\omega_{LM} J^{MK} = \delta^K_L$. Тензор ω_{NL} (обратная матрица к J^{MN}) называется *симплектической структурой*.

Если формула (2.4.11) справедлива, то

$$\omega_{LM} v^M = \underbrace{\omega_{LM} J^{MK}}_{\delta^K_L}\,\partial_K F = \partial_L F.$$

Таким образом, надо проверить, является ли ковектор $u_L = \omega_{LM} v^M$ градиентом какой-либо функции F.

Очевидно, что необходимым условием того, что u_L — градиент, является следующее равенство[1]:

$$(du)_{KL} = \partial_K u_L - \partial_L u_K = 0. \tag{2.4.12}$$

Локально (в некоторой окрестности данной точки) это условие является также и достаточным. Этот факт из топологии мы используем без доказательства[2].

Проверим, выполняется ли условие (2.4.12). При этом воспользуемся *каноническими координатами*, в которых компоненты тензора J^{MN} не зависят от координат (а значит, постоянна и обратная матрица

[1] Равенство нулю *внешней производной* du ковектора u. В трёхмерном пространстве это условие равносильно равенству нулю ротора поля u.

[2] Ключевые слова для тех, кого интересует доказательство и стоящая за ним теория: *когомологии де Рама*.

ω_{LM}):

$$\begin{aligned}(du)_{KL} &= \partial_K(\omega_{LM}v^M) - \partial_L(\omega_{KM}v^M) = \\ &= \omega_{LM}\,\partial_K v^M - \omega_{KM}\,\partial_L v^M = \\ &= \omega_{LM}\,\partial_K v^M + \omega_{MK}\,\partial_L v^M + \underbrace{v^M\,\partial_M\omega_{KL}}_{0} = \\ &= L_{\mathbf{v}}\omega_{KL} = \left.\frac{\partial\omega_{KL}}{\partial s}\right|_{s=0} = 0.\end{aligned}$$

Мы свели du к производной Ли (2.3.17) от симплектической формы ω, т.е. к производной от ω по параметру симметрии s, когда $X'(X,s)$ задаёт замену координат. Поскольку замена координат каноническая, при изменении s матрица J (а с ней и обратная матрица ω) остаётся постоянной, а значит, и производная Ли равна нулю.

Мы показали, что локально выполняется условие (2.4.11), а значит, эволюция по s является гамильтоновой с функцией Гамильтона F. Тогда

$$\frac{dH(X'(X,s))}{ds} = \{H,F\}.$$

Поскольку наше преобразование является симметрией функции Гамильтона $H(X)$, т.е. $H(X'(X,s)) = H(X)$, мы получаем

$$\{H,F\} = 0,$$

а значит, $F(X)$ — интеграл движения для эволюции с функцией Гамильтона[3] $H(X)$.

2.4.4 Вектор как дифференциальный оператор и сдвиг по векторному полю

Каждому вектору можно сопоставить оператор производной вдоль этого вектора:

$$\partial_{\mathbf{v}} = v^i\partial_i.$$

Получившийся дифференциальный оператор одинаково действует на скаляр вне зависимости от того, в какой системе координат были взяты объекты в правой части равенства. Таким образом, дифференциальный оператор инвариантен относительно замены координат.

Действуя таким оператором на координату, мы получаем компоненту вектора в соответствующей системе координат:

$$\partial_{\mathbf{v}}x^i = v^j\partial_j x^i = v^j\delta^i_j = v^i.$$

Таким образом, между векторами (как мы их определили ранее, через компоненты) и операторами дифференцирования по направлению можно установить естественное взаимнооднозначное соответствие.

В математике наличие естественного взаимнооднозначного соответствия — это повод считать, что мы имеем дело с разными описаниями одних и тех же объектов. В нашем случае мы можем считать, что оператор дифференцирования $\partial_{\mathbf{v}}$ и вектор $\mathbf{v}$ — это один и тот же объект:

$$\partial_{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{v}.$$

При этом базисные векторы — операторы дифференцирования по координатам:

$$\forall\mathbf{v}: \partial_{\mathbf{v}} = v^i\partial_i \equiv \mathbf{v} = v^i\mathbf{e}_i \quad\Rightarrow\quad \partial_i = \mathbf{e}_i.$$

(!) Если мы отождествили вектор с оператором дифференцирования, то это не означает, что всякий раз, когда этот вектор встречается в формуле, он что-то дифференцирует. Вектор (как дифференциальный оператор) может действовать на скаляр, но тот же вектор (как вектор) может на этот скаляр умножаться — это разные операции. При скалярном умножении векторов они также ничего не дифференцируют. Но *в некоторых случаях* полезно рассматривать вектор *как* дифференциальный оператор, или, другими словами, *в некоторых случаях* полезно *вместо* вектора рассматривать соответствующий дифференциальный оператор. Мы уже привыкли к тому, что вектор — это и бесконечно короткая стрелка, но тот же вектор — это набор компонент, которые преобразуются по заданному закону при замене координат. Теперь оказывается, что тот же вектор может быть описан третьим способом как дифференциальный оператор.

[3] И наоборот: $H(X)$ — интеграл движения для эволюции с функцией Гамильтона $F(X)$.

В случае, когда вектор действует на какую-то величину как дифференциальный оператор, мы будем записывать это одним из следующих способов:

$$\partial_{\mathbf{v}}\phi = \mathbf{v}[\phi] = \mathbf{v} \circ \phi.$$

Таким же кружочком мы будем обозначать произведение линейных операторов, т. е. оператор, действие которого равносильно последовательному действию (справа налево) двух операторов-сомножителей:

$$\mathbf{u} \circ \mathbf{v} \circ \varphi = \mathbf{u}[\mathbf{v}[\varphi]].$$

Скалярное поле $\varphi(x)$ тоже можно рассматривать как линейный оператор (не дифференциальный) умножения на функцию $\varphi(x)$:

$$\varphi[\psi] = \varphi \circ \psi = \varphi \cdot \psi.$$

Всякий вектор — дифференциальный оператор, но не всякий дифференциальный оператор — вектор. Дифференциальный оператор, сопоставляемый вектору, должен быть первого порядка, это свойство проверяется по выполнению правила Лейбница[4]:

$$\partial_{\mathbf{v}}(\phi\psi) = \phi\partial_{\mathbf{v}}\psi + \psi\partial_{\mathbf{v}}\phi.$$

Чтобы не вдаваться в тонкости относительно дифференциальных операторов, сопоставляемых векторам, потребуем выполнения условия

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}[x^i]\,\partial_i.$$

При рассмотрении симметрий функции Лагранжа $x' = X(x,s)$ естественным образом возникает векторное поле $\mathbf{v}(x') = \frac{dX}{ds}$, причём это векторное поле (в силу того, что преобразования образуют однопараметрическую группу) не зависит от s:

$$\mathbf{v}(x',s) = \mathbf{v}(X(x,s),s) = \frac{d}{ds}X(x,s) = \frac{d}{ds_1}X(x,s{+}s_1)_{s_1=0} = \frac{d}{ds_1}X(X(x,s),s_1)_{s_1=0} = \frac{d}{ds_1}X(x',s_1)_{s_1=0} = \mathbf{v}(x',0).$$

Кроме того, возникает линейный оператор, который сдвигает все функции вдоль этого векторного поля:

$$\hat{T}_s \circ \varphi(x) = \varphi(X(x,s)).$$

Продифференцируем это равенство по s.

С одной стороны,

$$\frac{d}{ds}\hat{T}_s \circ \varphi(x) = \frac{d\hat{T}_s}{ds} \circ \varphi(x).$$

С другой стороны,

$$\frac{d}{ds}\varphi(X(x,s)) = \underbrace{\frac{dX^i}{ds}\partial_i}_{\mathbf{v}} \circ \varphi(X(x,s)) = \mathbf{v} \circ \hat{T}_s \circ \varphi(x).$$

Приравняв эти два выражения и отбросив произвольное поле φ, получаем дифференциальное уравнение на оператор $\hat{T}_s$, символическое решение которого задаётся экспонентой:

$$\frac{d\hat{T}_s}{ds} = \mathbf{v} \circ \hat{T}_s \quad \Rightarrow \quad \hat{T}_s = \exp(s\mathbf{v}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!}\mathbf{v}^{\circ k}.$$

Мы назвали решение символическим, потому что мы не исследовали сходимость степенного ряда.

Степень

$$\mathbf{v}^{\circ k} = \underbrace{\mathbf{v} \circ \cdots \circ \mathbf{v}}_{\text{k раз}}, \qquad \mathbf{v}^{\circ k} \circ \varphi = \underbrace{\mathbf{v} \circ \cdots \circ \mathbf{v}}_{\text{k раз}} \circ \varphi$$

— это степень вектора как дифференциального оператора.

Мы будем считать, что

$$\hat{T}_s = \exp(s\mathbf{v}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!}\mathbf{v}^{\circ k}$$

по определению[5].

[4] Более тонкие вопросы, связанные с областями определения, непрерывностью и т.д., мы обсуждать не будем, поскольку работаем на физическом уровне строгости.

[5] Можно было бы честно убедиться в сходимости ряда при действии на функции определённого класса, а потом доопределить оператор на остальные функции некоторого функционального пространства, но это задача для книги по математике.

Векторное поле $\mathbf{v}$ мы будем называть *генератором* преобразований $\hat{T}_s = \mathrm{e}^{s\mathbf{v}}$.

Мы рассмотрели действие оператора $\hat{T}_s$ на скалярные поля. В § 2.3.2 «Производная Ли» мы, по существу, определили его действие также и на тензорные поля (2.3.16):

$$\hat{T}_s \circ T^{m_1 m_2 \dots}{}_{n_1 n_2 \dots}(x) = T'^{i_1 i_2 \dots}{}_{j_1 j_2 \dots}(X(x,s)) \frac{\partial x^{m_1}}{\partial x'^{i_1}} \frac{\partial x^{m_2}}{\partial x'^{i_2}} \cdots \frac{\partial x'^{j_1}}{\partial x^{n_1}} \frac{\partial x'^{j_2}}{\partial x^{n_2}} \cdots \qquad x' = X(x,s).$$

Продемонстрируем в одномерном случае на примере оператора $\frac{d}{dx}$, как операторная экспонента от производной порождает сдвиг аргумента:

$$\exp\left(a\frac{d}{dx}\right) \circ \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \underbrace{\left(\frac{d}{dx}\right)^{\circ k}}_{\frac{d^k}{dx^k}} \circ \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \frac{d^k \varphi(x)}{dx^k} = \varphi(x+a).$$

Поскольку (как было указано в § 1.3.5 «Теорема Нётер») общий случай однопараметрической группы симметрий сводится (локально) к сдвигу по одной координате в специально подобранной системе координат, общий случай действия оператора $\hat{T}_s$ на скаляр также сводится (локально) к приведённому простейшему случаю.

Мы начали обсуждение оператора сдвига вдоль векторного поля применительно к лагранжеву формализму, но для гамильтонова формализма такие сдвиги, возможно, даже более важны. В гамильтоновом формализме каждой наблюдаемой величине сопоставляется функция на фазовом пространстве $F(X)$. Если эта функция гладкая, то с помощью тензора пуассоновой структуры J^{MN} ей можно сопоставить векторное поле:

$$J^{MN}\partial_N F(X).$$

Для интегралов движения сдвиг вдоль соответствующего векторного поля описывает симметрию, с которой связан закон сохранения этой величины. В частности, сдвиг вдоль векторного поля, заданного данной функцией Гамильтона, описывает динамику системы.

2.4.5 Коммутатор векторных полей

Частные производные по координатам одной системы перестановочны:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

Но будут ли перестановочны производные, взятые вдоль произвольных векторных полей?

Рассмотрим *коммутатор векторных полей* (не путайте с векторным произведением, которое мы обозначаем тоже квадратными скобками, но с крестиком!), которые рассматриваются как дифференциальные операторы:

$$[\mathbf{u},\mathbf{v}] = \mathbf{u}\circ\mathbf{v} - \mathbf{v}\circ\mathbf{u}.$$

По определению для достаточного гладкого поля φ имеем

$$[\mathbf{u},\mathbf{v}]\circ\varphi = \mathbf{u}\circ\mathbf{v}\circ\varphi - \mathbf{v}\circ\mathbf{u}\circ\varphi = \mathbf{u}[\mathbf{v}[\varphi]] - \mathbf{v}[\mathbf{u}[\varphi]].$$

Векторное поле — дифференциальный оператор первого порядка, операторное произведение векторных полей (не путайте со скалярным произведением!) — дифференциальный оператор второго порядка. Коммутатор двух векторных полей должен быть дифференциальным оператором порядка не выше второго.

Распишем явно, как коммутатор векторных полей действует на скалярную функцию:

$$[\mathbf{u},\mathbf{v}]\circ\varphi = \mathbf{u}[\mathbf{v}[\varphi]] - \mathbf{v}[\mathbf{u}[\varphi]] = u^\alpha\partial_\alpha[v^\beta\partial_\beta\varphi] - v^\alpha\partial_\alpha[u^\beta\partial_\beta\varphi] =$$
$$= u^\alpha\partial_\alpha[v^\beta]\,\partial_\beta[\varphi] + \cancel{u^\alpha v^\beta\partial_\alpha\partial_\beta[\varphi]} - v^\alpha\partial_\alpha[u^\beta]\,\partial_\beta[\varphi] - \cancel{v^\alpha u^\beta\partial_\alpha\partial_\beta[\varphi]}.$$

Вторые производные взаимно уничтожились! Коммутатор векторных полей оказался дифференциальным оператором первого порядка, т.е. векторным полем:

$$[\mathbf{u},\mathbf{v}]\circ\varphi = \underbrace{\left(u^\alpha\partial_\alpha[v^\beta] - v^\alpha\partial_\alpha[u^\beta]\right)\partial_\beta}_{[\mathbf{u},\mathbf{v}]}\circ\varphi.$$

Мы можем расписать компоненты коммутатора как векторного поля:

$$[\mathbf{u},\mathbf{v}]^\beta = \underbrace{u^\alpha\,\partial_\alpha v^\beta - v^\alpha\,\partial_\alpha u^\beta}_{L_{\mathbf{u}}v^\beta} = \mathbf{u}[v^\beta] - \mathbf{v}[u^\beta].$$

И тут нас ждёт ещё один сюрприз: коммутатор векторных полей совпал с производной Ли от второго аргумента по первому, т. е.

$$L_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = [\mathbf{u},\mathbf{v}].$$

Легко проверить, что для коммутатора (как и для векторного произведения и для скобки Пуассона) выполняется *тождество Якоби*

$$[\mathbf{u},[\mathbf{v},\mathbf{w}]] + [\mathbf{v},[\mathbf{w},\mathbf{u}]] + [\mathbf{w},[\mathbf{u},\mathbf{v}]] = 0.$$

Поскольку коммутатор антисимметричен, линеен по обоим аргументам и удовлетворяет тождеству Якоби, он является *скобкой Ли*.

Коммутатор одновременно можно рассматривать как антисимметричную разновидность умножения и как операцию дифференцирования (производная Ли). При таком взгляде тождество Якоби можно рассматривать как правило Лейбница, где коммутатор выступает и в роли произведения и в роли производной:

$$[\mathbf{u},[\mathbf{v},\mathbf{w}]] = [\mathbf{v},[\mathbf{u},\mathbf{w}]] + [[\mathbf{u},\mathbf{v}],\mathbf{w}] \qquad \Leftrightarrow \qquad L_{\mathbf{u}}[\mathbf{v},\mathbf{w}] = [\mathbf{v},L_{\mathbf{u}}\mathbf{w}] + [L_{\mathbf{u}}\mathbf{v},\mathbf{w}].$$

Для нас коммутаторы и производные Ли интересны в первую очередь с точки зрения исследования генераторов симметрий системы. Симметрии системы определяются как условия равенства нулю производных Ли вдоль генераторов симметрии от некоторого набора тензорных полей. В силу линейности производной Ли по векторному полю линейная комбинация двух генераторов симметрии снова даёт генератор симметрии. Теперь мы видим, что коммутатор тоже позволяет из двух генераторов симметрий получить третий:

$$L_{\mathbf{u}}T = 0, \quad L_{\mathbf{v}}T = 0 \quad \Rightarrow \quad L_{[\mathbf{u},\mathbf{v}]}T = 0.$$

Таким образом, генераторы симметрии какой-либо динамической системы допускают линейные комбинации (образуют линейное пространство, замкнутое относительно коммутатора).

Линейное пространство, на котором определена скобка Ли, называется *алгеброй Ли*.

Мы видим, что генераторы симметрий некоторой динамической системы образуют алгебру Ли.

2.4.5.1 Пример: скобка Пуассона и коммутатор

Как мы уже отмечали, каждой наблюдаемой $F(X)$ в гамильтоновой механике можно сопоставить векторное поле[6] $(dF)^N = [\partial_M F(X)]\,J^{MN}$. На наблюдаемых определена скобка Пуассона $\{F,G\}$, а на векторных полях определён коммутатор $[dF,dG]$. Обе эти операции являются скобками Ли, поэтому возникает естественный вопрос, как они связаны между собой.

Воспользуемся тем, что в канонических координатах компоненты тензора J^{MN} постоянны:

$$\begin{aligned}
[dF,dG]^L &= dF^I\partial_I dG^L - dG^I\partial_I dF^L = \\
&= J^{KI}\partial_K[F]\partial_I[J^{ML}\partial_M G] - J^{KI}\partial_K[G]\partial_I[J^{ML}\partial_M F] = \\
&= J^{KI}\partial_K[F]J^{ML}\partial_I\partial_M[G] + J^{KI}\partial_I[G]J^{ML}\partial_K\partial_M[F] = \\
&= J^{ML}\partial_M\left(J^{KI}\partial_K[F]\partial_I[G]\right) = J^{ML}\partial_M\{F,G\} = (d\{F,G\})^L.
\end{aligned}$$

Таким образом, рассмотренные нами скобки Ли совпали:

$$[dF,dG] = d\{F,G\}.$$

2.4.5.2 Пример: векторное произведение и коммутатор

Вращательным симметриям трёхмерного евклидова пространства соответствуют векторы Киллинга вида

$$\mathbf{l}_{\boldsymbol{\omega}} = [\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}], \qquad (\mathbf{l}_{\boldsymbol{\omega}})_\gamma = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\omega_\alpha r_\beta.$$

Вектор $\boldsymbol{\omega}$ — это угловая скорость, соответствующая вращению $\exp(t\,\mathbf{l}_{\boldsymbol{\omega}})$.

[6] Обозначение в виде дифференциала dF обычно используют для градиента, который является ковектором, но в фазовом пространстве задана пуассонова структура J^{MN}, которая позволяет сопоставлять ковекторам векторы, поэтому мы будем использовать для соответствующего вектора то же обозначение.

Такие векторы Киллинга образуют 3-мерное линейное пространство, в качестве базиса можно выбрать векторы Киллинга вида $\mathbf{l}_\alpha = [\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{r}]$:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{l}_{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{l}_{\boldsymbol{\Omega}}]_\lambda &= (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\omega_\alpha r_\beta)\partial_\gamma[\varepsilon_{\mu\nu\lambda}\Omega_\mu r_\nu] - (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Omega_\alpha r_\beta)\partial_\gamma[\varepsilon_{\mu\nu\lambda}\omega_\mu r_\nu] = \\
&= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\omega_\alpha r_\beta\, \varepsilon_{\mu\nu\lambda}\, \Omega_\mu \delta_{\nu\gamma} - \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Omega_\alpha r_\beta\, \varepsilon_{\mu\nu\lambda}\, \omega_\mu \delta_{\nu\gamma} = \\
&= \underbrace{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, \varepsilon_{\mu\gamma\lambda}}_{\delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\lambda}} r_\beta\Big(\omega_\alpha\Omega_\mu - \Omega_\alpha\, \omega_\mu\Big) = (\delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\lambda}) r_\beta\Big(\omega_\alpha\Omega_\mu - \Omega_\alpha\, \omega_\mu\Big) = \\
&= r_\mu \underbrace{\Big(\omega_\lambda\Omega_\mu - \Omega_\lambda\omega_\mu\Big)}_{\varepsilon_{\lambda\mu\nu}[\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\Omega}]_\nu} \cancel{- r_\lambda\Big(\omega_\alpha\Omega_\alpha - \Omega_\alpha\, \omega_\alpha\Big)} = -[[\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}] \times \mathbf{r}]_\lambda.
\end{aligned}$$

Получаем, что взятие коммутатора векторов Киллинга, являющихся генераторами вращательных симметрий, соответствует векторному умножению соответствующих угловых скоростей, взятому со знаком минус:

$$[\mathbf{l}_{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{l}_{\boldsymbol{\Omega}}] = -\mathbf{l}_{[\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\Omega}]}.$$

Какая математика кроется за соответствиями, подобными рассмотренным в этих примерах, мы обсудим, когда познакомимся с описаниями симметрий с помощью групп и алгебр Ли.

2.4.6 Дальнейшее чтение

В качестве дополнений к главе «Гамильтонов формализм» можно также рассматривать главы 5.2 «Классическая механика как вероятностная теория» (с. 509) и 5.3 «Переход к квантовой механике» (с. 516) в части V «Механика классическая и квантовая как классическая теория поля» (с. 506).

Глава 2.5

Задача Кеплера и прецессия перигелия (с. 74)

2.5.1 Движение в центральном поле в переменных $\phi, \rho = r^{-1}$

Этот параграф — альтернативное продолжение § 1.5.3 «Разделение переменных в полярных координатах» (см. с. 76).

Рассмотрим параметризацию траектории $r^{-1} = \rho(\phi)$ подробнее.

Энергия в системе центра масс имеет вид (1.5.2)

$$\mathcal{E} = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{2\mu r^2} + U(r).$$

Мы можем выразить временны́е производные через производные по углу с помощью закона сохранения момента импульса (1.5.1):

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\phi}{dt}\frac{d}{d\phi} = \frac{L_z}{\mu r^2}\frac{d}{d\phi}.$$

Таким образом,

$$\mu\dot{r} = \frac{L_z}{r^2}\frac{dr}{d\phi} = -L_z\frac{d\rho}{d\phi}, \qquad \rho = \frac{1}{r}.$$

Теперь энергию можно переписать через угловые производные:

$$\mathcal{E} = \frac{L_z^2}{2\mu}\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2 + \frac{L_z^2\rho^2}{2\mu} + U(1/\rho). \tag{2.5.1}$$

Это выражение выглядит как энергия частицы с массой $\frac{L_z^2}{\mu}$ (с углом ϕ в роли времени) в потенциале $\frac{L_z^2}{2\mu}\rho^2 + U(\rho^{-1})$ (потенциал $U(r)$ + центробежный потенциал $\frac{L_z^2}{2\mu r^2}$, выраженные через $\rho = \frac{1}{r}$). Закон сохранения энергии позволяет нам теперь найти зависимость $\rho(\phi)$, т.е. уравнение траектории в полярных координатах.

2.5.2 Вывод первого закона Кеплера в переменных $\phi, \rho = r^{-1}$

Задача Кеплера — это задача о движении планеты в гравитационном поле Солнца. Потенциальная энергия имеет вид

$$U_{\text{гр.}} = -\frac{Gm_1m_2}{r}.$$

Энергия (2.5.1) приобретает вид

$$\mathcal{E} = \frac{L_z^2}{2\mu}\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2 + \frac{L_z^2\rho^2}{2\mu} - Gm_1m_2\rho. \tag{2.5.2}$$

Это выражение соответствует энергии гармонического осциллятора (ϕ в роли времени), у которого и масса, и жёскость равны

$$m_{\text{эфф.}} = k_{\text{эфф.}} = \frac{L_z^2}{\mu},$$

под действием постоянной силы $f = Gm_1m_2$. Циклическая частота (по ϕ) этого осциллятора равна 1, а период — 2π. Под действием силы f положение равновесия смещается в точку

$$\frac{1}{\mathrm{p}} = \frac{f}{k_{\text{эфф.}}} = \frac{\mu}{L_z^2} Gm_1m_2.$$

Легко видеть, что

$$\mathrm{p}\rho = \frac{\mathrm{p}}{r} = 1 + e\cos(\phi + \phi_0). \tag{2.5.3}$$

Мы получили уравнение, которое соответствует уравнению конического сечения в полярных координатах для начала координат, помещённого в фокус (проверьте это в качестве упражнения), т.е. мы вывели *первый закон Кеплера*. Величины $\mathrm{p} = \frac{b^2}{a}$ и e называются *параметром* и *эксцентриситетом*.

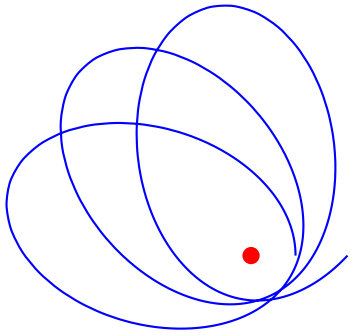
2.5.3 Прецессия перигелия Меркурия (предварительно)

Равенство периода колебаний радиальной координаты с периодом изменения угловой координаты приводит к тому, что мы получаем замкнутую траекторию[1].

Практически любая малая поправка к ньютоновскому потенциалу

$$-\frac{Gm_1m_2}{r} = -Gm_1m_2\rho$$

превращает энергию (2.5.2) в энергию ангармонического осциллятора и изменяет период зависимости $r(\phi)$ с 2π на $2\pi + \delta\phi$. В первом приближении это выглядит так, будто планета движется по эллипсу с Солнцем в фокусе, но сам эллипс медленно поворачивается вокруг Солнца на угол $\delta\phi$ за период. В частности, при этом смещается точка перигелия (ближайшая к Солнцу точка орбиты). Поэтому данный эффект называется *прецессией перигелия*.



Прецессия перигелия; $r^{-1} = 1 + 0{,}7\cos(1{,}1 \cdot \phi)$, $\phi \in [0, 6\pi]$.

Наиболее известна прецессия перигелия Меркурия в результате эффектов общей теории относительности (ОТО), но прецессия перигелия вызывается практически любым возмущением гравитационного поля. Для того же Меркурия прецессия перигелия создаётся не только эффектами ОТО, но и влиянием других планет. Также прецессию перигелия должно вызывать отклонение от сферической симметрии распределения масс в центральном теле (если бы Солнце быстрее вращалось вокруг своей оси и было бы сильнее приплюснуто с полюсов, это надо было бы учитывать).

Мы рассмотрим прецессию перигелия Меркурия в ОТО позже, когда познакомимся с динамикой релятивистской частицы в специальной теории относительности (СТО) в § 2.10.5 «Частица в поле Шварцшильда» (с. 264).

2.5.4 Трёхмерное пространство как выделенный случай

Зависимость потенциальной энергии от расстояния вида $\frac{1}{r}$ связана с 3-мерностью нашего пространства. Для электрического (или слабого гравитационного) поля поток через замкнутую поверхность определяется суммарным зарядом (для гравитационного поля — массой), заключённым внутри поверхности. Поскольку площадь сферы в трёхмерном пространстве растёт как r^2, это даёт зависимость силы от расстояния вида $\frac{1}{r^2}$, а потенциала $-\int \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{r}$.

[1] Для замкнутости траектории достаточно, чтобы отношение периодов было рациональным. Тогда траектория будет замыкаться на наименьшем общем кратном периодов по радиусу и углу. Чтобы траектория замыкалась без самопересечений, надо, чтобы в периоде по углу укладывалось целое число периодов по радиусу. Ещё Ньютон нашёл два потенциала, выделенных с точки зрения замкнутости траекторий: $\sim -\frac{1}{r}$ и $\sim r^2$.

Для d-мерного пространства площадь сферы растёт с радиусом как r^{d-1}, сила спадает как $\frac{1}{r^{d-1}}$, а потенциал — как $\frac{1}{r^{d-2}}$ (кроме случая $d = 2$, в котором потенциал $\sim \ln r$).

Поскольку потенциал оказывается однородной функцией расстояния степени $k = 2 - d$ (кроме случая $d = 2$), для исследования финитного движения в таком поле применим теорему вириала. Для финитного движения получаем следующее соотношение между средней кинетической энергией $\overline{\mathcal{E}_\text{к}}$ и средней потенциальной энергией $\overline{U}$:

$$2\overline{\mathcal{E}_\text{к}} = (2 - d)\overline{U}.$$

Суммарная энергия равна

$$\mathcal{E} = \overline{\mathcal{E}_\text{к}} + \overline{U} = \left(1 + \frac{2}{2-d}\right)\overline{\mathcal{E}_\text{к}} = \frac{4-d}{2-d}\,\overline{\mathcal{E}_\text{к}}.$$

Мы видим, что при $d = 3$ энергия финитного движения отрицательна, а значит, такое движение устойчиво к любым малым возмущениям, сообщающим частице энергию, меньшую чем $|\mathcal{E}|$. При $D = 4$ суммарная энергия финитного движения равна нулю. Это значит, что возможна ситуация, когда изменение направление движения частицы, совершающей финитное движение, приводит к тому, что частица не получив дополнительной энергии, уйдёт на бесконечность и там остановится. При $D \geqslant 5$ суммарная энергия финитного движения положительна. Это значит, что если изменить направление движения частицы, совершающей финитное движение, то она может уйти на бесконечность, не получив дополнительной энергии, более того, скорость частицы на бесконечности будет отлична от нуля.

Таким образом, в пространствах с размерностью больше 3 мы можем ожидать проблем с устойчивостью атомов[2] и планетных систем, а значит, жизнь в привычных нам формах в таких пространствах возникнуть не могла бы.

2.5.5 Теорема вириала и самоподобие потенциала

Мы уже получили теорему вириала в основном материале курса (см. с. 79). Теперь рассмотрим её в связи с симметрией системы по отношению к изменению масштабов.

2.5.5.1 Преобразования подобия

Решая задачу Кеплера, мы получили, что её решения допускают масштабные преобразования: частица может летать по подобным эллипсам (с одинаковым эксцентриситетом e), но разных размеров и с разным периодом. Если изменить масштаб единиц расстояния и времени, то эти движения будут описываться одинаково. Для того чтобы это свойство было универсальным, предположим, что функция Лагранжа обладает свойством самоподобия, т.е. при изменении масштаба расстояний можно подобрать такое изменение масштаба времени, чтобы функция Лагранжа менялась на некоторый масштабный фактор.

Для потенциальной энергии предположим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\to \alpha\mathbf{r}, \\ U(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n) &\to U(\alpha\mathbf{r}_1, \ldots, \alpha\mathbf{r}_n) = \alpha^k U(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n). \end{aligned}$$

Функция, удовлетворяющая этому свойству самоподобия, называется *однородной функцией степени* k.

Кинетическая энергия в ньютоновской механике является однородной функцией скорости степени 2, так что

$$\begin{aligned} t &\to \beta t, \\ \mathbf{v} &\to \frac{\alpha}{\beta}\,\mathbf{v}, \\ \mathcal{E}_\text{к} = \sum \frac{mv^2}{2} &\to \frac{\alpha^2}{\beta^2}\mathcal{E}_\text{к}. \end{aligned}$$

Чтобы функция Лагранжа при таком преобразовании менялась на множитель, надо, чтобы кинетическая и потенциальная энергии менялись одинаково, это фиксирует закон преобразования времени:

$$\alpha^k = \alpha^2\beta^{-2} \qquad \Rightarrow \qquad \beta = \alpha^{1-\frac{k}{2}}.$$

[2] Аккуратное рассмотрение атома требует использования квантовой механики.

2.5.5.2 Обобщая теорему Нётер

Покажем, что за теоремой вириала, как и за теоремой Нётер, стоит симметрия. На этот раз — симметрия по отношению к масштабным преобразованиям координат и времени. Рассмотрим масштабную симметрию по аналогии с теоремой Нётер[3].

Чтобы получить однопараметрическую группу преобразований, параметризуем масштабный фактор $\alpha = \mathrm{e}^s$. Теперь

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\to \mathrm{e}^s\mathbf{r}, \\ t &\to \mathrm{e}^{(1-\frac{k}{2})s}t, \\ U &\to \mathrm{e}^{ks}U, \\ \mathcal{E}_\text{к} &\to \mathrm{e}^{ks}\mathcal{E}_\text{к}, \\ L = \mathcal{E}_\text{к} - U &\to \mathrm{e}^{ks}L, \\ L_\text{p} = Lt' &\to \mathrm{e}^{(1+\frac{k}{2})s}L_\text{p}. \end{aligned}$$

Мы ввели расширенный лагранжиан L_p, чтобы иметь возможность рассматривать время как координату. Здесь $t' = \frac{dt}{dl}$, где l — монотонный параметр вдоль траектории системы.

При умножении функции Лагранжа L_p на константу уравнения Эйлера-Лагранжа не меняются, т.к. они линейны по L. Поэтому такое преобразование можно рассматривать как разновидность симметрии динамической системы, более общей, чем в теореме Нётер, которая подразумевает инвариантность лагранжиана.

При выводе теоремы Нётер, которая позволяла из однопараметрической группы симметрии лагранжиана получить соответствующий этой симметрии закон сохранения (1.3.12),(1.3.14), мы получили следующее выражение, в которое далее подставляли $\frac{dL_\text{p}}{ds} = 0$:

$$\frac{d}{ds}L_\text{p}\Big|_{s=0} = \frac{d}{dt}\left(p_i\frac{\partial x'^i}{\partial s}\right)_{s=0} = \frac{d}{dt}\left(p_\alpha\frac{\partial x'^\alpha}{\partial s} - \mathcal{E}\frac{\partial t'}{\partial s}\right)_{s=0}. \tag{2.5.4}$$

Теперь

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}L_\text{p}\Big|_{s=0} &= (1+\tfrac{k}{2})L_\text{p}, \\ \frac{d}{ds}\mathbf{r}\Big|_{s=0} &= \mathbf{r}, \\ \frac{d}{ds}t\Big|_{s=0} &= (1-\tfrac{k}{2})t. \end{aligned}$$

Получаем

$$(1+\tfrac{k}{2})L_\text{p} = \frac{d}{dt}\left(\sum_a(\mathbf{p}_a,\mathbf{r}_a) - \mathcal{E}(1-\tfrac{k}{2})t\right).$$

Выбрав $l = t$, $L_\text{p} = L = \mathcal{E}_\text{к} - U$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_\text{к} + U$, получаем

$$(1+\tfrac{k}{2})\mathcal{E}_\text{к} - (1+\tfrac{k}{2})U = \frac{d}{dt}\underbrace{\sum_a(\mathbf{p}_a,\mathbf{r}_a)}_{G} - (\mathcal{E}_\text{к}+U)(1-\tfrac{k}{2}).$$

Мы выразили производную от G через кинетическую и потенциальную энергию:

$$\frac{d}{dt}G = \frac{d}{dt}\sum_a(\mathbf{p}_a,\mathbf{r}_a) = 2\mathcal{E}_\text{к} - kU.$$

Из этого соотношения ранее (см. с. 79) мы уже получали теорему вириала:

$$2\overline{\mathcal{E}_\text{к}} = k\overline{U}.$$

[3]Этот пункт можно пропустить. Далее те же результаты, что и в основном параграфе, будут получены иным образом.

Глава 2.6

Кинематика и геометрия: от Ньютона к Минковскому (с. 81)

2.6.1 Дополнительные мысленные эксперименты

Этот параграф можно рассматривать как расширение набора мысленных экспериментов в § 1.6.4 (см. с. 84).

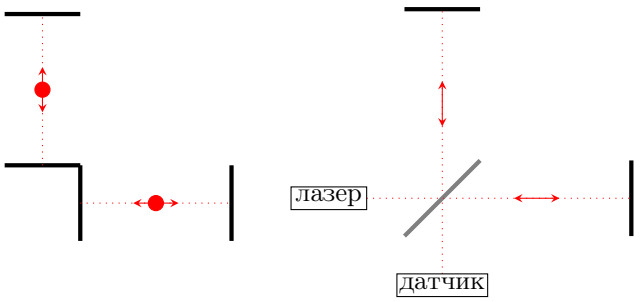
Мы уже получили с помощью мысленных экспериментов выражение для интервала (1.6.1). После этого можно все остальные кинематические эффекты вывести из геометрии пространства Минковского. Однако мы рассмотрим ещё несколько мысленных экспериментов, которые помогут не только вывести формулы для соответствующих эффектов, но и понять, как эти эффекты согласуются между собой и с принципом относительности.

Особо отметим, что релятивистские эффекты сокращения продольных размеров, замедления времени, относительности одновременности взаимосогласованы и должны быть учтены одновременно. В многочисленных брошюрах, посвящённых опровержению СТО и «развенчанию Эйнштейна», эти эффекты вырываются из общей системы и легко «опровергаются» по отдельности.

2.6.1.1 Интерферометр Майкельсона

Расположим двое световых часов, таких как мы рассматривали выше, под прямым углом друг к другу (см. левый рисунок ниже). Если часы неподвижны или движутся равномерно и прямолинейно, то они должны идти синхронно.

Как раз такое сравнение скорости хода двух световых часов осуществляет интерферометр Майкельсона. В нём (см. рисунок) из каждых часов убрано по одному зеркалу, вместо которых поставлено одно полупрозрачное зеркало. Через это полупрозрачное зеркало слева заводится свет от источника («лазер» на рисунке), а вниз выходит луч, который попадает на «датчик». Выходящий луч образуется в результате интерференции луча, шедшего сверху и прошедшего сквозь полупрозрачное зеркало, и луча, шедшего справа и отразившегося от полупрозрачного зеркала. По интерференции этих лучей можно определить разность хода света в двух световых часах (двух плечах интерферометра).



Интерферометр Майкельсона — устройство для сравнения скорости хода двух световых часов.

Эксперименты с интерферометром Майкельсона показали, что разность хода лучей не зависит от ориентации интерферометра по отношению к направлению его скорости. Это был один из экспериментов, показавших справедливость принципа относительности для электромагнитных явлений.

Мы уже рассмотрели световые часы, летящие в направлении поперёк хода луча. Теперь мы можем сравнить их с часами, летящими вдоль хода луча.

Мы установили, что период от «тика» до «тика» составляет $2dt$:

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}dr^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2}, \quad v = \frac{dr}{dt},$$

$$2dt = \frac{2d\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Период часов, ориентированных вдоль скорости, связан с расстоянием между зеркалами l'. Свет со скоростью c догоняет зеркало, которое удирает со скоростью v за время $\frac{l'}{c-v}$ (от «тика» до «така»), свет со скоростью c возвращается к первому зеркалу, которое летит навстречу со скоростью v за время $\frac{l'}{c+v}$ (от «така» до «тика»), таким образом,

$$2dt = \frac{l'}{c-v} + \frac{l'}{c+v} = \frac{2l'/c}{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Приравнивая два выражения, получаем

$$\frac{2d\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2l'/c}{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad l' = c\,d\tau\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

С учётом того, что расстояние между зеркалами в неподвижных часах составляло $l = c\,d\tau$, получаем формулу для релятивистского сокращения продольных длин:

$$l' = l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

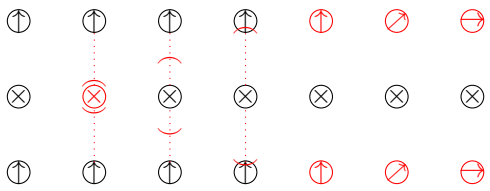
2.6.1.2 Относительность одновременности и синхронизация часов

В интерферометре Майкельсона в часах, ориентированных поперёк скорости, время от «тика» до «така» и от «така» до «тика» одинаково, для часов, ориентированных вдоль скорости, время от «тика» до «така» составляет $\frac{l'}{c-v}$, а от «така» до «тика» — $\frac{l'}{c+v}$.

Таким образом, «тик» обоих часов совпадает вне зависимости от системы отсчёта, а «так» происходит одновременно в системе часов и рассинхронизуется, если часы движутся. Имеет место *относительность понятия одновременности*.

С чем это связано? Рассмотрим процедуру синхронизации часов, расположенных в разных точках пространства и движущихся с одинаковой скоростью.

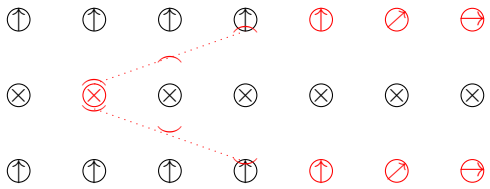
Пусть расстояние между часами в системе часов составляет $2l$, а посередине этого отрезка расположена лампочка, которая в какой-то момент загорается. При получении светового сигнала от лампочки спустя время l/c часы запускаются.



Процесс синхронизации в системе часов (последовательность состояний слева направо).

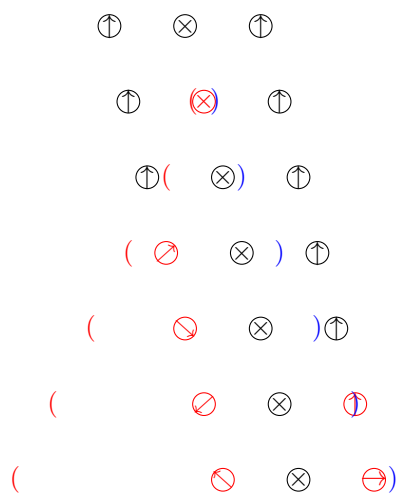
Рассмотрим теперь тот же процесс из системы отсчёта, которая движется относительно часов.

Если часы движутся перпендикулярно линии, их соединяющей, то время от включения лампочки до запуска часов увеличится, но часы всё равно запустятся одновременно, поскольку свет должен пройти до них одинаковые расстояния (см. рисунок ниже).



Процесс синхронизации часов, движущихся перпендикулярно линии, их соединяющей ($v \approx 0{,}94c$).

Пусть теперь часы движутся в направлении линии, их соединяющей. Расстояние от лампочки до часов сократится до $l' = l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Тогда передние часы удирают от светового сигнала, и он догоняет их за время $\frac{l'}{c-v}$, а задние часы идут навстречу световому сигналу, и они встречаются через время $\frac{l'}{c+v}$.



Процесс синхронизации часов, движущихся вдоль линии, их соединяющей ($v = 0{,}5c$).
Последовательность состояний сверху вниз. Шаг по времени — $\frac{l'}{2c}$

Мы видим, что часы, которые синхронны в своей системе отсчёта, несинхронны, когда наблюдатель движется относительно них. Для такого наблюдателя часы спереди по ходу движения выставлены с отставанием, а сзади — с опережением, причём ход всех этих часов замедлен в $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ раз.

Аккуратное рассмотрение даёт преобразование Лоренца:

$$ct \to ct' = \frac{ct - \frac{v_0}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}, \qquad x \to x' = \frac{x - v_0 t}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}, \qquad y \to y' = y, \qquad z \to z' = z.$$

2.6.1.3 Чья линейка длиннее? Чьи часы быстрее?

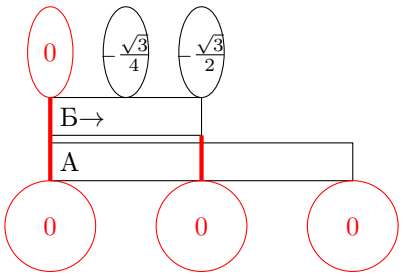
Пусть два инерциальных наблюдателя Алиса и Борис движутся друг относительно друга. На первый взгляд имеет место парадоксальная ситуация: каждый считает, что его линейка (ориентированная вдоль скорости) длиннее, а его часы быстрее, чем у коллеги. Как совместить одно с другим?

Опишем с точки зрения Алисы (будем считать её неподвижной) процесс измерения длины линейки и скорости часов Бориса.

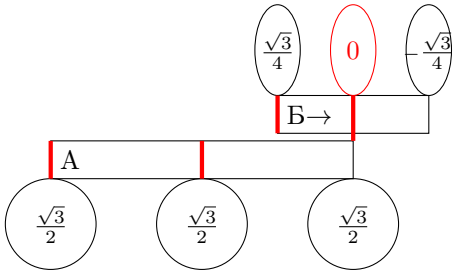
Ключевым моментом здесь оказывается относительность одновременности. Соответственно, удобно считать, что у каждого наблюдателя имеются не одни часы, а целый набор одинаковых синхронизированных (с точки зрения данного наблюдателя) часов, которые покоятся (с точки зрения данного наблюдателя) в разных точках пространства.

Чтобы измерить длину линейки Бориса, Алиса должна *одновременно* отметить положение двух её концов. Однако Борис не согласится с тем, что оба конца были отмечены одновременно. Часы Бориса, связанные с передним концом линейки, отстают (с точки зрения Алисы) от часов, связанных с задним концом линейки, поэтому с точки зрения Бориса положение переднего конца его линейки было отмечено раньше, чем положение заднего конца. А за это время движущаяся и неподвижная линейка сдвинулись друг относительно друга. Поэтому для Бориса длина его линейки была занижена Алисой. С точки зрения Алисы точно так же Борис «неправильно» измерил длину неподвижной линейки.

На рисунке изображён случай $v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 2$. Длина линейки — 1, часы показывают время в единицах длины. Часы Алисы — круги, часы Бориса за счёт релятивистского сокращения длины стали эллипсами.



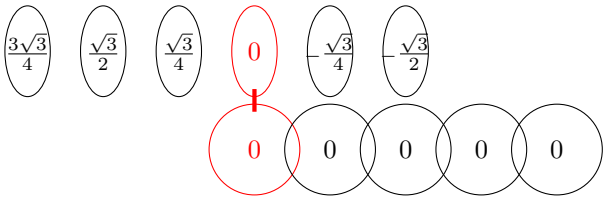
Алиса отмечает оба конца линейки Бориса и находит, что его линейка в 2 раза короче.
Борис отмечает левый конец линейки Алисы.



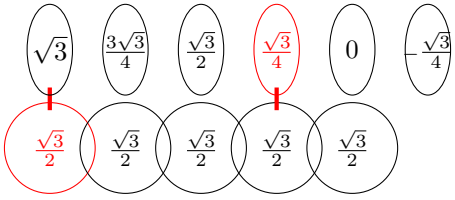
Борис отмечает правый конец линейки Алисы и находит, что её линейка в 2 раза короче.

Чтобы увидеть, что с точки зрения Алисы часы Бориса идут медленнее, надо выбрать какие-то одни часы Бориса и последовательно сравнивать их показания с показаниями часов Алисы, мимо которых они пролетают. Таким образом, чтобы увидеть замедление хода *одних* часов системы Б, их показания надо последовательно сравнивать с показаниям *разных* часов системы А.

И наоборот, чтобы увидеть замедление *одних* часов системы А, их показания надо последовательно сравнивать с показаниями *разных* часов системы Б. На следующих рисунках показана сверка часов Алисы (А-часов) и часов Бориса (Б-часов) в тех же обстоятельствах, в которых мы ранее сравнивали линейки.



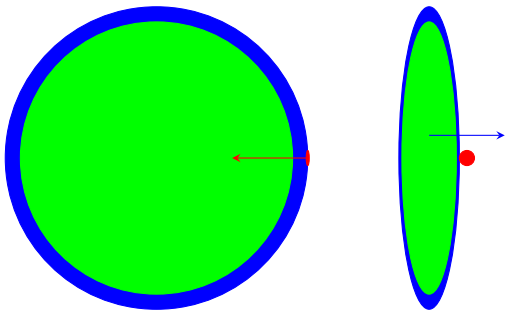
Алиса и Борис сверяют нули пары часов. (С точки зрения Алисы, часы Бориса расставлены вдвое чаще.)



Отмеченные ранее Б-часы показывают вдвое меньше, чем те А-часы, мимо которых они пролетают.
Отмеченные ранее А-часы показывают вдвое меньше, чем те Б-часы, мимо которых они пролетают.

2.6.1.4 Согласованность замедления времени и сокращения расстояний

В верхних слоях атмосферы под действием космических лучей возникают короткоживущие частицы. Их время жизни, умноженное на скорость, даёт расстояние, много меньшее, чем расстояние до поверхности Земли. Тем не менее эти частицы успевают долететь до Земли. С точки зрения наблюдателя на поверхности Земли время для частиц замедляется в γ раз, что и позволяет им проделать весь этот путь. С точки зрения самих частиц атмосфера Земли, да и сама Земля сжаты в направлении движения частицы в γ раз, что и позволяет частицам долететь до поверхности.



По сути это тот же самый знаменитый «парадокс близнецов». Невозможно подобрать близнецов, более идентичных, чем элементарные частицы одного сорта[1].

2.6.1.5 Эффект близнецов

Прежнего, земного не увидим небосклона,
Если верить россказням учёных чудаков.
Ведь когда вернёмся мы, по всем по их законам
На Земле пройдёт семьсот веков.

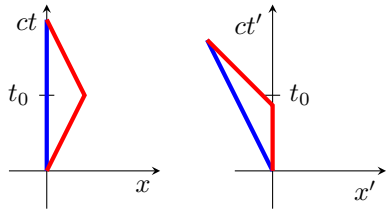
В.С. Высоцкий. «Марш космических негодяев»

Выше мы уже упоминали парадокс близнецов, когда обсуждали полёт нестабильных частиц через атмосферу Земли. Более правильным термином был бы *эффект близнецов*, поскольку никаких противоречий (кроме противоречий с вынесенными из ньютоновской механики привычками) здесь нет, а есть наблюдаемый физический эффект.

Рассмотрим теперь парадокс близнецов в более привычной формулировке. Пусть один близнец будет неподвижен в начале координат, а другой летит с большой скоростью v из начала координат к далёкой звезде и обратно (см. ниже левый рисунок).

Время между встречами близнецов по их часам будет различно. При этом время для «путешественника» $2\tau_0$ будет меньше, чем время для «домоседа» $2t_0$:

$$\tau_0^2 = t_0^2 - (t_0 v/c)^2 = t_0^2(1 - v^2/c^2) \quad \Rightarrow \quad \tau_0 = t_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$



Мировые линии близнецов для случая $v = 0{,}5\,c$ в двух инерциальных системах отсчёта: $\tau_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}t_0$.

В этой ситуации близнецы не равноправны: один из них не ускоряется, что позволяет связать с ним начало отсчёта системы координат, а другой в момент времени t_0 мгновенно ускоряется и меняет свою скорость. Связать с ним начало отсчёта системы координат мы можем лишь на то время, когда он движется с постоянной скоростью.

На правом рисунке изображено то же, что и на левом, но с другой точки зрения: один близнец всё время движется с постоянной скоростью, а другой сперва стоит на месте, а потом догоняет первого.

С какой точки зрения ни смотреть, всё равно *максимальное* время между двумя событиями, разделёнными *времениподобным интервалом*[2], измеряет тот, кто движется между этими событиями равномерно и прямолинейно (т. е. тот, чья мировая линия — прямая, соединяющая эти события). Это свойство аналогично тому, что *минимальное* расстояние между двумя точками в обычной геометрии получается вдоль прямой.

[1] В соответствии с принципами квантовой механики элементарные частицы одного сорта в принципе не могут быть отличены одна от другой. Даже в том случае, если вы пристально наблюдаете за какой-то частицей, вы не можете сказать, что это та же самая частица, которую вы видели в предыдущий момент времени.

[2] То есть между событиями можно пролететь с досветовой скоростью.

2.6.2 Кинематика Ньютона и Минковского как вырожденный случай

Кинематика в лагранжевом формализме — это геометрия конфигурационного пространства и параметризованных (параметр — время) кривых в нём (траекторий системы). Для материальной точки конфигурационное пространство — это наше физическое пространство или (если рассматривать расширенное конфигурационное пространство) пространство-время, так что кинематика точки — это геометрия пространства (или пространства-времени) и параметризованных кривых в нём.

В кинематике Ньютона и Минковского пространство — это трёхмерное евклидово пространство.

Евклидово пространство плоское, т.е. в нём определён параллельный перенос, не зависящий от траектории. Благодаря этому, работая в декартовых координатах, мы можем вообще не задумываться о том, что векторы привязаны к разным точкам пространства, а для того, чтобы их сложить или вычесть, их надо предварительно перенести в одну точку с помощью параллельного переноса.

Мы, не задумываясь, складываем импульсы, относящиеся к разным частицам, которые находятся в разных точках пространства, аналогично поступаем с моментами импульса. В результате получаются векторные сохраняющиеся величины, описывающие систему в целом.

В искривлённом пространстве ситуация интереснее. Импульс свободной частицы тоже сохраняется в том смысле, что ковариантная производная от него равна нулю. Импульс при соударении двух точечных частиц сохраняется, но при соударении частицы встречаются в одной точке и параллельный перенос для проверки сохранения импульса не нужен. В результате (в искривлённом пространстве!) возможна ситуация, когда импульс сохраняется локально (вдоль траекторий свободных частиц и при соударениях), но не сохраняется глобально. Например, неподвижная частица распалась на две, которые разлетелись в противоположные стороны, после чего геодезические снова пересеклись (в евклидовой геометрии это невозможно), но уже под углом, и суммарный импульс оказался отличен от нуля.

С моментом импульса ситуация ещё хуже, т.к. радиус-вектор, необходимый для определения орбитального момента импульса, вектором не является. При формулировке закона Ньютона 3б мы заменили условие сохранения момента импульса условием, что *при парном взаимодействии частиц силы направлены вдоль прямой* (*геодезической*), *соединяющей частицы*. Но в искривлённом пространстве геодезическая, соединяющая частицы, может быть не единственной.

Так что в искривлённом пространстве (или пространстве-времени) приходится тщательно следить за тем, к какой точке относится та или иная величина. В результате большинство теорий, которые удаётся строить в таких пространствах, являются *локальными*: в них отсутствует какое-либо дальнодействие, а частицы взаимодействуют или друг с другом при прямых столкновениях, или с полем в той точке, где частица находится. Динамика поля также *локальна*, т. е. на поведение поля в данной точке влияет только *конечное число производных* от компонент поля.

Даже в специальную теорию относительности (пространство-время которой плоское) вставить дальнодействие довольно сложно, хотя и возможно, поскольку сигнал должен передаваться не быстрее скорости света в вакууме. Р.Ф. Фейнман придумал формулировку классической электродинамики без электромагнитного поля, но ему пришлось ввести дальнодействие с запаздыванием и опережением, т.е. влияние заряженных частиц друг на друга происходило так, как если бы они испускали волны, движущиеся со скоростью света вперёд и назад (!) по времени[3].

В общей теории относительности (ОТО) изменение импульса и энергии (которая в теории относительности является компонентой импульса) частицы за счёт параллельного переноса является эффектом гравитационного поля, которое описывается с помощью метрического тензора. По этой причине в ОТО существуют сложности с определением импульса, энергии, момента импульса и массы. Эти величины хорошо определены для пространственно-ограниченной системы в асимптотически плоском пространстве-времени.

С электрическим зарядом, который описывается скалярной величиной, не возникает проблем, т.к. для скаляра параллельный перенос тривиален.

(!*) Искривлённое конфигурационное пространство встречается и в задачах классической (ньютоновской) механики для систем со связями. Похожие тонкости с локальным сохранением импульса при глобальном несохранении имеют место, например, для частицы, скользящей по поверхности конуса. Искривлённым также является конфигурационное пространство абсолютно твёрдого тела, что приводит к нетривиальным эффектам для гироскопов.

[3]Целью формулировки электродинамики без электромагнитного поля было исключение из теории бесконечной энергии, с которой точечная частица взаимодействует сама с собой, что представляет проблему как для классической, так и для квантовой электродинамики. К сожалению, в квантовой электродинамике обойтись без электромагнитного поля Фейнману не удалось из-за неразличимости электронов, которые не могут «понять», взаимодействуют они с другими электронами или сами с собой.

Глава 2.7

Кинематика и геометрия СТО (с. 88)

2.7.1 Нейтрино, мюон и другие частицы в стандартной модели

В дальнейших задачах встречаются такие частицы, как *нейтрино* и *мюон*. Что это такое, для решения задач не важно, важно лишь, чему равны массы частиц и их электрические заряды.

Для любознательного читателя заметим, что *нейтрино* — это почти электрон, только... без заряда и почти без массы.

А *мюон* — это практически электрон, только более тяжёлый (примерно в 200 массивнее электрона). Есть и ещё более тяжёлая версия электрона — *тау-лептон* (*таон*).

Вообще в *стандартной модели физики элементарных частиц* все фундаментальные фермионы разбиваются на три поколения:

- 1-е поколение — самые лёгкие (и самые стабильные) частицы;
- 2-е поколение — аналоги частиц 1-го поколения за одним исключением — они более тяжёлые, поэтому они не стабильны, ведь им есть во что распадаться, не нарушая законов сохранения;
- 3-е поколение — ещё более тяжёлые и ещё менее стабильные версии тех же частиц.

Для каждой частицы в таблице существует соответствующая *античастица*, которая имеет такую же массу, как и частица, а все заряды отличаются знаком. Античастицы принято обозначать той же буквой, но с чертой, как для комплексного сопряжения, либо (для заряженных частиц) с указанием заряда, например, $\bar{\mu} = \mu^+$ — антимюон, $\bar{d}$ — анти-d-кварк, $\bar{\nu}_\mu$ — мюонное антинейтрино.

Стандартная модель физики элементарных частиц — это разновидность квантовой теории поля (КТП). В КТП, как правило, возможны (с той или иной вероятностью) любые процессы (превращения), не запрещённые законами сохранения. Вычисление вероятностей таких превращений далеко выходит за рамки данного курса[1], но мы можем определить, возможен ли процесс с точки зрения законов сохранения.

Так, электрон — самая лёгкая заряженная частица, что автоматически означает, что свободный (одиночный) электрон стабилен, — любое его превращение привело бы к нарушению сохранения энергии или заряда. Тяжёлому электрону (мюону) хватает энергии, чтобы распасться, и он распадается: $\mu^- \to e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$.

В каждом поколении есть пара лептонов. Это заряженный лептон (электрон или его аналог) и названное в честь этого лептона нейтрино: электронное нейтрино (поколение 1), мюонное нейтрино (поколение 2), тау-нейтрино (поколение 3). Нейтрино с точки зрения стандартной модели отличается от электрона только отсутствием электрического заряда и очень маленькой массой[2]. По причине отсутствия электрического заряда нейтрино очень неохотно вступает во взаимодействие с другими частицами, в частности, оно может с вероятностью, близкой к 1, пролететь насквозь не только планету типа Земли, но и звезду типа Солнца. Долгое время считалось, что масса нейтрино равна нулю, однако недавно выяснилось, что массы нейтрино хотя и малы, но отличны от нуля. Измерить эти массы пока не удалось, но их наличие установлено благодаря эффекту *осцилляции нейтрино* — разные сорта нейтрино на лету превращаются друг в друга. Для безмассового нейтрино собственное время было бы равно нулю (стояло бы на месте) и такие превращения были бы невозможны. В 2015 году «за открытие осцилляции нейтрино, показывающее, что у нейтрино есть масса», Нобелевскую премию по физике получили Артур Макдональд (исследование солнечных нейтрино в нейтринной обсерватории Садбери в Канаде) и Такааки Каджита (исследование

[1] Мы можем лишь в классическом приближении оценить вероятности (точнее, *сечения рассеяния*, см. главы 3.14, 4.14 «Рассеяние», с. 385, 495) упругих процессов, связанных с электромагнитным взаимодействием.

[2] Это позволяет предположить, что бóльшая часть массы электрона — это масса (энергия) электромагнитного поля, создаваемого электрическим зарядом.

атмосферных нейтрино на детекторе Супер-Камиоканде в Японии). Явление осцилляции нейтрино было предсказано Бруно Максимовичем Понтекорво в 1960-е годы (Объединённый институт ядерных исследований, Дубна).

Что означает слово *мезон*, для решения задачи также знать не обязательно, однако мы продолжим наше крайне поверхностное знакомство со стандартной моделью. Кроме двух лептонов (заряженного и нейтрального) в каждом поколении элементарных частиц имеется пара *кварков* — загадочных частиц с дробными (!!!) зарядами $+\frac{2}{3}$ и $-\frac{1}{3}$, которые никогда не встречаются в свободном виде (явление *конфайнмента/удержания/невылета* кварков), так что экспериментатор такое безобразие, как дробный заряд, никогда не видит, но внутри составных частиц ведут себя почти как свободные частицы (*асимптотическая свобода*). Кварк чем-то подобен собаке в упряжке: кварк свободен, пока постромка не натянута. А если «постромка» рвётся? Тогда на одном конце разрыва возникает кварк, а на другом — антикварк.

Частицы, в состав которых входят кварки, — *адроны*, они всегда имеют целый электрический заряд. Адроны, состоящие из пары кварк-антикварк (антикварк может быть другого сорта, чем кварк), называются *мезонами*[3]. π^+-мезон состоит из пары $u\bar{d}$. Помимо мезонов кварки могут образовывать *барионы*, состоящие из трёх кварков каждый.

К барионам относятся *нуклоны*: *протон* ($p = uud$) и *нейтрон* ($n = udd$), которые (за исключением электрического заряда) очень похожи друг на друга, но свободный нейтрон немного тяжелее: $m_p = 938{,}27$ МэВ, $m_n = 939{,}57$ МэВ.

Массы адронов отличаются от суммы масс входящих в них кварков и антикварков за счёт массы «упряжки» — *глюонов*, скрепляющих кварки между собой.

Приведём таблицу фундаментальных фермионов по зарядам и поколениям, а также таблицу их названий, масс и средних времён жизни[4].

		Заряды			I	II	III
		электрический	барионный	лептонный			
Кварки	верхние	$+2/3$	$+1/3$	0	u	c	t
	нижние	$-1/3$	$+1/3$	0	d	s	b
Лептоны	нейтрино	0	0	$+1$	ν_e	ν_μ	ν_τ
	электроны	-1	0	$+1$	e	μ	τ

Кварки				Лептоны		
u	3 МэВ	**u**p	верхний	e	0,511 МэВ	электрон
d	5 МэВ	**d**own	нижний	ν_e	$< 2{,}2$ эВ	электронное нейтрино
c	1 ГэВ	**c**harm	очарованный	μ	105,7 МэВ	мюон, $2{,}19 \cdot 10^{-6}$ с
s	0,1 ГэВ	**s**trange	странный	ν_μ	$< 0{,}17$ МэВ	мюонное нейтрино
t	170 ГэВ	**t**op (**t**rue)	истинный	τ	1,777 ГэВ	τ-лептон, $2{,}9 \cdot 10^{-13}$ с
b	4 ГэВ	**b**ottom (**b**eauty)	красивый	ν_τ	$< 15{,}5$ МэВ	τ-нейтрино

2.7.2 Решения задач 20, 21

20. Пороги реакции. В ускорителе на встречных пучках идёт реакция превращения пары электрон-позитрон (позитрон=антиэлектрон) в пару мюон-антимюон:

$$e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^- .$$

Массы частицы и соответствующей ей античастицы равны

$$m_e = 0{,}511 \text{ МэВ}, \qquad m_\mu = 105 \text{ МэВ}.$$

Условия отдельных пунктов и решения

(*) Что такое электрон и *мюон*, для данной задачи не важно. Важны лишь массы частиц. Для любознательного читателя выше помещён § 2.7.1 «Нейтрино, мюон и другие частицы в стандартной модели» (с. 212).

а) Является ли данный процесс упругим или неупругим?

[3] В старой литературе мюон могут называть мю-мезоном, хотя мюон — не мезон, а лептон. По современной терминологии мюон мезоном не является, эта путаница связана с историей открытия мюона и пи-мезонов, когда ещё не была ясна их природа, а наблюдались лишь некоторые новые частицы промежуточной (между электроном и протоном) массы.

[4] Свободных кварков не существует, поэтому говорить об их времени жизни мы не можем.

Поскольку в данном процессе меняется набор частиц, процесс является неупругим.

б) Каков энергетический порог этой реакции?

В системе центра инерции суммарный трёхмерный импульс равен нулю. Поскольку частица и античастица имеют одинаковую массу, до соударения электрон и позитрон симметрично сталкиваются, а после соударения мюон и антимюон симметрично разлетаются.

Все заряды частицы и античастицы противоположны, так что единственный закон сохранения, который накладывает условие на возможность протекания процесса, — закон сохранения энергии. Минимальная энергия свободной частицы — это её масса. Мы считаем, что мюон и антимюон должны, родившись, разлететься достаточно далеко, чтобы энергия их притяжения стала малой по сравнению с энергией покоя. Таким образом, минимальная энергия, которую должна нести каждая из двух исходных частиц, равна массе мюона:

$$\mathcal{E}_{e^-} = \mathcal{E}_{e^+} \geqslant m_\mu.$$

в) Сравните с порогом в случае, когда ускоренные позитроны падают на неподвижные электроны.

Мы нашли порог реакции в системе центра инерции. Теперь надо перенести результат в другую систему отсчёта. Можно, конечно, пересчитать ранее полученный результат с помощью преобразований Лоренца для 4-мерного импульса, но мы поступим иначе: запишем результат в инвариантной (не зависящей от системы отсчёта) форме.

Сначала перепишем условие на порог реакции через суммарную энергию в системе центра инерции:

$$\mathcal{E}_{\Sigma\text{с.ц.и.}} = \mathcal{E}_{e^-} + \mathcal{E}_{e^+} \geqslant 2m_\mu.$$

Суммарная энергия в системе центра инерции (другое название — масса системы) может быть выражена через скалярный квадрат суммарного 4-импульса:

$$\underline{p}_\Sigma^2 = -\mathcal{E}_{\Sigma\text{с.ц.и.}}^2, \qquad \mathcal{E}_{\Sigma\text{с.ц.и.}}^2 = -\underline{p}_\Sigma^2 \geqslant (2m_\mu)^2.$$

Это условие — неравенство на два инварианта: если оно выполняется в одной системе отсчёта, то оно выполняется в любой другой.

Перепишем его левую часть через параметры отдельных частиц:

$$-\underline{p}_\Sigma^2 = -(\underline{p}_1 + \underline{p}_2)^2 = -\underbrace{\underline{p}_1^2}_{-m_e^2} - \underbrace{\underline{p}_2^2}_{-m_e^2} - 2(\underline{p}_1, \underline{p}_2) = 2m_e^2 - 2(\underline{p}_1, \underline{p}_2);$$

$$m_e^2 - (\underline{p}_1, \underline{p}_2) \geqslant 2m_\mu^2.$$

Перепишем условие протекания реакции через 3-мерные величины:

$$-(\underline{p}_1, \underline{p}_2) = \mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 - (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \geqslant 2m_\mu^2 - m_e^2.$$

Таков ответ в случае произвольной системы отсчёта.

В системе неподвижной мишени $\mathbf{p}_2 = 0$, $\mathcal{E}_2 = m_e$. Условие протекания реакции принимает вид

$$\mathcal{E}_1 m_e \geqslant 2m_\mu^2 - m_e^2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E}_1 \geqslant 2\frac{m_\mu}{m_e}\, m_\mu - m_e \approx 43\,150 \text{ МэВ} = 43{,}15 \text{ ГэВ}.$$

Энергия $2m_\mu$, которая, собственно, и необходима для рождения пары в системе центра инерции, умножается на отношение масс $\frac{m_\mu}{m_e} \approx 200$.

В рассматриваемой реакции все частицы сравнительно лёгкие, отношение масс также не слишком велико, и получившаяся энергия легко достижима на современных ускорителях. Однако если нас интересует рождение более тяжёлых частиц, то выигрыш в пороге реакции при работе со встречными пучками (т.е. практически в системе центра инерции) оказывается существенным.

Есть ли какие-то преимущества в случае неподвижной мишени? Почему такой подход вообще используется? В случае неподвижной мишени мы можем создать в мишени гораздо большую плотность частиц, чем достижима в пучке, скомпенсировав заряд электронов зарядом атомных ядер (обратите внимание: в условиях задачи в качестве неподвижной мишени упомянуты именно электроны). Бóльшую плотность электронов можно обеспечить, используя в качестве мишени твёрдое тело. Конечно, в твёрдом теле электроны не являются свободными, но их энергии связи порядка нескольких электрон-вольт для ускорительной физики не существенны.

г) Зная энергию каждого из пучков e^+ и e^-, найдите энергию и импульсы μ^+ и μ^-.

В данной задаче удобно углы вылета продуктов реакции отсчитывать от направления суммарного 3-импульса системы. Конкретные выкладки (их можно проделать по аналогии с задачей 21) оставляем читателю для самостоятельной работы.

21. Комптон-эффект. Для получения γ-квантов (фотонов) высокой энергии навстречу пучку электронов с энергией $\mathcal{E} = 200$ ГэВ выстреливает лазер с энергией фотонов $\varepsilon = 2$ эВ.

(*) *Гамма-квант* — это тоже *фотон* (частица = квант электромагнитного излучения), только с достаточно большой энергией, примерно начиная от 1 кэВ и выше. Различие между *гамма-излучением* и *рентгеновским излучением* определяется по-разному. Иногда их различают по энергии фотона (частоте), тогда гамма-излучение жёстче рентгеновского. Иногда их различают по источнику, тогда гамма-фотоны излучаются при ядерных реакциях, а точно такие же рентгеновские — при ускоренном движении заряженных частиц.

Условия отдельных пунктов и решения

а) Какие малые безразмерные параметры присутствуют в задаче?

Начальная энергия электрона (200 ГэВ) многократно превышает массу электрона (0,5 МэВ). Это сразу даёт нам один малый параметр — $\frac{1}{\gamma} = \frac{m_e}{\mathcal{E}} \approx 0{,}25 \times 10^{-5}$. Легко вычислить (не пользуясь калькулятором), что скорость такого электрона отстаёт от скорости света примерно на 1 мм/с:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2} \approx 1 - \frac{1}{3{,}2\cdot 10^{11}} \approx c - \frac{3\cdot 10^{10}\ \frac{\text{см}}{\text{с}}}{3{,}2\cdot 10^{11}} \approx c - 0{,}1\ \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Обратите внимание на то, что вычисление скорости электрона на калькуляторе по точной формуле $v = c\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}$ — это плохая идея.

1. Если взять для скорости света приближённое значение $3 \cdot 10^{10}\ \frac{\text{см}}{\text{с}}$, то ошибка округления превзойдёт поправку к скорости, которую мы ищем, и вычисленная скорость окажется больше, чем точное[5] значение скорости света $299\,792\,458\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.
2. Даже если взять точное значение скорости света, разрядной сетки калькулятора может не хватить, чтобы представить правильный ответ. Даже если разрядной сетки хватит, в последних знаках возможны ошибки округления, превосходящие вычисляемую нами поправку.
3. Когда мы вычисляем величину, очень близкую к единице $\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}$, «хорошая практика» состоит в том, чтобы писать ответ не в виде $0{,}999\ldots$ (много девяток), а в виде $1 - k \cdot 10^{-n}$. Не стоит перегружать запись лишними значащими цифрами.

Очень велик соблазн считать электрон в этой задаче безмассовой частицей. Если считать электрон безмассовым, то при лобовом столкновении его с безмассовым фотоном (рассеяние фотона назад) почти безмассовый электрон и безмассовый фотон должны просто обменяться энергиями и импульсами. Но электрон не может иметь энергию $\varepsilon = 2$ эВ, т.к. эта энергия меньше (и даже много меньше) массы (энергии покоя) электрона. Это даёт нам второй малый параметр $\frac{\varepsilon}{m_e} \approx 4 \times 10^{-6}$. Ответ задачи сильно зависит от отношения этих двух малых параметров.

б) Найдите зависимость энергии фотонов от угла рассеяния.

Пусть вначале электрон летит вдоль оси x, тогда начальные 4-импульсы электрона и фотона имеют вид

$$\underline{p}_{e1} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} \\ p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{p}_{\text{ф}1} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ -\varepsilon \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Мы сразу воспользовались тем, что фотон — безмассовая частица, а потому $|\mathbf{p}_{\text{ф}1}| = \varepsilon$.

Обозначим угол между направлением, в котором вылетает рассеянный фотон, и осью x как α. Угол рассеяния — это угол между направлением распространения фотона до и после рассеяния. Он составляет $\pi - \alpha$. Ось y выберем так, чтобы фотон рассеивался в плоскости $x-y$, тогда 4-импульс рассеянного фотона

[5] Начиная с 1983 года для скорости света принято *точное* значение. При этом метр *по определению* равен расстоянию, которое свет в вакууме проходит за $\frac{1}{299\,792\,458}$ с.

имеет вид

$$\underline{p}_{\text{ф}2} = \begin{pmatrix} E \\ E\cos\alpha \\ E\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Мы снова воспользовались тем, что фотон — безмассовая частица, а потому $|\mathbf{p}_{\text{ф}2}| = E$.

4-импульс рассеянного электрона мы можем выразить из сохранения 4-импульса:

$$\underline{p}_{e2} = \underline{p}_{e1} + \underline{p}_{\text{ф}1} - \underline{p}_{\text{ф}2}.$$

Воспользуемся соотношением $\underline{p}^2 = -m^2$ для электрона после рассеяния:

$$\underbrace{\underline{p}_{e2}^2}_{-m^2} = (\underline{p}_{e1} + \underline{p}_{\text{ф}1} - \underline{p}_{\text{ф}2})^2 = \underbrace{\underline{p}_{e1}^2}_{-m^2} + \underbrace{\underline{p}_{\text{ф}1}^2}_{0} + \underbrace{\underline{p}_{\text{ф}2}^2}_{0} + 2(\underline{p}_{e1}, \underline{p}_{\text{ф}1}) - 2(\underline{p}_{e1}, \underline{p}_{\text{ф}2}) - 2(\underline{p}_{\text{ф}1}, \underline{p}_{\text{ф}2}).$$

Отсюда находим

$$(\underline{p}_{e1}, \underline{p}_{\text{ф}2}) + (\underline{p}_{\text{ф}1}, \underline{p}_{\text{ф}2}) = (\underline{p}_{e1}, \underline{p}_{\text{ф}1}).$$

Распишем скалярные произведения (не забывая использовать метрику Минковского!) через компоненты 4-импульсов:

$$-\mathcal{E}E + pE\cos\alpha - \varepsilon E - \varepsilon E\cos\alpha = -\mathcal{E}\varepsilon - p\varepsilon.$$

Отсюда получаем

$$E = \frac{(\mathcal{E}+p)\varepsilon}{\mathcal{E} - p\cos\alpha + \varepsilon(1+\cos\alpha)}, \qquad p = \sqrt{\mathcal{E}^2 - m^2}.$$

Мы вроде бы получили ответ, но формула в таком виде неудобна для вычисления числовых значений, поскольку по условиям задачи в знаменателе разные слагаемые различаются на 11 порядков: $\frac{\mathcal{E}}{\varepsilon} = 10^{11}$.

Прежде всего для начального импульса электрона, используя малость $\frac{m}{\mathcal{E}}$, разложим квадратный корень:

$$p = \sqrt{\mathcal{E}^2 - m^2} = \mathcal{E}\sqrt{1 - \frac{m^2}{\mathcal{E}^2}} \approx \mathcal{E}\left(1 - \frac{m^2}{2\mathcal{E}^2}\right) = \mathcal{E} - \frac{m^2}{2\mathcal{E}}.$$

Малая поправка отличается от главного члена на 11 порядков, и ей очень хочется пренебречь. Это действительно можно сделать в числителе, там, где $\mathcal{E}$ и p складываются. В знаменателе нам встречается разность $\mathcal{E} - p\cos\alpha$, и надо быть осторожнее: если $\cos\alpha \approx 1$, то $\mathcal{E}$ сокращается и в знаменателе становятся существенными малые члены $\frac{m^2}{2\mathcal{E}}$ и $\varepsilon(1-\cos\alpha)$. Поэтому перепишем пока ответ в следующем виде,

$$E \approx \frac{2\mathcal{E}\varepsilon}{\mathcal{E}(1-\cos\alpha) + \frac{m^2}{2\mathcal{E}}\cos\alpha + \varepsilon(1+\cos\alpha)}.$$

в) Какую энергию будут иметь фотоны, рассеянные назад?

Рассеяние фотона строго назад соответствует $\alpha = 0$. При этом $\cos\alpha = 1$ и громадная энергия начального электрона $\mathcal{E}$ полностью исчезает из знаменателя:

$$E \approx \frac{2\mathcal{E}\varepsilon}{\frac{m^2}{2\mathcal{E}} + 2\varepsilon} = \frac{\mathcal{E}}{\frac{m^2}{4\mathcal{E}\varepsilon} + 1}.$$

В знаменателе мы узнаём отношение двух малых параметров задачи:

$$\frac{m^2}{4\mathcal{E}\varepsilon} = \frac{1}{4}\frac{\frac{m}{\mathcal{E}}}{\frac{\varepsilon}{m}} = \frac{1}{4}\frac{1/4}{1/2{,}5} = \frac{5}{32} = 0{,}15625.$$

При заданных числах это отношение сравнимо с единицей, но, немного модифицировав условия задачи, его можно было бы заметно увеличить или уменьшить:

$$E = \frac{\mathcal{E}}{1{,}15625} \approx 173 \text{ ГэВ}.$$

Оценка $E \approx \mathcal{E}$, получающаяся из приближения безмассового электрона, оказалась не так далека от истины, но на самом деле нам просто повезло, т.к. параметр $\frac{m^2}{4\mathcal{E}\varepsilon} = 0{,}15625$ оказался сравнительно мал. Достаточно уменьшить начальную энергию фотона в 10 раз до 0,2 эВ (казалось бы, какая разница: и 2, и 0,2 эВ — энергия, исчезающе малая на фоне остальных параметров задачи), и параметр $\frac{m^2}{4\mathcal{E}\varepsilon}$ вырастет

до 1,565. В этом случае оценка $E \approx \mathcal{E}$ будет врать уже не на 15%, а в 2,5 раза.

г) Обсудите предельные случаи «очень маленького» и «достаточно большого» угла рассеяния.
д) Каков критерий малости угла?

Что такое «достаточно большой угол рассеяния» в контексте данной задачи? Угол рассеяния $\pi - \alpha$ достаточно велик, т.е. угол α «очень мал», если $\mathcal{E}(1-\cos\alpha)$ оказывается одного порядка с другими членами в знаменателе. Разложим косинус, $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$:

$$E \approx \frac{2\mathcal{E}\varepsilon}{\mathcal{E}\frac{\alpha^2}{2} + \frac{m^2}{2\mathcal{E}} + 2\varepsilon} = \frac{2\mathcal{E}}{\frac{\mathcal{E}}{\varepsilon}\frac{\alpha^2}{4} + \frac{m^2}{4\mathcal{E}\varepsilon} + 1}.$$

Мы пренебрегли в знаменателе членами $\frac{m^2}{2\mathcal{E}}\frac{\alpha^2}{2}$ и $\varepsilon\frac{\alpha^2}{2}$, т.к. они на 11 порядков меньше, чем $\mathcal{E}\frac{\alpha^2}{2}$.

Мы видим, что условие малости угла α состоит в том, что величина $\frac{\mathcal{E}}{\varepsilon}\frac{\alpha^2}{4} = 10^{11}\frac{\alpha^2}{4}$ сравнима с единицей или меньше. Таким образом, углы рассеяния можно считать «большими» до $\alpha \sim 10^{-5}$.

При «малых углах рассеяния», т.е. при «достаточно больших углах α», член $\mathcal{E}(1-\cos\alpha)$ доминирует в знаменателе и всеми остальными членами можно пренебречь. Условие этого: $\alpha \gg 10^{-5}$, и тогда

$$E \approx \frac{2\mathcal{E}\varepsilon}{\mathcal{E}(1-\cos\alpha)} = \frac{2\varepsilon}{1-\cos\alpha}.$$

В этом пределе зависимость энергии рассеянного фотона от энергии электрона исчезает. Называться гамма-квантом в этом случае фотон не заслуживает.

е) Является ли данный процесс упругим или неупругим?

Хотя рассеянный фотон может приобрести громадную энергию, он всё равно остаётся тем же безмассовым фотоном, а электрон остаётся электроном. Так что процесс является упругим. Обратите внимание на то, что, сколь ни мала начальная энергия фотона, обойтись без начального фотона нельзя, так как испускание фотона свободной (ни с чем не взаимодействующей) частицей противоречило бы сохранению 4-импульса либо масса частицы должна была бы измениться.

2.7.3 Кинематика частицы в нелоренцеских координатах и ОТО

2.7.3.1 Косоугольные координаты

Мы рассмотрели кинематику частицы в СТО в лоренцевых координатах.

Сначала рассмотрим случай «косоугольных» координат в пространстве Минковского. Это соответствует случаю, когда метрический тензор задаётся постоянной матрицей с сигнатурой $(-,+,+,+)$, но эта матрица отлична от стандартной метрики Минковского $\eta_{ij} = \mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1)$:

$$g_{ij} \neq \eta_{ij}, \quad \det(g_{ij}) < 0, \quad \text{сигнатура}(g_{ij}) = (-,+,+,+), \quad i,j,k = 0,1,2,3. \tag{2.7.1}$$

Благодаря невырожденности метрики по-прежнему можно определить обратную метрику, которая также будет задаваться постоянной матрицей, но это уже будет другая матрица[6],

$$g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k. \tag{2.7.2}$$

Прямая и обратная метрики уже в общем случае не диагональны, и поднимание/опускание индексов теперь перепутывает разные компоненты тензора. Элемент интервала и собственное время (другие формы записи метрики) по-прежнему записываются через скалярный квадрат $\underline{dx}$:

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j = (\underline{dx},\underline{dx}) = -c^2 d\tau^2$$

Поскольку метрический тензор не зависит от координат, базисы во всех точках пространства-времени одинаковы и тензоры можно дифференцировать без помощи ковариантных производных.

Выделение среди четырёх пространственно-временных координат «времени» уже может не иметь смысла.

4-скорость, 4-импульс, 4-ускорение и 4-сила определяются стандартным образом:

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau}, \quad p^i = mu^i, \quad w^i = \frac{du^i}{d\tau}, \quad f^i = \frac{dp^i}{d\tau}.$$

[6] Совпадения матриц прямой и обратной метрик, как в лоренцевых координатах, уже не будет.

Но соответствие с 3-мерными величинами запутывается (раз уж мы не знаем, какая из координат соответствует времени) и зависит от конкретного вида метрики.

Выполняются прежние кинематические тождества

$$u^i u_i = -c^2, \quad u^i w_i = \frac{1}{2}\frac{d(u^i u_i)}{d\tau} = 0, \quad p^i p_i = -m^2 c^2.$$

Для безмассовой частицы по-прежнему нельзя определить 4-скорость, но можно определить 4-импульс как касательную к мировой линии, направленную в будущее и должным образом нормированную[7].

2.7.3.2 Пример: радиолокационные координаты на плоскости

Введём *радиолокационные координаты* $U - V$ в плоскости $t - x$:

$$t, x \quad \to \quad U = ct + x, \quad V = ct - x,$$

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -\underbrace{(cdt + dx)}_{dU}\underbrace{(cdt - dx)}_{dV} + dy^2 + dz^2 = -dU dV + dy^2 + dz^2.$$

В новых координатах (U, V, y, z) метрики (прямая и обратная) имеют вид

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad g^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поднимание/опускание индексов в радиолокационных координатах происходит следующим образом:

$$(A_U; A_V; A_y; A_z) = (-\tfrac{1}{2}A^V; -\tfrac{1}{2}A^U; A^y; A^z), \quad (A^U; A^V; A^y; A^z) = (-2A_V; -2A_U; A_y; A_z).$$

Скалярное произведение вычисляется так:

$$(\underline{A}; \underline{B}) = -\tfrac{1}{2}A^U B^V - \tfrac{1}{2}A^V B^U + A^y B^y + A^z B^z = -2A_U B_V - 2A_V B_U + A_y B_y + A_z B_z.$$

Поскольку метрический тензор не зависит от координат, базисы во всех точках пространства-времени одинаковы и тензоры можно дифференцировать без помощи ковариантных производных.

Обе новые координаты U и V равноправны, и в качестве «временно́й координаты» можно выбрать любую из них (или ни одной).

У координат U и V хороший физический смысл, связанный с их названием. Пусть в плоскости $x = 0$ расположена антенна радиолокатора, которая простирается неограниченно вдоль осей y и z (либо ограничимся случаем $y = z = 0$).

Если $x > 0$, то, чтобы в момент времени t достичь x, радиолокационный импульс должен стартовать в момент времени $t - x/c = \frac{V}{c}$. Отразившись от события, импульс вернётся обратно к локатору в момент времени $t + x/c = \frac{U}{c}$.

Если $x < 0$, то, чтобы в момент времени t достичь x, радиолокационный импульс должен стартовать в момент времени $t + x/c = \frac{U}{c}$. Отразившись от события, импульс вернётся обратно к локатору в момент времени $t - x/c = \frac{V}{c}$.

Таким образом, меньшая из двух величин U, V — это момент времени, когда локатор должен испустить импульс, чтобы тот попал в данное событие, а большая из этих величин — момент возвращения отражённого импульса обратно к локатору[8].

Мы ещё вернёмся к радиолокационным координатам в плоскости $t - x$. Иногда они оказываются очень удобными, например, через них очень легко написать преобразование Лоренца для скорости вдоль оси x.

Упражнение. Можете подумать сами: какая линейная замена координат сохраняет вид квадратичной формы $dU dV$? И более сложный вопрос: какая скорость такой замене координат соответствует[9]?

[7] В лоренцевых координатах мы для нормировки 4-импульса безмассовой частицы использовали его связь с трёхмерным импульсом и энергией. Теперь это становится сложнее, но сохранение 4-импульса (если наша базмассовая частица взаимодействует с массивными) нам поможет.

[8] Скорость света здесь — коэффициент пересчёта секунд в метры, поэтому не обращаем на неё внимания.

[9] Приглядитесь к направлению новой оси времени.

2.7.3.3 Криволинейные координаты

Если рассматривать криволинейные координаты в пространстве-времени (пусть даже это плоское пространство-время Минковского) или если перейти к искривлённому пространству-времени общей теории относительности (ОТО), то кинематика частицы изменится.

Метрический тензор больше не будет фиксированной матрицей. Метрика может зависеть от координат, но по-прежнему невырожденна и имеет прежнюю сигнатуру:

$$g_{ij} = g_{ij}(x), \quad \det(g_{ij}) < 0, \quad \text{сигнатура}(g_{ij}) = (-,+,+,+), \quad i,j,k = 0,1,2,3. \tag{2.7.3}$$

Благодаря невырожденности метрики по-прежнему можно определить обратную метрику, которая также будет меняться от точки к точке:

$$g^{ij} = g^{ij}(x), \quad g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k. \tag{2.7.4}$$

Прямая и обратная метрики уже в общем случае не диагональны, и поднимание/опускание индексов теперь перепутывает разные компоненты тензора. Элемент интервала и собственное время (другие формы записи метрики) по-прежнему записываются через скалярный квадрат $\underline{dx}$:

$$ds^2 = g_{ij}(x)\,dx^i\,dx^j = (\underline{dx}, \underline{dx}) = -c^2 d\tau^2$$

Выделение среди четырёх пространственно-временных координат «времени» уже может не иметь смысла.

4-скорость и 4-импульс определяются так же, как и раньше:

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau}, \quad p^i = mu^i.$$

Для безмассовой частицы по-прежнему нельзя определить 4-скорость, но можно определить 4-импульс как касательную к мировой линии, направленную в будущее и должным образом нормированную[10].

Поскольку в криволинейных координатах для каждой точки имеется свой базис, определение 4-ускорения и 4-силы требует использования ковариантной производной вдоль мировой линии (т.е. вдоль вектора u^i):

$$w^i = \frac{Du^i}{d\tau} = \frac{du^i}{d\tau} + \Gamma^i{}_{jk}u^j u^k, \quad f^i = \frac{Dp^i}{d\tau} = \frac{dp^i}{d\tau} + \Gamma^i{}_{jk}p^j u^k.$$

Связность при этом берётся такая, чтобы в лоренцевых координатах она обратилась в нуль[11], т. е. это должна быть симметричная связность, согласованная с метрикой:

$$\Gamma^i{}_{jk} = \frac{g^{il}}{2}(\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{jk}).$$

Выполняются прежние кинематические тождества

$$u^i u_i = -c^2, \quad u^i w_i = \frac{1}{2}\frac{d(u^i u_i)}{d\tau} = \frac{1}{2}\frac{D(u^i u_i)}{d\tau} = 0, \quad p^i p_i = -m^2c^2.$$

Соответствие с 3-мерными величинами запутывается ещё больше. Запутывается и вопрос с сохранением 4-импульса.

Если пространство-время остаётся плоским пространством-временем Минковского (только описанным в криволинейных координатах), то параллельный перенос не зависит от траектории и мы можем задать сохранение суммарного 4-импульса, перенеся 4-импульсы всех частиц в какую-то одну точку пространства-времени.

Если пространство-время не является плоским, то параллельный перенос зависит от траектории. В этом случае суммарный 4-импульс всех частиц определён не однозначно, поскольку зависит от того, по каким траекториям импульсы отдельных частиц переносились в одну точку. Поэтому глобальный закон сохранения 4-импульса в этом случае отсутствует[12]! Тем не менее локально 4-импульс сохраняется.

- Сохраняется импульс вдоль мировой линии свободной частицы (ковариантная производная 4-импульса вдоль мировой линии, т.е. 4-сила, равна нулю). Кривая, вдоль которой происходит параллельный перенос, задана однозначно — это мировая линия.

[10] В лоренцевых координатах мы для нормировки 4-импульса безмассовой частицы использовали его связь с трёхмерным импульсом и энергией. Теперь это становится сложнее, но сохранение 4-импульса (если наша базмассовая частица взаимодействует с массивными) нам поможет.

[11] В ОТО мы не можем обратить связность в нуль выбором системы координат в конечной области, но (согласно *принципу соответствия ускорения и гравитации*) можем это сделать в любой точке, сев в *систему координат падающего лифта.*

[12] Это можно связать с тем, что искривлённое пространство-время задаёт гравитационное поле, которое может прикладывать силу к частице, т.е. менять её импульс.

- При соударении частиц импульс сохраняется. Тут параллельный перенос не нужен, т. к. частицы встречаются в одной точке пространства-времени.

Глобальные законы сохранения для компонент 4-импульса появляются в соответствии с теоремой Нётер, если имеется однопараметрическая группа симметрий пространства-времени, т.е. если имеется *векторное поле Киллинга*[13], вдоль которого пространство-время может скользить само по себе без растяжений и сжатий метрики. Тогда сохраняется сумма скалярных произведений импульсов всех частиц на вектор Киллинга.

Сохранение суммарных 4-импульса и момента импульса в пространстве-времени Минковского тоже связано с векторами Киллинга. Запишем эти векторы Киллинга в лоренцевых координатах. С сохранением энергии связано векторное поле Киллинга

$$\mathbf{e}_t = (1;0;0;0).$$

С сохранением пространственных компонент импульса связаны векторные поля Киллинга

$$\mathbf{e}_x = (0;1;0;0), \quad \mathbf{e}_y = (0;0;1;0), \quad \mathbf{e}_z = (0;0;0;1).$$

С сохранением компонент момента импульса связаны векторные поля Киллинга

$$\mathbf{l}_x = (0;0;z;-y), \quad \mathbf{l}_y = (0;-z;0;x), \quad \mathbf{l}_z = (0;y;-x;0).$$

В пространстве Минковского есть ещё три векторных поля Киллинга

$$\mathbf{k}_x = (x;ct;0;0), \quad \mathbf{k}_y = (y;ct;0;0), \quad \mathbf{k}_z = (z;ct;0;0),$$

они связаны с симметриями по отношению к преобразованиям Лоренца, а соответствующий им закон сохранения — *теорема о движении центра инерции*.

Перечисленные 10 полей Киллинга — максимальный набор линейно независимых полей Киллинга в пространстве Минковского.

2.7.3.4 Пример: радиолокационные координаты в пространстве

В предыдущем примере импульс радиолокатора распространялся вдоль оси x. Пусть теперь радиолокатор находится в начале координат и посылает импульсы во все стороны.

Удобно ввести вместо декартовых координат x, y, z сферические координаты r, θ, ϕ:

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta.$$

Теперь метрика Минковского имеет вид

$$ds^2 = -c^2dt^2+dx^2+dy^2+dz^2 = -cdt^2+dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta\,d\phi^2 = -\underbrace{(cdt+dr)}_{dU}\underbrace{(cdt-dr)}_{dV}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2).$$

Радиолокационные координаты введём следующим образом:

$$U = ct + r, \quad V = ct - r.$$

Координаты V и U соответствуют моментам времени отправления и возвращения радиолокационного импульса (испущенного в направлении, заданном сферическими углами θ, ϕ), который отразился от рассматриваемого события.

В радиолокационных координатах интервал и собственное время задаются следующим образом:

$$ds^2 = -dUdV + \frac{(U-V)^2}{4}(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2) = -c^2d\tau^2.$$

Метрический тензор имеет вид

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(U-V)^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(U-V)^2\sin^2\theta}{4} \end{pmatrix}, \qquad g^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{(U-V)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{(U-V)^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}.$$

[13] См. § 2.3.3 «Вектор Киллинга» (с. 188).

Поднимание/опускание индексов в радиолокационных координатах происходит следующим образом:

$$(A_U; A_V; A_\theta; A_\phi) = \left(-\tfrac{1}{2} A^V; -\tfrac{1}{2} A^U; \frac{(U-V)^2 A^\theta}{4}; \frac{(U-V)^2 \sin^2\theta\, A^\phi}{4} \right);$$

$$(A^U; A^V; A^\theta; A^\phi) = \left(-2A_V; -2A_U; \frac{4A_\theta}{(U-V)^2}; \frac{4A_\phi}{(U-V)^2 \sin^2\theta} \right).$$

Скалярное произведение вычисляется так:

$$\begin{aligned} (\underline{A}; \underline{B}) &= -\tfrac{1}{2} A^U B^V - \tfrac{1}{2} A^V B^U + \frac{(U-V)^2}{4} \left(A^\theta B^\theta + \sin^2\theta\, A^\phi B^\phi \right) = \\ &= -2A_U B_V - 2A_V B_U + \frac{4}{(U-V)^2} \left(A_\theta B_\theta + \frac{A_\phi B_\phi}{\sin^2\theta} \right). \end{aligned}$$

Поскольку метрический тензор зависит от координат, базисы в разных точках пространства-времени различаются и тензоры нужно дифференцировать с помощью ковариантных производных. Вычисление коэффициентов связности в радиолокационных координатах оставим читателю в качестве самостоятельного упражнения.

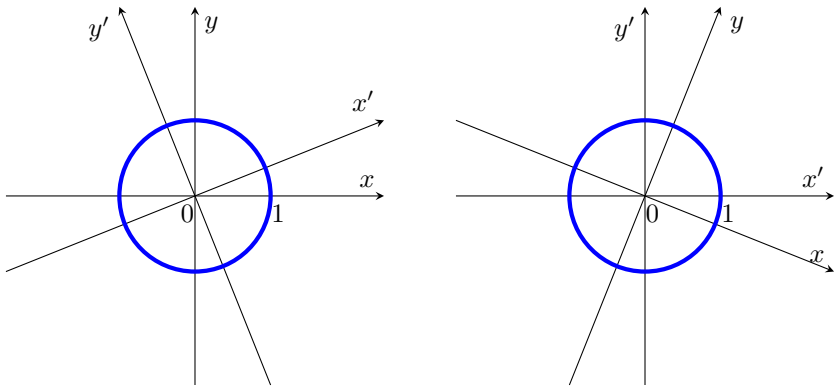
Но не будем забывать, что, несмотря на использование криволинейных координат, мы по-прежнему итмеем дело с пространством Минковского, которое является плоским (параллельный перенос не зависит от траектории), и закон сохранения 4-импульса выполняется глобально, если перенести импульсы всех частиц в одну точку. И все 10 полей Киллинга пространства Минковского по-прежнему имеют место, только в новых координатах они будут выражаться по-другому.

Ввести *радиолокационные координаты общего вида* U, V, θ, ϕ можно и в искривлённом пространстве-времени в окрестности мировой линии любой массивной частицы. В этом случае V и U *по определению* — моменты времени отправления и возвращения радиолокационного импульса, а θ и ϕ — сферические углы, задающие направление излучения импульса. Но в этом случае метрика будет иметь другой вид (зависящий от геометрии конкретного пространства-времени и от движения частицы, которая несёт радиолокатор).

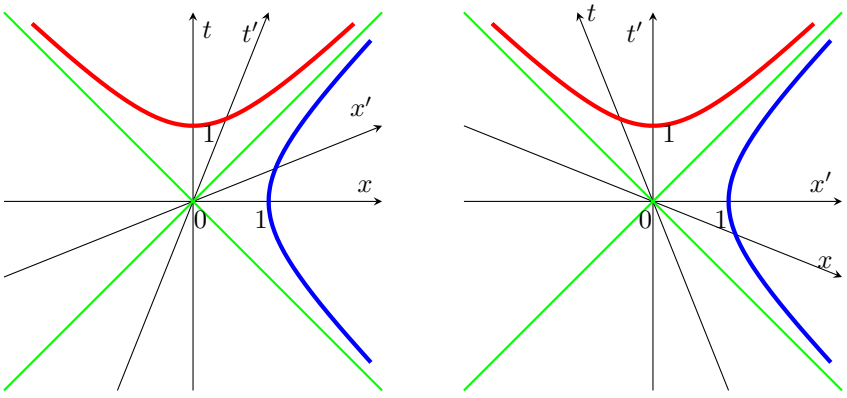
Глава 2.8

Группа Лоренца и пространства постоянной кривизны (с. 96)

2.8.1 Аддитивность угла и быстроты



Все точки на калибровочной окружности равноправны — через любую может пройти новая ось x.
Координаты $x-y$ и $x'-y'$ при рассмотрении поворота равноправны.
Прямой поворот от обратного отличается знаком угла



Все точки на правой калибровочной гиперболе равноправны — через любую может пройти новая ось x.
Все точки на верхней калибровочной гиперболе равноправны — через любую может пройти новая ось t.
Координаты $t-x$ и $t'-x'$ при рассмотрении буста равноправны.
Прямой буст от обратного отличается знаком быстроты

С учётом того, что угол (быстрота) — естественный параметр вдоль калибровочной окружности (гиперболы), а также с учётом равноправности всех декартовых (лоренцевых) координат при последовательном выполнении двух поворотов (бустов) в одной плоскости их углы (быстроты) складываются. Матрицы преобразований при этом перемножаются (в обратном порядке):

$$\begin{pmatrix} \cos\phi_2 & -\sin\phi_2 \\ \sin\phi_2 & \cos\phi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi_1 & -\sin\phi_1 \\ \sin\phi_1 & \cos\phi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi_1+\phi_2) & -\sin(\phi_1+\phi_2) \\ \sin(\phi_1+\phi_2) & \cos(\phi_1+\phi_2) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\phi_2\cos\phi_1 - \sin\phi_2\sin\phi_1 & -(\sin\phi_2\cos\phi_1 + \cos\phi_2\sin\phi_1) \\ \sin\phi_2\cos\phi_1 + \cos\phi_2\sin\phi_1 & \cos\phi_2\cos\phi_1 - \sin\phi_2\sin\phi_1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\vartheta_2 & \operatorname{sh}\vartheta_2 \\ \operatorname{sh}\vartheta_2 & \operatorname{ch}\vartheta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\vartheta_1 & \operatorname{sh}\vartheta_1 \\ \operatorname{sh}\vartheta_1 & \operatorname{ch}\vartheta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\vartheta_1+\vartheta_2) & \operatorname{sh}(\vartheta_1+\vartheta_2) \\ \operatorname{sh}(\vartheta_1+\vartheta_2) & \operatorname{ch}(\vartheta_1+\vartheta_2) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\vartheta_2\operatorname{ch}\vartheta_1+\operatorname{sh}\vartheta_2\operatorname{sh}\vartheta_1 & \operatorname{sh}\vartheta_2\operatorname{ch}\vartheta_1+\operatorname{ch}\vartheta_2\operatorname{sh}\vartheta_1 \\ \operatorname{sh}\vartheta_2\operatorname{ch}\vartheta_1+\operatorname{ch}\vartheta_2\operatorname{sh}\vartheta_1 & \operatorname{ch}\vartheta_2\operatorname{ch}\vartheta_1+\operatorname{sh}\vartheta_2\operatorname{sh}\vartheta_1 \end{pmatrix}.$$

(!) Мы сейчас вывели формулы для тригонометрических/гиперболических функций от суммы двух углов (быстрот).

2.8.1.1 Круговое и гиперболическое движение в механике

Если принять естественный параметр ϕ за время t, мы можем посчитать скорость, ускорение и силу, действующую на частицу единичной массы при движении по единичной окружности в рамках ньютоновской механики:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p} = \dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \ddot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} = -\mathbf{r}.$$

Мы видим, что круговое движение — частный случай колебаний 2-мерного изотропного[1] гармонического осциллятора.

Если принять естественный параметр ϑ за собственное время τ, мы можем посчитать 4-скорость, 4-ускорение и 4-силу, действующую на частицу единичной массы при движении по единичной гиперболе в рамках релятивистской механики:

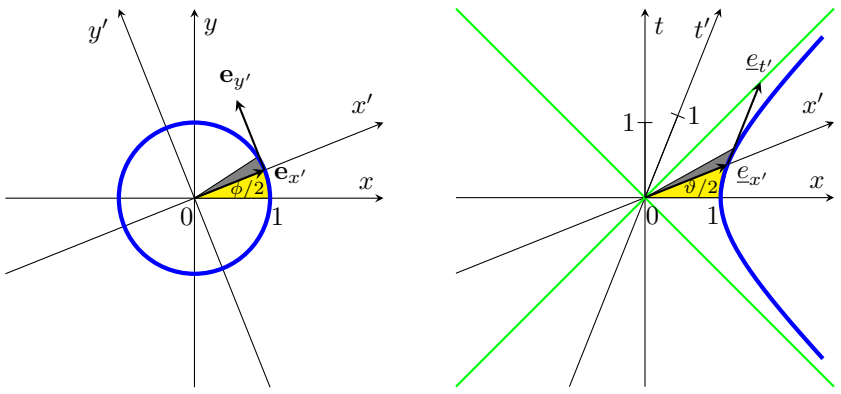
$$\underline{x}(\tau) = \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sh}\tau \\ \operatorname{ch}\tau \end{pmatrix}, \quad \underline{p} = \dot{\underline{x}}(\tau) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\tau \\ \operatorname{sh}\tau \end{pmatrix}, \quad \underline{f} = \ddot{\underline{x}}(\tau) = \begin{pmatrix} \operatorname{sh}\tau \\ \operatorname{ch}\tau \end{pmatrix} = \underline{x}.$$

Уравнения движения релятивистской частицы в пространстве-времени выглядят как уравнения движения ньютоновской механики в пространстве. Мы видим, что гиперболическое движение — частный случай движения 2-мерного изотропного гармонического осциллятора с отрицательной жёсткостью (сила отталкивает частицу от положения равновесия).

(!) Для гиперболического движения мы видим, что $p^x = \operatorname{sh}\tau = t$, т.е. релятивистское гиперболическое движение по единичной гиперболе — это движение под действием постоянной единичной 3-силы.

Изотропный осциллятор создаёт силу, направленную по радиусу. Момент такой силы равен нулю, а значит, мы должны ожидать, что для его движения должен выполняться закон равных площадей (2-й закон Кеплера) — радиус-вектор, соединяющий начало координат и частицу, должен за равные времена заметать равные площади. С учётом того, что площадь кругового/гиперболического сектора при нулевом значении параметра угла/быстроты равна нулю, мы должны заключить, что угол/быстрота пропорциональны площади кругового/гиперболического сектора. Мы докажем это другим способом и вычислим значение коэффициента пропорциональности в следующем п. 2.8.1.2 «Угол, быстрота и площадь сектора».

2.8.1.2 Угол, быстрота и площадь сектора



Площадь кругового/гиперболического сектора и её приращение при малом изменении угла/быстроты

При малом изменении параметра ϕ (ϑ) вектор $\mathbf{e}_{x'}$ ($\underline{e}_{x'}$) испытывает малое приращение:

$$d\mathbf{e}_{x'} = \frac{d\mathbf{e}_{x'}}{d\phi}\,d\phi = \mathbf{e}_{y'}\,d\phi;$$
$$d\underline{e}_{x'} = \frac{d\underline{e}_{x'}}{d\vartheta}\,d\vartheta = \underline{e}_{t'}\,d\vartheta.$$

[1] Жёсткость по всем направлениям одинакова.

Приращение площади кругового (гиперболического) сектора — это площадь бесконечно малого треугольника, натянутого на базисный вектор и его приращение $\mathbf{e}_{x'}$ и $d\mathbf{e}_{x'}$ ($\underline{e}_{x'}$ и $d\underline{e}_{x'}$). Площадь такого треугольника — половина площади параллелограмма, натянутого на те же два вектора:

$$dS_{\text{кр.сек.}} = \frac{1}{2}\det(\mathbf{e}_{x'}, d\mathbf{e}_{x'}) = \frac{1}{2}\det(\mathbf{e}_{x'}, \mathbf{e}_{y'}d\phi) = \frac{d\phi}{2}\det(\underbrace{\mathbf{e}_{x'}\ ,\ \mathbf{e}_{y'}}_{\text{матрица поворота}}) = \frac{d\phi}{2};$$

$$dS_{\text{гип.сек.}} = \frac{1}{2}\det(d\underline{e}_{x'}, \underline{e}_{x'}) = \frac{1}{2}\det(\underline{e}_{t'}d\vartheta, \underline{e}_{x'}) = \frac{d\vartheta}{2}\det(\underbrace{\underline{e}_{t'}\ ,\ \underline{e}_{x'}}_{\text{матрица буста}}) = \frac{d\vartheta}{2}.$$

Площадь кругового (гиперболического) сектора при нулевом угле (быстроте) равна нулю, малое приращение площади сектора составляет половину приращения угла (быстроты), таким образом, площадь кругового (гиперболического) сектора составляет половину угла (быстроты):

$$S_{\text{кр.сек.}} = \frac{\phi}{2}; \qquad S_{\text{гип.сек.}} = \frac{\vartheta}{2}.$$

В справочниках, когда даётся геометрическое определение гиперболических функций, их аргумент обычно определяют через площадь гиперболического сектора единичной гиперболы. Но мы знаем, что можно было бы определить этот аргумент через интервал (как собственное время) вдоль дуги гиперболы.

2.8.2 Собственные векторы и числа буста

Уравнение светового конуса задаётся через скалярный квадрат радиус-вектора $\underline{x}^2 = 0$, поэтому оно одинаково для всех лоренцевых систем координат с общим началом. Следовательно, световой конус при бусте переходит в себя. На плоскости Минковского световой конус — это пара прямых $t = \pm x$. Эти прямые переходят в себя, т.е. (в силу линейности буста) мы можем заключить, что это собственные направления буста. Было бы интересно записать буст в собственных осях.

Преобразуем метрику Минковского на плоскости к собственным осям буста:

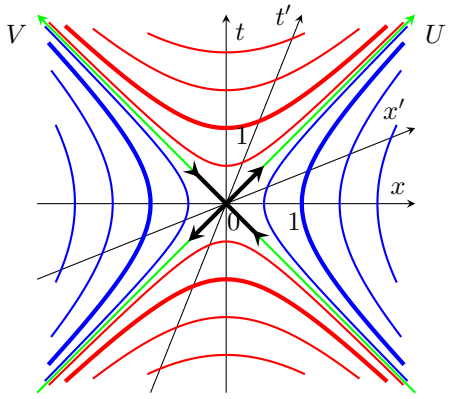
$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 = -d\underbrace{(t+x)}_{U}\,d\underbrace{(t-x)}_{V} = -dU\,dV.$$

Новые координаты $U - V$ — это *радиолокационные координаты на плоскости*, которые мы уже обсуждали ранее в п. 2.7.3.2 «Пример: радиолокационные координаты на плоскости» (с. 218).

Очевидно, что квадратичная форма переходит в себя при преобразовании

$$U = \lambda U', \qquad V = \lambda^{-1}V', \qquad \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U' \\ V' \end{pmatrix}.$$

Это тоже буст, но записанный в собственных осях.



Собственные оси буста: $U = t + x$, $V = t - x$. Крест со стрелками указывает, в каком направлении плоскость растягивается, а в каком сжимается при бусте, это видно и по тому, как наклоняются навстречу друг другу штрихованные оси. Точки вне образующих светового конуса скользят вдоль гипербол

Нам осталось установить, как связаны собственные числа $\lambda^{\pm 1}$ с быстротой и скоростью:

$$\det\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\vartheta - \lambda & \operatorname{sh}\vartheta \\ \operatorname{sh}\vartheta & \operatorname{ch}\vartheta - \lambda \end{pmatrix} = (\operatorname{ch}\vartheta - \lambda)^2 - \operatorname{sh}^2\vartheta = \lambda^2 - 2\lambda\operatorname{ch}\vartheta + 1 = 0;$$

$$\lambda = \operatorname{ch}\vartheta \pm \sqrt{\operatorname{ch}^2\vartheta - 1} = \underbrace{\operatorname{ch}\vartheta}_{\gamma} \pm \underbrace{\operatorname{sh}\vartheta}_{v\gamma} = \mathrm{e}^{\pm\vartheta} = \gamma(1 \pm v) = \sqrt{\frac{1 \pm v}{1 \mp v}}.$$

Собственные векторы лежат на световом конусе и имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \mathrm{e}^{\vartheta} &= \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}, \quad \underline{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{h}_1^2 = 0, \\ \lambda_2 = \mathrm{e}^{-\vartheta} &= \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}, \quad \underline{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{h}_2^2 = 0. \end{aligned}$$

2.8.3 Собственные векторы и числа поворота

Для поворота плоскости на угол, не кратный π, собственные направления и собственные числа оказываются комплексными. Тем не менее они тоже в некоторых случаях оказываются полезными:

$$\det \begin{pmatrix} \cos\phi - \lambda & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi - \lambda \end{pmatrix} = (\cos\phi - \lambda)^2 + \sin^2\phi = \lambda^2 - 2\lambda\cos\phi + 1 = 0;$$

$$\lambda = \cos\phi \pm \sqrt{\cos^2\phi - 1} = \cos\phi \pm \mathrm{i}\sin\phi = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\phi}.$$

Собственные векторы лежат на световом конусе (комплексном!)[2] и имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}, \quad \mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}_1^2 = 0, \\ \lambda_2 &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}, \quad \mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}_2^2 = 0. \end{aligned}$$

Собственные координаты имеют вид:

$$Z = (\mathbf{h}_2, \mathbf{r}) = x + \mathrm{i}y, \quad Z^* = (\mathbf{h}_1, \mathbf{r}) = x - \mathrm{i}y, \qquad \begin{pmatrix} Z \\ Z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z' \\ (Z')^* \end{pmatrix}.$$

Мы получили тривиальный результат — поворот в плоскости на угол ϕ может быть описан как умножение комплексной координаты $Z' = x' + \mathrm{i}y'$ на комплексную экспоненту $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$.

Собственные координаты поворотов Z и Z^* получаются друг из друга комплексным сопряжением, поэтому достаточно знать одну из этих координат (обычно берут Z), что соответствует представлению плоскости $x - y$ как комплексной плоскости. Такое представление удобно в задачах, в которых повороты возникают естественным образом, например при рассмотрении изотропного осциллятора в магнитном поле (см. задачу 36 «Классический эффект Зеемана», с. 141, в этой задаче удобно ввести комплексную координату в плоскости, перпендикулярной полю).

2.8.4 Понятие группы (л)

Преобразования симметрий мы можем рассматривать с двух точек зрения.

- Как симметрии комбинируются между собой? Что получится, если последовательно выполнить преобразования симметрии U_1 и U_2: $U_2U_1 = ?$
- Как симметрии действуют на интересующие нас объекты? Часто это будут векторы. (Применительно к группе поворотов и группе Лоренца — радиус-векторы.) Как матрица $\hat{U}$ действует на векторы $\mathbf{v}$: $\hat{U}\mathbf{v} = ?$

Первая точка зрения — *теория групп*.
Вторая точка зрения — *теория представлений групп* (или просто *теория представлений*).

[2] Обычно при скалярном умножении комплексных векторов компоненты одного из ниж подвергаются комплексному сопряжению: $\langle\phi|\psi\rangle = \sum_k \phi_k^*\psi_k$, но здесь комплексные векторы перемножаются так, как обычно умножаются вещественные: $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sum_k A_k B_k$. При таком скалярном умножении появляются ненулевые комплексные векторы с нулевым квадратом, про которые можно сказать, что они лежат на комплексном световом конусе.

2.8.4.1 Определение и смысл (л)

Группа G — множество, на котором задана следующая структура.

- *Единичный элемент* (*единица*) $E_G \in G$.
- Операция *умножения* (*группового умножения*) $\circ : G \times G \to G$, т. е. $g_2 \circ g_1 = g_3$, где $g_1, g_2, g_3 \in G$. Умножение $\forall g, g_1, g_2, g_3 \in G$ удовлетворяет условиям

$$E_G \circ g = g \circ E_G = g, \qquad (g_3 \circ g_2) \circ g_1 = g_3 \circ (g_2 \circ g_1).$$

- Операция *взятия обратного элемента* $(\cdot)^{-1} : G \to G$, т. е. $\forall g \in G$ определено $g^{-1} \in G$. Операция взятия обратного элемента удовлетворяет условию

$$g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = E_G.$$

Число элементов в группе (мощность множества G) называют *порядком группы* и обозначают $|G|$. Порядок группы может быть как конечным, так и бесконечным.

(фл) Сразу опишем физический смысл этих понятий. Группа — *набор преобразований*, удовлетворяющий следующим условиям.

- В группу входит *единичный элемент — тождественное преобразование.*
- Если выполнить последовательно преобразования g_1 и g_2, то получится преобразование g_3, также принадлежащее группе. Оно задаётся как произведение преобразований g_1 и g_2 ***в обратном порядке*** (**!!!**): $g_3 = g_2 \circ g_1$. Следующие свойства для преобразований выполняются автоматически:

$$E_G \circ g = g \circ E_G = g, \qquad (g_3 \circ g_2) \circ g_1 = g_3 \circ (g_2 \circ g_1).$$

- Операция *взятия обратного элемента* — замена преобразования g на обратное преобразование g^{-1}. Таким образом, все преобразования, входящие в группу, должны быть обратимы, причём для всякого преобразования $g \in G$ обратное преобразование также входит в группу $g^{-1} \in G$. Автоматически выполняется свойство

$$g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = E_G.$$

Почему мы положили, что умножение преобразований соответствует их выполнению в обратном порядке? Потому что при действии матрицы на столбец мы пишем матрицу слева от столбца: $A\mathbf{v}$. Если на результат подействовать ещё одной матрицей, то получится $BA\mathbf{v}$ и мы получим слева от $\mathbf{v}$ комбинацию BA, в которой матрицы написаны в обратном порядке по сравнению с тем порядком, в котором они действуют. Естественно считать, что и групповое умножение преобразований выполняется в том же порядке. Это позволяет опускать значок «$\circ$», обозначающий групповое умножение.

Может показаться, что группа, определённая как набор преобразований, — частный случай группы вообще, однако это не так. Любая группа может быть представлена как группа преобразований самой себя: элемент группы g преобразует группу с помощью умножения слева (*левых сдвигов*) $g : G \to G$,

$$g : h \mapsto g \circ h \qquad \forall g, h \in G. \tag{2.8.1}$$

(*) В теории групп естественно рассматривать отображение $f : G \to H$ группы G на группу H, при котором сохраняется групповая структура, т. е.

$$f(E_G) = E_H, \quad \forall g_1, g_2 \in G \quad f(g_1) \circ f(g_2) = f(g_1 \circ g_2), \quad f(g_1^{-1}) = f(g_1)^{-1}. \tag{2.8.2}$$

Такое отображение называется *гомоморфизмом* (*гомоморфным отображением*).

Иногда реальная группа симметрий оказывается не той группой, которую мы ожидали с самого начала, а её гомоморфным отображением. Например, если у нас есть симметрия относительно группы поворотов, а рассматриваемые состояния тождественно переходят в себя при любом повороте, то симметрия таких состояний описывается не группой поворотов, а группой из одного тождественного преобразования.

Если гомоморфное отображение является ещё и взаимнооднозначным, то оно называется *изоморфизмом*, а группы G и H считаются одинаковыми (*изоморфными*). Изоморфизм обозначается так: $G \simeq H$.

Одинаковые (*изоморфные*) группы могут быть по-разному *представлены* как группы преобразований.

Пример 1. Например, группа из двух элементов $\mathbb{Z}_2 = \{+1, -1\}$ с обычной операцией умножения может быть представлена как тождественное преобразование[3] $(+1)$ и некоторое преобразование, которое

[3] Единичный элемент всегда отвечает тождественному преобразованию.

при двукратном повторении даёт тождественное преобразование (-1). Если рассматривать преобразования плоскости, то элемент -1 может быть отражением плоскости относительно некоторой прямой или симметрией относительно некоторой точки. Это будут разные представления одной и той же группы $\mathbb{Z}_2$.

Пример 2.** Группа поворотов SO(3) допускает представление как преобразованиями 3-мерных векторов при поворотах, так и преобразованиями матриц 3×3 или преобразованиями 3-мерных тензоров с n индексами. Вообще *линейные неприводимые представления*[4] группы SO(3) нумеруются целым неотрицательным числом $l = 0, 1, 2, 3, \ldots$ и имеют размерность $2l + 1$.

- $l = 0$ — преобразования скаляров (любой поворот представляется тождественным преобразованием).
- $l = 1$ — преобразования векторов (ортогональная матрица 3×3 действует на вектор как на столбец).
- $l = 2$ — преобразования симметричных матриц с нулевым следом (как тензоров с двумя индексами).
- Произвольное l — преобразования симметричных тензоров с l индексами с нулевой свёрткой по любой паре индексов.

Эти представления группы поворотов встретятся нам в электродинамике при рассмотрении мультипольных моментов и в квантовой механике при рассмотрении моментов импульса.

В *теории групп* изучаются свойства, не зависящие от изоморфного *представления* группы как группы преобразований. Таким образом, с точки зрения теории групп группа преобразований по сравнению с абстрактной группой наделена «лишней» структурой, которая задаёт действие элементов группы как преобразований некоторого пространства. Различные представления группы как группы преобразований изучаются *теорией представлений*.

2.8.4.2 Коммутативность и некоммутативность (л)

Коммутативными (*абелевыми*) называются группы, для которых результат умножения не зависит от порядка множителей:

$$g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1 \quad \forall g_1, g_2 \in G.$$

Для абелевых групп групповую операцию могут называть не умножением, а *сложением*, а единичный элемент не единицей, а *нулём группы*.

(*) Для того чтобы определить, насколько данные элементы группы коммутируют или не коммутируют друг с другом, вводят такой объект, как *групповой коммутатор*:

$$g_1 \circ g_2 \circ g_1^{-1} \circ g_2^{-1}.$$

Если данные элементы группы коммутируют, то групповой коммутатор равен единичному элементу E_G. Для абстрактной группы мы не можем определить матричный коммутатор $[g_1, g_2] = g_1 g_2 - g_2 g_1$, так как для элементов группы не определено вычитание.

2.8.4.3 Подгруппы (л)

Подгруппой H группы G называется её подмножество, замкнутое относительно групповых операций группы G, т. е.

$$E_G, g^{-1}, g \circ h \in H \quad \forall g, h \in H \subset G.$$

Таким образом, подгруппа $H \subset G$ тоже является группой, причём групповые операции в ней те же, что и в G.

(ф*) Если первоначальная симметрия системы нарушается добавлением в функцию Гамильтона лишнего члена, то новая функция Гамильтона обычно имеет уже меньшую симметрию, задаваемую не исходной группой, а какой-то её подгруппой. Например, если первоначально мы имеем частицу в сферически-симметричном потенциале (атом), то симметрия системы описывается группой вращений. Если мы поместим атом во внешнее поле, то направление поля задаст в пространстве выделенное направление, в результате сохранятся только те симметрии из первоначальной группы, которые переводят это направление в себя. Таким образом, от первоначальной группы всех поворотов SO(3) останется подгруппа поворотов относительно фиксированной оси $\mathrm{SO}(2) \subset SO(3)$.

Задание подгруппы H позволяет разбить группу G на *левые и правые классы эквивалентности*:

$$\forall g_0 \in G \qquad [g_0]_{\text{л}} = g_0 H = \{g \in G | g = g_0 \circ h,\ h \in H\},$$
$$[g_0]_{\text{п}} = H g_0 = \{g \in G | g = h \circ g_0,\ h \in H\};$$

[4] Представления группы как группы преобразований линейного пространства называются *линейными представлениями*. Если в линейном пространстве нет подпространств, которые переходят в себя при любом преобразовании (кроме нульмерного подпространства и всего пространства), то такое представление называется *неприводимым представлением*.

$g_0 \in [g_0]_{\text{л,п}}$ называют *представителем класса эквивалентности*.

Если группа G конечная, то порядок группы $|G|$ делится на порядок подгруппы $|H|$ (докажите это в качестве упражнения).

Множество левых классов эквивалентности G/H и множество правых классов эквивалентности $H \setminus G$ для произвольной подгруппы H могут не быть группами и не совпадать.

Среди подгрупп особенно важны подгруппы, удовлетворяющие условию

$$g^{-1}Hg = H \quad \forall g \in G,$$

— *нормальные подгруппы*. *Нормальная подгруппа* может также называться *инвариантной подгруппой* или *нормальным делителем* группы.

У коммутативной группы все подгруппы являются нормальными.

Нормальность подгруппы — необходимое и достаточное условие того, что левые и правые классы эквивалентности совпадают: $H \setminus G = G/H$. В этом случае на них вводится групповая структура:

$$E_{G/H} = [E_G], \qquad [g]^{-1} = [g^{-1}], \qquad [g_1] \circ [g_2] = [g_1 \circ g_2].$$

Результат операции не зависит от того, какой представитель класса эквивалентности мы используем. Получившаяся подгруппа называется *факторгруппой* группы G по модулю нормальной подгруппы H и обозначается G/H.

Всякая группа G имеет по крайней мере две нормальные подгруппы: всю группу G и подгруппу, состоящую из единицы $\{E\}$ (*тривиальная подгруппа*). Если других нормальных подгрупп нет, то такая группа называется *простой группой*.

Если задан некоторый гомоморфизм $f : G \to L$ (см. формулы (2.8.2)), то множество всех элементов, отображающихся на единицу группы L, называют *ядром гомоморфизма*:

$$f^{-1}(E_L) = \{g \in G | f(g) = E_L\}.$$

Легко проверяется, что ядро $f^{-1}(E_L)$ всегда является нормальной подгруппой группы G.

Теорема о гомоморфизме[5]: Пусть задан гомоморфизм $f : G \to L$, тогда группа L изоморфна факторгруппе по ядру гомоморфизма:

$$L \simeq G/f^{-1}(E_L).$$

Теорема о гомоморфизме позволяет классифицировать все возможные гомоморфизмы, если мы знаем все нормальные подгруппы данной группы. В частности, для простых групп гомоморфизмы бывают двух типов: (1) изоморфизмы (ядро — тривиальная подгруппа) и (2) отображения на тривиальную группу из одного элемента (ядро — вся группа).

2.8.4.4 Стандартные матричные группы (л)

Стандартные непрерывные группы — это подгруппы группы комплексных квадратных *невырожденных* ($\det \hat{M} \neq 0$) матриц $N \times N$, которая обозначается $\mathrm{GL}(\mathbb{C}, N)$, где GL означает общие (**G**eneral) линейные (**L**inear) преобразования. Групповые структуры (единичный элемент, умножение и взятие обратного элемента) понимаются так, как это стандартно принято для матриц.

Буквенные обозначения стандартных непрерывных групп строятся из блоков:

- S — **S**pecial — *специальная* — $\det \hat{M} = 1$;
- U — **U**nitary — *унитарная* — $\hat{M}^\dagger = \hat{M}^{T*} = \hat{M}^{-1}$;
- O — **O**rthogonal — *ортогональная* — $\hat{M}^T = \hat{M}^{-1}$;
- L — **L**inear — линейная — иногда дописывается для красоты;
- G — **G**eneral — общая — дописывается для красоты, если нет никаких условий.

После буквенного кода в круглых скобках могут указываться дополнительные параметры:

- размер матрицы (число);
- сигнатура метрики (два числа — число положительных собственных чисел и число отрицательных), которая остаётся инвариантной под действием преобразований из данной группы (в этом случае должна использоваться буква O, но матрицы будут уже не ортогональные, а *псевдоортогональные*);

[5] Есть старый физматшкольный стишок для запоминания теоремы о гомоморфизме:

Гомоморфный образ группы!
Будь, во имя коммунизма,
Изоморфен факторгруппе
По ядру гомоморфизма!

- множество чисел, из которых строится матрица (чаще всего $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$):
  - $\mathbb{C}$ — комплексные (для унитарных матриц опускается);
  - $\mathbb{R}$ — вещественные (для ортогональных матриц опускается);
  - $\mathbb{Q}$ — рациональные;
  - $\mathbb{Z}$ — целые;
  - $\mathbb{N}$ — натуральные во французской традиции[6].

Примеры:

- $\mathrm{GL}(\mathbb{R}, N)$ — невырожденные, вещественные, $N \times N$;
- $\mathrm{SL}(N)$ — вещественные, $\det \hat{M} = 1$, $N \times N$;
- $\mathrm{O}(3,1)$ — группа Лоренца —

$$\hat{M}\ \mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1)\,\hat{M}^T = \mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1)$$

  — вещественные матрицы, сохраняют вид метрики Минковского (у метрики Минковского 1 отрицательное собственное число и 3 положительных);
- $\mathrm{O}(3)$ — вещественные ортогональные матрицы 3×3, $\hat{M}\hat{M}^T = \hat{1}$ — повороты и их комбинации с отражениями;
- $\mathrm{SO}(3)$ — вещественные ортогональные матрицы 3×3, $\det \hat{M} = 1$ — **собственные повороты** (без отражений);
- $\mathrm{U}(N)$ — унитарные матрицы $N \times N$;
- $\mathrm{SU}(2)$ — унитарные матрицы 2×2, $\det \hat{M} = 1$ — **(**) квантовые повороты** (поворот на 2π даёт умножение на -1);
- $\mathrm{O}(\mathbb{N}, N) = S_N$ — группа перестановок множества из N элементов;
- $\mathrm{SO}(\mathbb{N}, N) = A_N$ — группа чётных перестановок множества из N элементов.

Для всех подгрупп группы $\mathrm{GL}(\mathbb{C}, N)$ мы можем сразу записать линейное N-мерное представление, при котором они действуют слева как матрицы на столбец высотой N.

(*) Все приведённые матричные группы, кроме целочисленных, являются *группами Ли*. Приведённое ниже представление поворотов и бустов в виде матричных экспонент связано с тем, что группы O(3) и O(1,3) являются группами Ли. Определение группы Ли даётся ниже.

2.8.5 Группы и алгебры Ли*

Определение. Пусть группа G имеет структуру дифференцируемого многообразия размерности[7] n, причём групповые операции (умножение $\circ$ и взятие обратного элемента $(\cdot)^{-1}$) непрерывны и дифференцируемы по отношению к структуре многообразия. Такая группа называется *группой Ли размерности* n.

Все перечисленные выше матричные группы, составленные из вещественных или комплексных матриц, являются группами Ли.

Пример 1. Сдвиги трёхмерного пространства образуют группу, которую можно описать как группу 3-мерных векторов относительно сложения.

Пример 2. Собственные повороты 3-мерного пространства (группа SO(3)) можно параметризовать с помощью 3-мерных векторов, направление которых задаёт ось поворота (по правилу правого винта), а длина — угол поворота в радианах. Таким образом, пространство поворотов параметризуется точками шара радиусом π. Поскольку повороты вокруг одной оси на π и $-\pi$ совпадают, диаметральные точки на поверхности шара надо отождествить («склеить»). Такую топологию имеет 3-мерное проективное пространство (множество прямых в 4-мерном пространстве, проходящих через начало координат).

Пример[8] **3**.** Квантовые повороты 3-мерного пространства (группа SU(2)) на углы не более π можно параметризовать с помощью 3-мерных векторов, направление которых задаёт ось поворота (по правилу правого винта), а длина — угол поворота в радианах. Такие повороты параметризуются точками шара радиусом π. Повороты на углы от π до 2π параметризуются точками ещё одного шара радиусом π, при этом длина вектора показывает, на сколько угол поворота отличается от 2π. Соответствующие точки границ этих двух шаров надо склеить между собой. Такую топологию имеет 3-мерная сфера (множество

[6] Во французской традиции в множество натуральных чисел, кроме целых положительных чисел, включается нуль.
[7] Везде в данной книге, где не оговорено иное, мы имеем в виду вещественную размерность многообразия.
[8] Это пример для тех, кто знаком с матрицами Паули и операторами поворота для спина 1/2.

единичных векторов в 4-мерном евклидовом пространстве, исходящих из начала координат). Каждому классическому повороту соответствуют два квантовых, отличающихся на поворот на угол 2π.

Пусть G — группа Ли. Каждый элемент $g_0 \in G$ с помощью левого умножения задаёт взаимнооднозначное отображение группы на себя (*левый сдвиг*):

$$g_0 : \; g \mapsto g_0 \circ g.$$

С точки зрения заданной на группе Ли структуры дифференцируемого многообразия такое отображение является *диффеоморфизмом* (взаимнооднозначным отображением, сохраняющим структуру дифференцируемого многообразия).

Задаваемые с помощью левых сдвигов отображения позволяют перевести единичный элемент e в любой элемент группы g_0 единственным образом: с помощью умножения на g_0.

Также произвольный элемент $g_0 \in G$ переводится в другой произвольный элемент $g_1 \in G$ с помощью левого сдвига только на $g_1 \circ g_0^{-1}$.

Раз у нас есть выделенное (с точки зрения групповой структуры) преобразование, переводящее точку g_0 в g_1, то, взяв матрицу Якоби от этого преобразования, мы получаем выделенное (с точки зрения групповой структуры) отображение векторов в точке g_0 в векторы в точке g_1.[9]

Описанное отображение векторов в точке g_0 на векторы в точке g_1 мы будем также обозначать как левый сдвиг:

$$g_1 \circ g_0^{-1} \circ \mathbf{a}_{g_0} = \mathbf{a}_{g_1}, \qquad g_0 \circ \mathbf{a}_e = \mathbf{a}_{g_0}.$$

Здесь жирные буквы — векторы, нижний индекс у векторов — точка, в которой этот вектор задан. По умолчанию будем считать, что вектор задан в точке, соответствующей единичному элементу:

$$\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}_e.$$

(!) Таким образом, любой ненулевой вектор на дифференцируемом многообразии, наделённом структурой группы Ли, может быть продолжен до векторного поля на всём многообразии, которое непрерывно и нигде не обращается в нуль. Другими словами, *для векторов на группе Ли всегда есть естественно определённый параллельный перенос, не зависящий от траектории.*

В частности, любой вектор на группе Ли можно перенести в точку e, соответствующую единичному элементу. Вектор, исходящий из точки e, можно представить как бесконечно короткий радиус-вектор. Его конец задаёт элемент группы, бесконечно близкий к единичному, а значит, и преобразование, бесконечно близкое к тождественному. По этой причине говорят, что векторы на группе Ли — это бесконечно малые элементы группы.

(!) Не зависящий от траектории параллельный перенос возможен не на всяком многообразии, например, на привычной нам сфере S^2 он невозможен (в силу теоремы, которую называют теоремой о невозможности причесать ежа). Так что не всякое многообразие может быть наделено структурой группы Ли.

Назовём векторное поле $\mathbf{a}_g$ на группе Ли, полученное с помощью левых сдвигов из некоторого вектора $\mathbf{a}_e$:

$$g \circ \mathbf{a}_e = \mathbf{a}_g,$$

левоинвариантным векторным полем.

От левоинвариантного векторного поля можно взять экспоненту $\mathrm{e}^{t\mathbf{a}}$, как мы брали от векторного поля при определении производной Ли. Такая экспонента задаёт некоторое отображение группы Ли на себя, когда точки пространства скользят вдоль векторного поля со скоростью $\mathbf{a}$ на протяжении времени t. Бесконечномалый сдвиг вдоль левоинвариантного векторного поля $\mathbf{a}$ можно рассматривать как левый сдвиг на бесконечномалый элемент группы, соответствующий $\mathbf{a}_e$, а поскольку композиция левых сдвигов на элементы группы G снова даёт левый сдвиг на некоторый элемент группы (в силу того, что группа замкнута относительно умножения), конечный сдвиг вдоль левоинвариантного векторного поля тоже даёт левый сдвиг на некоторый (уже конечный) элемент группы. Это позволяет сопоставить экспоненте $\mathrm{e}^{t\mathbf{a}}$ от элемента алгебры Ли $\mathbf{a}$ некоторый элемент группы Ли. В силу того, что $\mathrm{e}^{t_0\mathbf{a}}\mathrm{e}^{t_1\mathbf{a}} = \mathrm{e}^{(t_0+t_1)\mathbf{a}}$, каждому элементу алгебры Ли сопоставляется однопараметрическая подгруппа, состоящая из элементов вида $\mathrm{e}^{t\mathbf{a}}$ ($t \in \mathbb{R}$).

Для двух элементов группы $g_1, g_2 \in G$ можно определить *групповой коммутатор*

$$g_1 \circ g_2 \circ g_1^{-1} \circ g_2^{-1}.$$

[9] Если вспомнить, что вектор всегда ведёт себя как бесконечно короткий радиус-вектор, то очевидно, что, поскольку в силу непрерывности и взаимной однозначности окрестность точки g_0 взаимнооднозначно отображается на окрестность точки g_1, бесконечно короткие радиус-векторы, исходящие из точки g_0, тоже отображаются на аналогичные векторы, исходящие из точки g_1.

Вычислим групповой коммутатор от экспонент от двух векторных полей (векторные поля, их степени и произведения рассматриваются как дифференциальные операторы) в первом нетривиальном порядке по t:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{t\mathbf{a}}\mathrm{e}^{t\mathbf{b}}\mathrm{e}^{-t\mathbf{a}}\mathrm{e}^{-t\mathbf{b}} = \\
=\ &\left(\hat{1}+t\mathbf{a}+\frac{t}{2}\mathbf{a}^2+o(t^2)\right)\left(\hat{1}+t\mathbf{b}+\frac{t}{2}\mathbf{b}^2+o(t^2)\right)\left(\hat{1}-t\mathbf{a}+\frac{t}{2}\mathbf{a}^2+o(t^2)\right)\left(\hat{1}-t\mathbf{b}+\frac{t}{2}\mathbf{b}^2+o(t^2)\right) = \\
=\ &\hat{1}+t(\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{a}-\mathbf{b})+t^2\left(\frac{1}{2}\mathbf{a}^2+\frac{1}{2}\mathbf{b}^2+\frac{1}{2}\mathbf{a}^2+\frac{1}{2}\mathbf{a}^2+\mathbf{ab}-\mathbf{a}^2-\mathbf{ab}-\mathbf{ba}-\mathbf{b}^2+\mathbf{ab}\right)+o(t^2) = \\
=\ &\hat{1}+t^2(\mathbf{ab}-\mathbf{ba})+o(t^2) = \hat{1}+t^2[\mathbf{a},\mathbf{b}]+o(t^2).
\end{aligned}$$

Первым нетривиальным порядком по t оказался второй порядок, в нём возник коммутатор векторных полей (как дифференциальных операторов). С такими коммутаторами мы уже сталкивались при рассмотрении производных Ли и векторных полей как дифференциальных операторов.

Если рассматривать экспоненты от левоинвариантных векторных полей на группе Ли, то их некоммутативность оказывается связанной с некоммутативностью группы Ли.

В силу того, что левый сдвиг задаёт диффеоморфизм, поле, полученное как коммутатор двух левоинвариантных полей, снова оказывается левоинвариантным:

$$[\mathbf{a}_g,\mathbf{b}_g] = [g\circ\mathbf{a}, g\circ\mathbf{b}] = g\circ[\mathbf{a},\mathbf{b}].$$

Множество всех левоинвариантных на группе Ли векторных полей оказалось замкнутым относительно коммутатора. Поскольку все такие поля параметризуются векторами $\mathbf{a}_e$, исходящими из единичной точки e, число линейно независимых левоинвариантных полей равно числу линейно независимых векторов в данной точке группы Ли, т.е. равно размерности группы. Мы имеем n-мерное векторное пространство, на котором задан коммутатор, являющийся *скобкой Ли* (коммутатор автоматически линеен по обоим аргументам, антисимметричен и удовлетворяет тождеству Якоби).

Определение. Векторное пространство, на котором задана скобка Ли, называется *алгеброй Ли*.

Таким образом, *каждой группе Ли соответствует некоторая алгебра Ли.* Такая алгебра Ли обычно обозначается теми же символами, что и группа Ли, но маленькими (иногда ещё и готическими[10]) буквами:

группа Ли	алгебра Ли
SO(3),	$so(3)$;
U(2),	$u(2)$;
G,	$\mathfrak{g}$.

(!) Задав некоторый базис векторов в единичной точке e группы, мы получаем левоинвариантный базис во всех точках группы — базис на алгебре Ли. Для некоммутативной группы Ли такой базис не является координатным базисом! Для любого координатного базиса коммутатор двух его элементов всегда равен нулю, а для базиса на некоммутативной алгебре Ли хотя бы некоторые коммутаторы должны быть отличны от нуля.

Пусть $\mathbf{E}_\alpha$ — базисный вектор в алгебре Ли с номером α. Разложим по этому базису коммутатор двух элементов алгебры Ли:

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}]^\gamma\mathbf{E}_\gamma = [a^\alpha\mathbf{E}_\alpha, b^\beta\mathbf{E}_\beta]^\gamma\mathbf{E}_\gamma = a^\alpha b^\beta \underbrace{[\mathbf{E}_\alpha,\mathbf{E}_\beta]^\gamma}_{f_{\alpha\beta}{}^\gamma}\mathbf{E}_\gamma = a^\alpha b^\beta\, f_{\alpha\beta}{}^\gamma\mathbf{E}_\gamma.$$

В силу произвольности a^α и b^β по признаку тензора объект $f_{\alpha\beta}{}^\gamma$, задающий коммутаторы базисных элементов алгебры Ли:

$$[\mathbf{E}_\alpha,\mathbf{E}_\beta] = f_{\alpha\beta}{}^\gamma\mathbf{E}_\gamma,$$

является тензором. Его компоненты называются *структурными коэффициентами алгебры Ли.*

Структурные коэффициенты однозначно определяют алгебру Ли. Алгебра Ли однозначно позволяет восстановить устройство окрестности единицы группы Ли, поэтому по алгебре Ли можно почти однозначно определить группу Ли. Иногда нескольким группам Ли соответствуют одинаковые (изоморфные) алгебры Ли.

Пример. $so(3) \cong su(2)$. Обе эти алгебры Ли изоморфны трёхмерному евклидову пространству с векторным произведением в качестве скобки Ли, структурные коэффициенты (в соответствующем базисе) задаются как $f_{\alpha\beta}{}^\gamma = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$. Но группа SO(3) (группа собственных поворотов в трёхмерном пространстве) не изоморфна группе SU(2) (группа квантовых поворотов в трёхмерном пространстве, различает повороты на углы 0 и 2π).

[10] Готические буквы мы будем использовать, только чтобы не перепутать элемент группы Ли и алгебру Ли.

2.8.5.1 Матричные представления групп и алгебр Ли

Если группа Ли G представлена как группа M_G вещественных или комплексных матриц $D \times D$ с единичной матрицей в качестве единичного элемента и с матричным умножением в качестве группового умножения, то алгебра Ли такой группы $M_{\mathfrak{g}}$ также представляется матрицами $D \times D$, причём скобка Ли — это обычный *матричный коммутатор* $[a, b] = ab - ba$.

Пусть $g(t)$ задаёт непрерывное отображение $\mathbb{R} \to M_G$, причём $g(0) = \hat{1}$, тогда производная в нуле задаёт матричное представление некоторого элемента алгебры Ли:

$$\left.\frac{dg(t)}{dt}\right|_{t=0} \in M_{\mathfrak{g}}.$$

Экспонента от элемента алгебры Ли в этом случае может пониматься как *матричная экспонента*.

Пример 1. Стандартное представление группы SO(3) — ортогональные матрицы 3×3 с единичным определителем. Соответствующее представление алгебры Ли $so(3)$ — антисимметричные матрицы 3×3. Мы уже сталкивались с такими матрицами при изучении поворотов трёхмерного пространства и их генераторов.

Пример 2. Стандартное представление группы SU(2) — унитарные ($U^{-1} = U^\dagger = U^{T*}$) матрицы 2×2 с единичным определителем. Соответствующее представление алгебры Ли $su(2)$ — антиэрмитовы ($M = -M^\dagger = -M^{T*}$) матрицы 2×2 с нулевым следом.

2.8.5.2 Описания симметрий с помощью групп и алгебр Ли

Пусть имеется некоторое пространство, т.е. дифференцируемое многообразие (например, пространство-время, физическое пространство, конфигурационное пространство, фазовое пространство), на котором заданы некоторые структуры (т.е. тензорные поля, например метрический тензор, пуассонова структура, потенциал электромагнитного поля и т.п.). Симметрия пространства — некоторый диффеоморфизм многообразия на себя, при котором заданная структура переходит в себя. Например, для метрического пространства симметрия — отображение пространства на себя без изменения расстояний.

Пример. Для 3-мерного евклидова пространства симметрии — это сдвиги, повороты, зеркальные отражения и их комбинации.

Поскольку комбинация симметрий — симметрия и преобразование, обратное к симметрии, — симметрия, симметрии заданного пространства образуют группу.

Нас будут интересовать непрерывные симметрии, т.е. такие симметрии, которые могут быть выполнены непрерывно, начиная с тождественного преобразования, так, что все промежуточные преобразования также являются симметриями.

Пример. Такие симметрии 3-мерного евклидова пространства, как сдвиги и собственные повороты, являются непрерывными: сдвигать или поворачивать пространство можно постепенно. Зеркальное отражение является дискретной симметрией: мы не можем делать его постепенно, отражение либо сделано, либо не сделано, его нельзя сделать наполовину.

Пример. Векторные поля, задающие симметрии пространства, на котором задан метрический тензор, уже встречались нам как *поля Киллинга*.

Каждой непрерывной симметрии, близкой к тождественному преобразованию (бесконечномалой симметрии), можно сопоставить векторное поле, которое показывает, на сколько сдвигается каждая точка пространства. Сдвигаясь вдоль такого векторного поля (взяв от него экспоненту), мы можем получать и конечные элементы группы симметрий.

Мы видим, что бесконечно малым преобразованиям симметрии, т.е. элементам алгебры Ли, соответствуют векторные поля, но уже не на группе Ли, а на заданном пространстве. В отличие от левоинвариантных векторных полей на группе Ли, такие поля могут обращаться в ноль в некоторых точках.

Пример. Повороту трёхмерного пространства соответствует поле скоростей при вращении. Оно гладко, но обращается в нуль на оси вращения.

Экспоненты от таких полей снова задают конечные элементы группы Ли, но теперь элементы группы Ли описываются не как левые сдвиги на группе, а как симметрии заданного пространства.

Скобка Ли теперь может быть вычислена как коммутатор векторных полей на заданном пространстве.

Исследуя симметрии заданного пространства, мы можем найти соответствующие векторные поля, выбрать среди них базис и вычислить структурные константы алгебры Ли. Это позволяет определить устройство группы симметрий заданного пространства вблизи единицы и установить, каким группам Ли такая алгебра Ли может соответствовать. Если групп Ли с подходящей алгеброй оказалось несколько, то для выбора надо исследовать не только бесконечно малые преобразования (которые описываются векторными полями), но и соотношения между конечными преобразованиями.

Пример. Пусть задана сфера S^2 как метрическое пространство. Её непрерывные симметрии — собственные повороты. Соответствующие векторные поля (векторы Киллинга) — поля скоростей при вращении. В качестве базиса в пространстве векторов Киллинга можно выбрать вращения вокруг осей x, y, z.

Если группа Ли задана как группа невырожденных матриц $D \times D$, то её можно рассматривать как группу преобразований D-мерного (вещественного или комплексного) линейного пространства векторов-столбцов. Матрицы (элементы группы Ли и алгебры Ли) действуют на векторы-столбцы $\mathbf{r}$ матричным умножением слева. Элемент группы Ли g задаёт при этом симметрию:

$$g \in M_G, \qquad g : \mathbf{r} \to g\mathbf{r}.$$

Элемент алгебры Ли a задаёт при этом векторное поле $\mathbf{a}(\mathbf{r})$:

$$a \in M_{\mathfrak{g}}, \qquad a : \mathbf{r} \to a\mathbf{r} = \mathbf{a}(\mathbf{r}).$$

Пример. Матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \in so(3)$$

описывает вращение вокруг оси $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

Соответствующее векторное поле

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_3 y + \omega_2 z \\ \omega_3 x - \omega_1 z \\ -\omega_2 x + \omega_1 y \end{pmatrix} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]$$

— это поле скоростей при вращении с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$.

2.8.6 Группы Лоренца, Пуанкаре и их подгруппы

Мы не будем подробно исследовать группы симметрий теории относительности, мы лишь введём некоторые термины и сделаем замечания, имеющие отношение к задачам, которые нам предстоит решать.

Приведём таблицу основных групп симметрий, которые нам могут понадобиться для ньютоновской механики и специальной теории относительности. В таблице для каждой группы приведены символ, название, вхождение в неё различных классов преобразований.

(*) Все перечисленные ниже в таблице группы являются группами Ли.

В таблице

- сдвиги[11] — это $x^i = x'^i + a^i$;
- T: $t \to -t$ — обращение времени;
- P: $\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$ — пространственная инверсия;
- PT — комбинация P и T — одновременное обращение всех осей;
- повороты — это собственные повороты (без отражений!);
- бусты — это переходы к движущимся инерциальным системам отсчёта без поворота, сдвига и отражений.

Какие группы являются подгруппами других групп, видно из расстановки по таблице знаков $\pm$ в таблице:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \supset \mathrm{O}(1,3) \quad &\supset \quad \mathrm{SO}(1,3) \supset \mathrm{SO}_+(1,3) \supset \mathrm{SO}(3), \\ \mathrm{O}(1,3) \quad &\supset \quad \mathrm{O}_+(1,3) \supset \mathrm{SO}_+(1,3), \\ \mathrm{O}(1,3) \quad &\supset \quad \mathrm{O}(3) \supset \mathrm{SO}(3). \end{aligned}$$

[11] Здесь нам пришлось на время отойти от принятого ранее соглашения и поставить штрих не на индекс, а на координату, чтобы соблюсти баланс индексов. Такая потребность возникает тогда, когда между старыми и новыми координатами есть естественное взаимнооднозначное соответствие.

Символ	Название	Сдвиги	T	P	PT	Повороты	Busty
P	группа Пуанкаре	+	+	+	+	+	+
O(1,3)	группа Лоренца	−	+	+	+	+	+
SO(1,3)	специальная группа Лоренца	−	−	−	+	+	+
$O_+(1,3)$	ортохронная группа Лор.	−	−	+	−	+	+
$SO_+(1,3)$	**специальная ортохронная группа Лоренца**	−	−	−	−	+	+
O(3)	группа вращений	−	−	+	−	+	−
SO(3)	**группа собственных вращений**	−	−	−	−	+	−

Группа Пуанкаре включает преобразования вида

$$x^i = \Lambda^i_j x'^j + a^j \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} = \Lambda^i_j,$$

где $\Lambda^i_j \in \mathrm{O}(1,3)$. Вектор a^j задаёт сдвиг, однако этот сдвиг не влияет на матрицу преобразования, которая совпадает с Λ^i_j, поэтому сдвиг не влияет на преобразования тензоров. Таким образом, все преобразования тензоров задаются не группой Пуанкаре, а *группой Лоренца*.

В группе Лоренца для нас наиболее интересна *специальная ортохронная группа Лоренца*. Эти преобразования не включают ни отражений, ни обращений времени. Все такие преобразования могут быть реализованы непрерывным образом, начиная с тождественного (единичного) преобразования. Поэтому они оказываются физически реализуемы как реальные движения тела отсчёта, которое мы можем поворачивать и/или менять его скорость. По этой же причине с трёхмерной точки зрения для нас наиболее интересна *группа собственных вращений*.

Выделение группы вращений как подгруппы из группы Лоренца зависит от системы отсчёта: при переходе в движущуюся систему отсчёта чистые повороты становятся комбинациями поворотов и бустов.[12]

Интересно, что чистые преобразования Лоренца (busty) без поворотов группу не образуют. Это связано с тем, что комбинация бустов *в разных направлениях* может в итоге дать чистый поворот (см. ниже задачи 25 и 26)[13].

2.8.7 Группа Лоренца и электромагнитное поле

Давайте попробуем придумать уравнение движения релятивистской частицы, которое было бы максимально простым. 4-сила должна зависеть от 4-скорости и, возможно, каких-то полей:

$$mw^i = f^i(u) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du^i}{d\tau} = \tfrac{1}{m} f^i(u).$$

Проще всего было бы решать это уравнение, если бы 4-сила зависела от 4-скорости линейно:

$$mw^i = f^i = qF^i{}_j u^j \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du^i}{d\tau} = \tfrac{q}{m} F^i{}_j u^j. \tag{2.8.3}$$

Здесь q — некоторая константа взаимодействия частицы с полем, а $F^i{}_j$ — некоторое тензорное поле. Может ли тензорное поле $F^i{}_j$ задаваться произвольной матрицей, или на него есть какие-то ограничения? Ограничения задаются тем, что это уравнение на 4-скорость, квадрат которой должен быть постоянен и равен -1. Запишем изменение 4-скорости за бесконечномалое собственное время $d\tau$:

$$u^i(\tau + d\tau) = u^i(\tau) + \tfrac{q}{m} F^i{}_j u^j(\tau)\, d\tau = \left(\delta^i_j + \tfrac{q}{m} F^i{}_j d\tau\right) u^j(\tau).$$

Это линейное преобразование, близкое к единичному. Необходимо, чтобы это преобразование сохраняло квадрат 4-вектора, т.е. оно должно принадлежать группе Лоренца. Мы уже сталкивались с такими преобразованиями (см. формулу (1.8.3)), и знаем, что бесконечномалая поправка к единичной матрице должна быть генератором группы Лоренца[14]. Таким образом, тензорное поле $F^i{}_j$ должно иметь вид (1.8.6):

$$F^i{}_j = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.8.4}$$

[12] Математически это связано с тем, что подгруппа вращений не является *нормальной*.

[13] Busty в одном направлении образуют подгруппу группы Лоренца, но её выделение зависит от системы отсчёта. Математически это связано с тем, что эта подгруппа не является *нормальной*.

[14] Мы можем легко воспроизвести этот результат с помощью кинематического тождества $u_i w^i = 0$:

$$u_i w^i = u_i \frac{q}{m} F^i{}_j u^j = \frac{q}{m} u^i F_{ij} u^j = 0.$$

Таким образом, квадратичная форма $u^i F_{ij} u^j$ должна обращаться в нуль на произвольном времениподобном векторе u^i, а значит, матрица F_{ij} (с нижними индексами!) должна быть антисимметричной: $F_{ij} = -F_{ji}$. Произвольную антисмметричную

Здесь $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ — 3-векторы электрического и магнитного поля, а тензор $F^i{}_j$ — тензор электромагнитного поля. Чтобы установить это, нам надо будет сопоставить уравнение движения (2.8.3) с уравнением движения частицы во внешнем электромагнитном поле, что мы проделаем позже.

Пока рассмотрим некоторые частные случаи. Если $F^i{}_j = \text{const}$, т. е. если частица движется в однородном не зависящем от времени поле, то уравнение легко решается:

$$u^i(\tau) = \exp\left(\tfrac{q}{m} F^i{}_j \tau\right) u^j(0).$$

Если при этом $\mathbf{E} = 0$, то 4-скорость вращается вокруг магнитного поля.

Если, наоборот, $\mathbf{B} = 0$, то 4-скорость подвергается бусту вдоль электрического поля (разгоняется) с быстротой, пропорциональной τ.

2.8.8 Решения задач 22–28

22. Линейный ускоритель. Пучок π^+-мезонов (*пионов*) с начальным импульсом $p_0 = 200$ МэВ вводится в линейный ускоритель. Масса π^+-мезона — $m_{\pi^+} = 140$ МэВ. Пионы распадаются на антимюон μ^+ и мюонное нейтрино ν_μ:

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu.$$

Время жизни π^+-мезона равно $\tau_{\pi^+} = 2{,}6 \cdot 10^{-8}$ с, а время (период) полураспада — $\tau_{1/2} = \tau_{\pi^+} \ln 2$. Массы продуктов распада составляют

$$m_\mu = 105 \text{ МэВ}, \qquad m_\nu \approx 0.$$

а) Какова должна быть напряжённость ускоряющего поля E, чтобы половину пионов удалось ускорить до энергии $\mathcal{E} = 200$ ГэВ?
б) Какую длину должен при этом иметь ускоритель?
Указание. В данной задаче удобно положить $c = 1$ и измерять время в единицах длины (см). При этом массу, энергию и импульс удобно измерять в электрон-вольтах (эВ). Заряд удобно измерять в элементарных зарядах e. Тогда сила и напряжённость электрического поля измеряются в единицах В/см.

Решение
Мы уже разбирали движение частицы под действием постоянной силы вдоль прямой в задаче 14:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = F\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dp_x}{dt} = F \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = F(x - x_0), \quad p_x = F(t - t_0),$$
$$m^2 = \mathcal{E}^2 - \mathbf{p}^2, \ \text{положим } x_0 = t_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{m^2}{F^2} = x^2 - t^2.$$

Мы получили уравнение псевдоокружности (гиперболы) радиусом $\frac{m}{F}$.

Но в данной задаче нам надо записать движение в собственном времени и найти $x(\tau)$ и $t(\tau)$, поскольку именно по собственному времени пучка измеряется период полураспада. В п. 2.8.1.1 «Круговое и гиперболическое движение в механике» мы получили движение вдоль прямой под действием единичной постоянной силы, записанное в собственном времени частицы.

Параметризацию $x(\tau)$ и $t(\tau)$ угадаем по аналогии с параметризацией координат точек окружности через длину дуги l с заменой длины дуги на собственное время, а тригонометрических функций на гиперболические:

$$x(l) = R\cos\frac{l}{R}, \qquad y(l) = R\sin\frac{l}{R},$$
$$x(\tau) = \frac{m}{F}\operatorname{ch}\frac{\tau F}{m}, \qquad t(\tau) = \frac{m}{F}\operatorname{sh}\frac{\tau F}{m}.$$

То, что мы получили параметризацию нужной нам псевдоокружности, очевидно из основного тождества гиперболической тригонометрии

$$\operatorname{ch}^2\vartheta - \operatorname{sh}^2\vartheta = 1.$$

матрицу 4×4 можно параметризовать двумя 3-векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$:

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Если поднять с помощью метрики Минковского первый индекс, мы получаем матрицу искомого вида (2.8.4).

То, что параметр τ является собственным временем, мы проверим, продифференцировав 4-мерный радиус-вектор $\underline{x}$ по τ:

$$\underline{x} = \Big(\frac{m}{F}\ \mathrm{sh}\,\frac{\tau F}{m}, \frac{m}{F}\ \mathrm{ch}\,\frac{\tau F}{m}, 0, 0\Big), \qquad \frac{d\underline{x}}{d\tau} = \Big(\mathrm{ch}\,\frac{\tau F}{m}, \mathrm{sh}\,\frac{\tau F}{m}, 0, 0\Big), \qquad \left(\frac{d\underline{x}}{d\tau}\right)^2 = -1.$$

Мы получили касательный вектор к мировой линии, смотрящий в будущее, со скалярным квадратом -1, т.е. вектор 4-скорости. Таким образом, τ — это действительно собственное время частицы:

$$\underline{p} = (\mathcal{E}, p_x, 0, 0) = m\frac{d\underline{x}}{d\tau} = \Big(m\ \mathrm{ch}\,\frac{\tau F}{m}, m\ \mathrm{sh}\,\frac{\tau F}{m}, 0, 0\Big).$$

Доведение задачи до ответа мы предоставим читателю. Здесь приведём только ответы:

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{ec\tau_{1/2}}\ \ln\frac{2\mathcal{E}}{p_0+\sqrt{p_0^2+m^2}}, \\ \ell &= \frac{\mathcal{E}-\mathcal{E}_0}{F} = \frac{c\tau_{1/2}}{m}\,\frac{\mathcal{E}-\sqrt{p_0^2+m^2}}{\ln\frac{2\mathcal{E}}{p_0+\sqrt{p_0^2+m^2}}} \approx \frac{c\tau_{1/2}}{m}\,\frac{\mathcal{E}}{\ln\frac{2\mathcal{E}}{p_0+\sqrt{p_0^2+m^2}}}. \end{aligned}$$

23. * Релятивистская задача Циолковского. Получите формулу Циолковского для СТО. Результат запишите через быстроту ракеты.

Релятивистская формула Циолковского получается из классической заменой скорости ракеты на её быстроту:

$$V = c\ \mathrm{th}\,\vartheta, \qquad \vartheta(t) - \vartheta_0 = \frac{u}{c}\ \ln\frac{m_0}{m(t)}.$$

Это легко получить, если в системе координат, в которой ракета в данный момент покоится, рассмотреть малое изменение массы ракеты dm, которому соответствует малое изменение скорости ракеты $dV_{\text{сопутст.}}$:

$$d(mV) = \underbrace{dm\,V}_{0} + m\,dV = -\underbrace{(-dm)\,(-u)}_{\text{импульс элемента струи}}.$$

Здесь $(-dm)$ — энергия (не масса!) элемента реактивной струи, а $(-u)$ — его скорость.

Для малой скорости $dV_{\text{сопутст.}} = c\cdot\mathrm{th}\,d\vartheta = c\cdot d\vartheta$,

$$mc\,d\vartheta = -dm\,u.$$

Приращения скорости по отношению к последовательности инерциальных систем, в которых ракета покоится, не складываются, но быстроты складываются (интегрируются):

$$d\vartheta = -\frac{u}{c}\frac{dm}{m} \quad\Rightarrow\quad \int d\vartheta = \int -\frac{u}{c}\frac{dm}{m} \quad\Rightarrow\quad \vartheta(t) - \vartheta_0 = \frac{u}{c}\ln\frac{m_0}{m(t)}.$$

Мы получаем формулу, аналогичную классической формуле Циолковского, но не для скоростей, а для быстрот.

24. Преобразование Лоренца для скорости, непараллельной координатным осям. Начало координат системы $\tilde{K}$ движется со скоростью $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ относительно системы K, а оси координат составляют со скоростью $\mathbf{v}$ те же самые углы, что и оси системы K.

Условия отдельных пунктов и решения

а) Запишите матрицу преобразования Лоренца от системы K к системе $\tilde{K}$.
б) Запишите матрицу обратного преобразования.

Эти пункты разобраны в § 1.8.7 «Поворот и буст в произвольном направлении*». В частности, ответ на п. б) даётся формулой (1.8.7) с учётом того, что $\mathrm{ch}\,\vartheta = \gamma$, $\mathrm{sh}\,\vartheta = v\gamma$, $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{v}$, а ответ на п. а) отличается знаком при v или ϑ.

в) Определите положение осей (x', y') в системе K в момент времени $t = 0$ по часам системы K.
Рассмотрим ось x'.

В данном случае мы рассматриваем ось координат штрихованной системы как протяжённое тело (линейку), которое заметает в пространстве-времени плоскость $y' = z' = 0$. Условие $t = 0$ вырезает из этой плоскости прямую. Данная прямая задаётся условиями $y' = z' = t = 0$, из которых два условия накладываются на штрихованные координаты y', z', а одно — на нештрихованную координату t.

В момент времени $t = 0$ начала координат двух систем совпадают. Так что исходя из линейности преобразований Лоренца нам достаточно определить на штрихованной оси одну точку, например единичную точку, штрихованные пространственные координаты которой задаются радиус-вектором $\mathbf{r}' = (1, 0, 0)$.

Для нахождения нештрихованных координат единичной точки оси x' в момент времени $t = 0$ можно выписать преобразования Лоренца и решить систему

$$x'(t, x, y, z) = 1, \quad y'(t, x, y, z) = 0, \quad z'(t, x, y, z) = 0, \quad t = 0.$$

А можно воспользоваться тем, что при преобразовании Лоренца поперечные (по отношению к скорости) размеры движущегося тела не изменяются, а продольные сжимаются в $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ раз.

Разложим радиус-вектор $\mathbf{r}'$ на продольную и поперечную части:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_{\parallel} + \mathbf{r}'_{\perp}, \qquad \mathbf{r}'_{\parallel} = \mathbf{n}(\mathbf{n}, \mathbf{r}'), \quad \mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}' - \mathbf{n}(\mathbf{n}, \mathbf{r}').$$

Продольную часть вектора $\mathbf{r}'$ уменьшим в γ раз, а поперечную оставим неизменной:

$$\mathbf{r} = \frac{1}{\gamma}\mathbf{r}'_{\parallel} + \mathbf{r}'_{\perp} = \sqrt{1-v^2}\,\mathbf{n}(\mathbf{n}, \mathbf{r}') + \mathbf{r}' - \mathbf{n}(\mathbf{n}, \mathbf{r}') = (1, 0, 0) - (1 - \sqrt{1-v^2})n_x\,\mathbf{n}.$$

Мы получили радиус-вектор, задающий пространственные координаты единичной точки оси x' в момент времени $t = 0$.

25. Преобразования Лоренца, образующие поворот. Система K' движется со скоростью v_x вдоль оси x системы K. Система K'' движется со скоростью v'_y вдоль оси y' системы K'. Скорость v'_y такова, что начало координат системы K'' движется относительно системы K со скоростью $\mathbf{v} = (v_x\,, v_y)$.

Условия отдельных пунктов и решения

а) Выразите v'_y через v_x, v_y.

Прежде всего установим связь между величинами v_y и v'_y.

Скорость v'_y измеряется относительно системы K', а v_y — относительно системы K. Для измерения скорости v'_y используется линейка y', которая перпендикулярна направлению движения системы K' относительно K, и набор часов t', расположенных вдоль оси y'.

Разногласий между системами K и K' по поводу линейки y' нет, т.к. поперечные размеры при преобразованиях Лоренца не меняются.

Часы t' (выстроенные вдоль оси y', т.е. при $x' = 0$) с точки зрения системы K замедлены в $\gamma_x = \frac{1}{\sqrt{1-v_x^2}}$ раз:

$$t = \left.\frac{t' + v_x x'}{\sqrt{1-v_x^2}}\right|_{x'=0} = \frac{t'}{\sqrt{1-v_x^2}}.$$

Получается, что скорость v'_y с точки зрения системы K измерена с помощью «правильной» линейки и «замедленных» в γ_x раз часов, т.е.

$$v'_y = \gamma_x v_y.$$

б) Покажите, что направление вектора относительной скорости системы K в системе K'' будет повёрнуто относительно направления $-\mathbf{v}$ на угол α. Выразите $\operatorname{tg}\alpha$ через скорость, ускорение и $\operatorname{tg}\phi = \frac{v_y}{v_x}$.

Матрица перехода $K \to K''$ получается перемножением двух преобразований Лоренца по x и по y — матриц перехода $K \to K'$ и $K' \to K''$. Мы считаем, что матрицы перехода действуют на столбец координат, матрицы перемножаются справа налево:

$$\hat{\Lambda}_{K''\leftarrow K} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma'_y & 0 & -\gamma'_y v'_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma'_y v'_y & 0 & \gamma'_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\hat{\Lambda}_{K''\leftarrow K'}} \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_x & -\gamma_x v_x & 0 & 0 \\ -\gamma_x v_x & \gamma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\hat{\Lambda}_{K'\leftarrow K}} = \begin{pmatrix} \gamma'_y\gamma_x & -\gamma'_y\gamma_x v_x & -\gamma'_y v'_y & 0 \\ -\gamma_x v_x & \gamma_x & 0 & 0 \\ -\gamma'_y\gamma_x v'_y & \gamma'_y v'_y \gamma_x v_x & \gamma'_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\gamma'_y\gamma_x = \frac{1}{\sqrt{1-v_y'^2}}\frac{1}{\sqrt{1-v_x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma_x^2 v_y^2}}\frac{1}{\sqrt{1-v_x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-v_x^2-v_y^2\gamma_x^2(1-v_x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1-v_x^2-v_y^2}} = \gamma$$

Система K'' и система $\tilde{K}$ из предыдущей задачи движутся с одинаковой скоростью. Нам надо установить, на сколько одна система повёрнута относительно другой. Для этого достаточно сравнить направление, в котором движется неподвижная система K в системе K'' и в системе $\tilde{K}$.

Рассмотрим начало отсчёта системы K в ней самой. Его мировая линия задаётся как $\underline{X}_0 = (t,0,0,0)^T$. В системе координат $\tilde{K}$ начало отсчёта системы K движется со скоростью $\mathbf{V}_{K\text{отн.}\tilde{K}} = -\mathbf{v} = (-v_x, -v_y, 0)$. Эта скорость образует с осью $\tilde{x}$ такой угол ϕ, что $\operatorname{tg}\phi = \frac{v_y}{v_x}$.

Мировая линия начала отсчёта системы K может быть преобразована в систему K'' с помощью матрицы $\hat{\Lambda}_{K''\leftarrow K}$:

$$\underline{X}''_0 = \hat{\Lambda}_{K''\leftarrow K}\,\underline{X}_0 = \begin{pmatrix} \gamma'_y\gamma_x & -\gamma'_y\gamma_x v_x & -\gamma'_y v'_y & 0 \\ -\gamma_x v_x & \gamma_x & 0 & 0 \\ -\gamma'_y\gamma_x v'_y & \gamma'_y v'_y\gamma_x v_x & \gamma'_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\gamma'_y\gamma_x \\ -t\gamma_x v_x \\ -t\gamma'_y\gamma_x v'_y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что в системе координат K'' начало отсчёта системы K движется со скоростью $\mathbf{V}_{K\text{отн.}K''} = (-\frac{v_x}{\gamma'_y}, -v'_y, 0)$. Эта скорость образует с осью x'' такой угол $\phi+\alpha$, что

$$\operatorname{tg}(\phi+\alpha) = \frac{\gamma'_y v'_y}{v_x} = \gamma'_y\gamma_x\frac{v_y}{v_x} = \gamma\,\operatorname{tg}\phi.$$

Поскольку системы $\tilde{K}$ и K'' движутся с одинаковой скоростью, они неподвижны друг относительно друга. Скорости $\mathbf{V}_{K\text{отн.}\tilde{K}}$ и $\mathbf{V}_{K\text{отн.}K''}$ — это одна и та же скорость, определённая относительно повёрнутых по отношению друг к другу систем отсчёта. Эта скорость образует разные углы с осями $\tilde{x}$ и x'' за счёт того, что эти оси повёрнуты друг относительно друга.

Воспользовавшись формулой для тангенса разности, получаем угол между осями $\tilde{x}$ и x'', т.е. угол, на который система K'' повёрнута относительно $\tilde{K}$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(\gamma-1)\operatorname{tg}\phi}{1+\gamma\operatorname{tg}^2\phi}.$$

26. * Прецессия Томаса. На частицу, движущуюся со скоростью $\mathbf{v}$, действует сила, сообщающая ей ускорение $\dot{\mathbf{v}}$. Определите, с какой угловой скоростью будет поворачиваться спин частицы относительно лабораторной системы отсчёта, если сила, действующая на частицу, не действует на её спин.

Решение

В каждый момент времени с частицей можно связать сопутствующую инерциальную систему отсчёта, в которой скорость частицы равна нулю. По мере того как частица ускоряется, прежнюю сопутствующую систему отсчёта, которая двигалась со скоростью $\mathbf{v}$, надо «доворачивать», переходя к новой сопутствующей системе отсчёта, которая движется со скоростью $\mathbf{v}+d\mathbf{v} = \mathbf{v}+\dot{\mathbf{v}}\,dt$. Этот доворот мы будем осуществлять с помощью одного преобразования Лоренца. Так мы получаем последовательность сопутствующих систем отсчёта.

В данной задаче мы будем считать, что спин частицы ведёт себя как тело (стрелка), указывающее (с точки зрения сопутствующей системы координат) некоторое направление. То, что «сила не действует на спин», означает, что компоненты спина (как вектора с нулевой временно́й компонентой) в последовательности сопутствующих систем отсчёта остаются неизменными («вморожены в сопутствующую систему отсчёта»). Таким образом, вместо того чтобы исследовать вращение спина, мы исследуем вращение последовательности сопутствующих систем отсчёта.

Чтобы сравнить ориентацию этой стрелки в разные моменты времени, мы будем каждый раз делать преобразование Лоренца от сопутствующей системы координат к лабораторной.

Выберем систему координат так, что в начальный момент времени $\mathbf{v} \uparrow\uparrow x$, т. е. скорость направлена по оси x, а $\mathbf{a}_\perp \uparrow\uparrow y$, т.е. ускорение лежит в плоскости $x-y$.

Чтобы определить угол поворота спина за время dt, мы с помощью преобразований Лоренца осуществляем последовательный переход между инерциальными системами, которые движутся со следующими скоростями: $0 \to \mathbf{v} \to \mathbf{v}+\mathbf{a}\,dt \to 0$. Первая и последняя системы отсчёта в цепочке неподвижны друг относительно друга и различаются на некоторый поворот на бесконечно малый угол $d\alpha$. Поскольку все скорости лежат в плоскости $x-y$, этот поворот совершается вокруг оси z.

(!) Для нахождения угловой скорости угол поворота $d\alpha$ достаточно посчитать в линейном порядке по dt, т.е. (поскольку dt входит в вычисления только в комбинации $\mathbf{a}\,dt$) в линейном порядке по ускорению. В линейном порядке мы можем отдельно посчитать вклад продольной части ускорения $\mathbf{a}_\parallel \parallel \mathbf{v}$ и поперечной части ускорения $\mathbf{a}_\perp \perp \mathbf{v}$, а потом сложить их.

(!!) Продольная часть ускорения, очевидно, не даёт вклада в поворот, т.к. связана с последовательностью преобразований Лоренца вдоль одного направления[15].

Таким образом, нам достаточно рассмотреть вклад в $d\alpha$ поперечной части ускорения, которая связана с преобразованиями Лоренца между системами отсчёта, движущимися со скоростями $0 \to \mathbf{v} \to \mathbf{v}+\mathbf{a}_\perp\,dt \to 0$. Здесь $\mathbf{v} \uparrow\uparrow x$, $\mathbf{a}_\perp \uparrow\uparrow y$. Мы свели задачу к предыдущей для случая $v_x = v$, $v_y = a_y\,dt$:

$$d\alpha \approx \operatorname{tg} d\alpha = \frac{(\gamma-1)\operatorname{tg}\phi}{1+\gamma\operatorname{tg}^2\phi} = \frac{(\gamma-1)\frac{a_y\,dt}{v_x}}{1+\gamma(\frac{a_y\,dt}{v_x})^2} \approx (\gamma-1)\frac{a_y\,dt}{v_x} = (\gamma-1)\frac{v_x a_y\,dt}{v^2} = (\gamma-1)\frac{v_x a_y\,dt}{1-\frac{1}{\gamma^2}} = \frac{\gamma^2}{\gamma+1}v_x a_y\,dt;$$

$$|\omega_z| = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\gamma^2}{\gamma+1}v_x a_y = \frac{\gamma^2}{\gamma+1}[\mathbf{v}\times\mathbf{a}]_z.$$

Осталось определить знак поворота. Как мы установили в прошлой задаче, угол между осью x и фиксированным направлением $\mathbf{v}$ в результате последовательности образующих поворот бустов увеличился. Это соответствует тому, что при переходе $\tilde{K} \to K''$ система координат повернулась вокруг оси z в отрицательном направлении (поворот образует с осью z левый винт).

Так что мы выбираем знак минус:

$$\omega_z = -\frac{\gamma^2}{\gamma+1}[\mathbf{v}\times\mathbf{a}]_z = \frac{\gamma^2}{\gamma+1}[\mathbf{a}\times\mathbf{v}]_z.$$

Мы выбрали систему координат специальным образом, но если два псевдовектора (угловая скорость — псевдовектор, векторное произведение двух векторов — псевдовектор) равны в одной системе координат, то они равны в любой другой, так что запишем ответ в 3-мерном псевдовекторном виде:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\gamma^2}{(\gamma+1)c^2}\,[\dot{\mathbf{v}}\times\mathbf{v}].$$

Скорость света мы восстановили в ответе из соображений размерности.

Геометрический смысл прецессии Томаса мы обсудим в § 2.8.9.

27. Функции распределения при распадах. В системе покоя π-мезона распад $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$ происходит изотропно. Имеется пучок π-мезонов с энергией 6 ГэВ (масса π-мезона $\approx$ 140 МэВ, масса мюона $\approx$ 105 МэВ).

а) Определите энергетический спектр нейтрино, их максимальную и среднюю энергии.

б) Определите угловое распределение нейтрино.

Решение

Рассмотрим сначала процесс в системе центра инерции, т.е. в системе, где пион (π-мезон) неподвижен. Выпишем закон сохранения 4-импульса:

$$\begin{pmatrix} m_\pi \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E'_\nu \\ E'_\nu\,\mathbf{n}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_\pi - E'_\nu \\ -E'_\nu\,\mathbf{n}' \end{pmatrix}.$$

Здесь E'_ν — энергия нейтрино, а $\mathbf{n}'$ — единичный 3-мерный вектор, задающий направление вылета нейтрино. Все величины относятся к системе центра инерции (штрихованной системе).

Мы сразу воспользовались тем, что скалярный квадрат 4-импульса нейтрино равен нулю, т.к. нейтрино считается безмассовым.

Возведя в квадрат 4-импульс мюона, получаем

$$\underline{p}_\mu^2 = -(m_\pi - E'_\nu)^2 + (-E'_\nu\,\mathbf{n}')^2 = -m_\mu^2 \quad\Rightarrow\quad -m_\pi^2 + 2m_\pi E'_\nu = -m_\mu^2 \quad\Rightarrow\quad E'_\nu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi}.$$

Мы получили, что в системе центра инерции энергия нейтрино определена однозначно. Это означает, что вероятность того, что нейтрино будет иметь энергию в диапазоне (E_1, E_2), равна единице, если $E_0 =$

[15] **(*)** Преобразования Лоренца вдоль одного направления образуют однопараметрическую группу.

$\frac{m_\pi^2-m_\mu^2}{2m_\pi}$ попадает в данный диапазон, и нулю, если не попадает. Таким образом, плотность вероятности по энергии должна удовлетворять следующему условию:

$$\int\limits_{-\infty}^{E} \rho_{E'_\nu}(E'_\nu)\,dE'_\nu = \begin{cases} 0, & E < E_0 \\ 1, & E > E_0 \end{cases}$$

Функций, удовлетворяющих этому уравнению, не существует. Тем не менее удобно считать, что в некотором смысле такое распределение вероятностей существует, но описывается не функцией, а *обобщённой функцией*, для которой значения в точках могут быть не определены, но определены интегралы. Обобщённую функцию, которая нужна нам в данном случае, называют дельта-функцией Дирака[16]:

$$\frac{1}{N_0}\frac{dN_1}{dE'_\nu} = \rho_{E'_\nu}(E'_\nu) = \delta(E'_\nu - E_0), \qquad E_0 = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi}.$$

Здесь N_0 — общее число частиц, dN_1 — число частиц в интервале энергий шириной dE'_ν, $\delta(E'_\nu)$ — бесконечно узкий и бесконечно высокий импульс с единичной площадью, локализованный в нуле, $\delta(E'_\nu - E_0)$ — такой же импульс, сдвинутый в точку E_0.

Распределение нейтрино по углам в системе центра инерции по условию задачи является однородным:

$$\frac{dN_2}{N_0} = \frac{d\Omega'}{4\pi} = \frac{d\phi'\,d\cos\theta'}{4\pi}. \tag{2.8.5}$$

Здесь N_0 — общее число частиц, dN_2 — число частиц в интервале телесного угла $d\Omega'$, 4π — полный телесный угол (площадь единичной сферы). Телесный угол (элемент площади единичной сферы) мы выразили через сферические углы (штрихованные, как и все величины в данной задаче, связанные с системой центра инерции).

(!) Число частиц (N_0, dN_1, dN_2 и т.д.) не зависит от системы координат, т.е. является инвариантом (скаляром).

Чтобы найти преобразование для энергии и углов вылета нейтрино, запишем преобразование Лоренца от системы центра инерции к лабораторной системе для 4-импульса нейтрино.

Скорость системы центра инерции, т.е. скорость пиона, легко найти через отношение энергии пиона к его массе:

$$\gamma = \frac{E_\pi}{m_\pi}, \qquad v = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}.$$

Поскольку преобразования Лоренца привычнее писать вдоль оси x, сферические углы мы будем отсчитывать не от оси z, а от оси x:

$$\begin{pmatrix} E_\nu \\ E_\nu\cos\theta \\ E_\nu\sin\theta\cos\phi \\ E_\nu\sin\theta\sin\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0 \\ E_0\cos\theta' \\ E_0\sin\theta'\cos\phi' \\ E_0\sin\theta'\sin\phi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0\gamma(1 + v\cos\theta') \\ E_0\gamma(v + \cos\theta') \\ E_0\sin\theta'\cos\phi' \\ E_0\sin\theta'\sin\phi' \end{pmatrix}.$$

Сравнив две последние строки 4-импульса в двух системах координат, мы видим, что $\phi' = \phi$. Из первых строк получаем

$$E_\nu = E_0\gamma(1 + v\cos\theta'), \qquad dE_\nu = E_0\gamma v\,d\cos\theta', \quad E_{\nu\,\frac{max}{min}} = E_0\gamma(1 \pm v) = E_0\sqrt{\frac{1 \pm v}{1 \mp v}}. \tag{2.8.6}$$

Отношение второй строки к первой даёт выражение $\cos\theta$ через $\cos\theta'$, обратное преобразование углов получается из обратного преобразования Лоренца и отличается знаком скорости:

$$\cos\theta = \frac{v + \cos\theta'}{1 + v\cos\theta'}, \qquad \cos\theta' = \frac{-v + \cos\theta}{1 - v\cos\theta},$$

$$d\cos\theta' = \frac{d\cos\theta(1 - v\cos\theta) - (-v + \cos\theta)(-v\,d\cos\theta)}{(1 - v\cos\theta)^2} = \frac{(1 - v^2)\,d\cos\theta}{(1 - v\cos\theta)^2} = \frac{d\cos\theta}{\gamma^2(1 - v\cos\theta)^2}.$$

Подставив в распределение (2.8.5) полученные выражения для $d\cos\theta'$ и $d\phi'$, получаем угловое распределение в лабораторной системе отсчёта:

$$\frac{dN_2}{N_0} = \frac{d\phi'\,d\cos\theta'}{4\pi} = \frac{d\phi\,d\cos\theta}{4\pi\gamma^2(1 - v\cos\theta)^2} = \frac{d\Omega}{4\pi\gamma^2(1 - v\cos\theta)^2}.$$

[16] Мы ещё вернёмся к обобщённым функциям и, в частности, дельта-функции. Пока же нам для первого знакомства хватит такого нестрогого определения.

Угловое распределение перестало быть равномерным, теперь больше частиц вылетает под малыми углами.

В системе центра инерции половина частиц вылетает в переднюю полусферу ($\theta' < \theta'_0 = \frac{\pi}{2}$). В лабораторной системе частицы, которые в системе центра инерции вылетали в переднюю полусферу, вылетают в конус с углом раствора $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$:

$$\cos\theta_0 = \cos\theta|_{\theta'=\theta'_0=\frac{\pi}{2}} = v, \quad \sin\theta_0 = \sqrt{1-v^2} = \frac{1}{\gamma}.$$

При ультрарелятивистских скоростях ($v \sim c$, $\gamma \gg 1$) этот конус оказывается очень узким: $\theta_0 \approx \sin\theta_0 = \frac{1}{\gamma}$. Такое сосредоточение в узком конусе половины вылетающих частиц называется *эффектом прожектора*[17]. Внутрь такого конуса летит половина частиц, если считать их по штукам, и больше половины, если считать по энергии (см. формулы (2.8.6)). Зависимость $E_\nu(\cos\theta')$ линейна. Легко видеть, что в пределе $v \to 1$ зависимость $E_\nu(\cos\theta')$ проходит через ноль при $\cos\theta' = 1$ и нейтрино, вылетающие внутрь рассматриваемого конуса, несут $\frac{3}{4}$ энергии всех вылетающих нейтрино.

Мы можем подставить $d\cos\theta' = \frac{dE_\nu}{E_0\gamma v}$ (см. формулы (2.8.6)) в распределение (2.8.5) и получить совместное распределение нейтрино по энергии E_ν и углу ϕ':

$$\frac{dN_2}{N_0} = \frac{d\phi'\, d\cos\theta'}{4\pi} = \frac{d\phi'\, dE_\nu}{4\pi E_0\gamma v}.$$

Проинтегрировав это распределение по углу ϕ, получаем распределение по энергии:

$$\frac{dN_3}{N_0} = \int\limits_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{dN_2}{N_0} = \int\limits_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{d\phi'\, dE_\nu}{4\pi E_0\gamma v} = \frac{dE_\nu}{2E_0\gamma v}.$$

Мы получили равномерное распределение по энергии, но такое распределение не может быть нормировано на единицу. В чём же дело? Мы забыли, что минимальная и максимальная энергии $E_{\nu\frac{max}{min}}$ ограничивают область распределения по энергиям. Чтобы учесть это следует обрезать функцию распределения, например умножив её на тета-функции с соответствующими аргументами:

$$\frac{dN_3}{N_0} = \frac{dE_\nu}{2E_0\gamma v} \cdot \theta(E_{\nu max} - E_\nu) \cdot \theta(E_\nu - E_{\nu min}).$$

Распределение частиц по энергиям, которое в системе центра инерции описывалось дельта-функцией (бесконечно узкий пик единичной площади), в лабораторной системе превратилось в прямоугольный пик единичной площади, но уже конечной ширины.

В данной задаче в лабораторной системе и распределение по углам, и распределение по энергиям получаются из распределения по углам в системе центра инерции. В более сложной задаче преобразовывать следовало бы совместное распределение по энергиям, углам и, возможно, другим переменным:

$$\frac{dN}{N_0} = f'(\theta', \phi', E')\, d\cos\theta'\, d\phi'\, dE' = f(\theta, \phi, E)\, d\cos\theta\, d\phi\, dE.$$

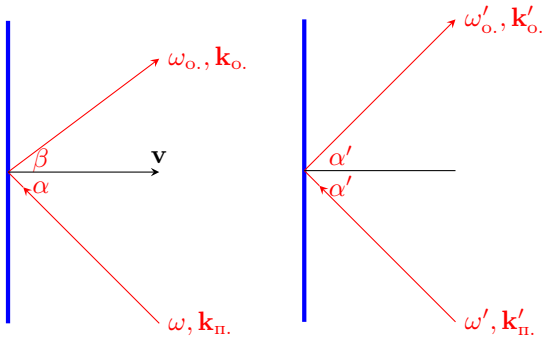
В случае общего положения совместное распределение не может быть восстановлено из распределений по отдельным переменным, но в данной задаче мы можем это сделать благодаря тому, что распределение по E'_ν вырожденно.

Распределение по отдельным переменным после замены координат получались бы интегрированием лишних переменных по всей области распределения (так мы получали распределение по энергиям интегрированием по углу ϕ').

28. Движущееся зеркало. Плоское зеркало движется со скоростью v в направлении своей нормали. На зеркало падает монохроматическая волна с циклической частотой ω под углом α к нормали. Для покоящегося зеркала справедлив обычный закон отражения. Определите направление и частоту отражённой волны.

Решение

[17] Эффект прожектора имеет место не только для нейтрино, но и для других безмассовых частиц в аналогичных условиях, в том числе для фотонов.



Отражение луча света от зеркала в лабораторной системе и системе зеркала (штрихованной).

Рассмотрим, как связаны 4-мерные волновые векторы падающей и отражённой волн в системе зеркала:

$$k^{i'}_{\text{п.}} = \begin{pmatrix} \omega' \\ -\omega' \cos\alpha' \\ \omega' \sin\alpha' \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k^{i'}_{\text{о.}} = \begin{pmatrix} \omega' \\ \omega' \cos\alpha' \\ \omega' \sin\alpha' \\ 0 \end{pmatrix} = k^{i'}_{\text{п.}} + 2\,\omega' \cos\alpha' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим появившийся в формуле единичный вектор как $n^{i'}$:

$$n^{i'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad k^{i'}_{\text{о.}} = k^{i'}_{\text{п.}} - 2 \underbrace{k^{j'}_{\text{п}} n_{j'}}_{-\omega' \cos\alpha'} n^{i'}.$$

Вектор $n^{i'}$ — это единичная нормаль к мировой поверхности зеркала в системе отсчёта зеркала, т.е. к гиперплоскости $x = 0$. Мировая поверхность зеркала — это (гипер)поверхность, которую поверхность зеркала заметает в пространстве-времени. Она может быть получена как объединение мировых линий всех точек зеркала.

Получившаяся формула справедлива не только в системе зеркала (штрихованной системе), но и в любой другой системе отсчёта, т.к. если два вектора равны в одной системе отсчёта, то они равны в любой другой:

$$k^{i}_{\text{о.}} = k^{i}_{\text{п.}} - 2k^{j}_{\text{п}} n_j\, n^i.$$

Чтобы применить полученную формулу к нашей задаче, выпишем волновой вектор падающей волны и единичную нормаль к мировой поверхности зеркала в лабораторной системе отсчёта[18]:

$$k^{i}_{\text{п.}} = \begin{pmatrix} \omega \\ -\omega \cos\alpha \\ \omega \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad n^i = \begin{pmatrix} \gamma v \\ \gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k^{j}_{\text{п.}} n_j = -\omega\gamma(\cos\alpha + v),$$

$$k^{i}_{\text{о.}} = \begin{pmatrix} \omega_{\text{о.}} \\ \omega_{\text{о.}} \cos\beta \\ \omega_{\text{о.}} \sin\beta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega + 2\omega\gamma(\cos\alpha + v)\gamma v \\ -\omega\cos\alpha + 2\omega\gamma(\cos\alpha + v)\gamma \\ \omega \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega(1 + 2\gamma^2 v(\cos\alpha + v)) \\ \omega(-\cos\alpha + 2\gamma^2(\cos\alpha + v)) \\ \omega \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Первая строчка даёт нам частоту отражённой волны, а отношение второй строчки к первой — косинус угла отражения:

$$\omega_{\text{о.}} = \omega(1+2\gamma^2 v(\cos\alpha+v)) = \omega\gamma^2(1+v^2+2v\cos\alpha), \qquad \cos\beta = \frac{-\cos\alpha + 2\gamma^2(\cos\alpha + v)}{1 + 2\gamma^2 v(\cos\alpha + v)} = \frac{\cos\alpha(1+v^2) + 2v}{1 + v^2 + 2v\cos\alpha}.$$

Удобно ввести параметры

$$v_2 = \frac{2v}{1+v^2}, \qquad \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - v_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4v^2}{(1+v^2)^2}}} = \frac{1+v^2}{1-v^2},$$

[18] Компоненты n^i можно получить из $n^{i'}$ с помощью преобразования, Лоренца, а можно (если лучше понимать, что такое нормаль в метрике Минковского) просто взять 4-скорость зеркала и переставить компоненты по осям t и x.

через которые ответ выписывается в следующем виде:

$$\omega_{\text{o.}} = \omega\gamma_2(1 + v_2\,\cos\alpha), \qquad \cos\beta = \frac{v_2 + \cos\alpha}{1 + v_2\,\cos\alpha}.$$

Неожиданно ответ совпадает с формулами для эффекта Доплера и преобразования углов для скорости v_2. А скорость v_2 получается по формуле для релятивистского сложения скоростей при сложении двух одинаково направленных скоростей v. Это «совпадение» объясняется, если рассмотреть отражение источника света в зеркале. Волновой вектор света, идущего от отражения (т.е. отражённого света) в системе отражения, совпадает с волновым вектором падающего света в лабораторной системе с точностью до знака компоненты k^x. Отражение будет двигаться относительно зеркала со скоростью v, а относительно лабораторной системы — со скоростью v_2. Преобразование Лоренца от системы отражения к лабораторной системе даст нам то же выражение для $k^i_{\text{o.}}$.

2.8.9 Геометрический смысл прецессии Томаса

Рассмотрим параллельно два явления, имеющих очень похожие математические описания, одно из которых связано с евклидовой геометрией (и кинематикой твёрдого тела), а второе — с геометрией Минковского (и кинематикой частицы со спином). Эти явления — скольжение без вращения по гладкой проволоке хорошо отцентрованной бусины и *прецессия Томаса*. Пусть для удобства оба пространства будут трёхмерными: 3 пространственных измерения в евклидовом пространстве и 2 пространственных измерения плюс 1 временно́е в пространстве Минковского.

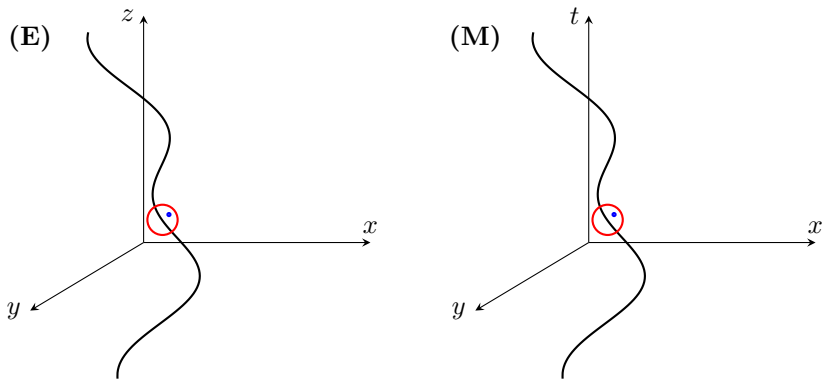
Фрагменты, относящиеся к евклидову пространству, будем обозначать **(E)**, а к пространству Минковского — **(M)**.

(E) Пусть хорошо отцентрованная бусина (центр масс на оси) скользит по гладкой проволоке без вращения. Проволока изогнута в пространстве, т.е. не лежит в одной плоскости. «Без вращения» означает, что в любой момент времени бусина не вращается вокруг своей оси, т.е. угловая скорость в любой момент перпендикулярна оси бусины.

Пусть $\mathbf{h}$ — единичный вектор, направленный по оси бусинки. Метку на боку бусины изобразим вторым вектором, перпендикулярным первому: $\mathbf{n}\perp\mathbf{h}$.

(M) Положим скорость света равной единице: $c = 1$.

В пространстве Минковского вместо проволоки рассмотрим мировую линию частицы, которая не лежит в одной плоскости. Вместо бусины — частица. Метка на боку бусины — некоторый вектор s^i, ортогональный в смысле метрики Минковского вектору релятивистской скорости $u^i = \frac{dx^i}{d\tau}$. Это может быть вектор спина[19].



(E) Хорошо отцентрованная бусина на изогнутой в пространстве гладкой проволоке. На боку бусины нанесена метка, чтобы наблюдать её вращение. Начальный и конечный участки проволоки параллельны друг другу и оси z.

(M) Мировая линия частицы в 3-мерном пространстве Минковского. Точка на частице изображает вектор s^i, ортогональный (по Минковскому) вектору релятивистской скорости $u^i = \frac{dx^i}{d\tau}$. Начальный и конечный участки мировой линии параллельны друг другу и оси t (в начале и в конце частица неподвижна)

(E) Бусина скользит по проволоке без вращения от начального участка до конечного участка, который параллелен начальному. Кажется, что ориентация бусины должна остаться прежней, однако в случае

[19] Квантовые свойства спина мы не рассматриваем.

общего положения (т.е. если не подгонять форму проволоки специально) бусина в конце окажется повёрнутой! Повороты вокруг направлений, перпендикулярных оси бусины (т.е. в плоскостях, содержащих ось бусины), дадут в итоге поворот вокруг оси бусины.

(M) Частица движется вдоль мировой линии так, что спин s^i не подвергается каким-либо воздействиям. Начальная скорость совпадает с конечной. Кажется, что ориентация спина должна остаться прежней, однако в случае общего положения (т.е. если не подгонять форму мировой линии специально) спин в конце окажется повёрнутым! «Повороты» вокруг направлений, перпендикулярных скорости u^i (т.е. бусты в плоскостях, содержащих u^i), дадут в итоге поворот в плоскости $x-y$.

Соответствующие вычисления мы провели выше, при решении задачи о прецессии Томаса.

(E,M) Как это объяснить?

(E) Будем откладывать вектор $\mathbf{h}$ из центра единичной сферы. Его конец указывает на точку на поверхности. Из этой точки отложим вектор $\mathbf{n}$, который будет касаться сферы в этой точке.

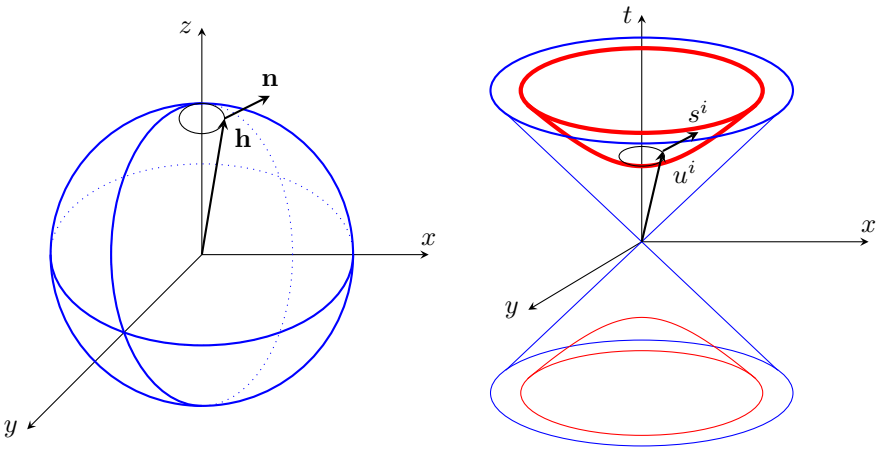
По мере движения бусины по проволоке вектор $\mathbf{h}$ (задающий направление оси бусины) наклоняется, а потом возвращается к прежнему направлению (когда бусина выходит на конечный участок), его конец описывает на сфере некоторый замкнутый контур.

Касательный вектор $\mathbf{n}$ (вместе с точкой приложения) при этом поворачивается вокруг центра сферы так, что угловая скорость всё время перпендикулярна $\mathbf{h}$, т.е. вектор $\mathbf{n}$ никогда не вращается вокруг точки приложения. Такое движение касательного вектора $\mathbf{n}$ по контуру мы будем называть параллельным переносом касательного вектора вдоль контура на сфере.

(M) Будем откладывать вектор u^i из центра единичного гиперболоида (псевдосферы) $t^2-x^2-y^2=1$. Его конец указывает на точку на поверхности. Из этой точки отложим вектор s^i, который будет касаться псевдосферы в этой точке.

По мере движения частицы вектор u^i наклоняется, а потом возвращается к прежнему направлению (когда частица выходит на конечный участок), его конец описывает на псевдосфере некоторый замкнутый контур.

Касательный вектор s^i (вместе с точкой приложения) при этом «поворачивается» (подвергается преобразованию из группы Лоренца) так, что плоскость, в которой совершается буст, всё время содержит u^i, т.е. вектор s^i никогда не вращается вокруг точки приложения. Такое движение касательного вектора s^i по контуру мы будем называть параллельным переносом касательного вектора вдоль контура на псевдосфере.



(E) Единичная сфера — пространство направлений для трёхмерного пространства. Каждое направление можно задать единичным вектором $\mathbf{h}$. Если этот вектор отложить из начала координат, то его конец укажет точку на единичной сфере. Из этой точки мы откладываем касательный вектор $\mathbf{n}$. Когда вектор $\mathbf{h}$ поворачивается, точка на сфере описывает некоторый контур, вдоль которого вектор $\mathbf{n}$ подвергается параллельному переносу.

(M) Верхняя половина двуполого гиперболоида $t^2-x^2-y^2=1$ (единичная псевдосфера) — пространство скоростей в 3-мерном пространстве Минковского. Если откладывать вектор релятивистской скорости $u^i=\frac{dx^i}{d\tau}$ из начала координат, то его конец укажет точку пространства скоростей. Из этой точки мы откладываем касательный вектор s^i. Когда вектор u^i поворачивается (в смысле Минковского, т.е. подвергается комбинации бустов и поворотов), точка на сфере описывает некоторый контур, вдоль которого вектор s^i подвергается параллельному переносу.
Если скорость u^i изменяется, а потом возвращается к прежнему значению, то конец вектора описывает на пространстве скоростей некоторый замкнутый контур

(E) Если угловая скорость вектора $\mathbf{h}$ постоянна (вектор поворачивается в фиксированной плоскости), то его конец описывает на поверхности сферы *большой круг* (геодезическую, аналог прямой в сферической

геометрии) — окружность, центр которой совпадает с центром сферы. Когда вектор $\mathbf{n}$ подвергается параллельному переносу по большому кругу, угол между вектором $\mathbf{n}$ и большим кругом остаётся постоянным. Любой контур на сфере можно приблизить ломаной, составленной из дуг больших кругов.

(M) Если вектор u^i поворачивается в фиксированной плоскости, то его конец описывает на поверхности псевдосферы *большую гиперболу* (геодезическую, аналог прямой в псевдосферической геометрии) — гиперболу, центр которой совпадает с центром псевдосферы. Когда вектор s^i подвергается параллельному переносу по большой гиперболе, угол между вектором s^i и большой гиперболой остаётся постоянным. Любой контур на псевдосфере можно приблизить ломаной, составленной из дуг больших гипербол.

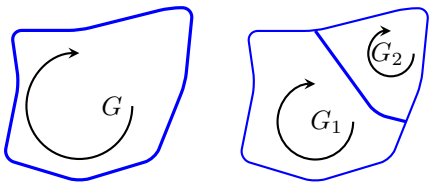
Если мы рассматриваем прецессию Томаса в случае, когда начальная и конечная скорости не равны нулю, мы можем достроить кривую, которую описывает конец вектора u^i в пространстве скоростей, до замкнутого контура, добавив дуги геодезических, соединяющие концы кривой с точкой нулевой скорости.

(E,M) В обоих случаях геодезические — линии пересечения сферы/псевдосферы с плоскостями, проходящими через начало координат.

(E,M) Легко видеть, что если параллельному переносу подвергаются несколько векторов, касающихся сферы/псевдосферы в одной точке, то угол между ними не меняется[20].

Параллельный перенос не изменяет длину вектора, поэтому после параллельного переноса по замкнутому контуру любой вектор повернётся на некоторый угол в касательной плоскости. Угол поворота зависит от контура и направления его обхода. При изменении направления обхода на противоположное знак угла поворота должен меняться.

Контур G можно разбить на два контура G_1 и G_2 с одинаковыми направлениями обхода. Граница между G_1 и G_2 проходится два раза в противоположных направлениях и не даёт вклада в итоговый поворот. Мы можем заключить, что угол поворота при обходе контура G равен сумме углов при обходе контуров G_1 и G_2.



(E,M) Контур G разбивается на контуры G_1 и G_2. Показаны согласованные направления обхода.

(E,M) Сфера/псевдосфера является однородной: все точки на ней равноправны, через любую можно провести новую ось z/t. Также сфера/псевдосфера является изотропной: в каждой точке все касательные направления равноправны, и если через точку проведена новая ось z/t, то любое направление в этой точке можно выбрать параллельным новой оси x.

В силу этого единственная характеристика контура, от которой зависит поворот при параллельном переносе вектора вдоль этого контура, — ориентируемая площадь. Ориентируемая площадь меняет знак при изменении направления обхода, например, ориентируемая площадь восьмёрки из двух одинаковых петель, одна из которых обходится по часовой стрелке, а другая — против, будет равна нулю.

Так что нам осталось установить коэффициент пропорциональности между площадью на единичной сфере[21]/псевдосфере и углом поворота.

(E) Рассмотрим сферический треугольник с тремя прямыми углами, составленный следующими отрезками больших кругов: отрезки по $\frac{\pi}{2}$ двух перпендикулярных меридианов от полюса до экватора и отрезок экватора длиной $\frac{\pi}{2}$, соединяющий эти меридианы. Такой треугольник составляет $\frac{1}{8}$ сферы и имеет площадь $\frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$. Выше на рисунке изображено разбиение сферы на такие треугольники.

При обходе такого треугольника по часовой стрелке, начиная с полюса, вектор $\mathbf{n}$ вначале составляет угол α с первым меридианом. После того как вектор перенесли до экватора, он составляет угол $\alpha + \frac{\pi}{2}$ с экватором. После того как вектор донесли до второго меридиана, он составляет с ним угол $\alpha + \pi$. Когда вектор приносят обратно на полюс, его угол с первым меридианом составляет $\alpha + \frac{3\pi}{2} \sim \alpha - \frac{\pi}{2}$. В результате при обносе контура по часовой стрелке вектор повернулся по часовой стрелке на угол $\frac{\pi}{2}$.

Угол поворота при параллельном переносе вектора по сторонам сферического треугольника соответствует *угловому избытку* этого треугольника: «сумма углов треугольника минус π».

Коэффициент пропорциональности между углом поворота и площадью контура оказался равен 1 для единичной сферы.

Для сферы радиусом R все площади будут пропорциональны R^2, поэтому коэффициент пропорциональности равен $\frac{1}{R^2}$, т.е. произведению главных кривизн. Этот коэффициент называется кривизной. Сфера — пример поверхности с постоянной положительной кривизной.

[20] Касательная плоскость к гиперболоиду $t^2 - x^2 - y^2 = 1$ будет пространственноподобной, так что в этой плоскости можно определить между векторами обычные евклидовы углы, используя скалярное произведение (по Минковскому).

[21] Площадь на единичной сфере — телесный угол.

(M) Переход от евклидовой геометрии к геометрии Минковского в данном случае может быть осуществлён с помощью замены $z \to \mathrm{i}t$. Радиус кривизны псевдосферы можно определить из поведения $t(x,y)$ в окрестности точки $(0,0)$. Этот радиус окажется мнимым. Соответственно $\frac{1}{R^2} \to \frac{1}{(\mathrm{i}R)^2} = -\frac{1}{R^2}$. В частности, для пространства скоростей (единичной псевдосферы) кривизна равна -1.

Это означает, что параллельный перенос касательного к поверхности вектора по замкнутому контуру даёт поворот, равный площади контура в направлении, *обратном* направлению обхода.

Это также означает, что сумма углов треугольника меньше π на величину площади этого треугольника. Таким образом, вместо углового избытка имеет место *угловой дефицит*.

Что за геометрию мы получили для пространства скоростей? Пространство скоростей однородно и изотропно, на нём имеется положительно определённая метрика. Это явно не евклидова плоскость, но и не сфера (т.к. геодезические бесконечны). Математика оставляет один вариант — это *геометрия Лобачевского*.

2.8.10 Геометрия Лобачевского и сферическая геометрия

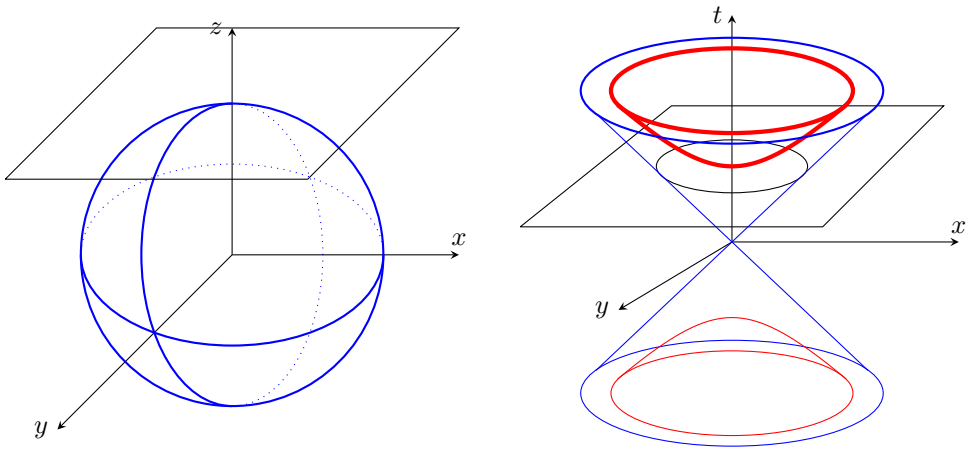
Опять положим скорость света равной единице: $c = 1$.

Как мы обнаружили выше, при обсуждении прецессии Томаса, пространство скоростей в специальной теории относительности удобно представить как верхнюю половину гиперболоида $t^2 - x^2 - y^2 - x^2 = 1$ в пространстве Минковского. При этом геометрия пространства скоростей совпадает с геометрией Лобачевского.

Продолжим сравнение геометрии плоскости Лобачевского с геометрией сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в евклидовом пространстве.

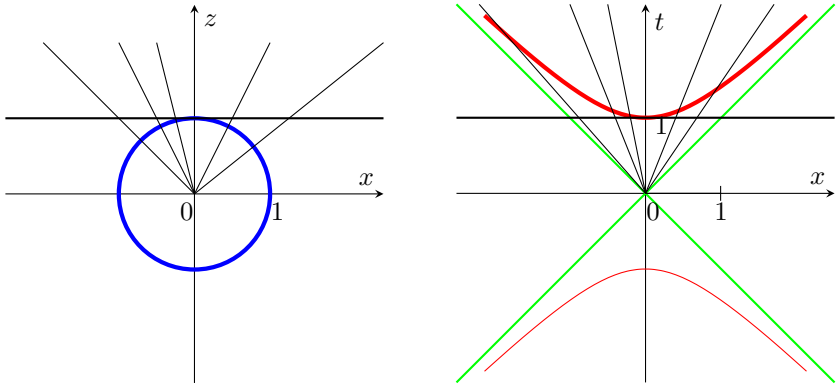
Фрагменты, относящиеся к евклидову пространству (и обычной сфере), будем обозначать **(E)**, а к пространству Минковского (и плоскости Лобачевского) — **(M)**.

2.8.10.1 Модель Клейна и пространство скоростей СТО



(E) Мы можем спроецировать из начала координат верхнюю полусферу на плоскость $z = 1$. Верхняя полусфера (без границы) взаимнооднозначно отобразится на всю плоскость. Дуги больших кругов при этом отобразятся в прямые, поскольку каждый большой круг лежит в некоторой плоскости, проходящей через начало координат, а две плоскости могут пересекаться только по прямой.

(M) Мы можем спроецировать из начала координат верхнюю половину гиперболоида на плоскость $t = 1$. Верхняя половина гиперболоида взаимнооднозначно отобразится на единичный круг (без границы). Дуги больших гипербол при этом отобразятся в хорды этого круга, поскольку каждая большая гипербола лежит в некоторой плоскости, проходящей через начало координат, а две плоскости могут пересекаться только по прямой.



(E) Проецирование верхней полусферы на плоскость $z = 1$. (В разрезе плоскостью $x - z$.)
(M) Проецирование верхней половины гиперболоида на плоскость $t = 1$. (В разрезе плоскостью $t - x$.)

(E) Рассмотрим центральную проекцию плоскости $z = 1$ на верхнюю полусферу:

$$(X, Y, 1) \to (x, y, z) = (X\Gamma, Y\Gamma, \Gamma)\,, \qquad \Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + X^2 + Y^2}}.$$

Дифференциалы координат на сфере имеют вид

$$\begin{aligned} dx &= \Gamma\left(1 - X^2\Gamma^2\right)\, dX - XY\Gamma^3\, dY = \left((1 + Y^2)\, dX - XY\, dY\right)\Gamma^3, \\ dy &= -XY\Gamma^3\, dX + \Gamma\left(1 - Y^2\Gamma^2\right)\, dY = \left(-XY\, dX + (1 + X^2)\, dY\right)\Gamma^3, \\ dz &= -(X\, dX + Y\, dY)\Gamma^3. \end{aligned}$$

Подставив эти дифференциалы в выражение для элемента длины, получаем метрику сферы в координатах X, Y:

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \Gamma^4\Big((1 + Y^2)\, dX^2 + (1 + X^2)\, dY^2 - 2XY\, dX\, dY\Big), \qquad \Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + X^2 + Y^2}}.$$

Расстояние между точками, удалёнными на конечное расстояние друг от друга, можно найти либо интегрируя $d\ell$, либо напрямую, если вспомнить, что расстояние между точками на единичной сфере — это угол, а угол может быть найден через скалярное произведение:

$$\ell(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \arccos\left(\Gamma_1\Gamma_2(X_1X_2 + Y_1Y_2 + 1)\right), \qquad \Gamma_a = \frac{1}{\sqrt{1 + X_a^2 + Y_a^2}}.$$

Расстояние до бесконечной точки на плоскости X, Y оказывается конечным, что не удивительно, т.к. эта точка соответствует конечной точке на экваторе сферы.

(M) Если параметризовать пространство скоростей с помощью декартовых компонент обычной скорости, то мы получим *модель Клейна* пространства Лобачевского. Таким образом, модель Клейна оказывается естественной для специальной теории относительности. Мы ей уже пользовались каждый раз, когда описывали движение частицы с помощью обычной скорости $\mathbf{V}$. Преобразования из группы Лоренца переводят гиперболоид $t^2 - x^2 - y^2 = 1$ в себя и сохраняют интервалы (в том числе на поверхности гиперболоида), т.е. с точки зрения внутренней геометрии гиперболоида они являются движениями.

Рассмотрим центральную проекцию открытого единичного круга на плоскости $t = 1$ на верхнюю половину гиперболоида $t^2 - x^2 - y^2 = 1$. Мы обозначили координаты точки на плоскости через компоненты скорости $\mathbf{V}$, а координаты точки на гиперболоиде через компоненты релятивистской скорости u^i:

$$(1, V_x, V_y) \to (t, x, y) = (u^t, u^x, u^y) = (\gamma, V_x\gamma, V_y\gamma)\,, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V_x^2 - V_y^2}}.$$

Дифференциалы координат на гиперболоиде имеют вид

$$\begin{aligned} dt &= \gamma^3(V_x\, dV_x + V_y\, dV_y), \\ dx &= \gamma\left(1 + V_x^2\gamma^2\right)\, dV_x + V_xV_y\gamma^3\, dV_y = \left((1 - V_y^2)\, dV_x + V_xV_y\, dV_y\right)\gamma^3, \\ dy &= V_xV_y\gamma^3\, dV_x + \gamma\left(1 + V_y^2\gamma^2\right)\, dV_y = \left(V_xV_y\, dV_x + (1 - V_x^2)\, dV_y\right)\gamma^3. \end{aligned}$$

Подставив эти дифференциалы в выражение для элемента интервала, получаем метрику плоскости Лобачевского в координатах V_x, V_y:

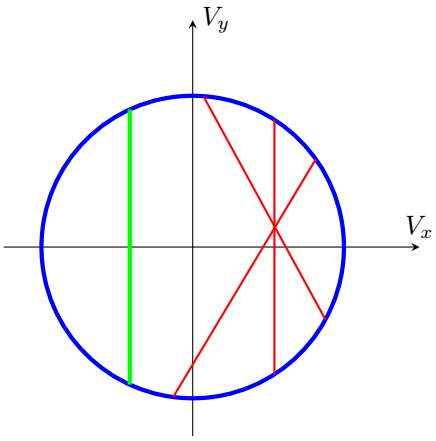
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dt^2 = \gamma^4\Big((1 - V_y^2)\, dV_x^2 + (1 - V_x^2)\, dV_y^2 + 2V_xV_y\, dV_x\, dV_y\Big), \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V_x^2 - V_y^2}}.$$

Расстояние между точками, удалёнными на конечное расстояние друг от друга, можно найти либо интегрируя $d\ell = ds$, либо напрямую, если вспомнить, что расстояние между точками на единичной псевдосфере — это гиперболический угол, а гиперболический угол может быть найден через скалярное произведение:

$$s(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) = \operatorname{arch}\left(\gamma_1\gamma_2(1 - V_{x1}V_{x2} - V_{y1}V_{y2})\right), \qquad \gamma_a = \frac{1}{\sqrt{1 - V_{xa}^2 - V_{ya}^2}}.$$

Расстояние до граничных точек $V_x^2 + V_y^2 = 1$ на единичном диске (пространстве скоростей) оказывается бесконечным, что не удивительно, т.к. эти точки соответствуют бесконечности на гиперболоиде.

Расстояние в пространстве Лобачевского (пространстве скоростей) имеет хороший физический смысл — если рассмотреть две инерциальные системы отсчёта, движущиеся со скоростями $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$, то расстояние $s(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)$ между точками в пространстве скоростей равно быстроте, которая связана с относительной скоростью этих систем: $V_{12} = \operatorname{th}\big(s(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)\big)$.

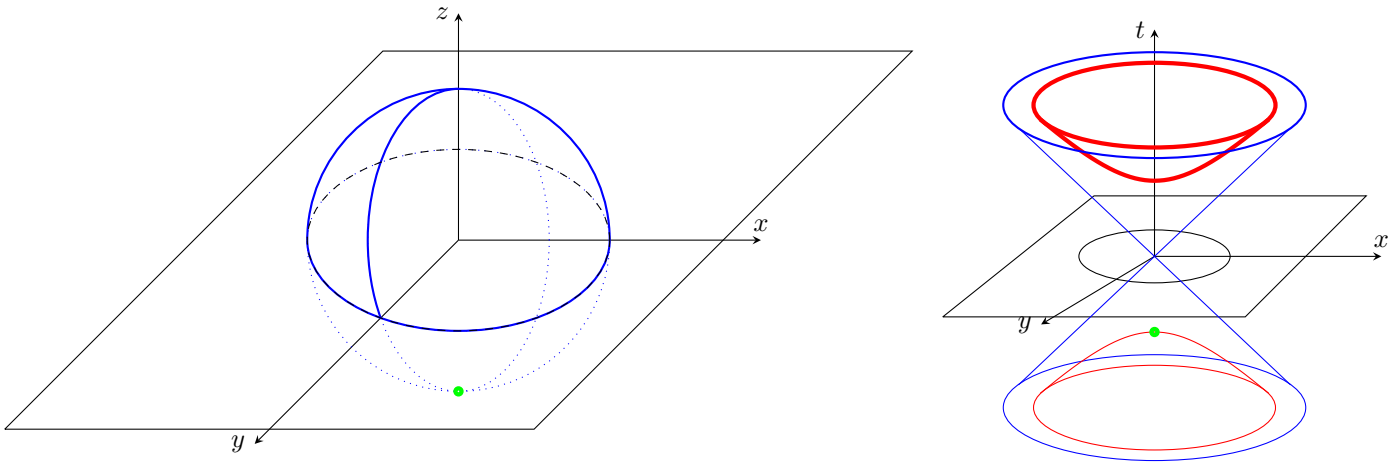


Модель Клейна. Всё пространство — открытый единичный диск, прямые — хорды, бесконечность (скорость света) — граница диска. Расстояния и углы задаются приведённой выше метрикой. Движения пространства Лобачевского — повороты и преобразования Лоренца для скорости.
Видно, что через точку на диске можно провести сколько угодно прямых (хорд), не пересекающих (внутри диска) данную прямую (хорду).

2.8.10.2 Модель Пуанкаре

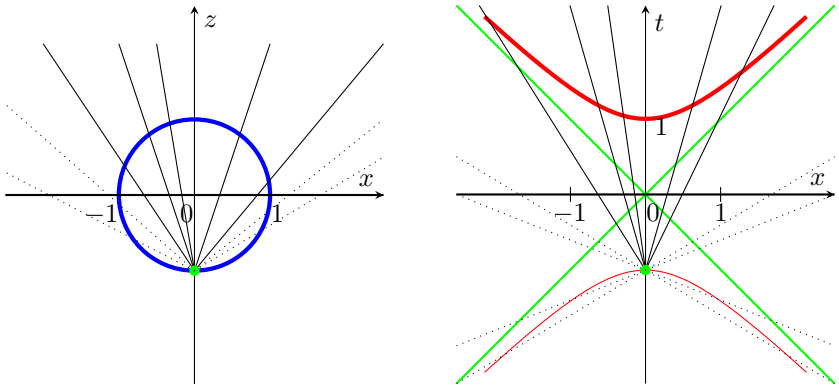
Помимо модели Клейна, для представления геометрии Лобачевского часто используется модель Пуанкаре. В модели Пуанкаре по-прежнему пространство Лобачевского представлено открытым диском, граница которого соответствует бесконечности (скорости света), но метрика на диске задана иначе, так что углы на диске соответствуют углам в геометрии Лобачевского[22].

Модель Пуанкаре для плоскости Лобачевского (и её аналог для сферы) также может быть получена путём центрального проецирования поверхности на плоскость, но из другой точки.



[22]Существуют разные варианты модели Пуанкаре, которые отображают пространство Лобачевского на разные области евклидова пространства. Но все варианты модели Пуанкаре конформные, т.е. сохраняют углы.

(E) Мы можем спроецировать из южного полюса сферу на плоскость $z = 0$. Большие круги при этом отобразятся в окружности (или прямые), пересекающие экватор под прямыми углами. Внутрь экватора спроецируется верхняя полусфера, снаружи экватора — нижняя.
(M) Мы можем спроецировать из южного полюса гиперболоид на плоскость $t = 0$. Большие гиперболы при этом отобразятся в окружности (или прямые), пересекающие единичную окружность под прямыми углами. Внутрь единичной окружности спроецируется верхняя половина гиперболоида, снаружи единичной окружности — нижняя



(E) Верхняя полусфера проецируется из южного полюса (точки $(0, 0, -1)$) на плоскость $z = 0$ внутри единичного круга (экватора сферы). Нижняя полусфера проецируется (пунктиром) снаружи единичного круга. (В разрезе плоскостью $x - z$.)
(M) Верхняя половина гиперболоида проецируется из южного полюса (точки $(0, 0, -1)$) на плоскость $t = 0$ внутри единичного круга. Нижняя половина гиперболоида проецируется (пунктиром) снаружи единичного круга. (В разрезе плоскостью $t - x$.)

(E) Рассмотрим центральную проекцию плоскости $z = 0$ на сферу из южного полюса:

$$(X, Y, 0) \to (x, y, z) = \left(2X\Gamma^2, 2Y\Gamma^2, 2\Gamma^2 - 1\right), \qquad \Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + X^2 + Y^2}}.$$

Дифференциалы координат на сфере имеют вид

$$\begin{aligned} dx &= X\,dz + 2\Gamma^2\,dX, \\ dy &= Y\,dz + 2\Gamma^2\,dY, \\ dz &= -4\Gamma^4(X\,dX + Y\,dY). \end{aligned}$$

Подставив эти дифференциалы в выражение для элемента длины, получаем метрику сферы в координатах X, Y:

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (1 + X^2 + Y^2)\,dz^2 + 4\Gamma^2(X\,dX + Y\,dY)\,dz + 4\Gamma^4(dX^2 + dY^2) = 4\Gamma^4(dX^2 + dY^2).$$

Получается *конформно плоская метрика*, т.е. метрика, отличающаяся от метрики плоского пространства на общий множитель:

$$d\ell^2 = \frac{4}{(1 + X^2 + Y^2)^2}(dX^2 + dY^2).$$

Расстояние между конечными точками равно

$$\ell(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \arccos\left(\frac{4X_1X_2 + 4Y_1Y_2 + (1 - X_1^2 - Y_1^2)(1 - X_2^2 - Y_2^2)}{(1 + X_1^2 + Y_1^2)(1 + X_2^2 + Y_2^2)}\right).$$

(M) Рассмотрим центральную проекцию плоскости $t = 0$ на псевдосферу из южного полюса:

$$(X, Y, 0) \to (x, y, t) = \left(2X\gamma^2, 2Y\gamma^2, 2\gamma^2 - 1\right), \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - X^2 - Y^2}}.$$

Дифференциалы координат на псевдосфере имеют вид

$$dx = X\,dt + 2\gamma^2\,dX, \quad dy = Y\,dt + 2\gamma^2\,dY, \quad dt = 4\gamma^4(X\,dX + Y\,dY).$$

Подставив эти дифференциалы в выражение для элемента длины, получаем метрику псевдосферы в координатах X, Y:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dt^2 = (X^2 + Y^2 - 1)\,dt^2 + 4\gamma^2(X\,dX + Y\,dY)\,dt + 4\gamma^4(dX^2 + dY^2) = 4\gamma^4(dX^2 + dY^2).$$

Получается *конформно плоская метрика*, т.е. метрика, отличающаяся от метрики плоского пространства на общий множитель:

$$ds^2 = \frac{4}{(1-X^2-Y^2)^2}(dX^2+dY^2).$$

Расстояние между конечными точками равно

$$s(\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2) = \operatorname{arch}\left(\frac{(1+X_1^2+Y_1^2)(1+X_2^2+Y_2^2)-4X_1X_2-4Y_1Y_2}{(1-X_1^2-Y_1^2)(1-X_2^2-Y_2^2)}\right).$$

(E,M) С помощью преобразования подобия мы можем обобщить наши метрики на случай сферы с произвольной кривизной $K=\frac{1}{R^2}$ и псевдосферы с произвольной отрицательной кривизной $K=-\frac{1}{R^2}$ и записать общее выражение для метрики риманова пространства постоянной кривизны в конформных координатах:

$$d\ell^2 = \frac{4}{(1+K(X^2+Y^2))^2}(dX^2+dY^2). \tag{2.8.7}$$

Случай $K=0$ соответствует плоскости.

Поскольку метрический тензор пропорционален единичной матрице, углы на плоскости соответствуют углам на сфере или гиперболоиде.

Метрику (2.8.7) легко обобщить на произвольную размерность и произвольную сигнатуру:

$$ds^2 = \frac{4}{1+K\eta_{\mu\nu}X^\mu X^\nu}\,\eta_{\alpha\beta}\,dX^\alpha\,dX^\beta, \qquad \alpha,\beta,\mu,\nu=1,\dots D, \quad \eta_{\alpha\beta}=\operatorname{diag}(\underbrace{\pm1,\pm1,\dots,\pm1}_{D\text{ раз}}). \tag{2.8.8}$$

Такая метрика может быть получена из метрики на $(D+1)$-мерном пространстве

$$ds^2_{D+1} = \operatorname{sgn}(K)(dX^0)^2 + \eta_{\alpha\beta}\,dX^\alpha\,dX^\beta$$

путём проекции псевдосферы

$$\operatorname{sgn}(K)\,(X^0)^2 + \eta_{\mu\nu}X^\mu X^\nu = \frac{1}{K}$$

из точки $(-\frac{1}{\sqrt{|K|}},0,0,\dots,0)$ на гиперплоскость $X^0=\frac{1}{\sqrt{|K|}}$.

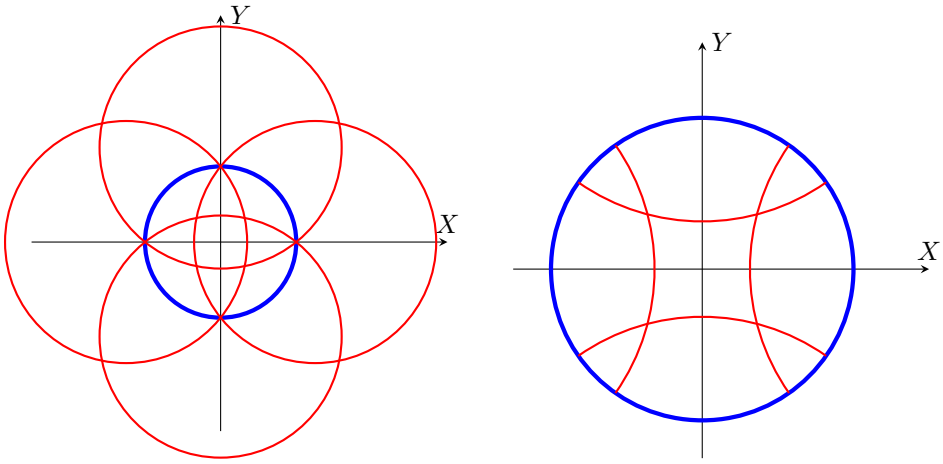
Если $\eta_{\alpha\beta}=\operatorname{diag}(-1,+1,+1,\dots,+1)$, то таким образом получаются *пространства де Ситтер*а (при $K>0$) и *анти-де Ситтера* (при $K<0$).

(E) Рассмотрим, как отображаются большие круги на сфере при проецировании из южного полюса в экваториальную плоскость.

- Экватор (единичная окружность в плоскости $z=0$) переходит в себя.
- Большой круг, проходящий через полюсы, отображается в прямую, проходящую через начало координат.
- Во всех остальных случаях большой круг отображается в окружность, которая пересекает экватор в двух диаметрально противоположных точках.

(M) Рассмотрим, как отображаются большие гиперболы на псевдосфере при проецировании из южного полюса в экваториальную плоскость.

- Единичная окружность в плоскости $t=0$ соответствует бесконечным точкам гиперболоида (движению со скоростью света). Никаким кривым на гиперболоиде она не соответствует.
- Большая гипербола, проходящая через полюсы, отображается в прямую, проходящую через начало координат.
- Во всех остальных случаях большая гипербола отображается в окружность, которая пересекает экватор в двух точках под прямым углом.



(E) Стереографическая проекция сферы. Изображены экватор и четыре больших круга, дуги которых образуют квадрат. Сумма углов квадрата больше чем 2π, т.е. имеется угловой избыток.

(M) Модель Пуанкаре. Всё пространство — открытый единичный диск, прямые — дуги окружностей, ортогональные границе диска, бесконечность — граница диска. Углы соответствуют углам на диске. Сумма углов квадрата меньше чем 2π, т.е. имеется угловой дефицит

Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского была использована Морисом Эшером в серии гравюр «Предел круга», на которых изображены разные мозаики на плоскости Лобачевского. С точки зрения геометрии Лобачевского мозаики состоят из фигур равного размера, но их представления на плоском листе бумаги уменьшаются и искажаются по мере их приближения к окружности, которая соответствует бесконечности плоскости Лобачевского.

Гравюры Мориса Эшера: Предел круга I, 1958 г., Предел круга II, 1959 г.

Гравюры Мориса Эшера: Предел круга III, 1959 г. , Предел круга IV (рай и ад), 1960 г.

Глава 2.9

Время как координата и энергия как импульс в гамильтоновом формализме* (с. 109)

2.9.1 Гамильтонов формализм в расширенном фазовом пространстве

Мы установили, что действие может быть переписано через произвольный монотонный параметр l, который выступает в роли времени, тогда как само время оказывается в роли дополнительной координаты:

$$S[x^\alpha(t)] = \int L(t, x^\alpha, \dot{x}^\alpha)\, dt = \int L(t, x^\alpha, \acute{x}^\alpha/\acute{t})\, \acute{t}\, dl, \qquad \acute{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dl}, \quad \alpha = 1, \ldots, D.$$

Расширенная функция Лагранжа

$$L_{\text{p}}(x^i, \acute{x}^i) = L_{\text{p}}(t, \acute{t}, x^\alpha, \acute{x}^\alpha) = L(t, x^\alpha, \acute{x}^\alpha/\acute{t})\, \acute{t}, \quad i = 0, 1, \ldots, D,\ x^0 = t,$$

позволяет определить временну́ю компоненту импульса $p_0 = -\mathcal{E}$.

Поскольку импульсы, введённые для расширенного лагранжиана, являются зависимыми (имеется связь $p_0 + H(t, x^\alpha, p_\alpha) = 0$, где $H(t, x^\alpha, p_\alpha)$ — функция Гамильтона для исходного невырожденного лагранжиана $L(t, x^\alpha, \dot{x}^\alpha)$), расширенный лагранжиан оказывается вырожденным. Раньше мы переходили к гамильтонову формализму только для невырожденных лагранжианов. Тем не менее оказывается, что переход к функции Гамильтона может оказаться возможен и для вырожденных лагранжианов. Мы имеем дело с частным случаем обобщённой гамильтоновой динамики, введённой Дираком.

«Энергию» для расширенного лагранжиана надо выразить через координаты и импульсы (включая t и p_0). Тут сразу возникает неоднозначность, ведь «энергия», которую надо выразить, — тождественный нуль. Попробуем, однако, провести соответствующие формальные выкладки с учётом того, что в выражении для «энергии» импульсы в члене $p_i\acute{x}^i$ уже выделены и если их не выражать через скорость, то получается некоторое нетривиальное выражение

$$\mathcal{E}_{\text{p}} = \acute{x}^i p_i - L_{\text{p}} = \acute{t}p_0 + \acute{x}^\alpha p_\alpha - L_{\text{p}} = \acute{t}(p_0 + p_\alpha \dot{x}^\alpha - L) \equiv \acute{t}\,(p_0 + H(t, p_\alpha, x^\alpha)). \tag{2.9.1}$$

Множитель $\acute{t}$ не может быть определён из уравнений Лагранжа в силу произвольности параметра l. Соответствующее преобразование Лежандра оказывается неоднозначным. Положим $\acute{t} = f(t, p_0, x^\alpha, p_\alpha)$, где $f \neq 0$ — произвольная гладкая функция. Получается семейство «функций Гамильтона»

$$\mathcal{H}(x^i, p_i) = \mathcal{H}(t, p_0, x^\alpha, p_\alpha) = f(t, p_0, x^\alpha, p_\alpha) \cdot (p_0 + H(t, x^\alpha, p_\alpha)). \tag{2.9.2}$$

Переменные (x^i, p_i) — координаты на *расширенном фазовом пространстве*[1]

[1] В данном случае мы нашли удобным снова отступить от традиции. Обычно в литературе расширенное фазовое пространство имеет размерность $2D + 1$ и координаты на нём задаются переменными (t, x^α, p_α). Такое пространство соответствует *энергетической поверхности*, т.е. поверхности $\mathcal{E} = -p_0 = \text{const}$ во введённом нами расширенном фазовом пространстве размерности $2D + 2$.

Соответствующие уравнения Гамильтона («расширенные уравнения Гамильтона») имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{dl} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_0} = f + \frac{\partial f}{\partial p_0}(p_0 + H), \\
\frac{dp_0}{dl} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -f\,\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}(p_0 + H), \\
\frac{dx^\alpha}{dl} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\alpha} = f\,\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}(p_0 + H), \\
\frac{dp_\alpha}{dl} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\alpha} = -f\,\frac{\partial H}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}(p_0 + H).
\end{aligned}$$

«На энергетической поверхности», т.е. если задать начальные условия, для которых $p_0 = -H$, расширенные уравнения Гамильтона дают уравнение хода времени $\frac{dt}{dl} = f$, уравнение баланса энергии и уравнения Гамильтона для исходных координат и импульсов с новым временем l. При этом воспроизводится гамильтонова динамика исходной системы.

Если $f = \text{const} \neq 0$, то *для любых начальных условий* воспроизводится гамильтонова динамика исходной системы, поскольку $\frac{d}{dt}(p_0 + H) = 0$, начальное значение p_0 может быть произвольным и энергия $\mathcal{E} = -p_0$ оказывается определена с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Можно сказать, что в этом случае интеграл движения $p_0 + H(t, x^\alpha, p_\alpha)$ — нулевой уровень шкалы энергии, который может быть выставлен произвольно.

(!) Выводы. Если у нас была функция Гамильтона $H(x^\alpha, p_\alpha, t)$ $(\alpha = 1, \ldots, D)$, то мы можем ввести расширенную функцию Гамильтона $\mathcal{H}(x^i, p_i) = p_0 + H(x^\alpha, p_\alpha, x^0)$ $(i = 0, 1, \ldots, D)$, для которой уравнения Гамильтона эквивалентны исходным. Таким образом, если мы в рамках гамильтонова формализма доказали что-то для импульсов в условиях не зависящей от времени функции Гамильтона, то мы можем распространить это доказательство на функции Гамильтона, зависящие от времени, перейдя от H к $\mathcal{H}$, при этом к числу координат добавляется $x^0 = t$, а к числу импульсов — импульс по времени $p_0 = -\mathcal{E}$.

2.9.2 Время как координата стрелки часов

Рассмотрим расширенную функцию Гамильтона вида (2.9.2) для случая $f \equiv 1$:

$$\mathcal{H}(t, p_0, x^\alpha, p_\alpha) = p_0 + H(t, x^\alpha, p_\alpha). \tag{2.9.3}$$

Мы можем интерпретировать такую функцию как функцию Гамильтона сложной системы, состоящей из исходной системы, описываемой каноническими переменными x^α, p_α, и дополнительной подсистемы, описываемой каноническими переменными $x^0 = t, p_0$.

Если исходная функция Гамильтона не зависит от времени, то функция Гамильтона состоит из суммы двух слагаемых, каждое из которых описывает свою подсистему:

$$\mathcal{H}(t, p_0, x^\alpha, p_\alpha) = \underbrace{p_0}_{H_{\text{доп.}}(t, p_0)} + H(x^\alpha, p_\alpha).$$

Это соответствует тому, что подсистемы не взаимодействуют между собой.

Как интерпретировать эту дополнительную подсистему? Имеем

$$\acute{t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_0} = 1, \qquad \acute{p_0} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}.$$

Мы видим, что $\acute{t} = 1$, а значит, $t = l + t_0$. Такая система представляет собой *идеальные часы*: они идут равномерно вне зависимости от того, какие силы на них воздействуют. Прежняя временна́я переменная $x^0 = t$ теперь может интерпретироваться как *координата стрелки часов*. При этом зависимость функции Гамильтона $H(x^0, x, p)$ от времени теперь становится зависимостью не от времени как такового, а от положения стрелки часов.

Можно ли реализовать такие идеальные часы физически? Функция Гамильтона для свободной безмассовой частицы[2] имеет вид $H_{m=0} = \sqrt{\mathbf{p}^2}$. Если такая частица движется вдоль прямой, то получаем

$$H_{m=0}(x^0, p_0) = |p_0|.$$

Мы видим, что в области $p_0 > 0$ одномерное движение безмассовой частицы воспроизводит поведение стрелки идеальных часов: действующая вдоль прямой сила может менять импульс частицы, но не её скорость (пока импульс остаётся положительным).

[2] Если положить $c = 1$.

Однако неясно, как приложить к безмассовой частице силу. Было бы удобно, если бы частица имела электрический заряд, но электрически заряженных безмассовых частиц не существует[3]. Почти идеальные часы, приближённо описываемые рассматриваемой функцией Гамильтона, можно реализовать, используя вместо стрелки ультрарелятивистскую частицу, для которой $|\mathbf{p}| \gg m$, и соответственно $H_m(x^0, p_0) = \sqrt{m^2 + p_0^2} \approx |p_0|$.

2.9.3 Канонические преобразования, зависящие от времени

2.9.3.1 Канонические преобразования, не зависящие от времени

В основной части курса мы ввели канонические преобразования координат в фазовом пространстве $X^M = (x^\alpha, p_\alpha)$ как преобразования, сохраняющие вид канонической скобки Пуассона

$$\{F, G\} = \sum_\alpha \left(\frac{\partial F}{\partial x^\alpha} \frac{\partial G}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \frac{\partial G}{\partial x^\alpha} \right).$$

Это равносильно тому, что каноническое преобразование сохраняет канонической вид тензора $J^{MN} = \{X^M, X^N\}$:

$$\{x^\alpha, x^\beta\} = \{p_\alpha, p_\beta\} = 0, \qquad \{x^\alpha, p_\beta\} = \delta^\alpha_\beta.$$

При таких преобразованиях наблюдаемые (включая функцию Гамильтона) ведут себя как скалярные поля (возможно, зависящие от параметра t) на фазовом пространстве, а само каноническое преобразование предполагается одним и тем же для всех моментов времени.

2.9.3.2 Время как координата и энергия как импульс

Как мы показали ранее (с. 253), мы можем рассматривать время как дополнительную координату $x^0 = t$, введя для неё канонически сопряжённый импульс p_0, который соответствует энергии со знаком минус. В роли независимого параметра (в которой обычно выступает время) можно взять произвольный монотонный параметр l. Тогда функции Гамильтона $H(x^\alpha, p_\alpha, t)$ соответствует расширенная функция Гамильтона

$$\mathcal{H}(t, x^\alpha, p_0, p_\alpha) = f(t, x^\alpha, p_0, p_\alpha) \cdot (p_0 + H(x^\alpha, p_\alpha, t)),$$

где $f \neq 0$ — произвольная гладкая функция.

Динамика, порождаемая расширенной функцией Гамильтона $\mathcal{H}$, совпадает с динамикой, порождаемой исходной функцией Гамильтона [4] H.

Для расширенного фазового пространства $x^i = (x^0, x^\alpha)$, $p_i = (p_0, p_\alpha)$. Таким образом, время $t = x^0$ и энергия $\mathcal{E} = -p_0$ — дополнительные координаты в расширенном фазовом пространстве.

Теперь мы можем рассматривать канонические замены координат в расширенном фазовом пространстве на том же основании, на котором раньше рассматривали канонические замены координат, не зависящие от времени. Роль времени теперь играет параметр l. Инвариантом (скаляром) при этом является уже расширенная функция Гамильтона $\mathcal{H} = f \cdot (p_0 + H)$.

2.9.3.3 Канонические преобразования, не меняющие время

Рассмотрим каноническую замену координат, зависящую от времени:

$$x^{\alpha'} = X^{\alpha'}(x^\alpha, p_\alpha, t), \quad p_{\alpha'} = P_{\alpha'}(x^\alpha, p_\alpha, t);$$

$$\{X^{\alpha'}, X^{\beta'}\} = \{P_{\alpha'}, P_{\beta'}\} = 0, \qquad \{X^{\alpha'}, P_{\beta'}\} = \delta^{\alpha'}_{\beta'}.$$

Мы можем дополнить эту замену преобразованиями для координат x_0 и p_0 и получить каноническую замену уже в расширенном фазовом пространстве:

$$x^{0'} = X^{0'} = t, \quad p_{0'} = P_{0'}(t, x^\alpha, p_0, p_\alpha).$$

[3] Теория допускает введение безмассовых заряженных частиц, но на эксперименте они не обнаружены. Если бы существовали безмассовые электрически заряженные частицы, то пары частица-античастица неизбежно (с некоторой вероятностью) рождались бы, например, при столкновении электрон-позитронных пар со сколь угодно малой энергией, что обязательно было бы обнаружено на эксперименте. Также можно было бы ожидать, что при наличии заряженных безмассовых частиц электрон был бы нестабилен.

[4] Для произвольной функции f надо потребовать выполнения в начальный момент времени условия $p_0 = -H(x^\alpha, p_\alpha, t_0)$. Для случая $f = \text{const} \neq 0$ это условие можно не накладывать.

Поскольку $X^{\alpha'}$ и $P_{\alpha'}$ не зависят от p_0, скобки Пуассона для них в расширенном фазовом пространстве совпадают с исходными скобками Пуассона, и также автоматически получаем

$$\{t, X^{\alpha'}\} = \{t, P_{\alpha'}\} = 0.$$

Дополнительные условия, обеспечивающие каноничность замены уже в расширенном фазовом пространстве, таковы:

$$\{X^{\alpha'}, P_{0'}\} = \{P_{\alpha'}, P_{0'}\} = 0, \qquad \{t, P_{0'}\} = \frac{\partial P_{0'}}{\partial p_0} = 1.$$

Интегрируя условие $\frac{\partial P_{0'}}{\partial p_0} = 1$, получаем

$$p_{0'} = P_{0'}(t, x^\alpha, p_0, p_\alpha) = p_0 + H_0(t, x^\alpha, p_\alpha),$$

где H_0 — константа интегрирования[5].

Подставляя это выражение в скобки Пуассона $\{X^{\alpha'}, P_{0'}\} = \{P_{\alpha'}, P_{0'}\} = 0$, получаем

$$\frac{d_{H_0} X^{\alpha'}}{dt} = \frac{\partial X^{\alpha'}}{\partial t} + \{X^{\alpha'}, H_0\} = 0, \qquad \frac{d_{H_0} P_{\alpha'}}{dt} = \frac{\partial P_{\alpha'}}{\partial t} + \{P_{\alpha'}, H_0\} = 0.$$

Здесь $\frac{d_{H_0}}{dt}$ — полная производная по времени для гамильтоновой эволюции, порождаемой функцией Гамильтона H_0.

Мы будем называть H_0 *генератором канонического преобразования.*

Таким образом, при гамильтоновой эволюции с функцией Гамильтона $H_0(t, x^\alpha, p_\alpha)$ координаты в фазовом пространстве $x^{\alpha'} = X^{\alpha'}(x^\alpha, p_\alpha, t)$, $p_{\alpha'} = P_{\alpha'}(x^\alpha, p_\alpha, t)$ остаются постоянными вдоль фазовых траекторий.

Если положить $f \equiv 1$ в определении расширенной функции Гамильтона $\mathcal{H}$, то из инвариантности $\mathcal{H}$ получаем закон преобразования функции Гамильтона H для канонического преобразования, зависящего от времени:

$$\mathcal{H} = p_0 + H = \underbrace{p_0 + H_0}_{p_{0'}} + H',$$

$$H' = H - H_0. \tag{2.9.4}$$

В штрихованных координатах

$$H'(x^{\alpha'}, p_{\alpha'}, t) = H\Big(x^\alpha(x^{\alpha'}, p_{\alpha'}, t), p_\alpha(x^{\alpha'}, p_{\alpha'}, t), t\Big) - H_0\Big(x^\alpha(x^{\alpha'}, p_{\alpha'}, t), p_\alpha(x^{\alpha'}, p_{\alpha'}, t), t\Big).$$

В частности, при $H = H_0$ новая функция Гамильтона обнуляется: $H' \equiv 0$, что естественно, т.к. при $H = H_0$ штрихованные канонические координаты заданы так, чтобы оставаться постоянными вдоль фазовых траекторий, т.е. в этом случае все координаты $x^{\alpha'}, p_{\alpha'}$ оказываются циклическими переменными и одновременно интегралами движения.

(*) Зависящее от времени каноническое преобразование равносильно переходу к *представлению взаимодействия*, для которого H_0 — невозмущённая функция Гамильтона, H — полная функция Гамильтона, $H' = H - H_0 = V$ — возмущение. Представление взаимодействия удобно как в классической, так и в квантовой механике, когда полный гамильтониан H представляется в виде суммы простого невозмущённого гамильтониана H_0 и малой поправки V.

(*) Всегда ли для данного зависящего от времени канонического преобразования $X'^M = F^M(X, t)$ (здесь $X^M = (x^\alpha, p_\alpha)$ — канонические координаты в фазовом пространстве) существует соответствующий генератор H_0? При каноническом преобразовании каноническая пуассонова структура J^{MN} переходит в себя, также переходит в себя задаваемая обратной матрицей симплектическая форма ω_{NL}. Мы можем расписать тензорный закон преобразования для J^{MN} или ω_{NL}, а потом временну́ю производную от получившегося тензора приравнять нулю, но на самом деле все нужные вычисления были сделаны нами раньше при определении производной Ли. Рассмотрим векторное поле $V^M(X,t) = \frac{\partial F^M(X,t)}{\partial t}$. Производные Ли вдоль этого векторного поля от пуассоновой структуры и симплектической формы должны равняться нулю:

$$0 = L_{\mathbf{V}}\omega_{NL} = (\partial_N V^M)\omega_{ML} + (\partial_L V^M)\omega_{NM} + V^M \underbrace{\partial_M \omega_{NL}}_{0} = \partial_L V_N - \partial_N V_L = (dV)_{LN}, \text{ где } V_N = \omega_{NL}V^L.$$

Поскольку

$$(dV)_{LN} = \partial_L V_N - \partial_N V_L = 0,$$

[5]От переменной интегрирования p_0 функция $H_0(t, x^\alpha, p_\alpha)$ не зависит, поэтому она и является «константой» интегрирования. Почему мы выбрали для константы интегрирования обозначение H_0, станет ясно чуть дальше.

ковекторное поле V_N локально представимо в виде градиента:

$$\omega_{NL}V^L = V_N = -\partial_N H_0, \quad \frac{\partial X^M}{\partial t} = V^M = J^{NM}V_L = \underbrace{J^{MN}\omega_{NL}}_{\delta^M_L}V^L = -J^{MN}\partial_N H_0 = -\{X^M, H_0\}.$$

Таким образом, локально[6] генератор канонического преобразования H_0 существует всегда.

[6] В пределах области фазового пространства, в которой любую замкнутую кривую можно непрерывно стянуть в точку.

Глава 2.10

Релятивистская частица в СТО и ОТО (с. 112)

2.10.1 Решение задачи 31

Задача 31. Движение в скрещенных полях.
Найдите движение релятивистской частицы массой m с зарядом q в перпендикулярных электрическом и магнитном полях $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$.
а) В случае $E > B$.
б) В случае $E = B$.
в) В случае $E < B$.
г) Определите траекторию при $E \ll B$ в нерелятивистском случае.

Решение

Запишем уравнения движения частицы в 4-мерном виде:

$$\frac{du^i}{d\tau} = \frac{q}{mc} F^i{}_j u^j. \tag{2.10.1}$$

Для постоянного однородного поля тензор $F^i{}_j$ — постоянная матрица. Таким образом,

$$u^i(\tau) = \exp\left(\frac{q\tau}{mc} F^i{}_j\right) u^j(0) = \left[\delta^i_j + \frac{q\tau}{mc} F^i{}_j + \frac{1}{2}\left(\frac{q\tau}{mc}\right)^2 F^i{}_k F^k{}_j + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{q\tau}{mc}\right)^n (F^n)^i{}_j + \cdots\right] u^j(0).$$

Выберем систему координат так, что $\mathbf{E} \uparrow\uparrow y$, $\mathbf{B} \uparrow\uparrow z$. Тогда

$$F^i{}_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 \\ E & -B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (F^2)^i{}_j = F^i{}_k F^k{}_j = \begin{pmatrix} E^2 & -EB & 0 & 0 \\ EB & -B^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E^2 - B^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(F^3)^i{}_j = F^i{}_k F^k{}_l F^l{}_j = (E^2 - B^2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 \\ E & -B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (E^2 - B^2) F^i{}_j.$$

Мы видим, что в особом случае $E = B$ ряд для экспоненты обрывается после 2-й степени:

$$\exp\left(\frac{q\tau}{mc} F^i{}_j\right) = \delta^i_j + \frac{q\tau}{mc} F^i{}_j + \frac{1}{2}\left(\frac{q\tau}{mc}\right)^2 F^i{}_k F^k{}_j; \tag{2.10.2}$$

$$u^i(\tau) = \left(\delta^i_j + \frac{q\tau}{mc} F^i{}_j + \frac{1}{2}\left(\frac{q\tau}{mc}\right)^2 F^i{}_k F^k{}_j\right) u^j(0),$$

$$X^i(\tau) = \left(\tau\delta^i_j + \frac{e\tau^2}{2mc} F^i{}_j + \frac{\tau^3}{6}\left(\frac{q}{mc}\right)^2 F^i{}_k F^k{}_j\right) u^j(0) + X^i(0).$$

В других случаях определим генераторы, через которые удобно писать матричные экспоненты.

При $E > B$ можно подобрать такой генератор a, чтобы его куб совпадал с первой степенью. Тогда все нечётные степени совпадают с a, а все чётные (кроме нулевой) — с a^2. Ряды по чётным и нечётным степеням a дадут гиперболические функции:

$$a^i{}_j = \frac{F^i{}_j}{\sqrt{E^2-B^2}} = (a^3)^i{}_j;$$

$$\exp\left(\frac{q\tau}{mc}F^i{}_j\right) = \delta^i_j + a^i{}_j\ \mathrm{sh}\left(\sqrt{E^2-B^2}\,\frac{q\tau}{mc}\right) + (a^2)^i{}_j\left(\mathrm{ch}\left(\sqrt{E^2-B^2}\,\frac{q\tau}{mc}\right)-1\right); \tag{2.10.3}$$

$$u^i(\tau) = \left(\delta^i_j + a^i{}_j\ \mathrm{sh}\left(\sqrt{E^2-B^2}\,\frac{q\tau}{mc}\right) + (a^2)^i{}_j\left(\mathrm{ch}\left(\sqrt{E^2-B^2}\,\frac{q\tau}{mc}\right)-1\right)\right)u^j(0),$$

$$X^i(\tau) = \left(\tau\delta^i_j + a^i{}_j\,\frac{\mathrm{ch}\left(\sqrt{E^2-B^2}\,\frac{q\tau}{mc}\right)-1}{\sqrt{E^2-B^2}\,\frac{q}{mc}} + (a^2)^i{}_j\left(\frac{\mathrm{sh}\left(\sqrt{E^2-B^2}\,\frac{q\tau}{mc}\right)}{\sqrt{E^2-B^2}\,\frac{q}{mc}}-\tau\right)\right)u^j(0) + X^i(0).$$

При $E < B$ можно подобрать такой генератор b, чтобы его куб совпадал с первой степенью со знаком минус. Тогда все нечётные степени совпадают с $\pm b$, а все чётные (кроме нулевой) — с $\pm b^2$. Ряды по чётным и нечётным степеням b дадут тригонометрические функции:

$$b^i{}_j = \frac{F^i{}_j}{\sqrt{B^2-E^2}} = -(b^3)^i{}_j;$$

$$\exp\left(\frac{q\tau}{mc}F^i{}_j\right) = \delta^i_j + b^i{}_j\ \sin\left(\sqrt{B^2-E^2}\,\frac{q\tau}{mc}\right) - (b^2)^i{}_j\left(\cos\left(\sqrt{B^2-E^2}\,\frac{q\tau}{mc}\right)-1\right); \tag{2.10.4}$$

$$u^i(\tau) = \left(\delta^i_j + b^i{}_j\ \sin\left(\sqrt{B^2-E^2}\,\frac{q\tau}{mc}\right) - (b^2)^i{}_j\left(\cos\left(\sqrt{B^2-E^2}\,\frac{q\tau}{mc}\right)-1\right)\right)u^j(0),$$

$$X^i(\tau) = \left(\tau\delta^i_j - b^i{}_j\,\frac{\cos\left(\sqrt{B^2-E^2}\,\frac{q\tau}{mc}\right)-1}{\sqrt{B^2-E^2}\,\frac{q}{mc}} - (b^2)^i{}_j\left(\frac{\sin\left(\sqrt{B^2-E^2}\,\frac{q\tau}{mc}\right)}{\sqrt{B^2-E^2}\,\frac{q}{mc}}-\tau\right)\right)u^j(0) + X^i(0).$$

Собственные числа и векторы

Для матрицы $F^i{}_j$ легко найти собственные числа:

$$\lambda_{1,2} = 0, \qquad \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{E^2-B^2}.$$

Соответствующие собственные векторы:

$$h_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix}B\\E\\0\\0\end{pmatrix}, \quad h_{3,4} = \begin{pmatrix}E\\B\\\pm\sqrt{E^2-B^2}\\0\end{pmatrix}.$$

При $E \neq B$ мы получаем 4 линейно независимых собственных вектора. Запишем нормированный (по Минковскому) базис собственных векторов:

$$h_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad h_2 = \frac{1}{\sqrt{E^2-B^2}}\begin{pmatrix}B\\E\\0\\0\end{pmatrix}, \quad h_{3,4} = \frac{1}{\sqrt{-2(E^2-B^2)}}\begin{pmatrix}E\\B\\\pm\sqrt{E^2-B^2}\\0\end{pmatrix};$$

$$(h_1,h_1) = (h_2,h_2) = 1, \quad (h_3,h_3) = (h_4,h_4) = 0, \quad (h_3,h_4) = 1.$$

Векторы $h_{3,4}$ имеют нулевой квадрат. Через эти векторы мы можем выразить проекторы на собственные направления:

$$(P_1)^i{}_j = (h_1)^i(h_1)_j, \qquad (P_2)^i{}_j = (h_2)^i(h_2)_j, \qquad (P_3)^i{}_j = (h_3)^i(h_4)_j, \qquad (P_4)^i{}_j = (h_4)^i(h_2)_j;$$

$$F^i{}_j = \sum_{k=1}^{4}\lambda_k\,(P_k)^i{}_j.$$

Поскольку проекторы взаимно коммутируют, матричную экспоненту от $F^i{}_j$ можно представить как произведение матричных экспонент отдельных слагаемых данной суммы.

Особый случай $E = B$

При $E = B$ три собственных вектора сливаются: $\lambda_{3,4} = \lambda_2 = 0$, $h_{3,4} = h_2$. В этом случае матрица не может быть диагонализована, но может быть приведена к *жордановой форме* с жордановой клеткой 3×3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Такая матрица при возведении в третью степень обнуляется. Это свойство не зависит от выбранного базиса и выводится из того, что $\hat{F}^3 = 0$.

Вместо собственных векторов мы можем найти *присоединённые векторы.*

Присоединённый вектор 1-го порядка:

$$j_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{F}j_1 = h_2 + \underbrace{\lambda}_{0} j_1.$$

Присоединённый вектор 2-го порядка:

$$j_2 = \frac{1}{E}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{F}j_2 = j_1 + \underbrace{\lambda}_{0} j_2.$$

Случай $E > B$

Случай $E > B$ сводится к случаю $B = 0$ при помощи преобразования Лоренца по оси x:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\vartheta & -\operatorname{sh}\vartheta & 0 & 0 \\ -\operatorname{sh}\vartheta & \operatorname{ch}\vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{th}\vartheta = \frac{B}{E}.$$

Плоскость, натянутая на собственные векторы $h_{3,4}$, оказывается плоскостью $t' - y'$.

Эта замена координат — переход к движущейся со скоростью $(c\frac{B}{E}, 0, 0)$ системе отсчёта (преобразование Лоренца). При этом

$$E \to E' = \sqrt{E^2 - B^2}, \qquad B \to B' = 0.$$

При $B' = 0$ матричная экспонента (2.10.3) — преобразование Лоренца для скорости $\operatorname{th}\frac{qE'\tau}{mc}$, направленной по оси y'.

Случай $E < B$

Случай $E < B$ сводится к случаю $E = 0$ при помощи преобразования Лоренца по оси x:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\vartheta & -\operatorname{sh}\vartheta & 0 & 0 \\ -\operatorname{sh}\vartheta & \operatorname{ch}\vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{th}\vartheta = \frac{E}{B}.$$

Плоскость, натянутая на собственные векторы $h_{3,4}$, оказывается плоскостью $x' - y'$.

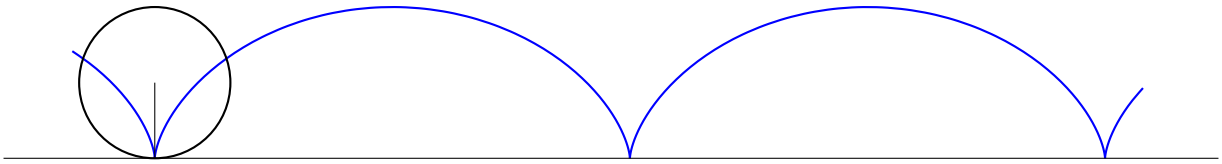
Эта замена координат — переход к движущейся со скоростью $(c\frac{E}{B}, 0, 0)$ системе отсчёта (преобразование Лоренца). При этом

$$E \to E' = 0, \qquad B \to B' = \sqrt{B^2 - E^2}.$$

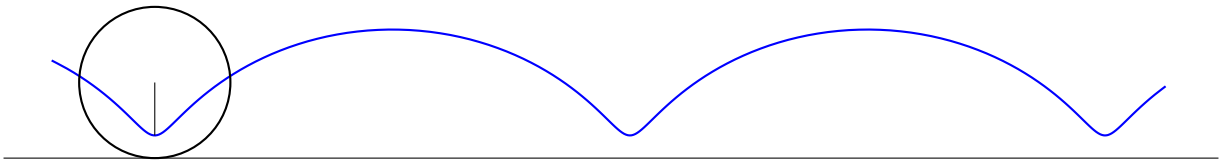
При $E' = 0$ матричная экспонента (2.10.4) — поворот на угол $\frac{qB'\tau}{mc}$ вокруг оси z'.

Случай $E \ll B$, нерелятивистская частица

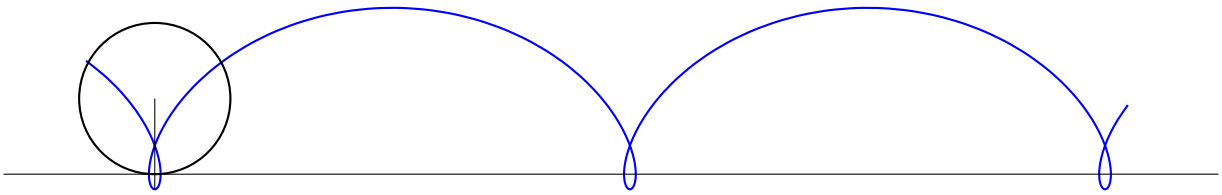
В системе отсчёта, движущейся со скоростью $(c\frac{E}{B}, 0, 0)$ ($c\frac{E}{B} \ll c$), мы имеем нерелятивистскую частицу в однородном магнитном поле, направленном по оси z. По оси z скорость частицы постоянна, а в плоскости $x - y$ частица равномерно движется по окружности (частота вращения равна $\frac{qB}{mc}$, скорость зависит от начальных условий). При переходе в исходную систему отсчёта в нерелятивистском пределе заменяем преобразование Лоренца на преобразование Галилея, в результате на круговое движение в плоскости $x - y$ накладывается движение с постоянной *скоростью дрейфа* $(c\frac{E}{B}, 0, 0)$. В зависимости от соотношения скорости вращения и скорости дрейфа получаются следующие кривые.



Циклоида — скорость вращения равна скорости дрейфа ($v_{\text{вр.}} = c\frac{E}{B}$), кривая соответствует траектории точки на ободе колеса, катящегося по плоскости без проскальзывания, на каждом обороте частица на мгновение останавливается. Если частица стартует с нулевой скоростью, то получается именно циклоида



Укороченная циклоида — скорость дрейфа больше скорости вращения (на данном рисунке $v_{\text{вр.}} = 0{,}7\, c\frac{E}{B}$), кривая соответствует траектории точки на спице колеса



Удлинённая циклоида — скорость дрейфа меньше скорости вращения (на данном рисунке $v_{\text{вр.}} = 1{,}2\, c\frac{E}{B}$), кривая соответствует траектории точки на продолжении спицы колеса, удалённой от оси дальше, чем обод

2.10.2 Расширенное гамильтоново описание релятивистской частицы

Как мы установили ранее (с. 253), мы можем рассматривать время как дополнительную координату, если перейдём к расширенной функции Гамильтона (2.9.2). Для заряженной частицы в электромагнитном поле (1.10.4) (положив $c = 1$) получаем

$$\mathcal{H}(t, P_0, \mathbf{r}, \mathbf{P}) = f(t, P_0, \mathbf{r}, \mathbf{P}) \cdot (P_0 + H(t, \mathbf{r}, \mathbf{P})) = f(t, P_0, \mathbf{r}, \mathbf{P}) \cdot \left(P_0 + q\,\varphi(\mathbf{r}, t) + \sqrt{m^2 + [\mathbf{P} - q\,\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]^2}\right). \tag{2.10.5}$$

Если положить $f = \text{const}$, то это выражение не будет лоренц-инвариантным, поэтому попробуем подобрать функцию f так, чтобы расширенная функция Гамильтона была скаляром по отношению к преобразованиям из группы Лоренца, а временной параметр l имел хороший физический смысл.

Пусть

$$f = \frac{-P_0 - q\,\varphi(\mathbf{r}, t) + \sqrt{m^2 + [\mathbf{P} - q\,\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]^2}}{2m}.$$

Числитель мы подобрали так, чтобы расширенная функция Гамильтона стала скаляром, а знаменатель — чтобы для свободной частицы при нулевой скорости выполнялось условие $f = 1$.

Теперь с учётом того, что $P_i = (P_0, \mathbf{P})$, $A_i = (-\varphi, \mathbf{A})$, получаем выражение, очень похожее на функцию Гамильтона нерелятивистской частицы в магнитном поле:

$$\mathcal{H}(t, P_0, \mathbf{r}, \mathbf{P}) = \frac{-(P_0 + q\,\varphi(\mathbf{r}, t))^2 + m^2 + [\mathbf{P} - q\,\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]^2}{2m} = \frac{(P_i - qA_i)(P^i - qA^i) + m^2}{2m}. \tag{2.10.6}$$

Такая функция Гамильтона воспроизводит обычную динамику для релятивистской частицы массой m в электромагнитном поле (как всегда для расширенной функции Гамильтона) при условии (которое можно наложить как начальное условие) $\mathcal{H} = 0$. Неправильные начальные условия $\mathcal{H} = C$ дадут динамику частицы массой $M_C = \sqrt{m^2 - 2mC}$.

Здесь надо различать кинематический 4-мерный импульс p_i и обобщённый 4-мерный импульс P_i:

$$mu_i = p_i = P_i - qA_i.$$

Каноническим является обобщённый импульс, т.е. именно он входит в функцию Гамильтона и уравнения Гамильтона.

Каков смысл новой временной переменной l? На траекториях, удовлетворяющих уравнениям движения, имеем

$$\frac{dt}{dl} = f = \frac{-P_0 - q\,\varphi + \sqrt{m^2 + [\mathbf{P} - q\,\mathbf{A}]^2}}{2m} = \frac{-p_0 + \sqrt{m^2 + \mathbf{p}}}{2m} = \frac{-2p_0}{2m} = -u_0 = u^0 = \frac{dt}{d\tau}.$$

Таким образом, на решениях уравнений Гамильтона новый временной параметр l совпадает (с точностью до константы) с собственным временем частицы.

2.10.3 Частица в криволинейных координатах и в общей теории относительности

Действие для свободной массивной частицы в криволинейных пространственно-временных координатах, а также в общей теории относительности (ОТО) записывается через собственное время, как и в лоренцевых координатах (1.10.1), с единственным отличием: метрический тензор может зависеть от координат,

$$S_{\text{р}}[X^i(l)] = -mc^2 \cdot \int \sqrt{-\frac{g_{ij}(X(l))}{c^2}\frac{dX^i}{dl}\frac{dX^j}{dl}}\,dl = -mc^2 \cdot \int d\tau. \tag{2.10.7}$$

По-прежнему l — произвольный монотонный параметр вдоль мировой линии,

$$L_{\text{р}}(X^i, \tfrac{dX^i}{dl}) = -mc^2\sqrt{-\frac{g_{ij}(X(l))}{c^2}\frac{dX^i}{dl}\frac{dX^j}{dl}}, \qquad p_i = \frac{\partial L_{\text{р}}}{\partial \frac{dX^i}{dl}} = m\frac{dX^j}{d\tau}g_{ij}(X(l)) = mu_i, \quad \mathcal{E}_{\text{р}} = p_i\tfrac{dX^i}{dl} - L_{\text{р}} \equiv 0.$$

Вариация действия (2.10.7) проводится полностью аналогично вариации функционала длины кривой в § 2.2.3 «Кривая экстремальной длины» (с. 170):

$$\delta S_{\text{р}} = m\int \frac{\frac{d\delta X^i}{dl}\frac{dX^j}{dl}\,g_{ij}(X(l)) + \frac{dX^i}{dl}\frac{d\delta X^j}{dl}\,g_{ij}(X(l)) + \frac{dX^i}{dl}\frac{dX^j}{dl}\,\delta g_{ij}(X(l))}{2\sqrt{-\frac{dX^i}{dl}\frac{dX^j}{dl}\,\frac{g_{ij}(X(l))}{c^2}}}\,dl.$$

Поскольку

$$\sqrt{-\frac{dX^i}{dl}\frac{dX^j}{dl}\,\frac{g_{ij}(X(l))}{c^2}} = \frac{d\tau}{dl},$$

где τ — собственное время вдоль кривой, получаем

$$\begin{aligned}
\delta S_{\text{р}} &= \int \frac{m}{2}\left(\frac{d\delta X^i}{d\tau}\frac{dX^j}{d\tau}\,g_{ij} + \frac{dX^i}{d\tau}\frac{d\delta X^j}{d\tau}\,g_{ij} + \frac{dX^i}{d\tau}\frac{dX^j}{d\tau}\,(\partial_k g_{ij})\delta X^k\right)d\tau = \\
&= \int \frac{m}{2}\left(-2\frac{d^2X^j}{d\tau^2}\,g_{kj} - \frac{dX^j}{d\tau}\frac{d}{d\tau}\,g_{kj} - \frac{dX^i}{d\tau}\frac{d}{d\tau}\,g_{ik} + \frac{dX^i}{d\tau}\frac{dX^j}{d\tau}\,(\partial_k g_{ij})\right)\delta X^k\,d\tau = \\
&= -\int m\Bigg(\frac{d^2X^j}{d\tau^2}\,g_{kj} + \frac{dX^i}{d\tau}\frac{dX^j}{d\tau}\underbrace{\frac{1}{2}(\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij})}_{\Gamma_{kij}}\Bigg)\delta X^k\,\frac{d\tau}{dl}\,dl.
\end{aligned}$$

Вариационная производная записывается через ковариантную производную от 4-мерного ковектора импульса:

$$\frac{\delta S_{\text{р}}}{\delta X^k} = -mg_{ks}\left(\frac{d^2X^s}{d\tau^2} + \Gamma^s{}_{ij}\frac{dX^i}{d\tau}\frac{dX^j}{d\tau}\right)\frac{d\tau}{dl} = -mg_{ks}\frac{D^2X^s}{d\tau^2}\,\frac{d\tau}{dl} = -\frac{Dp_k}{dl}. \tag{2.10.8}$$

Действие взаимодействия частицы и поля, введённое нами ранее, не зависит от метрики:

$$S_{\text{вз.р.}} = \frac{q}{c}\int A_i(X(l))\,\frac{dX^i}{dl}\,dl. \tag{2.10.9}$$

Соответственно вариационная производная также не зависит от метрики и сохраняет свой вид как в криволинейных координатах, так и в ОТО:

$$\frac{\delta S_{\text{вз.р.}}}{\delta X^k} = \frac{q}{c}\left[\frac{\partial A_j}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^j}\right]\frac{dX^j}{dl} = \frac{q}{c}F_{kj}\,\frac{dX^j}{dl}.$$

Уравнение движения заряженной частицы в ОТО имеет вид

$$\frac{\delta(S_{\text{р}} + \delta S_{\text{вз.р.}})}{\delta X^k} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{Dp_k}{dl} = \frac{q}{c}F_{kj}\,\frac{dX^j}{dl}.$$

2.10.4 Частица в криволинейных координатах и в общей теории относительности-2

Мы получали уравнение геодезической в контексте ньютоновской механики путём вариации двух разных функционалов: функционала длины (см. § 2.2.3 «Кривая экстремальной длины», с. 170) и действия для свободной частицы (см. § 2.2.2 «Свободная частица в обобщённых координатах», с. 168). Выше мы рассмотрели действие для релятивистской свободной частицы, которое обобщает функционал длины. Теперь мы рассмотрим действие, которое обобщает действие для нерелятивистской свободной частицы (интеграл по времени от кинетической энергии).

Возьмём действие в виде

$$S[X^i(\tau)] = \int \frac{m}{2}\, g_{ij}(X(\tau))\,\frac{dX^i}{d\tau}\frac{dX^j}{d\tau}\,d\tau. \tag{2.10.10}$$

От действия для нерелятивистской частицы в криволинейных координатах оно отличается двумя свойствами.

- В качестве времени взято собственное время τ. Это налагает ограничения на начальные условия:

$$g_{ij}(X(\tau))\frac{dX^i}{d\tau}\frac{dX^j}{d\tau}\bigg|_{\tau=0} = -c^2. \tag{2.10.11}$$

- В качестве метрики взята пространственно-временная метрика с сигнатурой $(-,+,+,+)$.

Вариация этого действия проводится полностью аналогично вариации действия (2.2.3) (см. п. 2.2.2.2 «В искривлённом пространстве», с. 169) и даёт аналогичную вариационную производную:

$$\frac{\delta S}{\delta X^i} = -\frac{dp_i}{d\tau} + p_j\Gamma^i{}_{jk}\frac{dX^k}{d\tau} = -\frac{Dp_i}{d\tau},$$

где

$$p_i = mg_{ij}\,\frac{dX^j}{d\tau}.$$

Если выполнено ограничение на начальные условия (2.10.11), то m — масса частицы, а τ — собственное время.

Если ограничение на начальные условия (2.10.11) не выполнено, то $m\sqrt{-\frac{1}{c^2}\,g_{ij}(X(\tau))\frac{dX^i}{d\tau}\frac{dX^j}{d\tau}}$ — масса частицы, а $\frac{\tau}{\sqrt{-\frac{1}{c^2}\,g_{ij}(X(\tau))\frac{dX^i}{d\tau}\frac{dX^j}{d\tau}}}$ — собственное время.

Это позволяет нам избавиться от параметра m и от ограничения (2.10.11), задавая массу через начальные условия. Для этого можно сделать замену переменной интегрирования с τ на *аффинный параметр* $a = \frac{\tau}{m}$:

$$S[X^i(a)] = \int \frac{1}{2}\, g_{ij}(X(a))\,\frac{dX^i}{da}\frac{dX^j}{da}\,da, \tag{2.10.12}$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial(\frac{dX^i}{da})} = g_{ij}\,\frac{dX^j}{da},$$

$$\frac{\delta S}{\delta X^i} = -\frac{dp_i}{da} + p_j\Gamma^i{}_{jk}\frac{dX^k}{da} = -\frac{Dp_i}{da}.$$

(!) Новое действие равно применимо к массивным и безмассовым частицам.

Поскольку 4-импульс и обобщённая скорость $\frac{dX^i}{d\tau}$ (или $\frac{dX^i}{da}$) выражаются друг через друга взаимнооднозначно, лагранжианы в действиях (2.10.10), (2.10.12) являются невырожденными. Это позволяет перейти к функции Гамильтона с помощью преобразования Лежандра.

Для действия (2.10.10) с добавкой взаимодействия с электромагнитным полем (2.10.9) в роли времени выступает собственное время τ, а функция Гамильтона имеет вид, совпадающий с (2.10.6) с точностью до константы:

$$H(X^i, P_i) = \frac{g^{ij}(X)\,(P_i - qA_i(X))(P_j - qA_j(X))}{2m}. \tag{2.10.13}$$

Различие на константу связано с тем, что мы ввели расширенный гамильтониан так, что на траекториях, удовлетворяющих уравнениям движения, он обращается в нуль.

Для действия (2.10.12) с добавкой взаимодействия с электромагнитным полем (2.10.9) в роли времени выступает аффинный параметр a, а функция Гамильтона имеет вид, совпадающий с (2.10.13) при $m = 1$:

$$H(X^i, P_i) = \frac{g^{ij}(X)\,(P_i - qA_i(X))(P_j - qA_j(X))}{2}. \tag{2.10.14}$$

2.10.5 Частица в поле Шварцшильда

Рассмотрим движение частицы на фоне одной из реально возникающих в ОТО пространственно-временных метрик — метрики Шварцшильда, которая описывает пространство-время вокруг неподвижной точечной массы M.

Исторически метрика Шварцшильда — одно из первых точных решений уравнений Эйнштейна. Немецкий астроном Карл Шварцшильд 18 ноября 1915 г. в отпуске из армии присутствовал на лекции А. Эйнштейна в Прусской академии наук в Берлине, на которой Эйнштейн представил статью, объясняющую смещение перигелия Меркурия с помощью ОТО. После этого, находясь в госпитале, Шварцшильд написал статью со своим решением и ещё одну статью по квантовой механике. 11 мая 1916 г. К. Шварцшильд умер от болезни. Решение Шварцшильда знаменито как простейшее решение, описывающее *чёрную дыру* — область в пространстве-времени, куда можно попасть, но откуда в принципе невозможно выбраться наружу (в удалённую асимптотически плоскую область пространства-времени). Но в 1915 г. при получении своей метрики Шварцшильд ни о каких чёрных дырах не думал: он всего лишь нашёл единственное (с точностью до замены координат) сферически-симметричное решение уравнений Эйнштейна в отсутствие материи (кроме точечной частицы в начале координат).

Поскольку мы пока не ознакомились с уравнениями гравитационного поля в ОТО (уравнениями Эйнштейна), постулируем эту метрику без вывода:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right),$$

где G — гравитационная постоянная, а M — масса центрального тела.[1]

Метрический тензор имеет следующий вид (в качестве временно́й координаты мы взяли t вместо ct):

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

При $r \gg 2GM/c^2$ метрика близка к метрике Минковского в сферических координатах

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

Как мы увидим далее, при рассмотрении нерелятивистского предела и слабого гравитационного поля, поправка к компоненте g_{00} связана с ньютоновским гравитационным потенциалом:

$$\varphi_{\text{гр.}}(r) = \frac{\eta_{00} - g_{00}}{2} = -\frac{GM}{r}.$$

Таким образом, задача о движении частицы в поле Шварцшильда — обобщение классической задачи Кеплера.

[1] Метрика Шварцшильда, как и любая метрика, в разных системах координат принимает разную форму, например, мы можем переопределить радиальную координату $\varrho = r - 2GM/c^2$, после чего метрика Шварцшильда принимает вид

$$ds^2 = -\frac{c^2 dt^2}{1 + \frac{2GM}{c^2\varrho}} + \left(1 + \frac{2GM}{c^2\varrho}\right) d\varrho^2 + (\varrho + 2GM/c^2)^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right).$$

(!) В ньютоновской теории всемирного тяготения уравнения поля линейны по гравитационному потенциалу, а потому действует принцип суперпозиции и потенциал произвольного распределения масс может быть разложен по потенциалам точечных масс. В ОТО уравнения гравитационного поля нелинейны, а потому поле системы частиц не сводится к метрике Шварцшильда.

При малых расстояниях $r \sim 2GM/c^2$ приближение слабого поля уже не работает, а при $r = 2GM/c^2$ (*радиус Шварцшильда*) имеется особенность, которая называется *горизонтом событий* шварцшильдовской чёрной дыры. При $r > 2GM/c^2$ координата t является времениподобной (т.е. вектор $\underline{e}_t$ времениподобен), а координата r пространственноподобна. При $r < 2GM/c^2$ меняются знаки компонент метрики и координата t становится пространственноподобной, а координата r — времениподобной. На самом деле горизонт событий является особенностью не геометрии пространства-времени, а используемой системы координат, на что намекает тот факт, что $\det g_{ij}$ на горизонте особенности не имеет.

2.10.5.1 Симметрии и законы сохранения в поле Шварцшильда

Метрика Шварцшильда достаточно симметрична, чтобы найти решение уравнения геодезической из законов сохранения.

Метрика Шварцшильда обладает рядом симметрий, которым соответствуют векторы Киллинга. Два вектора Киллинга мы видим сразу: поскольку компоненты метрики не зависят от координат t и ϕ, метрика симметрична относительно сдвига по ним, т.е. вдоль векторных полей $\underline{e}_t$ и $\underline{e}_\phi$. Это симметрии относительно сдвига по времени и поворота вокруг оси z. Ещё два линейно независимых вектора Киллинга можно связать с поворотами вокруг осей x и y, но они нам не понадобятся, и мы их выписывать не будем.

Симметрии метрики позволяют свести любое движение частицы к движению в экваториальной плоскости $\theta = \frac{\pi}{2}$. Ограничим метрику на соответствующее подпространство:

$$ds^2_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} + r^2\, d\phi^2.$$

Контравариантные и ковариантные компоненты 4-импульса для пробной частицы массой m имеют вид

$$p^i = m\left(\frac{dt}{d\tau}\ ;\ \frac{dr}{d\tau}\ ;\ 0\ ;\ \frac{d\phi}{d\tau}\right), \qquad p_i = m\left(-\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 \frac{dt}{d\tau}\ ;\ \frac{\frac{dr}{d\tau}}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}\ ;\ 0\ ;\ r^2\,\frac{d\phi}{d\tau}\right).$$

По теореме Нётер сохраняются следующие величины:

$$p_t = -mc^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)\frac{dt}{d\tau} = -\mathcal{E}, \qquad p_\phi = mr^2\,\frac{d\phi}{d\tau} = L_z.$$

Мы ввели для интегралов движения привычные из классической механики обозначения $\mathcal{E}$ (энергия) и L_z (момент импульса по z).

Также сохраняется масса частицы, т.е. квадрат 4-импульса:

$$\begin{aligned} -m^2c^2 = p^i p_i &= -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) m^2 c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \frac{m^2\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} + m^2 r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = \\ &= -\frac{\mathcal{E}^2}{c^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} + \frac{m^2\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} + \frac{L_z^2}{r^2}. \end{aligned}$$

Умножим равенство на $\frac{1}{2m}\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)$ и перегруппируем слагаемые:

$$\frac{\mathcal{E}^2 - m^2c^4}{2mc^2} = \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{GMm}{r} + \frac{L_z^2}{2mr^2} - \frac{GML_z^2}{mc^2 r^3}.$$

Мы видим, что правая часть выглядит как сумма

- кинетической энергии одномерного движения $\frac{m}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2$ и
- эффективной потенциальной энергии $U(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{L_z^2}{2mr^2} - \frac{GML_z^2}{mc^2 r^3}$.
  Эффективная потенциальная энергия содержит:
  - ньютоновскую гравитационную энергию $-\frac{GMm}{r}$;
  - центробежную энергию $\frac{L_z^2}{2mr^2}$;
  - а также новый член, релятивистскую поправку $-\frac{GML_z^2}{mc^2 r^3}$, возникающую в ОТО.

Левая часть равенства в классической задаче Кеплера содержала полную энергию частицы, причём энергия неподвижной частицы на бесконечности принималась за нуль. Теперь в левой части равенства стоит выражение, которое в нерелятивистском пределе, когда $\mathcal{E} \approx m$, действительно соответствует энергии в классической задаче Кеплера:

$$\delta\mathcal{E} := \frac{\mathcal{E}^2 - m^2c^4}{2mc^2} = \underbrace{\frac{\mathcal{E} + mc^2}{2mc^2}}_{\approx 1} \underbrace{(\mathcal{E} - mc^2)}_{\mathcal{E}_{\text{кл.}}} \approx \mathcal{E}_{\text{кл.}}.$$

2.10.5.2 Прецессия перигелия Меркурия

Мы получили закон сохранения энергии для радиального движения в поле Шварцшильда:

$$\delta\mathcal{E} = \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{GMm}{r} + \frac{L_z^2}{2mr^2} - \frac{GML_z^2}{mc^2r^3}.$$

Как и при рассмотрении задачи Кеплера (см. § 2.5.1 «Движение в центральном поле в переменных $\phi, \rho = r^{-1}$», с. 202), мы можем переписать закон сохранения энергии через $\rho = 1/r$ и $\frac{d\rho}{d\phi}$:

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{d\phi}{d\tau}\frac{d}{d\phi} = \frac{L_z}{mr^2}\frac{d}{d\phi} \quad \Rightarrow \quad m\frac{dr}{d\tau} = -L_z\frac{d\rho}{d\tau}.$$

Получаем

$$\delta\mathcal{E} = \frac{L_z^2}{2m}\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2 - GMm\,\rho + \frac{L_z^2}{2m}\,\rho^2 - \frac{GML_z^2}{mc^2}\,\rho^3.$$

Это выражение выглядит как энергия частицы с массой $\frac{L_z}{m}$ (с углом ϕ в роли времени) в потенциале ангармонического (за счёт релятивистской кубической поправки) осциллятора $U(\rho) = -GMm\,\rho + \frac{L_z^2}{2m}\,\rho^2 - \frac{GML_z^2}{mc^2}\,\rho^3$.

В классическом пределе член, пропорциональный ρ^3, исчезает и функция $\rho(\phi)$ ведёт себя как эволюция гармонического осциллятора (ρ в роли координаты, ϕ в роли времени) с $\omega_\phi = 1$ и периодом ровно 2π. Таким образом, когда частица совершает один оборот (ϕ изменяется на 2π), радиальная координата возвращается к прежнему значению и частица возвращается в исходную точку. Следовательно, траектория оказывается замкнутой. Если потенциал имеет вид, отличный от const/r, то период функции $\rho(\phi)$ изменится и траектория не будет замкнутой. Если возмущение мало, то это будет соответствовать движению по медленно вращающемуся эллипсу. Это явление называется *прецессией перигелия*. Его объяснение для Меркурия было одной из первых проверок общей теории относительности. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Определим положение равновесия ρ_0 нашего осциллятора:

$$\left.\frac{dU(\rho)}{d\rho}\right|_{\rho=\rho_0} = -GMm + \frac{L_z^2}{m}\,\rho_0 - \frac{3GML_z^2}{mc^2}\,\rho_0^2 = 0.$$

Удобно обозначить $\frac{\mu}{L_z^2}GMm = \frac{1}{\mathrm{p}}$, где p — не импульс, а *параметр конического сечения*, которое бы получилось, если отбросить релятивистскую поправку к потенциалу[2].

Из двух корней квадратного уравнения выберем тот, который ближе к корню линейного уравнения, получающемуся в исходной задаче Кеплера:

$$\frac{3GM}{c^2}\rho_0^2 - \rho_0 + \frac{1}{\mathrm{p}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\frac{3GM}{c^2}\frac{1}{\mathrm{p}}}}{2\frac{3GM}{c^2}} \approx \frac{1}{\mathrm{p}}.$$

Эффективная жёсткость нашего осциллятора составляет

$$k_{\text{эфф}} = \left.\frac{d^2U}{d\rho^2}\right|_{\rho=\rho_0} = \frac{L_z^2}{m} - \frac{6GML_z^2}{mc^2}\,\rho_0 = \frac{L_z^2}{m}\sqrt{1 - 4\frac{3GM}{c^2}\frac{1}{\mathrm{p}}}.$$

Мы получили уравнение, которое соответствует ангармоническому осциллятору с частотой *малых колебаний* (по углу ϕ):

$$\omega_\phi = \sqrt{\frac{k_{\text{эфф}}}{m_{\text{эфф}}}} = \sqrt[4]{1 - 4\frac{3GM}{c^2}\frac{1}{\mathrm{p}}} \approx 1 - \frac{3GM}{c^2}\frac{1}{\mathrm{p}} = 1 - 3\left(\frac{GMm}{L_z c}\right)^2.$$

[2] Для пробной частицы мы можем не отличать её массу m и приведённую массу $\mu = \frac{Mm}{M+m}$.

Период малых колебаний (по углу) составляет

$$\frac{2\pi}{\omega_\phi} = \frac{2\pi}{\sqrt[4]{1 - 4\frac{3GM}{c^2}\frac{1}{\mathrm{p}}}} \approx 2\pi \left[1 + 3\left(\frac{GMm}{L_z c}\right)^2\right] = 2\pi + \delta\phi.$$

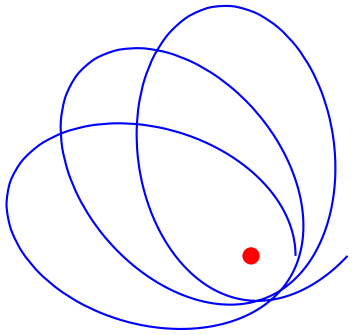
Таким образом, за один период перигелий смещается на угол

$$\delta\phi \approx 6\pi \left(\frac{GMm}{L_z c}\right)^2.$$

Для Меркурия соответствующий угол составляет

$$\delta\phi_{\mathrm{☿}} \approx 0'',104,$$

что даёт $43''$ на столетие (100 земных лет = 415 меркурианских лет).



Прецессия перигелия; $r^{-1} = 1 + 0{,}7\cos(1{,}1 \cdot \phi)$, $\phi \in [0, 6\pi]$.

Прецессия перигелия вызывается практически любым отклонением потенциала от закона $\frac{1}{r}$. Она может быть связана с отклонением распределения массы центрального тела от сферической симметрии, влиянием третьих тел (других планет), релятивистскими эффектами (если скорость частицы достаточно велика), приближённым характером ньютоновского закона всемирного тяготения.

В своё время прецессия перигелия Меркурия была одним из первых эффектов, на которых проверялась общая теория относительности (ОТО).

Мы вычислили смещения перигелия «для малых колебаний», т. е. для случая орбит, близких к круговым, у которых высоты перигелия и афелия отличаются мало, другими словами, для орбит с малым эксцентриситетом.

Для орбит с достаточно большим эксцентриситетом нельзя пренебречь ангармоничностью, которая даёт зависимость частоты от амплитуды, для учёта этих эффектов можно использовать *теорию возмущений* для ангармонических колебаний (см. главы 3.5, 4.5 «Нелинейные колебания», с. 321, 451).

Глава 2.11

Антисимметричные тензоры* (с. 117)

2.11.1 Электромагнитное поле и симплектическая структура

Интересно, что сходство между электромагнитным полем F_{ij} и симплектической формой ω_{KM} простирается гораздо глубже. Мы можем описывать электромагнитное поле, изменяя не функцию Гамильтона, а симплектическую форму, при этом компоненты электромагнитного поля описываются как компоненты симплектической формы (и пуассоновой структуры).

Для канонических координат имеем

$$\{x^i, P_j\} = \delta^i_j, \qquad \{x^i, x^j\} = 0, \qquad \{P_i, P_j\} = 0.$$

Запишем скобки Пуассона для кинематических импульсов, которые в присутствии поля уже не являются каноническими:

$$p_i = P_i - \frac{q}{c}A_i.$$

С учётом того, что компоненты A_i зависят от координат, но не от импульсов, получаем

$$\begin{aligned}
\{x^i, p_j\} &= \{x^i, P_j - \frac{q}{c}A_j\} = \{x^i, P_j\} = \delta^i_j,\\
\{x^i, x^j\} &= 0,\\
\{p_i, p_j\} &= \{P_i - \frac{q}{c}A_i, P_j - \frac{q}{c}A_j\} = \{P_i, -\frac{q}{c}A_j\} + \{-\frac{q}{c}A_i, P_j\} = \frac{q}{c}\frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{q}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x^j} = \frac{q}{c}F_{ij};\\
J^{MN} = \begin{pmatrix} 0 & \delta^m_n \\ -\delta^n_m & \frac{q}{c}F_{mn} \end{pmatrix}, &\qquad \omega_{MN} = \begin{pmatrix} \frac{q}{c}F_{mn} & -\delta^m_n \\ \delta^n_m & 0 \end{pmatrix}, \qquad J^{MN}\omega_{NK} = \delta^M_K. \qquad (2.11.1)
\end{aligned}$$

Таким образом, в канонических координатах функция Гамильтона содержит потенциал A_i, а симплектическая форма не зависит от поля. В неканонических координатах $X^M = (x^m, p_m)$ функция Гамильтона не содержит потенциала, зато симплектическая форма ω_{MN} содержит тензор электромагнитного поля F_{ij}.[1]

Напишем расширенную функцию Гамильтона и скобки Пуассона для нерелятивистской частицы в магнитном поле в канонических и неканонических координатах:

$$\mathcal{H}(\underline{x}, \underline{P}) = \frac{(\mathbf{P} - \frac{q}{c}\mathbf{A})^2}{2m} + e\varphi - cP_0 = \mathcal{H}(\underline{x}, \underline{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - cp_0;$$

$$\{x^i, x^j\} = \{P_i, P_j\} = 0, \quad \{x^i, p_j\} = -\{p_j, x^i\} = \{x^i, P_j\} = -\{P_j, x^i\} = \delta^i_j, \quad \{p_i, p_j\} = \tfrac{q}{c}F_{ij}, \quad i, j = 0, 1, 2, 3.$$

Когда поле описывалось через потенциалы, оно автоматически удовлетворяло первой паре уравнений Максвелла. Накладывает ли какие-либо ограничения описание электромагнитного поля через симплектическую форму? Для скобки Пуассона должно выполняться тождество Якоби. Достаточно проверить его для координат в фазовом пространстве:

$$\{X^K, \{X^L, X^M\}\} + \{X^L, \{X^M, X^K\}\} + \{X^M, \{X^K, X^L\}\} = 0.$$

Распишем один член через пуассонову структуру:

$$\{X^K, \underbrace{\{X^L, X^M\}}_{J^{LM}}\} = \underbrace{(\partial_G X^K)}_{\delta^K_G} J^{GH}(\partial_H J^{LM}) = J^{KH}\partial_H J^{LM},$$

[1] Чтобы тензор электромагнитного поля полностью был описан симплектической формой, надо рассматривать время $x^0 = ct$ и минус энергию $p_0 = -\mathcal{E}/c$ как координаты в фазовом пространстве. Если ограничиться пространственными координатами, то в симплектическую форму войдёт лишь пространственная часть тензора электромагнитного поля, содержащая только магнитное поле.

$$J^{KH}\partial_H J^{LM} + J^{LH}\partial_H J^{MK} + J^{MH}\partial_H J^{KL} = 0. \tag{2.11.2}$$

Ненулевые производные могут быть только по обобщённым координатам от импульсных компонент:

$$\partial_{x^h} J^{p_l p_m} = \partial_h \frac{q}{c} F_{lm}, \qquad J^{p_k x^h} = -\delta^h_k.$$

Таким образом, мы можем переписать нетривиальные компоненты (2.11.2) в следующем виде (отбросив общий множитель $-\frac{q}{c}$):

$$\partial_k F_{lm} + \partial_l F_{mk} + \partial_m F_{kl} = 0.$$

Следовательно, электромагнитное поле снова должно автоматически удовлетворять первой паре уравнений Максвелла, но на этот раз в силу тождеств Якоби для скобки Пуассона.

2.11.2 Ковекторы, дифференциалы и дифференциальные формы**

Ранее мы убедились, что между векторами и операторами дифференцирования по направлениям устанавливается естественное взаимнооднозначное соответствие, так что изучение вектора всегда можно заменить изучением оператора производной по направлению и наоборот[2] (см. § 2.4.4 «Вектор как дифференциальный оператор и сдвиг по векторному полю», с. 197). Теперь мы обсудим похожее соответствие между ковекторами и дифференциалами.

Распишем дифференциал скалярной функции через частные производные и дифференциалы координат:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\, dx^i.$$

Мы видим, что дифференциал функции $d\varphi$ в заданной системе координат взаимнооднозначно определяется её градиентом $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \partial_i \varphi$. При этом сам дифференциал $d\varphi$ от системы координат не зависит (является инвариантом).

Мы можем считать, что дифференциал и градиент — это один и тот же объект. И мы уже использовали такое обозначение, когда рассматривали внешнюю производную от скалярной функции: $(d\varphi)_i = \partial_i \varphi$.

Если $d\varphi$ — градиент (а значит, ковектор) в независимой от системы координат форме, то $\partial_i \varphi$ — компоненты этого ковектора, а dx^i — базисные ковекторы.

Действительно, компоненты dx^i, если рассматривать этот дифференциал как градиент, как раз такие, какие должны быть у базисного ковектора с номером i:

$$dx^i = \underbrace{\frac{\partial x^i}{\partial x^j}}_{(dx^i)_j = \delta^i_j} dx^j.$$

Раз мы сопоставили базисным ковекторам градиенты=дифференциалы координат, то по этим базисам можно раскладывать и другие ковекторы:

$$A = A_i dx^i. \tag{2.11.3}$$

Формула (2.11.3) может интерпретироваться двояко:

- A — инвариантная запись ковектора, а A_i — его компоненты в данной системе координат, dx^i — базисный ковектор с номером i;
- A — скаляр, а A_i — компоненты ковектора, dx^i — компоненты вектора бесконечно малого приращения координат.

Различие между интерпретациями в том, что во втором случае подразумевается некий бесконечномалый вектор dx^i, соединяющий две фиксированные бесконечноблизкие точки.

Впрочем, переход между этими двумя интерпретациями совершается достаточно вольно. И главное применение этой двусмысленности — запись инвариантного интеграла от ковектора вдоль кривой:

$$\int\limits_\Gamma A = \int\limits_\Gamma A_i\, dx^i.$$

Слева стоит вроде бы бессмысленное выражение — интеграл без дифференциала, но инвариантная запись дифференциальной формы степени 1 (ковектора) содержит в себе необходимые дифференциалы, и в

[2] Математики часто считают, что векторы и дифференциальные операторы — это просто одно и то же, но лучше считать (во избежание путаницы), что это разные представления одних и тех же объектов.

правой части равенства эти дифференциалы записаны явно. Так что выражение в левой части равенства становится допустимым.

С помощью тензорного произведения (см. п. 1.2.4.2 «Тензорное произведение и свёртка», с. 40) из базисных ковекторов мы можем получить базисные тензоры с любым числом нижних индексов:

$$dx^i \otimes dx^j, \qquad dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_q}.$$

Каждый такой базисный тензор имеет только одну отличную от нуля компоненту:

$$(dx^i \otimes dx^j)_{kl} = \delta^i_k \delta^j_l, \qquad (dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_q})_{j_1 \ldots j_q} = \delta^{i_1}_{j_1} \cdots \delta^{i_q}_{j_q}.$$

Мы видим, что полученные таким образом базисные тензоры не являются ни симметричными, ни антисимметричными:

$$dx^i \otimes dx^j \neq \pm dx^j \otimes dx^i.$$

Мы можем раскладывать (анти)симметричные тензоры и по таким базисам, но обычно удобнее раскладывать симметричные тензоры по симметричным базисным тензорам, а антисимметричные — по антисимметричным.

Антисимметричные базисные тензоры (дифференциальные формы) удобно ввести, используя вместо тензорного умножения внешнее:

$$dx^i \wedge dx^j = 2dx^{[i} \otimes dx^{j]} = dx^i \otimes dx^j - dx^j \otimes dx^i = -dx^j \wedge dx^i,$$

$$dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q} = q! dx^{[i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_q]}.$$

Нормировочный коэффициент таков, что все ненулевые компоненты базисных дифференциальных форм равны ± 1.

Дифференциальная форма степени q разлагается по соответствующим базисным формам:

$$A = \sum_{i_1 < \cdots < i_q} A_{i_1 \ldots i_q} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q} = \frac{1}{q!} A_{i_1 \ldots i_q} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q}.$$

Для дифференциальной формы A степени q, как мы увидим далее (см. главу 2.12 «Интегрирование антисимметричных тензоров*», с. 271), естественным образом определяется инвариантный по отношению к заменам координат интеграл по поверхности U размерности q, при этом базисные дифференциальные формы $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q}$ отождествляются с элементами ориентированной q-мерной площади:

$$\int\limits_U A = \int\limits_U \sum_{i_1 < \cdots < i_q} A_{i_1 \ldots i_q} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q}.$$

Симметричные базисные ковариантные тензоры мы обозначим так же, как обычное (без знака умножения) произведение дифференциалов:

$$dx^i dx^j = dx^{(i} \otimes dx^{j)} = \frac{1}{2} \left(dx^i \otimes dx^j + dx^j \otimes dx^i \right) = dx^j dx^i,$$

$$dx^{i_1} \cdots dx^{i_q} = dx^{(i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_q)}.$$

Например, в таких обозначениях метрический тензор принимает вид, соответствующий квадрату интервала:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j.$$

В данной формуле ds^2 имеет одновременно две разные интерпретации:

- ds^2 — квадрат интервала (скаляр) между двумя бесконечно близкими точками, координаты которых различаются на вектор dx^i;
- ds^2 — метрический тензор, разложенный по базисным симметричным тензорам $dx^i dx^j$.

Глава 2.12

Интегрирование антисимметричных тензоров* (с. 126)

2.12.1 ∇ и $\triangle$ через $*$ и d

Градиент в произвольных невырожденных координатах — это внешняя производная от скалярного поля:

$$(\operatorname{grad}\varphi)_\alpha = \nabla_\alpha\varphi = \partial_\alpha\varphi = (d\varphi)_\alpha.$$

Для скалярного поля частная производная совпадает с ковариантной производной и внешней производной. Метрика для определения градиента не нужна. Размерность пространства при определении градиента не важна.

Ротор в произвольных невырожденных координатах — это комбинация двух операций: сначала внешняя производная от ковектора, потом ходжевская дуальность от 2-формы.

В декартовых координатах $(\Omega^{-1})^{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$. Так что мы можем переписать выражение для ротора:

$$(\operatorname{rot}\mathbf{u})^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\beta u_\gamma = (\Omega^{-1})^{\alpha\beta\gamma}\partial_\beta u_\gamma = \overbrace{\frac{1}{2}(\Omega^{-1})^{\alpha\beta\gamma}\underbrace{(\partial_\beta u_\gamma - \partial_\gamma u_\beta)}_{du_{\beta\gamma}}}^{(*^{-1}du)^\alpha}.$$

В криволинейных координатах запись ротора через внешнюю производную и ходжевскую дуальность мы примем в качестве определения:

$$\operatorname{rot}\mathbf{u} := *^{-1}d\mathbf{u}.$$

В трёхмерном пространстве мы получаем прежнее выражение с точностью до множителя $\frac{1}{\Omega_{123}}$, связанного с определением в криволинейных координатах элемента объёма:

$$(\operatorname{rot}\mathbf{u})^\alpha = \frac{1}{2}(\Omega^{-1})^{\alpha\beta\gamma}\underbrace{(\partial_\beta u_\gamma - \partial_\gamma u_\beta)}_{d\mathbf{u}} = (\Omega^{-1})^{\alpha\beta\gamma}\partial_\beta u_\gamma = \frac{1}{\Omega_{123}}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\beta u_\gamma.$$

Если в нашем пространстве есть метрика и форму объёма определяют через её определитель: $\Omega_{\alpha\beta\gamma} = \sqrt{|g|}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$, то

$$(\operatorname{rot}\mathbf{u})^\alpha = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\beta u_\gamma.$$

Ковариантная производная нам опять не нужна, хотя если коэффициенты связности симметричны (тензор кручения равен нулю), то мы можем использовать вместо частной производной ковариантную. От метрики нам нужен только определитель, чтобы задать элемент объёма.

Как внешняя проивзодная от ковектора, так и ходжевская дуальность определены при любой размерности пространства и для дифференциальной формы любой степени (не только для 1-формы = ковектора), но только в 3-мерном пространстве оператор $*^{-1}d$ будет превращать ковектор в вектор.

Дивергенция в произвольных невырожденных координатах также может быть определена через внешнюю проивзодную и ходжевскую дуальность.

Ниже при вычислении $d*v$ антисимметризация идёт по индексам $m_1m_2\cdots m_D$. Чтобы показать, что индекс n в антисимметризации не участвует, он выделен как $|n|$. Обратите внимание на то, что операцию антисимметризации можно опустить, если антисимметризуемые индексы потом сворачиваются с

антисимметричным тензором:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{v} = *^{-1}d*\mathbf{v} &= \frac{1}{D!}(\Omega^{-1})^{m_1m_2\cdots m_D}\overbrace{D\partial_{[m_1}\underbrace{(\Omega_{|n|m_2\cdots m_D]}v^n)}_{*v}}^{d*v} = \\
&= \frac{1}{(D-1)!}\underbrace{(\Omega^{-1})^{m_1m_2\cdots m_D}}_{\frac{\varepsilon^{m_1m_2\cdots m_D}}{\Omega_{12\cdots D}}}\partial_{m_1}(\underbrace{\Omega_{nm_2\cdots m_D}}_{\Omega_{12\cdots D}\varepsilon_{nm_2\cdots m_D}}v^n) = \\
&= \underbrace{\frac{\varepsilon^{m_1m_2\cdots m_D}\varepsilon_{nm_2\cdots m_D}}{(D-1)!}}_{\delta_n^{m_1}}\frac{1}{\Omega_{12\cdots D}}\partial_{m_1}(\Omega_{12\cdots D}v^n) = \frac{1}{\Omega_{12\cdots D}}\partial_n(\Omega_{12\cdots D}v^n).
\end{aligned}$$

Теперь дивергенция — скаляр по отношению к общекоординатным преобразованиям, причём в декартовых координатах выражение для дивергенции остаётся прежним.

Если форма объёма определена через метрику $\Omega_{m_1m_2\cdots m_D} = \sqrt{|g|}\varepsilon_{m_1m_2\cdots m_D}$, то

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_n(\sqrt{|g|}v^n). \tag{2.12.1}$$

Ковариантная производная нам опять не нужна, хотя если коэффициенты связности симметричны (тензор кручения равен нулю), то мы можем использовать вместо частной производной ковариантную. От метрики нам опять нужен только определитель, чтобы задать элемент объёма. Размерность пространства при определении дивергенции не важна.

Дивергенция может быть легко обобщена на поливектор $F^{k_1\cdots k_{q-1}k_q}$ любой степени (полностью антисимметричный тензор с любым числом верхних индексов):

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}F = *^{-1}d*F.$$

Внешняя производная d увеличивает число индексов на 1, а оператор $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ (не путайте с вариацией!) уменьшает число индексов на 1:

$$\begin{aligned}
(\hat{\boldsymbol{\delta}}F)^{m_1\cdots m_{q-1}} &= \frac{(\Omega^{-1})^{m_1\cdots m_{q-1}m_qm_{q+1}\cdots m_D}}{(D-q+1)!}\overbrace{(D-q+1)\partial_{[m_q}\underbrace{(\tfrac{1}{q!}\Omega_{|k_1\cdots k_{q-1}k_q|m_{q+1}\cdots m_D]}F^{k_1\cdots k_{q-1}k_q})}_{*F}}^{d*F} = \\
&= \frac{\varepsilon^{m_1\cdots m_{q-1}m_qm_{q+1}\cdots m_D}}{\Omega_{12\cdots D}(D-q)!q!}\partial_{m_q}(\Omega_{12\cdots D}\varepsilon_{k_1\cdots k_{q-1}k_qm_{q+1}\cdots m_D}F^{k_1\cdots k_{q-1}k_q}) = \\
&= \frac{1}{\Omega_{12\cdots D}}\underbrace{\frac{\varepsilon^{m_1\cdots m_{q-1}m_qm_{q+1}\cdots m_D}\varepsilon_{k_1\cdots k_{q-1}k_qm_{q+1}\cdots m_D}}{(D-q)!q!}}_{\delta^{m_1}_{[k_1}\cdots\delta^{m_q}_{k_q]}}\partial_{m_q}(\Omega_{12\cdots D}F^{k_1\cdots k_{q-1}k_q}) = \\
&= \frac{1}{\Omega_{12\cdots D}}\partial_{m_q}\big(\Omega_{12\cdots D}F^{m_1\cdots m_{q-1}m_q}\big).
\end{aligned}$$

Если форма объёма определена через метрику, то

$$(\hat{\boldsymbol{\delta}}F)^{m_1\cdots m_{q-1}} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_{m_q}\Big(\sqrt{|g|}F^{m_1\cdots m_{q-1}m_q}\Big). \tag{2.12.2}$$

Дивергенция как $\hat{\boldsymbol{\delta}} = *^{-1}d*$ определена и для скалярного поля, но в этом случае она равна нулю (проверьте!).

Дивергенция от тензора электромагнитного поля возникнет при записи *второй пары уравнений Максвелла* в 4-мерной форме:

$$(\hat{\boldsymbol{\delta}}F)^m = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_k\Big(\sqrt{|g|}F^{mk}\Big) = \frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\,j^m. \tag{2.12.3}$$

Оператор Лапласа (лапласиан) от скаляра в произвольных невырожденных координатах также может быть определён через внешнюю производную и ходжевскую дуальность, но на этот раз нам понадобится метрика, чтобы превратить ковектор в вектор.

Как и в декартовых координатах, лапласиан — дивергенция от градиента. Дивергенцию мы определили для вектора, а градиент — ковектор, так что индекс у градиента поднимается с помощью обратного метрического тензора.

Градиент скаляра — $d\varphi$, дивергенция — $*^{-1}d*$, так что лапласиан записывается как

$$\triangle\varphi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \hat{\boldsymbol{\delta}}d\varphi = *^{-1}d*d\varphi.$$

При этом подразумевается, что у нас есть метрический тензор, а значит, векторы и ковекторы — разные представления одних и тех же объектов. Поскольку оператор d выдаёт не тот тип объекта, который нужен на входе оператору $*$, это автоматически означает, что надо сделать преобразование типа ковектор→вектор[1]:

$$\triangle\varphi = *^{-1}d*d\varphi = \underbrace{\frac{1}{\Omega_{12\cdots D}}\partial_n(\Omega_{12\cdots D}\overbrace{g^{nk}\underbrace{\partial_k\varphi}_{\text{ковектор}}}^{\text{ковектор→вектор}})}_{\text{div от вектора}}.$$

Если форма объёма определена через метрику $\Omega_{m_1m_2\cdots m_D} = \sqrt{|g|}\varepsilon_{m_1m_2\cdots m_D}$, то

$$\triangle\varphi = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_n(\sqrt{|g|}g^{nk}\partial_k\varphi). \tag{2.12.4}$$

Такой оператор называется *оператором Бельтрами–Лапласа*.

Оператор Бельтрами-Лапласа можно также выразить через симметричные согласованные с метрикой ковариантные производные: $\triangle_\nabla = \nabla^k\nabla_k$.

(**) *Оператор Лапласа* (*лапласиан*) от дифференциальной формы

Оператором $\hat{\boldsymbol{\delta}}d$ можно действовать не только на скаляр, но и на дифференциальные формы степени больше 0, однако в этом случае не будет соответствия с обычным лапласианом, который вычисляется покомпонентно, как от скаляра.

Мы рассмотрим простейший случай евклидова пространства в декартовых координатах:

$$(dA)_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_q} = \sum_{a=0}^{q}(-1)^a\partial_{\alpha_a}A_{\alpha_0\ldots\hat{\alpha}_a\ldots\alpha_q} = \sum_{a=0}^{q-1}(-1)^a\partial_{\alpha_a}A_{\alpha_0\ldots\hat{\alpha}_a\ldots\alpha_q} + (-1)^q\partial_{\alpha_q}A_{\alpha_0\ldots\alpha_{q-1}}.$$

Индекс под шляпкой опускается. Далее

$$(\hat{\boldsymbol{\delta}}dA) = \sum_{a=0}^{q-1}(-1)^a\partial^{\alpha_q}\partial_{\alpha_a}A_{\alpha_0\ldots\hat{\alpha}_a\ldots\alpha_q} + (-1)^q\partial^{\alpha_q}\partial_{\alpha_q}A_{\alpha_0\ldots\alpha_{q-1}},$$

$$(\hat{\boldsymbol{\delta}}A)_{\alpha_1\ldots\alpha_{q-1}} = \partial^{\alpha_q}A_{\alpha_1\ldots\alpha_{q-1}\alpha_q},$$

$$(d\hat{\boldsymbol{\delta}}A)_{\alpha_0\ldots\alpha_{q-1}} = \sum_{a=0}^{q-1}(-1)^a\partial_{\alpha_a}\partial^{\alpha_q}A_{\alpha_0\ldots\hat{\alpha}_a\ldots\alpha_{q-1}\alpha_q}.$$

Мы видим, что в декартовых координатах оператор $(-1)^q(\hat{\boldsymbol{\delta}}d - d\hat{\boldsymbol{\delta}})$ действует на компоненты дифференциальной формы как лапласиан:

$$(-1)^q(\hat{\boldsymbol{\delta}}d - d\hat{\boldsymbol{\delta}})A = \underbrace{\partial^{\alpha_q}\partial_{\alpha_q}}_{\triangle}A_{\alpha_0\ldots\alpha_{q-1}}.$$

Это позволяет нам по определению положить

$$\triangle A = (-1)^q(\hat{\boldsymbol{\delta}}d - d\hat{\boldsymbol{\delta}})A,$$

где q — степень дифференциальной формы A.

Определённый таким образом лапласиан в общем случае не совпадает с лапласианом $\triangle_\nabla = \nabla^k\nabla_k$, определённым через ковариантные производные (даже для симметричной согласованной с метрикой связности).

[1] Любители объектно ориентированного программирования могут вспомнить *автоматическое преобразование типов*.

2.12.2 Интегрирование по поверхностям разных размерностей

Нас интересует такое определение интегрирования по поверхностям разной размерности, которое не зависит от выбора системы координат.

Мы уже сталкивались с *интегрированием скаляра по нульмерной поверхности* (набору точек с весами $m(x) = \pm 1$, можно обобщить и считать, что весами могут быть любые вещественные числа):

$$\int\limits_M \varphi = \sum_{x \in M} m(x)\varphi(x).$$

Также мы сталкивались с *интегрированием ковектора по кривой*:

$$\int\limits_\Gamma u = \int\limits_\Gamma u_\alpha dx^\alpha.$$

Мы знаем, что форма объёма и элемент объёма при замене координат преобразуются одинаково, поэтому мы можем определить *интеграл от D-формы по D-объёму*:

$$\int\limits_U \Omega = \int\limits_U \Omega_{12\cdots D} \underbrace{dx^1\, dx^2 \cdots dx^D}_{d^D x}.$$

(!) И у формы объёма, и у скаляра одинаковое число компонент, но при замене координат эти компоненты преобразуются по-разному. Поэтому интеграл от скаляра не определён (зависит от системы координат). Если нам всё-таки надо *проинтегрировать скаляр по объёму*, то надо его умножить на форму объёма:

$$\int\limits_U \varphi\Omega = \int\limits_U *\varphi = \int\limits_U \varphi\Omega_{12\cdots D}\, dx^1\, dx^2 \cdots dx^D = \int\limits_U \varphi\sqrt{|g|}\, d^D x.$$

Последнее выражение справедливо, если форма объёма определена через метрику ($\Omega_{12\cdots D} = \sqrt{|g|}$).

Чтобы определить *интеграл от q-формы по поверхности* $\mathbf{S}$ размерности q, $1 \leqslant q \leqslant D$, в пространстве $\mathbf{M}$ размерности D, введём на этой поверхности локальные координаты ξ^a $(a, b, c = 1, \ldots, q)$. Пространственные координаты точки на поверхности выражаются через координаты на поверхности $x^\alpha = \phi^\alpha(\xi)$, задавая отображение $\phi : \mathbf{S} \to \mathbf{M}$. Мы можем даже определить матрицу Якоби:

$$\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial\xi^a} = \partial_a x^\alpha, \qquad \partial_a = \frac{\partial}{\partial\xi^a}$$

Но при $q \neq D$ мы не можем эту (прямоугольную!) матрицу обратить. С помощью такой матрицы Якоби мы можем определить отображение ϕ_* контравариантных тензоров на $\mathbf{S}$ в тензоры на $\mathbf{M}$ и отображение ϕ^* ковариантных тензоров на $\mathbf{M}$ в тензоры на $\mathbf{S}$:

$$\begin{aligned}(\phi_* T)^{\alpha\cdots\beta} &= T^{a\cdots b}\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial\xi^a}\cdots\frac{\partial\phi^\beta}{\partial\xi^b},\\ (\phi^* R)_{a\cdots b} &= R_{\alpha\cdots\beta}\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial\xi^a}\cdots\frac{\partial\phi^\beta}{\partial\xi^b}.\end{aligned}$$

Если в пространстве $\mathbf{M}$ имеется дифференциальная форма $A_{\alpha_1\cdots\alpha_q}$, то после отображения на q-мерную поверхность $\mathbf{S}$ мы получим форму $(\phi^* A)_{a_1\cdots a_q}$, у которой есть только одна независимая компонента $(\phi^* A)_{1\cdots q}$ и интеграл от которой по $\mathbf{S}$ хорошо определён (не зависит от выбора координат):

$$\int\limits_{\phi(\mathbf{S})} A = \int\limits_{\mathbf{S}} \phi^* A = \int\limits_{\mathbf{S}} \underbrace{A_{\alpha_1\cdots\alpha_q}\frac{\partial\phi^{\alpha_1}}{\partial\xi^1}\cdots\frac{\partial\phi^{\alpha_q}}{\partial\xi^q}}_{(\phi^* A)_{1\ldots q}}\, d\xi^1\cdots d\xi^q.$$

Ориентация поверхности задаётся порядком координат ξ^a **с точностью до чётной перестановки** (если у одной координаты ξ^{a_1} сменить знак или две координаты ξ^{a_1} и ξ^{a_2} переставить, то ориентация изменится).

Переход от формы $A = \frac{1}{q!}A_{\alpha_1\ldots\alpha_q}\, dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_q}$ к форме $\phi^* A = (\phi^* A)_{1\ldots q}\, d\xi^1 \wedge \cdots \wedge d\xi^q$ тривиален: достаточно выразить все дифференциалы dx^α через дифференциалы $d\xi^i$ при условии $x^\alpha = \phi^\alpha(\xi)$.

Если вернуться к теоремам Стокса и Гаусса–Остроградского, то получается, что для того, чтобы проинтегрировать ротор по 2-мерной поверхности, его удобнее представить не как вектор, а как 2-форму. Аналогично, чтобы проинтегрировать дивергенцию по D-объёму, её удобнее представить не как скаляр, а как D-форму. Таким образом, если вспомнить, что $\mathrm{rot} = *^{-1}d$, а $\mathrm{div} = *^{-1}d*$, то оказывается более удобным в обоих случаях операцию $*^{-1}$ опустить.

2.12.3 Теорема Стокса для дифференциальных форм

(*) Определим *ориентацию участка границы* $\partial\mathbf{S}$ следующим образом. Если при выходе изнутри $\mathbf{S}$ на границу $\partial\mathbf{S}$ координата ξ^1 возрастает, то на $\partial\mathbf{S}$ вводится система координат $\eta^a = \xi^a$ $(a = 2\cdots q)$, т.е. координаты на границе получаются отбрасыванием первой координаты ξ^1 на $\mathbf{S}$. Если при пересечении границы координата ξ^1 убывает, то действуем аналогично, но меняем знак следующей координаты: $\xi'^2 = -\xi^2$. Если матрица Якоби для отображения $\partial\mathbf{S} \to \mathbf{M}$ получает ранг меньше чем $q-1$, то всегда можно переставить две первые координаты, сменив одной из них знак: $\xi'^2 = -\xi^1$, $\xi'^1 = \xi^2$, а после этого применить описанный метод.

Сначала переформулируем на языке дифференциальных форм теорему Гаусса-Остроградского в D-мерном пространстве. При этом вместо вектора $\mathbf{v}$ возьмём $(D-1)$-форму $B = *\mathbf{v}$.

Обычная теорема Гаусса-Остроградского формулируется с (явным или неявным) использованием евклидовой метрики в декартовых координатах. Это позволяет нам использовать в промежуточных выкладках такие понятия, как *единичный вектор*, а также даёт форму объёма вида $\Omega_{\alpha_1\ldots\alpha_D} = \varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_D}$. Результат, сформулированный на инвариантном языке, от выбора системы координат и наличия метрики зависеть не будет.

Размерность формы B равна $D-1$. Элемент $(D-1)$-мерной площади ∂U можно задать поливектором степени $D-1$, который выражается через единичную внешнюю нормаль:

$$dS^{\alpha_2\cdots\alpha_D} = \varepsilon^{\alpha\alpha_2\cdots\alpha_D} n_\alpha \, dS = (-1)^{D-1} (*^{-1}\mathbf{n})^{\alpha_2\cdots\alpha_D} \, dS.$$

Для $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$ это очевидно, а для других направлений это следует из того, что если два тензора равны в одной системе отсчёта, то они равны в любой другой. Проинтегрируем форму dB по D-мерной области U:

$$\begin{aligned}
\int\limits_U dB &= \int\limits_U dB_{12\cdots D}\, dx^1\, dx^2 \cdots dx^D = \int\limits_U \frac{1}{D!} \varepsilon^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_D} D\partial_{\alpha_1} B_{\alpha_2\cdots\alpha_D}\, dx^1\, dx^2\cdots dx^D = \\
&= \int\limits_U \partial_{\alpha_1} \underbrace{\left(\frac{1}{(D-1)!} \varepsilon^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_D} B_{\alpha_2\cdots\alpha_D} \right)}_{(*^{-1}B)^{\alpha_1}} dx^1\, dx^2\cdots dx^D = \\
&= \int\limits_U \partial_\alpha (*^{-1}B)^\alpha \, dx^1\, dx^2\cdots dx^D = \qquad \text{(теорема Гаусса–Остроградского)} \\
&= \int\limits_{\partial U} (*^{-1}B)^\alpha n_\alpha \, dS = \int\limits_{\partial U} \frac{1}{(D-1)!} \varepsilon^{\alpha\beta_2\cdots\beta_D} B_{\beta_2\cdots\beta_D} n_\alpha \, dS = \\
&= \int\limits_{\partial U} \frac{1}{(D-1)!} \underbrace{n_\alpha \varepsilon^{\alpha\beta_2\cdots\beta_D}}_{(-1)^{D-1}(*^{-1}\mathbf{n})^{\beta_2\ldots\beta_D}} B_{\beta_2\cdots\beta_D}\, dS = \\
&= \int\limits_{\partial U} \frac{1}{(D-1)!} B_{\beta_2\ldots\beta_D} dS^{\beta_2\ldots\beta_q}.
\end{aligned}$$

Выражение

$$\frac{1}{(D-1)!} n_\alpha \varepsilon^{\alpha\beta_2\cdots\beta_D} B_{\beta_2\cdots\beta_D} = \frac{1}{(D-1)!} (\phi_* dS)^{b_2\cdots b_D} (\phi^* B)_{b_2\cdots b_D} = *^{-1}_{\partial\mathbf{U}} \phi^* B$$

— это аналог $*^{-1}$, но посчитанный не с помощью формы объёма, а с помощью формы площади $(\phi_* dS)^{-1}$, т.е. это оператор $*^{-1}_{\partial\mathbf{U}}$, заданный на ∂U. Получаем

$$\int\limits_U dB = \int\limits_{\partial U} \phi^* B = \int\limits_{\phi(\partial U)} B,$$

где $\phi : \partial U \to \mathbf{M}$. Дальше мы не будем различать поверхность ∂U и $\phi(\partial U)$ (её вложение в пространство $\mathbf{M}$).

Таким образом, мы переписали теорему Гаусса-Остроградского через дифференциальные формы:

$$\int\limits_U dB = \int\limits_{\partial U} B.$$

На самом деле мы доказали более общую теорему. Как мы показали выше, интегрирование формы dA степени q по поверхности $\phi(S)$ размерности q сводится к интегрированию формы $\phi^* A$ степени q по пространству S размерности q. То, что поверхность $\phi(S)$ вложена в некоторое пространство $\mathbf{M}$, при этом неважно, для данной поверхности форма $\phi^* A$ имеет максимальную возможную степень, и мы, как выше, можем применить теорему Гаусса-Остроградского. Так что заменой $x \to \xi$, $D \to q$ мы получаем обобщение на случай $q < D$.

Мы получили *теорему Стокса для дифференциальных форм*:

$$\int\limits_S dA = \int\limits_{\partial S} A. \tag{2.12.5}$$

Здесь S — q-мерная ориентированная поверхность, ∂S — граница, ориентация которой согласована с ориентацией поверхности S (по приведённым выше правилам), A — дифференциальная $(q-1)$-форма.

Эта теорема не требует наличия ни метрики, ни формы объёма.

- При $q = 1$ получаем формулу Ньютона–Лейбница.
- При $q = 2$, $D = 3$ получаем теорему Стокса для ротора.
- При $q = 2$, $D = 2$ получаем теорему Грина.
- При $q = D$ получаем теорему Гаусса-Остроградского.

Глава 2.13

Ньютоновская механика как предельный случай СТО (с. 133)

2.13.1 Классическая потенциальная энергия и макроскопические силы из СТО

Рассматривая предельный переход от специальной теории относительности (СТО) к классической механике, мы не рассмотрели вопрос о возникновении *потенциальной энергии*, зависящей от мгновенных положений частиц. Если просто взять лагранжиан для релятивистских частиц и вычесть из него потенциальную энергию, то такая добавка дала бы возможность мгновенного отклика одной частицы на изменение движения другой, что дало бы возможность передавать сигналы со сверхсветовой скоростью. После преобразований Лоренца такое действие позволило бы передавать сигналы в прошлое.

Обычно возникновение потенциальной энергии в классической механике связано со взаимодействием частиц при посредстве какой-то среды или поля (поле тоже можно рассматривать как среду). При этом каждая частица взаимодействует со средой или полем локально, т.е. в той точке, где частица находится. В качестве сред в разных задачах выступают пружины, нити, наклонные плоскости, стержни, электромагнитное поле, гравитационное поле, а также «настоящие среды»: жидкости и газы.

Честное описание такой среды предполагает её описание как динамической системы с помощью поля или набора полей. При этом мы переходим от исходной системы частиц, имеющей конечное число степеней свободы, к системе частиц и полей, имеющей бесконечное число степеней свободы. Чтобы получить как приближение **(!)** классическую механическую модель, в которой число степеней свободы снова конечно, *«лишние» степени свободы надо исключить*, приближённо выразив их движение через движение конечного числа «существенных» степеней свободы. В некоторых задачах это возможно.

Примеры исключения степеней свободы среды:

- невесомая нерастяжимая нить;
- невесомая пружина;
- абсолютно твёрдые тела (в том числе стержни, плоскости);
- замена настоящего электромагнитного поля электростатическим и/или магнитостатическим, заданным текущим распределением зарядов и/или токов;
- замена гравидинамического поля (описываемого общей теорией относительности) ньютоновским гравитационным (гравистатическим) полем;
- замена жидкости или газа на силу вязкого трения, действующую на тело и/или присоединённую массу, учитывающую увлечение среды телом.

Условия применимости таких моделей различны. Часто условия применимости модели требуют малости скоростей тел по сравнению со скоростью распространения колебаний в среде. Такими колебаниями могут быть:

- продольные или поперечные колебания пружины как упругого тела;
- колебания нити как струны или плоскости как мембраны;
- продольные колебания (звук) в упругих средах (газах, жидкостях, твёрдых телах);

- поперечные колебания в твёрдых телах или неньютоновских жидкостях;
- волны на поверхностях раздела (гравитационные, капиллярные);
- электромагнитные волны;
- гравитационные волны (волны гравитационного поля);
- нелинейные колебания (механические, оптические и т.п.), включая солитоны в нелинейных средах.

Во втором томе курса («Элементы теории колебаний и классическая теория поля») мы рассмотрим электромагнитное поле и его взаимодействие с заряженными частицами. В частности, при малых скоростях излучение электромагнитных волн описывается электрическим дипольным приближением (см. главу 3.12 «Излучение в мультипольном приближении», с. 374). Интенсивность *электрического дипольного излучения* частицы с зарядом q, движущейся с ускорением $\mathbf{a}$, равно

$$I_d = \frac{2k_{\text{к}}q^2}{3c^3}\,\mathbf{a}^2,$$

где c — скорость света, $k_{\text{к}}$ — константа в законе Кулона. Излучение — это возбуждение собственных степеней свободы электромагнитного поля, которые не могут быть выражены через текущее движение заряженных частиц. Соответственно *условие применимости электростатического приближения* для системы заряженных частиц — малость $I_d \ll \mathcal{E}/T$, где $\mathcal{E}$ — характерная энергия частицы, T — характерное время процесса, либо (в зависимости от задачи) $\int I_d\,dt \ll \mathcal{E}$.

(*) Исключение полевых электродинамических степеней свободы и введение кулоновского дальнодействия в нерелятивистском пределе удобно проводить, используя *калибровочные условия Кулона* (*калибровку Кулона*)[1]:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = 0.$$

В такой калибровке скалярный потенциал мгновенно во всём пространстве реагирует на изменение распределения зарядов, φ полностью определяется текущим распределением зарядов и граничными условиями и не несёт дополнительных по отношению к зарядам степеней свободы. Если $\varphi(\mathbf{r}=\infty)=0$, то

$$\varphi(t,\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(t,\mathbf{r}')\,d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

Полевые степени свободы оказываются связаны с векторным потенциалом. *Запаздывающий векторный потенциал в калибровке Кулона* имеет вид

$$\mathbf{A}(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}_{\text{кулон}}(t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c},\mathbf{r}')\,d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad \mathbf{j}_{\text{кулон}} = \mathbf{j} - \tfrac{1}{4\pi k_{\text{к}}}\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Мы видим, что при малых скоростях векторный потенциал подавлен множителем $\frac{1}{c}$, что позволяет им пренебречь.

2.13.2 Обобщение теоремы Нётер

Теорема Нётер связала симметрию по отношению к бустам в СТО с теоремой о движении центра инерции (которая является законом сохранения).

Аналогично теорема Нётер должна связать симметрию по отношению к преобразованиям Галилея в ньютоновской механике с теоремой о движении центра масс (которая является законом сохранения).

Посмотрим, как меняется лагранжиан для системы дальнодействующих частиц при преобразовании Галилея, когда скорость старой системы отсчёта относительно новой составляет $\mathbf{V}=(s;0;0)$. Соответствующая симметрия имеет вид

$$\begin{aligned}
&x_a \to x_a + st, \quad y_a \to y_a, \quad z_a \to z_a,\\
&L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - \sum_{a<b} U_{ab}(|\mathbf{r}_a-\mathbf{r}_b|) \quad \to\\
\to \quad &L' = \sum_a \frac{m_a(\mathbf{v}_a+\mathbf{V})^2}{2} - \sum_{a<b} U_{ab}(|\mathbf{r}_a-\mathbf{r}_b|) = L + \left(\sum_a m_a v_{a,x}\right)s + \left(\sum_a m_a\right)\frac{s^2}{2}.
\end{aligned}$$

[1] Здесь мы приводим соответствующие формулы без вывода. С калибровкой Кулона и запаздывающими потенциалами мы познакомимся в главе 3.8 «Волновое уравнение для электромагнитного поля» (с. 348).

Этот случай не подпадает под условия теоремы Нётер в том виде, в котором мы получили её в п. 1.3.5.2 «Симметрия и закон сохранения» (с. 57), где $L' = L$. Теперь изменение функции Лагранжа не нуль, а полная производная по времени[2]:

$$L' - L = \frac{d}{dt}\sum_a \left(m_a x_a s + m_a \frac{s^2}{2} t \right).$$

Попробуем тем не менее обобщить выкладки со с. 57:

$$\frac{d}{ds} L' \Big|_{s=0} = \sum_a m_a v_{a,x} = \frac{d}{dt} \underbrace{\sum_a m_a x_a}_{A_s} = \frac{dA_s}{dt}.$$

Уравнение (1.3.11) на производную от лагранжиана по параметру симметрии теперь переписывается в следующем виде:

$$\frac{dA_s}{dt} = \frac{d}{ds} L(X(x,s), \dot{X}(x,s), t) = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x^\alpha}}_{\frac{d}{dt} p_\alpha} \frac{\partial X^\alpha}{\partial s} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}}_{p_\alpha} \underbrace{\frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial s \partial x^\beta} \dot{x}^\beta}_{\frac{d}{dt}\frac{\partial X^\alpha}{\partial s}} = \frac{d}{dt}\left(p_\alpha \frac{\partial X^\alpha}{\partial s} \right). \tag{2.13.1}$$

Мы не использовали конкретный вид функции A_s, так что мы получаем более общую формулировку теоремы Нётер.

Теорема Нётер (для симметрий, изменяющих лагранжиан).

Пусть задана однопараметрическая группа не зависящих от времени симметрий действия (симметрий функции Лагранжа) $x' = X(x,s)$, для которых

$$\frac{d}{ds} L(X(x,s), \dot{X}(x,s), t) = \frac{dA_s}{dt},$$

тогда величина

$$P_s := \left(p_\alpha \frac{\partial X^\alpha}{\partial s} - A_s \right) \Big|_{s=0} \tag{2.13.2}$$

не меняется вдоль удовлетворяющей уравнениям Эйлера–Лагранжа траектории системы, т.е. для этой величины действует закон сохранения.

Мы уже обсуждали, что если взять параметр симметрии s как одну из обобщённых координат, то

$$p_s = p_\alpha \frac{\partial X^\alpha}{\partial s} \Big|_{s=0}$$

— это обобщённый импульс по координате s.

Величина

$$P_s := p_s - A_s$$

по форме соответствует *удлинённому импульсу*, который получается из обобщённого импульса вычитанием вклада векторного потенциала, чтобы остался только кинематический импульс.

При такой симметрии действие получает добавку, связанную с изменением величины A_s:

$$S[x^\alpha(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L\, dt \quad \to \quad S'[x^\alpha(t)] = S[x^\alpha(t)] + A_s(t_1) - A_s(t_0).$$

Получается, что функция Лагранжа не сохраняется, но сохраняется действие для временно́го интервала (t_0, t_1), если $A_s(t_0) = A_s(t_1)$. Можно сказать, что действие при такой симметрии сохраняется, но вклад в него перераспределяется по оси времени.

В случае симметрии по отношению к преобразованию Галилея по оси x имеем

$$\frac{\partial X_a}{\partial s} = t, \quad \frac{\partial Y_a}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial Z_a}{\partial s} = 0,$$

$$A_s = \sum_a m_a x_a.$$

[2]Такая добавка не влияет на уравнения Эйлера–Лагранжа, поэтому наше преобразование всё равно может считаться симметрией.

Получается следующий интеграл движения:

$$P_s = \sum_a p_{a,x} t - \sum_a m_a x_a = M \left(v_{\text{ц.м. } x}\, t - x_{\text{ц.м.}} \right),$$

где

$$M = \sum_a m_a, \quad v_{\text{ц.м. } x} = \frac{\sum_a m_a v_{a,x}}{M}, \quad x_{\text{ц.м.}} = \frac{\sum_a m_a x_a}{M}.$$

Новый интеграл движения связан с координатой центра масс в момент времени $t = 0$:

$$P_s = -M x_{\text{ц.м.}}(0).$$

Теперь закон сохранения переписывается в привычном виде:

$$x_{\text{ц.м.}}(t) = x_{\text{ц.м.}}(0) + v_{\text{ц.м. } x}\, t.$$

Мы получили *теорему о движении центра масс* в проекции на ось x (вывод для y и z полностью аналогичен), а главное, мы получили более общую формулировку теоремы Нётер.

Глава 2.14

Неинерциальные системы отсчёта в СТО и ОТО (с. 138)

2.14.1 Неинерциальные системы отсчёта в СТО

В этой главе мы снова положим $c = 1$.

В геометрии Минковского движение с постоянной скоростью геометрически выделено — ему соответствуют прямые мировые линии. Так что неинерциальным системам отсчёта в СТО соответствуют криволинейные координаты. Обширность темы криволинейных координат вынуждает нас ограничиться отдельными примерами.

2.14.1.1 Ускорение протяжённого тела

Рассмотрим движение частицы, мировой линией которой является гипербола:

$$t = \mathrm{sh}(a_0\tau)/a_0, \qquad x = \mathrm{ch}(a_0\tau)/a_0. \tag{2.14.1}$$

Здесь a_0 — масштабный фактор, параметр τ — это собственное время вдоль траектории. В правильности расстановки коэффициентов легко убедиться из соображений размерности: аргументы гиперболических функций должны быть безразмерными, а координаты (включая время) имеют размерность длины. Мы можем обратить a_0 в единицу, если в качестве единицы измерения длины и времени выбрать $1/a_0$.

Запишем радиус-вектор и первые две производные от него по параметру τ:

$$\underline{x} = \frac{1}{a_0}\begin{pmatrix} \mathrm{sh}(a_0\tau) \\ \mathrm{ch}(a_0\tau) \end{pmatrix}, \qquad \underline{u} = \frac{d\underline{x}}{d\tau} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(a_0\tau) \\ \mathrm{sh}(a_0\tau) \end{pmatrix}, \qquad \underline{w} = \frac{d\underline{u}}{d\tau} = a_0\begin{pmatrix} \mathrm{sh}(a_0\tau) \\ \mathrm{ch}(a_0\tau) \end{pmatrix}.$$

Физический смысл вектора $\underline{u}$ — релятивистская («четырёхмерная») скорость (единичная касательная в смысле метрики Минковского), а вектора $\underline{w}$ — релятивистское («четырёхмерное») ускорение (аналог вектора кривизны, $\underline{w}$ тоже всегда перпендикулярно $\underline{u}$, но уже в смысле метрики Минковского, т.е. $(\underline{u}, \underline{w}) = 0$).

При $a_0 = 1$ имеем $\underline{w} = \underline{x}$. При этом две гиперболы, на которых лежат концы векторов $\underline{x}$ и $\underline{w}$, сливаются в одну единичную гиперболу (конец вектора $\underline{u}$ оказывается на симметричной единичной гиперболе).

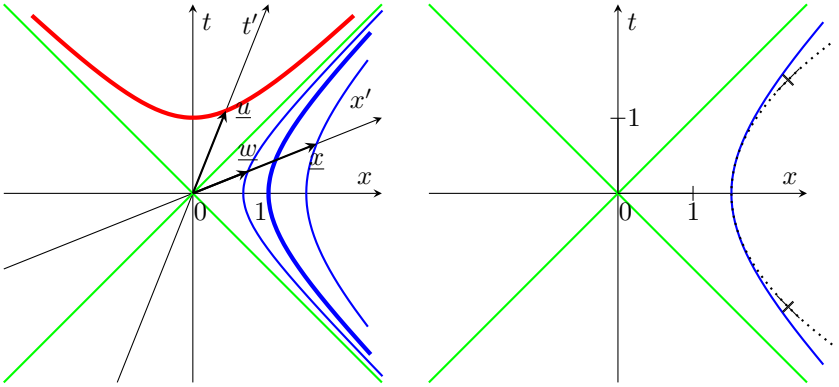
Домножив вектор скорости $\underline{u}$ на массу, получаем вектор релятивистского импульса $\underline{p} = m\underline{u}$. Компоненты релятивистского импульса — энергия $\mathcal{E} = p^0$ и обычный механический импульс по оси x:

$$p^x = m \cdot \mathrm{sh}(a_0\tau) = m \cdot a_0 \cdot t. \tag{2.14.2}$$

Импульс оказался пропорциональным времени. Это означает, что движение происходит под действием постоянной силы:

$$F^x = \frac{dp^x}{dt} = m_0 \cdot a_0. \tag{2.14.3}$$

Таким образом, гиперболическое движение является релятивистским аналогом равноускоренного движения под действием постоянной силы. Такое движение имеет место, например, в линейном ускорителе, где заряженная частица разгоняется вдоль прямой под действием постоянной силы, создаваемой однородным электрическим полем. На рисунке изображены мировые линии равноускоренной частицы согласно классической механике (парабола) и согласно СТО (гипербола). На классической мировой линии обозначены точки, когда частица достигает скорости света, и проведены касательные в этих точках. Видно, что кривые начинают заметно расходиться только на скоростях, сравнимых со скоростью света.



Слева: векторы $\underline{x}$, $\underline{u}$, $\underline{w}$ описывают гиперболы.
Справа: сравнение движения под действием постоянной силы в СТО (сплошная гипербола) и в классике (пунктирная парабола, отмечены моменты $|v| = c$)

Домножив вектор ускорения $\underline{w}$ на массу m, мы получим вектор релятивистской силы $\underline{f} = m_0\underline{w}$.

Заметим, что и в релятивистской механике, и в классической интеграл от силы («обычной» силы) по времени даёт изменение импульса, а по координате — изменение энергии (работу). Таким образом, при движении вдоль оси x под действием постоянной силы $\vec{F} = (F^x, 0, 0)$ в обоих случаях получаем

$$\mathcal{E} = F^x \cdot (x - x_0), \qquad p^x = F^x \cdot (t - t_0). \tag{2.14.4}$$

Однако в релятивистском и нерелятивистском случаях между энергией, импульсом и массой выполняются разные соотношения:

$$m^2 = \mathcal{E}^2 - \vec{P}^2 \quad \text{или} \quad E = \frac{\vec{P}^2}{2m}. \tag{2.14.5}$$

Подставив в эти соотношения выражения для энергии и импульса через силу, координату x и время, мы получаем уравнения движения под действием постоянной силы (релятивистское и классическое):

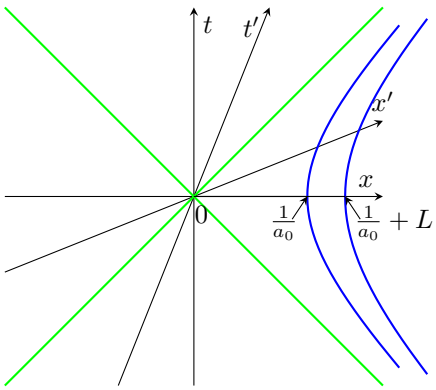
$$\left(\frac{m}{F^x}\right)^2 = (x - x_0)^2 - (t - t_0)^2 \quad \text{или} \quad x - x_0 = \frac{F^x(t - t_0)^2}{2m}. \tag{2.14.6}$$

Если наблюдатель ускоряется под действием постоянной силы вдоль прямой, то удобно в каждый момент времени брать новую систему отсчёта, такую, чтобы наблюдатель оставался на оси x' (положительной полуоси), т.е. (в силу свойств гиперболы) имел нулевую скорость. Тогда в любой момент времени в соответствующей системе отсчёта имеем

$$\underline{x}' = (0, 1/a_0), \qquad \underline{u}' = (1, 0), \qquad \underline{w}' = (0, a_0). \tag{2.14.7}$$

Напомним, что релятивистская скорость с компонентами $(1, 0)$ как раз соответствует нулевой обычной скорости, т.к. ненулевая компонента — временна́я (во времени нельзя остановиться).

Таким образом, для нашего наблюдателя все моменты времени тоже оказались равноценными, а значит, для него гиперболическое движение — равноускоренное.



Мировые линии носа (гипербола большего радиуса) и хвоста (гипербола меньшего радиуса) ракеты.
Гиперболические секторы, вырезанные осями x и x', подобны

Пусть теперь наш наблюдатель ускоряется не сам по себе, а в ракете, которая имеет ненулевую длину. После того как двигатели ракеты начали работать, вошли в стабильный режим, в корпусе ракеты затихли все вибрации, мы можем вспомнить, что все моменты времени для равноускоренного наблюдателя

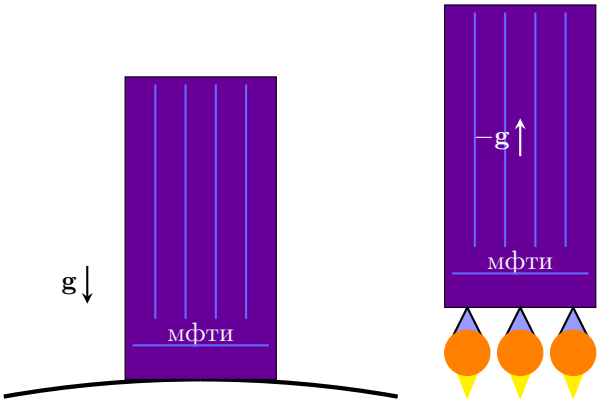
равноправны, а значит, для него длина ракеты должна быть постоянна. Только длину эту надо откладывать вдоль оси x' системы, в которой наблюдатель сию секунду покоится (x' — линия одновременных событий для наблюдателя). А в качестве масштаба можно брать радиус-вектор $\underline{x}$. Вот и получается, что если наблюдатель сидит в хвосте ракеты, то мировая линия носа ракеты — концентрическая гипербола, получающаяся из мировой линии хвоста преобразованием подобия (гомотетия) с коэффициентом

$$k = \frac{L + 1/a_0}{1/a_0}, \tag{2.14.8}$$

где L — длина ракеты, а $\frac{1}{a_0}$ — длина радиус-вектора $\underline{x}$ (т.к. $(\underline{x}, \underline{x}) = (\frac{1}{a_0})^2$).

При таком преобразовании имеем

$$a_0 \to a_0/k, \quad \underline{x} \to k \cdot \underline{x}, \quad \underline{w} \to \underline{w}/k. \tag{2.14.9}$$



КПМ ничуть не хуже ракеты! За неимением ракеты, в соответствии с принципом эквивалентности, используем высокое здание в поле силы тяжести.

Мы получили, что **нос ракеты движется с меньшим ускорением, чем хвост, и время на носу течёт быстрее!** Можем ли мы проверить это «на подручных материалах», не имея под рукой ракеты? За неимением ракеты попробуем обойтись высоким зданием (возьмём, к примеру, КПМ[1]). Согласно принципу эквивалентности (это уже из общей теории относительности (ОТО)) равномерно ускоренная система и система в однородном гравитационном поле на малых расстояниях ведут себя одинаково, поэтому КПМ в гравитационном поле Земли ничуть не хуже равноускоренной ракеты в космосе:

$$\begin{aligned}
&a_0 = g \approx 9{,}8\,\text{м/с}^2 = 1{,}03\,\text{св. год/год}^2,\\
&\frac{c^2}{a_0} \approx 0{,}97\,\text{св. год} = 0{,}92 \cdot 10^{16}\,\text{м},\\
&L_{\text{КПМ}} \approx 35\,\text{м},\\
&k = 1 + \frac{gL_{\text{КПМ}}}{c^2} \approx 1 + 4 \cdot 10^{-15}.
\end{aligned} \tag{2.14.10}$$

Удивительно, что столь ничтожное ускорение времени на крыше по сравнению с первым этажом экспериментаторы могут измерить.

2.14.1.2 Полярные координаты на плоскости Минковского

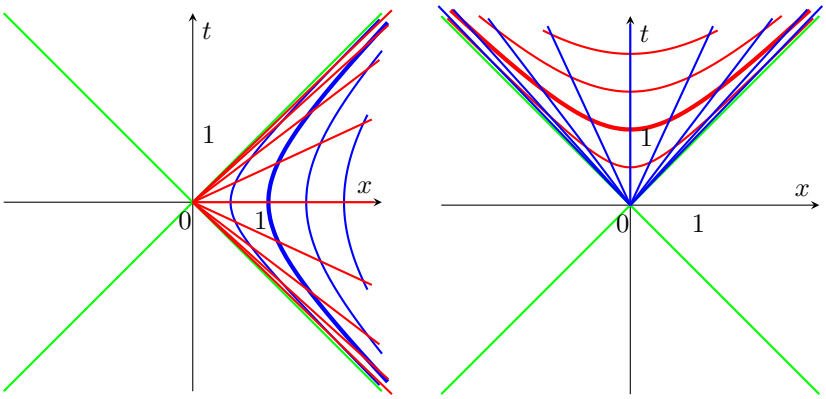
Нарисуем теперь неинерциальную систему координат, связанную с наблюдателем и в каждый момент времени *по часам наблюдателя* совпадающую с системой, относительно которой наблюдатель неподвижен. Это означает, что от каждой мгновенной системы наблюдатель берёт лишь множество одновременных ему точек — ось x'. На рисунке изображены линии постоянных значений координаты $\rho = \text{const}$ и времени $\vartheta = \text{const}$ для этой системы. Время ϑ соответствует часам, для которых $\rho = 1$.

Мы получили гиперболический аналог полярных координат. Есть и другой аналог, в котором x и t описываются симметричным образом:

$$\begin{array}{ll}
\left\{\begin{array}{rcl} t &=& \rho\,\text{sh}\,\vartheta,\\ x &=& \rho\,\text{ch}\,\vartheta,\end{array}\right. & \left\{\begin{array}{rcl} t &=& \tau\,\text{ch}\,\xi,\\ x &=& \tau\,\text{sh}\,\xi,\end{array}\right.\\
\rho \in (0, +\infty), & \tau \in (0, +\infty),\\
\vartheta \in (-\infty, +\infty), & \xi \in (-\infty, +\infty),\\
ds^2 = d\rho^2 - \rho^2 d\vartheta^2, & ds^2 = \tau^2 d\xi^2 - d\tau^2.
\end{array}$$

[1] Специально для читателей, незнакомых с МФТИ: КПМ — корпус прикладной математики МФТИ в Долгопрудном. Известен также как «чернильница» по причине фиолетового цвета.

Обе системы координат покрывают одну четверть плоскости между двумя времениподобными лучами.



Два аналога полярных координат в плоскости Минковского.
Линии $\vartheta = \text{const}$ и $\xi = \text{const}$ (лучи) проведены для констант от -2 до $+2$ с шагом 0,5.
Линии $\rho = \text{const}$ и $\tau = \text{const}$ (гиперболы) проведены для констант от 0 до $+2$ с шагом 0,5

Первая система связана с набором частиц, движущихся под действием постоянной силы $\frac{m}{\rho}$. Их мировые линии — концентрические гиперболы. Их часы показывают собственное время $\rho\vartheta$. С точки зрения инерциальной системы координат, которая в данный момент времени движется с той же скоростью, что и частица, линии $\vartheta = \text{const}$ — линии постоянного времени, а расстояния между частицами $\rho_1 - \rho_2$ постоянны. Такая система координат — естественный аналог равноускоренной системы отсчёта в ньютоновской механике. Чтобы увидеть это соответствие, надо рассмотреть узкую полоску между двумя близкими гиперболами.

Вторая система связана с набором частиц, которые в нулевой момент времени вылетели из начала координат со всеми возможными скоростями и далее летят с постоянной скоростью $\operatorname{th}\xi$. Их часы показывают время τ. Координата ξ соответствует интервалу, измеренному вдоль гиперболы $\tau = 1$. Такую систему координат можно назвать *координатами, связанными с облаком осколков взрыва.*

2.14.2 Движение медленной частицы в метрике, близкой к метрике Минковского

Рассмотрим действие для свободной частицы в криволинейных пространственно-временных координатах в следующей форме (2.10.10):

$$S[X^i(\tau)] = \int \frac{m}{2}\, g_{ij}(X(\tau))\, \frac{dX^i}{d\tau}\frac{dX^j}{d\tau}\, d\tau.$$

Это действие описывает движение частицы в неинерциальной (криволинейной) системе отсчёта в СТО, а также в ОТО.

Для нерелятивистского предела можно положить $t \approx \tau$, $\frac{dX^i}{d\tau} \approx \frac{dX^i}{dt} = (1; \mathbf{v})$. Метрика g_{ij} представляется как сумма метрики Минковского η_{ij} и малой поправки h_{ij}: $g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}$. Действие приобретает вид

$$\begin{aligned} S[X^i(\tau)] \;&\approx\; S[\mathbf{r}(t)] = \int \frac{m}{2}\,[\eta_{ij} + h_{ij}]\;\frac{dX^i}{dt}\frac{dX^j}{dt}\,dt = \\ &= \int \frac{m}{2}\,[(\underbrace{\eta_{00}}_{-1} + \underbrace{h_{00}}_{-2\varphi_{\text{гр.}}}) + 2(\underbrace{\eta_{0\alpha}}_{0} + \underbrace{h_{0\alpha}}_{A_{\text{гр.}\alpha}})v^\alpha + (\underbrace{\eta_{\alpha\beta}}_{\delta_{\alpha\beta}} + h_{\alpha\beta})v^\alpha v^\beta]\,dt = \\ &= \int \left[-m(\varphi_{\text{гр.}} + \tfrac{1}{2}) + m(\mathbf{A}_{\text{гр.}}, \mathbf{v}) + \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^\alpha h_{\alpha\beta} v^\beta}{2}\right] dt. \end{aligned}$$

Мы видим, что функция Лагранжа состоит из стандартной кинетической энергии $\frac{mv^2}{2}$, стандартных членов взаимодействия со скалярным и векторным гравитационными потенциалами и добавки $\frac{mv^\alpha h_{\alpha\beta} v^\beta}{2}$.

Только последняя добавка является для нас новой. Её вклад в уравнения Эйлера-Лагранжа в интересующем нас приближении имеет вид

$$\frac{\delta S_{\text{доб.}}}{\delta X^\alpha} \approx -\frac{d}{dt}[m h_{\alpha\beta} v^\beta] \approx -m\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial t}\, v^\beta.$$

Мы удержали по скорости члены не выше линейного порядка и пренебрегли ускорением.

Введены следующие обозначения (скорость света добавлена в формулы из соображений размерности):

- $\varphi_{\text{гр.}}(x) = -\frac{c^2}{2} h_{00}$ — *скалярный потенциал* слабого гравитационного поля / поля сил инерции;
- $(\mathbf{A}_{\text{гр.}})_\mu(x) = c^2\, h_{0\mu}$ — *векторный потенциал* слабого гравитационного поля / поля сил инерции;
- $\mathbf{g} = -\operatorname{grad}\varphi_{\text{гр.}} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}_{\text{гр.}}}{\partial t}$ — *ускорение свободного падения* (создаётся гравитирующими телами и ускорением системы отсчёта);
- $\mathbf{h} = \operatorname{rot}\mathbf{A}_{\text{гр.}}$ — *гравимагнитное поле*, создаёт силу, аналогичную силе Кориолиса во вращающейся системе отсчёта в ньютоновской механике (создаётся движущимися, в том числе вращающимися, гравитирующими телами и вращением системы отсчёта);
- $2\hat{\gamma}_{\mu\alpha} = c\,\partial_0[h_{\mu\alpha}]$ — симметричная матрица *сил вязкого трения и самоускорения* (создаётся гравитационными волнами, которые излучаются ускоренными гравитирующими телами).

Получаем уравнение движения частицы в слабом гравитационном поле:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{g} + \frac{m}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{h}] - 2m(\hat{\gamma}\mathbf{v}). \tag{2.14.11}$$

Силы вязкого трения и самоускорения возникают при зависящем от времени изменении масштабов координат. Если координата растягивается, то возникает иллюзия замедления всех частиц, а если сжимается — иллюзия ускорения.

Для стационарной (не зависящей от времени) метрики ситуация упрощается:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{g} + m[\mathbf{v}\times\mathbf{h}],$$

причём поле ускорения свободного падения становится потенциальным: $\mathbf{g} = -\operatorname{grad}\varphi_{\text{гр.}}$.

Не стоит чрезмерно обольщаться сходством уравнения геодезической в слабом поле с уравнением движения для частицы в электромагнитном поле. Потенциал гравитационного поля (метрика) — симметричный тензор g_{ij} валентности $(0,2)$, тогда как потенциал электромагнитного поля $A_i = (-\varphi, \mathbf{A})$ — ковектор. У них разные трансформационные свойства, так что аналогия оказывается ограниченной.

В ОТО невозможно разделить гравитационные силы и силы инерции. В любой точке гравитационное поле можно обнулить выбором системы координат. Неустранимы только приливные эффекты — эффекты неоднородности гравитационного поля, связанные с кривизной пространства-времени (зависимостью параллельного переноса от траектории).

ОТО строится так, что все системы координат равноправны, а потому произвол в выборе системы координат соответствует заданию на пространстве-времени четырёх произвольных гладких функций (координат). Теория измерений (моделирование и анализ процесса измерения) в ОТО становится ещё более сложной, чем в специальной теории относительности.

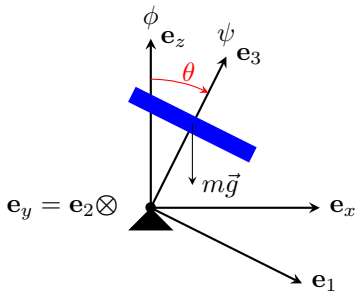
Глава 2.15

Гироскоп (с. 142)

2.15.1 Решение задачи 37

37. Юла.
Симметричный волчок с моментом инерции относительно точки опоры $I_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(I_1, I_1, I_3)$ массой m, центр масс которого отстоит от точки опоры на расстояние h, быстро вращается в гравитационном поле $\mathbf{g}$.

Условия отдельных пунктов и решения



Угол θ — отклонение оси гироскопа $\mathbf{e}_3$ от вертикали $\mathbf{e}_z$, ψ — угол поворота вокруг оси гироскопа $\mathbf{e}_3$, ϕ — угол поворота вокруг вертикали $\mathbf{e}_z$. Углы ψ и ϕ определены тем самым неоднозначно (с точностью до константы), но в силу симметрии системы (поскольку эти углы — циклические переменные) это не влияет на вид лагранжиана. Мы воспользовались этой неоднозначностью, чтобы выбрать момент времени, когда $\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_2$ (втыкаются в плоскость рисунка)

Угловая скорость гироскопа (в момент, когда $\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_2$) имеет вид

$$\boldsymbol{\omega} = \dot\theta \mathbf{e}_y + \dot\phi \mathbf{e}_z + \dot\psi \mathbf{e}_3 = -\dot\phi \sin\theta\, \mathbf{e}_1 + \dot\theta\, \mathbf{e}_2 + (\dot\psi + \dot\phi\cos\theta)\, \mathbf{e}_3.$$

Функция Лагранжа имеет стандартный вид: кинетическая энергия (квадратичная форма по обобщённым скоростям) минус потенциальная (функция от обобщённых координат),

$$L(\theta, \psi, \phi; \dot\theta, \dot\psi, \dot\phi) = \frac{(\dot\theta^2 + \dot\phi^2 \sin^2\theta) I_1}{2} + \frac{(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta)^2 I_3}{2} - mgh\, \cos\theta.$$

Переменные ϕ, ψ являются циклическими, следовательно, компоненты импульса p_ϕ, p_ψ сохраняются. Поскольку функция Лагранжа не зависит от времени, сохраняется также энергия.

Поскольку заменять сохраняющиеся величины константами мы можем в функции Гамильтона, но не в функции Лагранжа, перейдём к гамильтоновому формализму:

$$\begin{aligned} p_\theta &= \dot\theta\, I_1, \\ p_\psi &= (\dot\psi + \dot\phi\cos\theta) I_3, \\ p_\phi &= \dot\phi \sin^2\theta\, I_1 + \cos\theta \underbrace{(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta) I_3}_{p_\psi}. \end{aligned}$$

Функция Гамильтона имеет стандартный вид: кинетическая энергия (квадратичная форма по обобщённым импульсам) плюс потенциальная энергия (функция от обобщённых координат),

$$H(\theta,\psi,\phi;p_\theta,p_\psi,p_\phi)=\underbrace{\frac{p_\theta^2}{2I_1}+\frac{(p_\phi-\cos\theta\,p_\psi)^2}{2\sin^2\theta\,I_1}+\frac{p_\psi^2}{2I_3}}_{\mathcal{E}_{\text{кин.}}}+mgh\,\cos\theta.$$

Положив $p_\psi=c_\psi=\text{const}$ и $p_\phi=c_\phi=\text{const}$, мы получаем одномерную функцию Гамильтона, в которой вклад в кинетическую энергию, зависящий только от p_ψ, p_ϕ, выступает в роли добавки к эффективной потенциальной энергии $U_{\text{эфф}}(\theta)$:

$$H_{1d}(\theta;p_\theta)=\frac{p_\theta^2}{2I_1}+\underbrace{\frac{(c_\phi-\cos\theta\,c_\psi)^2}{2\sin^2\theta\,I_1}+\frac{c_\psi^2}{2I_3}+mgh\,\cos\theta}_{U_{\text{эфф}}(\theta)}.$$

а) Определите, при какой частоте ω_0 вертикальное положение оси перестанет быть устойчивым.
б) При частоте вращения $\omega>\omega_0$ определите частоту малых колебаний оси вращения около вертикали.

Вертикальное положение оси гироскопа ($\theta=0$) соответствует конечной энергии только в случае

$$p_\psi=p_\phi.$$

При вертикальном положении гироскопа $\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_z$, в результате чего угловые скорости $\dot\psi$ и $\dot\phi$ оказываются по отдельности не определены, определена только их сумма:

$$p_\psi|_{\theta=0}=p_\phi|_{\theta=0}=(\dot\psi+\dot\phi)I_3=\omega_0 I_3.$$

Эффективная потенциальная энергия в этом случае имеет вид

$$U_{\text{эфф}}(\theta)=\frac{\omega_0^2I_3^2(1-\cos\theta)^2}{2\sin^2\theta\,I_1}+\frac{\omega_0^2I_3}{2}+mgh\,\cos\theta=\frac{\omega_0^2I_3^2\,\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}{2I_1}+\frac{\omega_0^2I_3}{2}+mgh\,\cos\theta.$$

При малых углах $\theta\ll1$ получаем потенциал гармонического осциллятора с эффективной жёсткостью $k_{\text{эфф.}}$:

$$U_{\text{эфф}}(\theta)\approx\frac{\omega_0^2I_3^2\theta^2}{8I_1}+\frac{\omega_0^2I_3}{2}+mgh-\frac{mgh\theta^2}{2}=\underbrace{\frac{\omega_0^2I_3}{2}+mgh}_{\text{const}}+\underbrace{\left(\frac{\omega_0^2I_3^2}{4I_1}-mgh\right)}_{k_{\text{эфф.}}}\frac{\theta^2}{2}.$$

Таким образом, условие устойчивости гироскопа в вертикальном положении имеет вид

$$k_{\text{эфф.}}=\frac{\omega_0^2I_3^2}{4I_1}-mgh>0.$$

В роли массового коэффициента выступает I_1, так что частота малых колебаний гироскопа около вертикального положения составляет

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k_{\text{эфф.}}}{I_1}}=\omega_0\sqrt{\frac{I_3^2}{4I_1^2}-\frac{mgh}{I_1\omega_0^2}}.$$

(*) Мы рассматриваем близкие к гармоническим колебания с положением равновесия $\theta=0$:

$$\theta\approx\theta_0\,\cos(\omega_1t+\alpha).$$

При таком рассмотрении при переходе θ через ноль угол ϕ меняется непрерывно. Но это колебания около особой точки используемой системы координат. Если считать, что углы θ и $-\theta$ эквивалентны друг другу, то мы получим частоту малых колебаний $2\omega_1$, но при таком рассмотрении колебания не будут гармоническими:

$$\theta\approx\theta_0\left|\cos(\omega_1t+\alpha)\right|.$$

Кроме того, при таком рассмотрении в момент обращения θ в ноль угол ϕ меняется скачком на $\pm\pi$.

в)* При произвольной частоте вращения ω определите частоту вынужденной прецессии.

г)* При частоте вращения $\omega < \omega_0$ определите частоту нутации.

Обобщённая сила имеет вид

$$F(\theta_0) = -U'_{\text{эфф.}}(\theta) = \frac{mghI_1\,\sin^4\theta - (c_\phi - \cos\theta\, c_\psi)(c_\psi - \cos\theta\, c_\phi)}{I_1\,\sin^3\theta}.$$

Эффективная жёсткость как функция угла θ равна

$$k(\theta) = U''_{\text{эфф.}}(\theta) = \frac{c_\phi^2 + c_\psi^2 - 2c_\phi c_\psi\,\cos\theta}{I_1 \sin^2\theta} - \frac{3\cos\theta(c_\phi - \cos\theta\, c_\psi)(c_\psi - \cos\theta\, c_\phi)}{I_1 \sin^4\theta} - mgh\cos\theta.$$

Найти положение равновесия θ_0 можно из условия $F(\theta_0) = 0$, которое сводится к уравнению 4-й степени на $\cos\theta_0$:

$$\cos^4\theta_0 - (2+ab)\cos^2\theta_0 + (a^2+b^2)\cos\theta_0 + (1-ab) = 0, \qquad a = \frac{c_\psi}{\sqrt{mghI_1}}, \quad b = \frac{c_\phi}{\sqrt{mghI_1}}.$$

Однако мы можем найти равновесное значение θ_0 легче, исходя из того, что при $\theta = \theta_0$ вращение и прецессия идут равномерно:

$$\dot\psi = \omega_0 = \text{const}, \quad \dot\phi = \omega_{\text{пр.}} = \text{const},$$

$$\begin{aligned} c_\psi = p_\psi &= (\omega_0 + \omega_{\text{пр.}}\cos\theta_0)I_3, \\ c_\phi = p_\phi &= \omega_{\text{пр.}} I_1 \sin^2\theta_0 + c_\psi\cos\theta_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_\phi - c_\psi\cos\theta_0 &= \omega_{\text{пр.}} I_1 \sin^2\theta_0, \\ c_\psi - c_\phi\cos\theta_0 &= c_\psi\sin^2\theta_0 - \omega_{\text{пр.}} I_1 \sin^2\theta_0\cos\theta_0 = \sin^2\theta_0\,(\omega_0 I_3 + \omega_{\text{пр.}}(I_3 - I_1)\cos\theta_0) \end{aligned}$$

Уравнение на положение равновесия имеет вид

$$mghI_1\,\sin^4\theta - (c_\phi - \cos\theta\, c_\psi)(c_\psi - \cos\theta\, c_\phi) = I_1\sin^4\theta_0\Big(mgh - \omega_{\text{пр.}}\,(\omega_0 I_3 + \omega_{\text{пр.}}(I_3 - I_1)\cos\theta_0)\Big) = 0 \Rightarrow$$

Таким образом, частота прецессии связана с равновесным углом следующим соотношением:

$$\omega_{\text{пр.}}^2(I_3 - I_1)\cos\theta_0 + \omega_{\text{пр.}}\omega_0 I_3 - mgh = 0.$$

В «симметричном» случае $I_1 = I_3$ частота прецессии не зависит от угла:

$$\omega_{\text{пр.симм.}} = \frac{mgh}{\omega_0 I_3}.$$

В «несимметричном» случае $I_3 \neq I_1$ имеем

$$\omega_{\text{пр.}} = \frac{\omega_0 I_3}{2(I_3 - I_1)\cos\theta_0}\left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4mgh(I_3 - I_1)\cos\theta_0}{\omega_0^2 I_3^2}}\right).$$

Чтобы понять, откуда берутся две разные частоты прецессии, рассмотрим случай малого mgh:

$$\omega_{\text{пр.}} = \frac{\omega_0 I_3}{2(I_3 - I_1)\cos\theta_0}\left(-1 \pm \left[1 + \frac{2mgh(I_3 - I_1)\cos\theta_0}{\omega_0^2 I_3^2}\right]\right).$$

Получаются две частоты:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{пр.1}} &\approx -\omega_0\frac{I_3}{(I_3 - I_1)\cos\theta_0} - \frac{mgh}{\omega_0 I_3}, \\ \omega_{\text{пр.2}} &\approx \frac{mgh}{\omega_0 I_3}. \end{aligned}$$

Первая частота при выключении внешней силы ($g = 0$) остаётся отличной от нуля. Вторая частота при выключении внешней силы ($g = 0$) обнуляется.

Таким образом, первая частота — это частота *свободной прецессии* с поправкой за счёт внешней силы, а вторая частота — частота *вынужденной прецессии*.

Частота вынужденной прецессии, которую требуется найти в задаче, равна

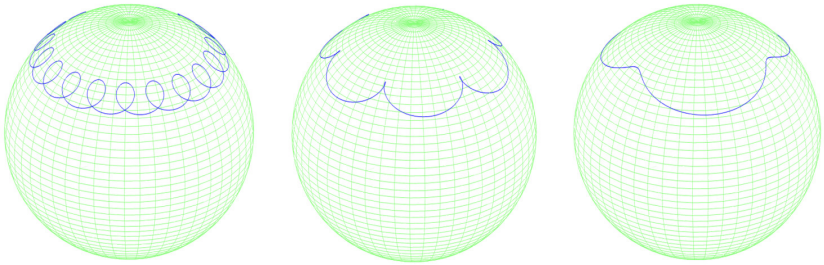
$$\omega_{\text{пр.2}} = \frac{\omega_0 I_3}{2(I_3 - I_1)\cos\theta_0}\left(\sqrt{1 + \frac{4mgh(I_3 - I_1)\cos\theta_0}{\omega_0^2 I_3^2}} - 1\right).$$

Малые колебания вблизи угла θ_0 (*нутация*) имеют частоту

$$\omega_{\text{нут.}} = \sqrt{\frac{k(\theta_0)}{I_1}}.$$

2.15.2 Электромагнитная аналогия для симметрического волчка

Траектория, описываемая осью волчка на поверхности сферы, очень похожа на траектории дрейфа заряженной частицы в скрещенных электрическом (или гравитационном) и магнитном полях в условиях $B \gg E$, $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$. Частица «падает» по электрическому полю, но магнитное поле её разворачивает, и частица поднимается до прежнего уровня, но со сдвигом в направлении $[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]$. При этом движение частицы — комбинация поступательного и кругового движения.



Траектория оси симметрического волчка при нутации одинаковой амплитуды и разных отношениях частот прецессии и нутации

Так и ось симметричного гироскопа «падает» в направлении, куда тянет её внешняя сила, но нутация разворачивает направление её движения.

Рассмотрим динамику симметрического волчка, для которого $I_1 = I_2 \neq I_3$ (относительно точки крепления) и центр масс лежит на 3-й собственной оси $\mathbf{e}_3$. Собственную ось $\mathbf{e}_3$ будем называть просто *осью волчка*.

Пусть точки приложения всех внешних сил лежат на оси волчка. При этом проекция момента внешних сил $\mathbf{K}$ на $\mathbf{e}_3$ равна нулю:

$$K_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad L_3 = I_3\Omega^3 = \text{const}.$$

Обозначим $\Omega^3 = \Omega$.

С учётом этого для полного описания движения волчка достаточно описать движение его оси $\mathbf{e}_3$, которое можно рассматривать как движение точки на поверхности единичной сферы.

Пусть $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{e}}_3$ — скорость точки на единичной сфере:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{e}}_3 = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3].$$

Здесь $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{e}_3$ — проекция угловой скорости волчка на плоскость, касательную к сфере в точке $\mathbf{e}_3$ (перпендикулярную $\mathbf{e}_3$).

Векторное умножение вектора, ортогонального $\mathbf{e}_3$, на единичный вектор $\mathbf{e}_3$ — это поворот на $\frac{\pi}{2}$. Так что мы можем сделать обратный поворот умножением на тот же единичный вектор $\mathbf{e}_3$ с другой стороны:

$$\boldsymbol{\omega} = [\mathbf{e}_3 \times \mathbf{v}].$$

Продифференцируем это равенство по времени:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = [\mathbf{v} \times \mathbf{v}] + [\mathbf{e}_3 \times \dot{\mathbf{v}}] = [\mathbf{e}_3 \times \dot{\mathbf{v}}] = [\mathbf{e}_3 \times \mathbf{a}_\parallel],$$

где $\mathbf{a}_\parallel = \dot{\mathbf{v}} - \mathbf{e}_3(\mathbf{e}_3, \dot{\mathbf{v}})$ — проекция ускорения точки $\mathbf{e}_3$ на касательную плоскость к сфере.

Аналогично можно поступить с вектором момента силы $\mathbf{K} = [r\mathbf{e}_3 \times \mathbf{F}] \perp \mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{f}_\parallel = [\mathbf{K} \times \mathbf{e}_3] = r\mathbf{F}_\parallel, \qquad \mathbf{F}_\parallel = \mathbf{F} - \mathbf{e}_3(\mathbf{e}_3, \mathbf{F}),$$

где $\mathbf{F}_\parallel$ — проекция силы на плоскость касательную к сфере $\perp \mathbf{e}_3$, а r — расстояние от точки крепления волчка до точки приложения силы.

Полный момент импульса (с учётом условия $I_1 = I_2$) равен

$$\mathbf{L} = \mathbf{e}_3 \underbrace{\Omega I_3}_{\text{const}} + \boldsymbol{\omega} I_1.$$

Скорость изменения момента импульса — момент силы:

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{v}\Omega I_3 + \dot{\boldsymbol{\omega}} I_1 = \mathbf{v}\Omega I_3 + [\mathbf{e}_3 \times \mathbf{a}_\parallel] I_1 = \mathbf{K}.$$

Векторно умножим это равенство на $\mathbf{e}_3$ справа:

$$[\mathbf{v} \times \mathbf{e}_3 \Omega I_3] + [[\mathbf{e}_3 \times \mathbf{a}_\parallel] \times \mathbf{e}_3] I_1 = [\mathbf{K} \times \mathbf{e}_3], \qquad [\mathbf{v} \times \mathbf{e}_3 \Omega I_3] + I_1 \mathbf{a}_\parallel = \mathbf{f}_\parallel.$$

Получаем уравнение движения в следующем виде:

$$I_1\mathbf{a}_\parallel = \mathbf{f}_\parallel + I_3[\mathbf{v}\times(-\mathbf{e}_3\Omega)] = \mathbf{f}_\parallel + \frac{I_3}{c}[\mathbf{v}\times(-c\Omega\mathbf{e}_3)] = \mathbf{f}_\parallel + \frac{q}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}].$$

Получившееся уравнение в точности соответствует уравнению движения нерелятивистской частицы с массой $m = I_1$ и электрическим зарядом $q = I_3$, закреплённой на поверхности единичной сферы в магнитном поле, направленном по радиусу сферы $\mathbf{B} = -c\Omega\mathbf{e}_3$, под действием внешней силы $\mathbf{f} = \mathbf{F}r$.

Проекция силы на нормаль к сфере не вошла в уравнение движения, так как частица закреплена на поверхности сферы и нормальная сила компенсируется силой реакции связи.

Мы получили искомое соответствие уравнений движения оси гироскопа и заряженной частицы в магнитном поле:

$$I_1\mathbf{a}_\parallel = \mathbf{f}_\parallel + \frac{I_3}{c}[\mathbf{v}\times(-c\Omega\mathbf{e}_3)] \quad\Leftrightarrow\quad m\mathbf{a}_\parallel = \mathbf{f}_\parallel + \frac{q}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}],$$
$$m = I_1, \quad q = I_3, \quad \mathbf{B} = -c\Omega\mathbf{e}_3.$$

Второй семестр

Часть III

Элементы теории колебаний и электродинамика (2-й семестр, основной материал)

Глава 3.1

Уравнение Гамильтона–Якоби* (с. 405)

3.1.1 Вывод уравнения Гамильтона–Якоби

Снова рассмотрим интеграл действия, но на этот раз будем считать его не функционалом, а функцией от конечных времени и координат[1] (начальные время и координаты зафиксируем), а интеграл будем брать по такой траектории, на которой выполняются уравнения движения $\frac{\delta S}{\delta x} = 0$:

$$S(T, X) = \int\limits_{t_0}^{T} L(x, \dot{x}, t)\, dt, \qquad x(t_0) = x_0, \quad x(T) = X.$$

Теперь действие зависит от конечного числа переменных, вместо *функционала действия* мы имеем *функцию действия*[2], и мы ищем для функции действия не вариацию, а дифференциал. Пусть сначала конечный момент T фиксирован. Сдвигая X, мы также должны изменить траекторию в промежуточные моменты времени так, чтобы уравнения движения продолжали выполняться. Изменение траектории в промежуточные моменты задаётся функцией

$$\delta x^\alpha(t), \qquad \delta x^\alpha(t_0) = dx_0^\alpha = 0, \quad \delta x^\alpha(T) = dX^\alpha.$$

$$dS = \int\limits_{t_0}^{T} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\, \delta\dot{x}^\alpha + \frac{\partial L}{\partial x^\alpha}\, \delta x^\alpha \right) dt.$$

$$dS = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}}_{p_\alpha}\, \delta x^\alpha \Big|_{t_0}^{T} + \int\limits_{t_0}^{T} \underbrace{\left(-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} + \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} \right)}_{\frac{\delta S}{\delta x^\alpha(t)} = 0} \delta x^\alpha\, dt = p_\alpha(T)\, dX^\alpha.$$

Мы нашли частные производные по конечным координатам:

$$\frac{\partial S}{\partial X^\alpha} = p_\alpha(T).$$

Продифференцируем теперь действие по конечному времени T. Эту производную можно брать двумя очевидными способами: вдоль траектории системы (обозначим такую производную $\frac{d}{dT}$) и при фиксированном X (обозначим такую производную $\frac{\partial}{\partial T}$):

$$\frac{dS}{dT} = L(x(T), \dot{x}(T), T) = \frac{\partial S}{\partial T} + \underbrace{\frac{\partial S}{\partial X^\alpha}}_{p_\alpha(T)}\, \dot{x}^\alpha(T).$$

[1] Вопросы существования такой функции, её однозначности и гладкости мы обсуждать не будем.

[2] Действие можно записать как функцию от двух наборов числовых аргументов (t_0, x_0^α) и (t_1, x_1^α), задающих начальную и конечную точки траектории в расширенном фазовом пространстве, и одного набора функциональных аргументов $x^\alpha(t)$, $t \in (t_0, t_1)$, $x^\alpha(t_{0,1}) = x_{0,1}^\alpha$:

$$S(t_0, x_0^\alpha, t_1, x_1^\alpha)[x^\alpha(t)].$$

При рассмотрении функционала действия мы фиксировали числовые аргументы:

$$S[x^\alpha(t)] = S(t_0 = \text{const}, x_0^\alpha = \text{const}, t_1 = \text{const}, x_1^\alpha = \text{const})[x^\alpha(t)].$$

Теперь для определения функции действия мы фиксируем начальную точку и выражаем траекторию через граничные точки:

$$S(T, X^\alpha) = S(t_0 = \text{const}, x_0^\alpha = \text{const}, T, X^\alpha)[x^\alpha(t) = x^\alpha(t_0, x_0^\alpha, T, X^\alpha; t)].$$

Отсюда находим[3]

$$\frac{\partial S}{\partial T} = L(x(T), \dot{x}(T), T) - p_\alpha(T)\,\dot{x}^\alpha(T) = -\mathcal{E}(T).$$

Теперь мы можем написать дифференциал по конечной точке траектории так:

$$dS = p_\alpha(T)\,dX^\alpha - \mathcal{E}(T)\,dT \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial S}{\partial X^\alpha} = p_\alpha(T), \quad \frac{\partial S}{\partial T} = -\mathcal{E}(T).$$

Энергия равна функции Гамильтона:

$$H(X^\alpha, p_\alpha(T), T) = \mathcal{E}(T).$$

Мы можем подставить в это равенство энергию и импульс, выраженные через производные от $S(X,T)$, и получим дифференциальное уравнение в частных производных, которое называется *уравнение Гамильтона–Якоби*[4]:

$$\frac{\partial S}{\partial T} + H\left(X^\alpha, \frac{\partial S}{\partial X^\alpha}, T\right) = 0. \tag{3.1.1}$$

(!) Мы вывели уравнение Гамильтона–Якоби для *пучка траекторий*, выходящих из фиксированной точки x_0 в момент времени t_0. Не всякое решение уравнения Гамильтона–Якоби будет соответствовать именно такому пучку траекторий.

Для того чтобы показать, что и другим решениям будет соответствовать некоторый пучок траекторий, **сделаем проверку**. Для всякого решения $S(x,t)$ мы можем найти $p_\alpha(x,t) = \frac{\partial S}{\partial x^\alpha}$. Продифференцируем импульсы вдоль некоторого поля скоростей $\dot{X}^\beta$ (пока это поле не определено):

$$\begin{aligned}
\dot{p}_\alpha = \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial t}\right)_x + \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial x^\beta}\right)_t \dot{X}^\beta = \frac{\partial^2 S}{\partial t\,\partial x^\alpha} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}\dot{X}^\beta = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}\dot{X}^\beta = \\
= -\frac{\partial}{\partial x^\alpha} H\left(x^\alpha, \frac{\partial S}{\partial x^\alpha}, t\right) + \frac{\partial^2 S}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}\dot{X}^\beta = -\left(\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}\right)_p - \frac{\partial H}{\partial p_\beta}\frac{\partial^2 S}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}\dot{X}^\beta = \\
= -\left(\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}\right)_p + \frac{\partial^2 S}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}\left(\dot{X}^\beta - \frac{\partial H}{\partial p_\beta}\right).
\end{aligned}$$

Мы видим, что если выбрать поле скоростей, которое удовлетворяет уравнениям Гамильтона $\dot{X}^\beta = \frac{\partial H}{\partial p_\beta}$, то импульсы также удовлетворяют уравнениям Гамильтона $\dot{p}_\alpha = -\left(\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}\right)_p$. Отсюда мы получаем в расширенном конфигурационном пространстве поле $\dot{X}^K(x,t) = (\dot{X}^\beta, \dot{p}_\alpha)$, из которого находится пучок траекторий, удовлетворяющих уравнениям Гамильтона.

3.1.2 Зачем нужно уравнение Гамильтона–Якоби*

(*) Для уравнения Гамильтона–Якоби есть *гидродинамическая аналогия*. На него можно смотреть как на описание течения жидкости в конфигурационном пространстве. Каждая частица жидкости представляет систему, которая эволюционирует по своей траектории.

(*) Одним из мотивов получения уравнения Гамильтона–Якоби было проведение аналогии между механикой и оптикой. Вместо того чтобы рассматривать в конфигурационном пространстве траектории системы, рассматривают волну, описываемую функцией $S(X,T)$. Долгое время эта *оптическая аналогия* считалась неполной и случайной, поскольку уравнение Гамильтона–Якоби позволяло воспроизвести геометрическую оптику, но не волновую. Однако в начале XX века при создании квантовой механики оказалось, что аналогией волновой оптики является не классическая механика, а квантовая. В квантовой механике волна в конфигурационном пространстве — это волновая функция, действие задаёт её фазу $S/\hbar$, уравнение Гамильтона–Якоби приобретает квантовые поправки. Если считать эти поправки малыми, то можно построить *квазиклассическое приближение*. В квантовой механике также развивается *гидродинамическая аналогия*, в которой волновая функция описывается как течение жидкости в конфигурационном пространстве.

Уравнение Гамильтона–Якоби — это, как правило, нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных. Решать его вместо системы обыкновенных дифференциальных уравнений (уравнений движения) на первый взгляд кажется усложнением задачи. Тем не менее для ряда задач решение уравнения Гамильтона–Якоби оказывается проще.

---

[3] Если рассматривать время как дополнительную координату, то можно сразу написать $\frac{\partial S}{\partial T} = p_0(T) = -\mathcal{E}(T)$.

[4] Любители рассматривать время как координату могут использовать расширенную функцию Гамильтона, которая обращается в нуль на энергетической поверхности $\mathcal{H}(x^i, p_i) = 0$, и подставить в неё $p_i = \frac{\partial S}{\partial X^i}$ $(i = 0, 1, \ldots, D)$.

3.1.3 Что делать с решением уравнения Гамильтона–Якоби*

Если мы нашли решение уравнения Гамильтона–Якоби $S(X^\alpha, T)$ ($\alpha = 1, \ldots, D$):

$$\frac{\partial S}{\partial T} + H\left(X^\alpha, \frac{\partial S}{\partial X^\alpha}, T\right) = 0,$$

то мы можем восстановить одну траекторию, которая проходит через точку X в момент времени T и соответствует данному решению.

Чтобы найти общее решение, проходящее через X в момент T, надо иметь возможность восстановить семейство траекторий, проходящих через (X, T) и имеющих в этот момент разные импульсы. Число компонент импульса, которые надо задать, равно D, так что нам нужно D-параметрическое семейство решений уравнения Гамильтона–Якоби

$$S(X^\alpha, T, a_\alpha), \qquad \alpha = 1, \ldots, D.$$

Здесь a_α — параметры решения. Поскольку параметры решения должны параметризовать значения импульсов[5], нужно наложить условие невырожденности

$$\det \frac{\partial p_\alpha}{\partial a_\beta} = \det \frac{\partial^2 S}{\partial X^\alpha \partial a_\beta} \neq 0.$$

Такое D-параметрическое решение называется *полным интегралом уравнения Гамильтона–Якоби*[6].

(!) Условие невырожденности гарантирует взаимнооднозначность соответствия $p \leftrightarrow a$ только локально. При этом локальность имеется в виду как по координатам, так и по импульсам. Таким образом, «общее решение», которое мы хотим восстановить, будет общим только в некоторой окрестности точки $(X^\alpha, \frac{\partial S}{\partial X^\alpha})$ в фазовом пространстве.

Параметры a_α по построению оказываются интегралами движения. Ещё D интегралов движения можно найти так. Продифференцируем по a_β уравнение Гамильтона–Якоби:

$$\frac{\partial}{\partial a_\beta}\frac{\partial S}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial a_\beta} H\left(X^\alpha, \frac{\partial S}{\partial X^\alpha}, T\right) = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial S}{\partial a_\beta} + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}}_{\dot X^\alpha}\frac{\partial}{\partial a_\beta}\frac{\partial S}{\partial X^\alpha} = \frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial S}{\partial a_\beta} + \dot X^\alpha \frac{\partial}{\partial X^\alpha}\frac{\partial S}{\partial a_\beta} = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial T} + \dot X^\alpha \frac{\partial}{\partial X^\alpha}\right)}_{\frac{d}{dT}}\frac{\partial S}{\partial a_\beta} = 0.$$

Мы получили ещё D интегралов движения[7]

$$b^\alpha = \frac{\partial S}{\partial a_\alpha}, \qquad \frac{db^\alpha}{dT} = 0.$$

Всего у нас имеется $2D$ интегралов движения a_α и b^α.

Имея $2D$ интегралов движения, мы имеем $2D$ уравнений с $2D$ неизвестными X^α и p_α:

$$p_\alpha = \frac{\partial}{\partial X^\alpha} S(X, T, a), \qquad b^\beta = \frac{\partial}{\partial a_\beta} S(X, T, a).$$

Это уже не интегральные уравнения, а алгебраические (известную функцию $S(X, T, a)$ мы дифференцировать умеем), так что с точки зрения теории дифференциальных уравнений задача нахождения решения уравнений Гамильтона решена (сведена к решению системы алгебраических уравнений).

3.1.4 Решение уравнения Гамильтона–Якоби методом разделения переменных*

Метод разделения переменных для уравнения Гамильтона–Якоби основывается на двух исходных пунктах.

[5] Таким образом, a_α выступают в роли новых обобщённых импульсов.

[6] Это не общее решение уравнения Гамильтона–Якоби, т.к. общее решение уравнения в частных производных должно содержать произвольные функции, но для наших целей такого решения достаточно, поэтому его и называют полным интегралом.

[7] В главе 4.1 мы покажем, что a_α и b^β вместе образуют канонические координаты в фазовом пространстве: a_α — обобщённые импульсы, b^β — обобщённые координаты.

1. Ищем решение в виде суммы функций, каждая из которых зависит от одной координаты[8]:
$$S(X^\alpha, T, a_\alpha) = S_0(T, a_\alpha) + S_1(X^1, a_\alpha) + S_2(X^2, a_\alpha) + \cdots + S_D(X^D, a_\alpha). \tag{3.1.2}$$

2. Если две функции (возможно, неявные!) от разных наборов переменных равны друг другу, то они равны константе:
$$f(x) = g(y) \quad \Rightarrow \quad f(x) = g(y) = a = \text{const}. \tag{3.1.3}$$
Для неявного задания функции $g(x)$ имеем
$$G(x, f(y)) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(y) = a = \text{const}, \quad G(x, a) = 0. \tag{3.1.4}$$

Удобно считать, что $t = X^0$, и использовать два сорта индексов: $\alpha, \beta = 1, \ldots, D$, $i, j = 0, 1, \ldots, D$.

Если подставить выражение (3.1.2) в уравнение Гамильтона–Якоби, то мы получаем, что каждая из производных вида $\frac{\partial S}{\partial X^\alpha}$ берётся от своего слагаемого:
$$\frac{\partial S_0}{\partial T} + H\left(X^\alpha, \frac{\partial S_\alpha}{\partial X^\alpha}, T\right) = 0. \tag{3.1.5}$$

Если удалось преобразовать уравнение к виду (3.1.4), когда все вхождения какой-то координаты и соответствующего импульса оказались включены в один блок (здесь по повторяющимся индексам нет суммирования!), то этот блок заменяется константой, что сокращает количество переменных в уравнении на одну:
$$G\left(X^i|_{i\neq i_1}, \left.\frac{\partial S_i}{\partial X^i}\right|_{i\neq i_1}, \underbrace{f_{i_1}\left(X^{i_1}, \frac{\partial S_{i_1}}{\partial X^{i_1}}\right)}_{a_{i_1}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad G\left(X^i|_{i\neq i_1}, \left.\frac{\partial S_i}{\partial X^i}\right|_{i\neq i_1}, a_{i_1}\right) = 0, \;\; f_{i_1}\left(X^{i_1}, \frac{\partial S_{i_1}}{\partial X^{i_1}}\right) = a_{i_1}.$$

После того как исключили переменную X^{i_1}, может оказаться, что в уравнении
$$G\left(X^i|_{i\neq i_1}, \left.\frac{\partial S_i}{\partial X^i}\right|_{i\neq i_1}, a_{i_1}\right) = 0$$
аналогичным образом отделяется какая-то ещё переменная.

Если переменные удаётся разделить до конца, то вместо одного дифференциального уравнения в частных производных мы получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида
$$f_{i_1}\left(X^{i_1}, \frac{\partial S_{i_1}}{\partial X^{i_1}}, a\right) = a_{i_1} \qquad (i_1 \text{ фиксировано}). \tag{3.1.6}$$

Чем такие уравнения лучше, чем исходные уравнения движения частицы? Здесь в каждое уравнение входит только одна неизвестная функция и оно решается в квадратурах. Решаем уравнение (3.1.6) относительно $\frac{\partial S_{i_1}}{\partial X^{i_1}}$ и интегрируем по X^{i_1}:
$$\frac{\partial S_{i_1}}{\partial X^{i_1}} = F_{i_1}(X^{i_1}, a), \qquad S_{i_1}(X^{i_1}, a) = \int F_{i_1}(X^{i_1}, a)\, dX^i.$$

(!) Для разделения переменных очень важен удачный выбор системы координат. Например, при решении задачи о движении пробной частицы в гравитационном поле двух неподвижных точечных масс переменные разделяются в эллиптических координатах.

(*) Если мы получили уравнение вида
$$G\left(f_0\left(X^0, \frac{\partial S_0}{\partial X^0}\right), f_1\left(X^1, \frac{\partial S_1}{\partial X^1}\right), \ldots, f_D\left(X^D, \frac{\partial S_D}{\partial X^D}\right)\right) = 0,$$
то все переменные разделяются сразу. Бывают ситуации, когда переменные приходится разделять по одной, например, уравнение может иметь вид «матрёшки»:
$$G\left(f_0\left(X^0, \frac{\partial S_0}{\partial X^0}, f_1\left(X^1, \frac{\partial S_1}{\partial X^1}, \ldots, f_D\left(X^D, \frac{\partial S_D}{\partial X^D}\right)\right)\right)\right) = 0.$$

(*) Может оказаться, что в один блок выделятся не одна координата X^{i_1} и соответствующий импульс $\frac{\partial S_{i_1}}{\partial X^{i_1}}$, а несколько координат и соответствующие им импульсы. Тогда мы всё равно можем отделить эти переменные от остальных, но, возможно, не сможем разделить переменные до конца. Такое частичное разделение переменных тоже может оказаться полезным.

[8] Гамильтоновы системы, для которых это возможно, называют *интегрируемыми гамильтоновыми системами*. Но для интегрируемой системы надо ещё как-то угадать правильную систему координат. При этом функции, задающие переход к нужным координатам, не обязательно задаются аналитическими формулами.

3.1.5 Задачи 38, 39

Общее описание решения уравнения Гамильтона-Якоби методом разделения переменных несложно, но без примеров суховато. Простые примеры лучше всего рассмотреть в качестве задач.

Такие простые (местами тривиальные) задачи вы найдёте в этом параграфе.

Большой красивый (и сложный) пример решения уравнения Гамильтона–Якоби для пробной частицы в гравитационном поле двух притягивающих центров вы найдёте в следующем параграфе (под двумя звёздочками, т.е. как углубленный материал), этот пример хорошо демонстрирует большие возможности метода, но для начинающего это решение содержит слишком много деталей, затемняющих существо задачи.

Поэтому для тренировки рассмотрим несколько простых примеров, которые легко могли бы быть решены и без уравнения Гамильтона–Якоби.

Задача 38. Уравнение Гамильтона–Якоби. Для нерелятивистской частицы решите уравнение Гамильтона–Якоби, постройте общее решение уравнений движения, обсудите физический смысл найденных законов сохранения.
а) Свободная частица на плоскости в декартовых координатах.
б) Свободная частица на плоскости в полярных координатах.
в) Частица на плоскости в центральном потенциале $U(r)$ в полярных координатах.
г) Частица в пространстве в центральном потенциале $U(r)$ в сферических координатах.
д) Частица в однородном магнитном поле. Поле удобно описать вектор-потенциалом $\mathbf{A} = (-By, 0, 0)$.
е) Частица в скрещенных полях, как в задаче 31. Поля удобно описать потенциалами $\varphi = -Ey$ и $\mathbf{A} = (-By, 0, 0)$.

Задача 39. Уравнение Гамильтона–Якоби для релятивистской частицы. Решите задачу 38 для релятивистской частицы. (Симметрии в обоих случаях одинаковые, так что решения легко переносятся.)

3.1.6 Пробная частица в поле двух неподвижных точечных масс**

Разберём как пример решение уравнения Гамильтона–Якоби для пробной частицы в гравитационном поле двух точечных неподвижных гравитирующих центров.

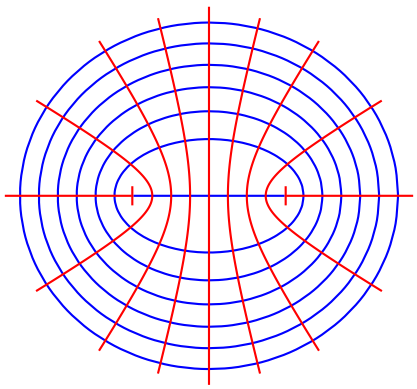
Пусть расстояние между центрами составляет $2c$. Выберем начало координат посередине между гравитирующими центрами и проведём через них ось z.

Гамильтониан пробной частицы в декартовых координатах имеет вид

$$H(\mathbf{r},\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{mM_1}{R_1} - \frac{mM_2}{R_2}, \qquad \text{где } R_1 = \sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2}, \quad R_2 = \sqrt{x^2+y^2+(z+c)^2}.$$

Нам понадобятся *эллиптические координаты*:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{R_2+R_1}{2} \in [c,+\infty), \\ \eta &= \frac{R_2-R_1}{2} \in [-c,+c], \\ \phi &: \quad x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi, \quad \text{где} \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2}. \end{aligned}$$



Эллиптические координаты. Обратите внимание на то, что линии ортогональны.

Линии $\xi = \text{const}$ (отрезок между фокусами и эллипсы, ξ/c от 1 до 2,5 с шагом 0,25).
Линии $\eta = \text{const}$ (два луча, прямая, гиперболы, η/c от -1 до 1 с шагом 0,25).

Сразу выражаем расстояния до притягивающих центров и переписываем потенциальную энергию:

$$R_1 = \xi - \eta, \quad R_2 = \xi + \eta \quad \Rightarrow \quad U = -\frac{mM_1}{\xi - \eta} - \frac{mM_2}{\xi + \eta} = -\frac{m(M_1 + M_2)\xi + m(M_1 - M_2)\eta}{\xi^2 - \eta^2}.$$

Чтобы переписать кинетическую энергию в новых координатах и импульсах, нам понадобится обратная метрика:

$$\mathcal{E}_\text{к} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} = \frac{g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta}{2m}.$$

Получим сначала прямую метрику, выразив элемент длины через гиперболические координаты q^α:

$$d\ell^2 = \underbrace{dx^2 + dy^2 + dz^2}_{\text{в декартовых коорд.}} = \underbrace{d\rho^2 + dz^2 + \rho^2\, d\phi^2}_{\text{в цилиндрических коорд.}} = g_{\alpha\beta}\, dq^\alpha dq^\beta.$$

Для этого нам надо выразить старые координаты через новые:

$$\begin{aligned} R_1^2 &= x^2 + y^2 + (z - c)^2 = \rho^2 + z^2 + c^2 - 2zc, \\ R_2^2 &= x^2 + y^2 + (z + c)^2 = \rho^2 + z^2 + c^2 + 2zc. \end{aligned}$$

Взяв от этих двух равенств разность и сумму, получаем

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{R_2^2 - R_1^2}{4}}_{\xi\eta} &= zc \quad \Rightarrow \quad z = \frac{\xi\eta}{c} \\ \underbrace{\frac{R_2^2 + R_1^2}{2}}_{\xi^2 + \eta^2} &= \rho^2 + z^2 + c^2 = \rho^2 + \frac{\xi^2\eta^2}{c^2} + c^2 \quad \Rightarrow \quad \rho^2 = \xi^2 + \eta^2 - \frac{\xi^2\eta^2}{c^2} - c^2 = \frac{1}{c^2}(\xi^2 - c^2)(c^2 - \eta^2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cz &= \xi\eta \quad \Rightarrow \quad c\, dz = \eta\, d\xi + \xi\, d\eta, \\ c\rho &= \sqrt{(\xi^2 - c^2)(c^2 - \eta^2)} \quad \Rightarrow \quad c\, d\rho = \frac{\xi(c^2 - \eta^2)\, d\xi - \eta(\xi^2 - c^2)\, d\eta}{\sqrt{(\xi^2 - c^2)(c^2 - \eta^2)}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^2 dz^2 &= \eta^2\, d\xi^2 + \xi^2\, d\eta^2 + 2\xi\eta\, d\xi\, d\eta, \\ c^2 d\rho^2 &= \frac{\xi^2(c^2 - \eta^2)\, d\xi^2}{\xi^2 - c^2} + \frac{\eta^2(\xi^2 - c^2)\, d\eta^2}{c^2 - \eta^2} - 2\xi\eta\, d\xi\, d\eta. \end{aligned}$$

Теперь мы можем переписать элемент длины в новых координатах:

$$d\ell^2 = d\rho^2 + dz^2 + \rho^2\, d\phi^2 = \frac{(\xi^2 - \eta^2)\, d\xi^2}{\xi^2 - c^2} + \frac{(\xi^2 - \eta^2)\, d\eta^2}{c^2 - \eta^2} + \frac{1}{c^2}(\xi^2 - c^2)(c^2 - \eta^2)\, d\phi^2$$

и извлечь из него прямую и обратную метрику (мы используем порядок координат ξ, η, ϕ):

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - c^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\xi^2 - \eta^2}{c^2 - \eta^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(\xi^2 - c^2)(c^2 - \eta^2)}{c^2} \end{pmatrix}, \quad g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{\xi^2 - c^2}{\xi^2 - \eta^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c^2 - \eta^2}{\xi^2 - \eta^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c^2}{(\xi^2 - c^2)(c^2 - \eta^2)} \end{pmatrix}.$$

Далее, мы можем написать функцию Гамильтона в новых координатах:

$$H(q, p) = \frac{1}{2m}\left(\frac{\xi^2 - c^2}{\xi^2 - \eta^2} p_\xi^2 + \frac{c^2 - \eta^2}{\xi^2 - \eta^2} p_\eta^2 + \frac{c^2\, p_\phi^2}{(\xi^2 - c^2)(c^2 - \eta^2)}\right) - \frac{m(M_1 + M_2)\xi + m(M_1 - M_2)\eta}{\xi^2 - \eta^2}.$$

Запишем теперь уравнение Гамильтона–Якоби:

$$\partial_t S + \frac{1}{2m}\left(\frac{\xi^2 - c^2}{\xi^2 - \eta^2}(\partial_\xi S)^2 + \frac{c^2 - \eta^2}{\xi^2 - \eta^2}(\partial_\eta S)^2 + \frac{c^2\, (\partial_\phi S)^2}{(\xi^2 - c^2)(c^2 - \eta^2)}\right) - \frac{m(M_1 + M_2)\xi + m(M_1 - M_2)\eta}{\xi^2 - \eta^2} = 0.$$

Ищем функцию действия в виде

$$S(t,\phi,\xi,\eta) = S_t(t) + S_\phi(\phi) + S_\xi(\xi) + S_\eta(\eta).$$

Сразу отделяем две переменные, соответствующие интегралы движения — энергию и момент импульса относительно оси z:

$$\begin{aligned} a_t &= \partial_t S_t = p_0 = -\mathcal{E}, \\ a_\phi &= \partial_\phi S_\phi = p_\phi = m\rho^2\dot\phi = L_z; \end{aligned}$$

$$-\mathcal{E} + \frac{c^2\,L_z^2}{2m(\xi^2-c^2)(c^2-\eta^2)} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\xi^2-c^2}{\xi^2-\eta^2}(\partial_\xi S_\xi)^2 + \frac{c^2-\eta^2}{\xi^2-\eta^2}(\partial_\eta S_\eta)^2\right) - \frac{m(M_1+M_2)\xi + m(M_1-M_2)\eta}{\xi^2-\eta^2} = 0.$$

Умножив уравнение на $\xi^2-\eta^2$ и перегруппировав члены, получаем

$$-\mathcal{E}(\xi^2-\eta^2) + \underbrace{\frac{c^2(\xi^2-\eta^2)\,L_z^2}{2m(\xi^2-c^2)(c^2-\eta^2)}}_{\frac{c^2\,L_z^2}{2m(\xi^2-c^2)}+\frac{c^2\,L_z^2}{2m(c^2-\eta^2)}} + \left[(\xi^2-c^2)\frac{(\partial_\xi S_\xi)^2}{2m} - m(M_1+M_2)\xi\right] + \left[(c^2-\eta^2)\frac{(\partial_\eta S_\eta)^2}{2m} - m(M_1-M_2)\eta\right] = 0;$$

$$\begin{aligned} &\underbrace{\left[(\xi^2-c^2)\frac{(\partial_\xi S_\xi)^2}{2m} - m(M_1+M_2)\xi - \mathcal{E}\xi^2 + \frac{c^2\,L_z^2}{2m(\xi^2-c^2)}\right]}_{a_\xi} + \\ + \quad &\underbrace{\left[(c^2-\eta^2)\frac{(\partial_\eta S_\eta)^2}{2m} - m(M_1-M_2)\eta + \mathcal{E}\eta^2 + \frac{c^2\,L_z^2}{2m(c^2-\eta^2)}\right]}_{a_\eta} = 0. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} a_t &= \partial_t S_t, \\ a_\phi &= \partial_\phi S_\phi, \\ a_\xi &= (\xi^2-c^2)\frac{(\partial_\xi S_\xi)^2}{2m} - m(M_1+M_2)\xi - \mathcal{E}\xi^2 + \frac{c^2\,L_z^2}{2m(\xi^2-c^2)}, \\ a_\eta = -a_\xi &= (c^2-\eta^2)\frac{(\partial_\eta S_\eta)^2}{2m} - m(M_1-M_2)\eta + \mathcal{E}\eta^2 + \frac{c^2\,L_z^2}{2m(c^2-\eta^2)}. \end{aligned}$$

Решаем эти уравнения относительно $\partial_i S_i = \frac{dS_i}{dq^i}$:

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{dt} &= -\mathcal{E}, \\ \frac{dS_\phi}{d\phi} &= L_z, \\ \frac{dS_\xi}{d\xi} &= \sqrt{\frac{2ma_\xi + 2m^2(M_1+M_2)\xi + 2m\mathcal{E}\xi^2 - \frac{c^2\,L_z^2}{\xi^2-c^2}}{\xi^2-c^2}}, \\ \frac{dS_\eta}{d\eta} &= \sqrt{\frac{-2ma_\xi + 2m^2(M_1-M_2)\eta - 2m\mathcal{E}\eta^2 - \frac{c^2\,L_z^2}{c^2-\eta^2}}{c^2-\eta^2}}. \end{aligned}$$

Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби для частицы в поле двух гравитирующих центров имеет вид

$$S(t,\phi,\xi,\eta;\mathcal{E},L_z,a_\xi) = \underbrace{-t\cdot\mathcal{E}}_{S_t} + \underbrace{\phi\cdot L_z}_{S_\phi} + S_\xi(\xi;\mathcal{E},L_z,a_\xi) + S_\eta(\eta;\mathcal{E},L_z,a_\xi).$$

Глава 3.2

Адиабатические инварианты (с. 417)

3.2.1 Что такое адиабатические инварианты

Пусть имеется некоторая гамильтонова система, описываемая функцией Гамильтона

$$H_0(x^\alpha, p_\alpha).$$

Пусть динамика, описываемая данной функцией Гамильтона, может быть (после некоторой замены переменных) описана как комбинация периодических движений (по разным переменным периоды могут быть разные, в том числе бесконечные).

(!) Данное условие периодичности автоматически выполняется для любого финитного движения, описываемого одномерной (одна координата и один импульс) функцией Гамильтона, не зависящей от времени.

(!*) При наличии нескольких степеней свободы данное условие периодичности является нетривиальным, оно выполняется только для специального класса функций Гамильтона, которые описывают так называемые *интегрируемые гамильтоновы системы.*

Тогда мы можем ввести набор величин, в которых легко узнать *укороченное действие* по различным траекториям,

$$I_A = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{\Gamma_A} p_\alpha dx^\alpha.$$

Интеграл берётся по замкнутой траектории Γ_A в фазовом пространстве, которая отвечает одному из конечных периодов движения. Движения с остальными периодами предполагаются замороженными.

(!) В одномерном случае адиабатический инвариант задаётся через площадь контура $H(x,p) = \text{const}$ на фазовой плоскости:

$$2\pi\, I(\mathcal{E}) = \oint\limits_{H(x,p)=\mathcal{E}} p dx = \int\limits_{x_{min}}^{x_{max}} |p(x)|\, dx + \int\limits_{x_{max}}^{x_{min}} -|p(x)|\, dx = \text{площадь контура}.$$

Пусть теперь имеется другая функция Гамильтона

$$H(x^\alpha, p_\alpha, t) = H_0(x^\alpha, p_\alpha, t) + \varepsilon\, H_1(x^\alpha, p_\alpha, t),$$

которая отличается от исходной малой поправкой εH_1.

Тогда для величины I_A (при динамике, заданной функцией Гамильтона H) выполняется приблизительный закон сохранения (тем более строгий, чем меньше ε). Такие приблизительные интегралы движения называются *адиабатическими инвариантами.*

Далее мы постараемся разобраться, откуда берутся адиабатические инварианты, и познакомимся с их конкретными примерами. При первом чтении рекомендуется сразу перейти к § 3.2.4 «Примеры».

3.2.2 Интегрируемые системы**

Пусть $H(x,p)$ — автономная (не зависящая от времени) функция Гамильтона от $2n$ переменных.

Скобка Пуассона от интеграла движения $F(x,p)$ с функцией Гамильтона H равна нулю:

$$\{F, H\} = \frac{\partial F}{\partial x^\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial x^\alpha}\frac{\partial F}{\partial p_\alpha} = 0.$$

Каждому интегралу движения соответствует однопараметрическое преобразование координат в фазовом пространстве с параметром s, сохраняющее функцию Гамильтона:

$$X' = X'(X,s), \quad X'(X,0) = X, \quad \frac{\partial X'}{\partial s} = \{X', F\}, \qquad H(X'(X,s)) = H(X).$$

Если ввести параметр симметрии s как координату в фазовом пространстве, то она окажется циклической, т.е. функция Гамильтона от неё не зависит:

$$\frac{\partial H}{\partial s} = \{H, F\} = 0.$$

Переменные s и F оказываются канонически сопряжёнными:

$$\frac{\partial s}{\partial s} = \{s, F\} = 1.$$

Если s считать координатой, то F — соответствующий ей обобщённый импульс. Соответствующие уравнения Гамильтона имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \{F, H\} = 0, \\ \frac{ds}{dt} &= \{s, H\} = \frac{\partial H}{\partial F}. \end{aligned}$$

Если у нас есть несколько интегралов движения, то хотелось бы использовать их все. Установим условие, при котором два параметра симметрии s^1 и s^2 могут одновременно быть координатами. Для этого производные по этим параметрам должны быть перестановочны, т.е. для всякой наблюдаемой G должно выполняться равенство

$$0 = \frac{d}{ds^1}\frac{d}{ds^2}G - \frac{d}{ds^2}\frac{d}{ds^1}G = \{F_1, \{F_2, G\}\} - \{F_2, \{F_1, G\}\} = \{F_1, \{F_2, G\}\} + \{F_2, \{G, F_1\}\} = -\{G, \{F_1, F_2\}\}.$$

Мы использовали тождество Якоби.

Скобка Пуассона $\{G, \{F_1, F_2\}\} = J^{KL}(\partial_K G)(\partial_L\{F_1, F_2\})$ — это производная по направлению вектора $g^L = J^{KL}(\partial_K G)$ от функции $\{F_1, F_2\}$. Матрица J^{KL} невырожденна, так что для всякого вектора $\mathbf{g}$ существует ковектор $\partial_K G$. В силу произвольности G получаем, что производная от $\{F_1, F_2\}$ по всем направлениям равна нулю. Таким образом, совместность s^1 и s^2 требует, чтобы скобка Пуассона интегралов движения равнялась константе:

$$\{F_1, F_2\} = \text{const}.$$

Это необходимо для того, чтобы s_1 и s_2 можно было выбрать одновременно в качестве обобщённых координат.

Чтобы F_1 и F_2 можно было выбрать одновременно в качестве обобщённых импульсов, необходимо более сильное условие[1]:

$$\{F_1, F_2\} = 0.$$

Определение. Интегралы движения *независимы в некоторой области фазового пространства*, если их градиенты линейно независимы в каждой точке этой области.

Определение. Если для функции Гамильтона $H(x,p)$ существует n совместных независимых интегралов движения $F_a(x,p)$, $1 \leqslant a \leqslant n$:

$$\{F_a, F_b\} = 0,$$

то такая система называется *интегрируемой системой*.

Для интегрируемой системы мы можем локально (!) ввести канонические координаты, состоящие из обобщённых координат s^a и обобщённых импульсов F_a. В таких координатах функция Гамильтона зависит только от обобщённых импульсов F_a:

$$H = H(F_a).$$

n условий $F_a = f_a = \text{const}_a$ задают в фазовом пространстве n-мерную поверхность M_f, которой касается n векторных полей вида

$$V_a^N = \{X^N, F_a\}.$$

[1]Например, величины $F_1 = p_1 + C \cdot q_2$ ($C = \text{const}$), $F_2 = p_2$ канонически сопряжены обобщённым координатам q_1, q_2: $\{q_1, F_1\} = \{q_2, F_2\} = 1$. При этом $\{F_1, F_2\} = C$. Одновременно выбрать F_1 и F_2 в качестве обобщённых импульсов можно только при $C = 0$.

Вдоль поверхности M_f обобщённые скорости постоянны в силу того, что они выражаются через интегралы движения:

$$\frac{ds^a}{dt} = \frac{\partial H}{\partial F_a}(F).$$

Поверхность M_f является поверхностью уровня, поэтому она автоматически оказывается замкнутой.

(!) Любая одномерная автономная гамильтонова система является интегрируемой. Интеграл движения — сама функция Гамильтона.

3.2.3 Переменные действие-угол**

Пусть функция Гамильтона $H(x,p)$ описывает интегрируемую систему с n независимыми интегралами движения $F_a(x,p)$. Если движение финитно, то поверхность M_f, задаваемая условиями $F_a = f_a = \text{const}$, является *компактной*, т.е. не только замкнутой, но и ограниченной.

Если интегралы движения независимы во всех точках M_f, то существует n линейно независимых в каждой точке касательных к поверхности M_f полей

$$V_a^N = \{X^N, F_a\}.$$

Без доказательства используем следующую теорему: если на компактной n-мерной поверхности существует n непрерывных касательных векторных полей, линейно независимых в каждой точке, то эта поверхность является *тором* (*диффеоморфна* тору).

Определение. Прямое произведение n окружностей S^n называется *n-мерным тором* T^n:

$$T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n \text{ раз}}.$$

Тор можно представить как пространство $\mathbb{R}^n$, в котором отождествлены точки с координатами отличающимися на целые кратные 2π числа: $(x_1, \cdots, x_n) \sim (x'_1, \cdots, x'_n)$, если $\frac{x_i - x'_i}{2\pi} \in \mathbb{Z}$. Другое описание — n-мерный куб, со склеенными (отождествлёнными) попарно точками противоположных граней, у которых совпадают все координаты вдоль граней.

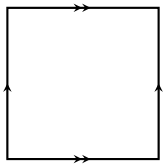


Схема склейки тора из квадрата:
склеиваются стороны с одинаковыми стрелками так, чтобы стрелки совпадали.

(*) Нас интересует внутренняя геометрия тора. Как он вложен в $2n$-мерное фазовое пространство, мы не обсуждаем.

В этом случае уравнения движения заполняют поверхность тора M_f семейством непересекающихся фазовых траекторий:

$$\frac{ds^a}{dt} = \frac{\partial H}{\partial F_a}(F_a).$$

В координатах (s^a, F_a) компоненты этих полей постоянны на M_f.

Введём на торе M_f координаты $\phi^A = (\phi^1, \ldots, \phi^n)$ (*углы = угловые координаты*, к геометрическим углам они могут не иметь никакого отношения), линейные по s^a, так, что при изменении каждой координаты точка с периодом 2π возвращалась в прежнее положение.

Угловые координаты являются циклическими. Каждая координата периодически меняется со временем: $\phi^A(t) = \phi^A(t + T_A)$. Периоды по разным углам, как правило, несоизмеримы. Такое движение называется *условно периодическим движением*. Канонически сопряжённые к ϕ^A импульсы I_A должны выражаться через F_a и не зависят от ϕ^A.

Если записать укороченное действие в таких координатах, то вдоль траектории $I_A = \text{const}$ имеем

$$S = \int\limits_{\phi(t)} I_A \, d\phi^A = \sum_A \int\limits_{\phi^B = \text{const},\ B \neq A} I_A \, d\phi^A = \sum_A S_A(\phi^A) = \sum_A I_A \, \Delta\phi^A.$$

Действие оказывается представлено как сумма функций отдельных угловых переменных. Каждый член — интеграл по одному из углов при фиксированных остальных.

Это позволяет определить обобщённые импульсы I_A через действие S_A по периоду координаты ϕ^A:

$$S_A(\text{по периоду } \phi^A) = \int\limits_{\phi^A=0}^{2\pi} I_A\, d\phi^A = 2\pi I_A, \qquad I_A = \frac{S_A(\text{по периоду})}{2\pi}.$$

По этой причине переменные I_A называют *переменными действия*.

Переменные (ϕ^A, I_A) называют *переменными действие-угол*.

Поскольку действие является скаляром (инвариантом), переменные действия можно вычислить в любых координатах, если мы сумели определить траекторию интегрирования. При этом (в силу постоянства ковекторного поля на поверхности M_f) при непрерывных деформациях траектории на M_f интеграл не меняется, важно только, чтобы траектория охватывала тор правильным образом:

$$I_A = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{\phi^A=0}^{2\pi} p_\alpha\, dx^\alpha.$$

Интеграл здесь соответствует площади на фазовой плоскости.

(**) При переходе к квантовой механике адиабатические инварианты квантуются в квазиклассическом пределе:

$$I_A \approx \hbar(n_A + c), \qquad n_A \in \{0\} \cup \mathbb{N}, \quad n_A \gg 1.$$

Эту формулу обычно пишут как *правило квазиклассического квантования Бора-Зоммерфельда*:

$$\oint\limits_{\phi^A=0}^{2\pi} p_\alpha\, dx^\alpha = 2\pi\hbar(n_A + \tfrac{1}{2}).$$

Переменные действие-угол могут быть введены только по части переменных, если для них удаётся провести разделение переменных.

3.2.4 Примеры

Пример 1. Гармонический осциллятор. Рассмотрим функцию Гамильтона

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \omega\left(\frac{p^2}{2m\omega} + \frac{m\omega x^2}{2}\right).$$

Сделаем каноническую замену координат:

$$Q = x\sqrt{m\omega}, \qquad P = \frac{p}{\sqrt{m\omega}}.$$

$$H = \omega\left(\frac{Q^2}{2} + \frac{P^2}{2}\right).$$

В координатах Q, P линии постоянной энергии — окружности (1-мерные торы), причём эволюция системы сводится к равномерному движению точки по окружности с постоянной угловой скоростью ω по часовой стрелке. Радиус окружности — $R = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{\omega}}$

(**) Угловая координата — это просто угол в плоскости Q, P.

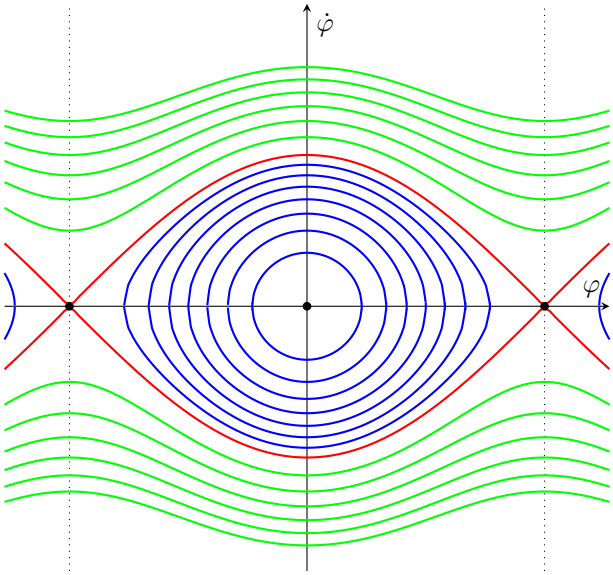
Адиабатический инвариант для гармонического осциллятора:

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint P\, dQ = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{-R}^{+R}\sqrt{R^2-Q^2}\, dQ + \int\limits_{R}^{-R}\Big(-\sqrt{R^2-Q^2}\Big)\, dQ\right) = \frac{\text{площадь круга}}{2\pi} = \frac{\pi R^2}{2\pi} = \frac{\mathcal{E}}{\omega}.$$

В квантовой механике энергия гармонического осциллятора квантуется, причём это квантование оказывается связано с адиабатическим инвариантом не асимптотически, а точно:

$$\mathcal{E}_n = \omega\,\underbrace{\hbar(n+\tfrac{1}{2})}_{I}.$$

Пример 2. Математический маятник. $H(\varphi, L) = \frac{1}{2}L^2 - \cos\varphi$.



Линии постоянной энергии на фазовой плоскости математического маятника.
Энергия меняется от -1 до $+1$ с шагом 0,25 и от $+1$ до $+4$ с шагом 0,5.
Надо представить, что рисунок сделан на поверхности цилиндра, а пунктирные линии — линии склейки.

Мы видим, что в случае общего положения 1-мерные торы (окружности) $\mathcal{E} = \text{const}$ для математического маятника имеются двух типов.

- Для $\mathcal{E} > 1$ траектории соответствуют тому, что маятник за период совершает полный оборот вокруг точки подвеса.
- Для $\mathcal{E} < 1$ траектории соответствуют тому, что маятник колеблется туда-сюда около вертикального положения.
- Для $\mathcal{E} = 1$ есть особая точка $\varphi = \pm\pi$ и имеются 3 траектории:
  - $\varphi \equiv \pm\pi$ — неустойчивая траектория из одной точки (*особенность типа седло*), соответствует неподвижному перевёрнутому маятнику;
  - траектория, идущая от $\varphi = -\pi$ до $\varphi = +\pi$ ($\dot\varphi > 0$) за бесконечное время;
  - траектория, идущая от $\varphi = +\pi$ до $\varphi = -\pi$ ($\dot\varphi < 0$) за бесконечное время.
- Для $\mathcal{E} = -1$ имеется устойчивая траектория из одной точки $\varphi \equiv 0$ (*особенность типа центр*), соответствует неподвижному маятнику.

Мы видим, что даже в случае математического маятника для разных энергий инвариантные торы устроены по-разному для разных значений интегралов движения.

(**) По-разному определяются и переменные действие-угол.

(!)** Для математического маятника угловая переменная для переменных действие-угол не равна φ! Угловая переменная для переменных действие-угол обязательно меняется со временем линейно. Лишь в пределе $\mathcal{E} =\to +\infty$ угловая переменная и φ становятся неразличимы.

3.2.5 Адиабатические инварианты**

Переменные действия I_A являются интегралами движения. Более того, во многих случаях они оказываются *адиабатическими инвариантами*, т.е. для них выполняются приближённые законы сохранения для систем, близких к исходной интегрируемой системе.

(!) Адиабатический инвариант, усреднённый по периоду, остаётся приблизительно неизменным при медленном по сравнению с характерными временами системы (*адиабатическом*) изменении параметров системы. Само изменение параметров системы может быть большим.

(!) Сохранение адиабатических инвариантов может не выполняться, если изменение параметров системы приводит к параметрическому резонансу.

Об адиабатических инвариантах имеется ряд похожих теорем, условия применимости которых не всегда в полной мере описываются.

Пусть имеется интегрируемая система с функцией Гамильтона $H_0(x^\alpha, p_\alpha)$. Пусть имеется более сложная (*возмущённая*) система с функцией Гамильтона вида $H(x^\alpha, p_\alpha, \varepsilon)$, где ε — параметр возмущения, который определён так, что

$$H(x^\alpha, p_\alpha, 0) = H_0(x^\alpha, p_\alpha).$$

Пусть для системы задано действие как функция координат «действие-угол»:

$$S(\phi, I, t, \varepsilon) = S_0(\phi, I, t) + S_1(\phi, I, t, \varepsilon), \qquad S(\phi, I, t, 0) = S_0(\phi, I, t).$$

Действие S_0 для невозмущённой системы является неоднозначной функцией точки фазового пространства, поскольку действие на торе M_f зависит от того, как идёт траектория (сколько раз траектория проходит период по каждой из угловых координат):

$$S_0(\phi^A + 2\pi) = S_0(\phi^A) + 2\pi I_A.$$

Действие само по себе не имеет физического смысла, так что эта неоднозначность не важна. Непрерывны должны быть производные от действия, которые связаны с энергией и импульсом.

Параметр ε считаем достаточно малым, чтобы поправка к действию $S_1(\phi, I, t, \varepsilon)$ также была мала (по сравнению с $2\pi I_A$), следовательно, функция S_1 должна быть периодична по всем угловым координатам ϕ^A.

Гамильтониан может быть получен дифференцированием действия по времени:

$$H(\phi, I, t, \varepsilon) = -\frac{\partial S}{\partial t} = H_0(I) - \frac{\partial S_1}{\partial t} = H_0(I) + H_1(\phi^A, I_A, t, \varepsilon).$$

Добавка к функции Гамильтона H_1 будет периодической функцией по всем угловым координатам ϕ^A:

$$\begin{aligned} \dot\phi^A &= \frac{\partial H}{\partial I_A} = \underbrace{\frac{\partial H_0}{\partial I_A}}_{\text{не зависит от } t} + \underbrace{\frac{\partial H_1}{\partial I_A}}_{\sim\varepsilon}, \\ \dot I_A &= -\frac{\partial H}{\partial \phi^A} = -\frac{\partial H_1}{\partial \phi^A}(\phi, I). \end{aligned}$$

Если усреднить выражение для $\dot I_A$ по времени, которое достаточно велико по сравнению со всеми периодами $\frac{2\pi}{\dot\phi^A}$, но достаточно мало по сравнению с характерным временем изменения возмущения, то это выражение близко к среднему от производной условно периодической функции по времени:

$$\overline{\frac{d}{dt} I_A} = \frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} \dot I_A\, dt = -\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} \frac{\partial H_1}{\partial \phi^A}(\phi, I)\, dt \approx -\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} \frac{\partial H_1}{\partial \phi^A}(\phi, I)\, \frac{d\phi^A}{\dot\phi^A} \approx -\frac{1}{T\dot\phi^A}\underbrace{\int\limits_t^{t+T} \frac{\partial H_1}{\partial \phi^A}(\phi, I)\, d\phi^A}_{0} = 0.$$

Последний интеграл равен нулю в силу периодичности H_1 по ϕ^A.

Получаем приблизительный (адиабатический) закон сохранения:

$$\overline{\frac{d}{dt} I_A} = \frac{d}{dt}\overline{I_A} \approx 0.$$

Таким образом, *среднее* от переменной действия $\overline{I_A}$ *по времени, которое достаточно велико по сравнению со всеми периодами, но достаточно мало по сравнению с характерным изменением возмущения,* является *адиабатическим инвариантом.*

3.2.6 Задачи 40–42

Задача 40. Адиабатический инвариант в слабопеременном магнитном поле. Релятивистская частица с массой m и зарядом q движется в магнитном поле. Магнитное поле медленно меняется со временем так, что изменение поля за период движения мало по сравнению с самим полем.

а) Определите изменение энергии частицы за один оборот.

б) Докажите, что величина $p_\perp^2/B$ остаётся постоянной (т.е. является адиабатическим инвариантом).

в) Вычислите изменение радиуса орбиты и энергии частицы, если поле изменилось от значения B_1 до B_2.

г) Покажите, что адиабатический инвариант для нерелятивистской заряженной частицы в магнитном поле сводится к случаю *гармонического осциллятора* (при подходящей параметризации магнитного поля

векторным потенциалом).

Задача 41. Слабонеоднородное магнитное поле. Магнитное поле считается слабонеоднородным, если оно мало меняется на расстояниях порядка радиуса орбиты.
а) Получите формулу $\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}$ для силы, действующей на магнитный диполь в слабонеоднородном поле.
б) Найдите в нерелятивистском случае уравнение движения ведущего центра орбиты заряженной частицы.

Задача 42. * Радиационные пояса Земли.
На больших расстояниях поле Земли представляет собой поле диполя с магнитным моментом $\mathfrak{m} = 8{,}1 \cdot 10^{25}$ гаусс·см^3.
а) Найдите в полярных координатах уравнение силовой линии магнитного диполя. Определите, как меняется поле вдоль силовой линии.
б) Предполагая, что скорость частицы на экваторе составляет угол α с плоскостью экватора, определите максимальную широту (полярный угол), достигаемую частицей.
в) Найдите угол α, при котором частица достигнет поверхности Земли, если расстояние от Земли, на котором частица находилась в экваториальной плоскости, значительно больше радиуса Земли.
в) Используя результат задачи 41, найдите период дрейфа вокруг Земли протона с энергией 10 МэВ, движущегося в экваториальной плоскости на расстоянии 30 000 км от Земли.

Глава 3.3

Одномерные малые колебания (с. 425)

3.3.1 Свободные колебания

Действие для *гармонического осциллятора* с жёсткостью $k = m\omega_0^2$ равно

$$S[x(t)] = \int (\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 - \tfrac{1}{2}m\omega_0^2 x^2)\, dt.$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа для осциллятора под действием внешней силы имеет вид

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = F.$$

В качестве внешней силы рассмотрим *силу вязкого трения*

$$F = -c\dot{x} = -2m\gamma\dot{x}.$$

В присутствии силы вязкого трения уравнение движения *гармонического осциллятора с затуханием* приобретает вид

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right) x = 0.$$

Ищем решение в виде $\mathrm{e}^{\lambda t}$. При подстановке экспоненты в уравнение движения получается *характеристическое уравнение*, которое имеет вид

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

Если допустить случаи $\omega_0^2 < 0$ («отрицательная жёсткость» вблизи точки неустойчивого равновесия) и $\gamma < 0$ (*отрицательная вязкость*, описывающая усиление колебаний), то характеристическое уравнение — квадратное уравнение общего вида. Его решения имеют вид

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \mp \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}.$$

Если затухание не слишком велико, $\gamma < \omega_0$, то получаются два сопряжённых друг другу комплексных корня и решения имеют вид

$$x_\pm(t) = \mathrm{e}^{(-\gamma \mp \mathrm{i}\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2})t}.$$

Общее вещественное решение можно записать с помощью *комплексной амплитуды*[1] $A = a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$ как зату-

[1] Часто в литературе (особенно электротехнической) комплексная амплитуда $A = \operatorname{Re} A + \mathrm{i}\operatorname{Im} A$ связана с гармоническими колебаниями формулой

$$x_{\text{э.т.}}(t) = \operatorname{Re}\left(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right) = (\operatorname{Re} A)\cos\omega t - (\operatorname{Im} A)\sin\omega t.$$

Мы воспользуемся другим определением:

$$x(t) = \operatorname{Re}\left(A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right) = (\operatorname{Re} A)\cos\omega t + (\operatorname{Im} A)\sin\omega t.$$

Такой выбор более удобен с точки зрения согласованности обозначений с квантовой механикой, в которой эволюция стационарного состояния со временем описывается как

$$\Psi(x,t) = \psi(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}Et}{\hbar}},$$

а также с теорией поля, где возникают *плоские бегущие волны*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{kr}-\omega t)},$$

в которых пространственные и временны́е координаты попадают в показатель экспоненты с разным знаком.

Поэтому фурье-гармоники по пространству и по времени у нас будут выглядеть различно: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ и $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$.

Переход к электротехническим комплексным амплитудам для гармонических осцилляторов и переменного тока осуществляется с помощью комплексного сопряжения: $\mathrm{i} \to -\mathrm{i}$.

хающие колебания с циклической частотой:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2},$$

$$x(t) = \operatorname{Re} A\mathrm{e}^{(-\gamma - \mathrm{i}\omega)t} = a\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega t + \alpha).$$

Мы нашли *собственные частоты* осциллятора с затуханием, которые являются комплексными:

$$\omega_{1,2} = \mathrm{i}\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} - \mathrm{i}\gamma, \qquad x_{1,2}(t) = \operatorname{Re} A_{1,2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{1,2}t}. \tag{3.3.1}$$

Мнимая часть частоты $-\gamma$ при этом описывает затухание.

Величина

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} \approx \frac{\mathcal{E}}{\text{средние потери за радиан фазы}} \approx \frac{2\pi\mathcal{E}}{\text{средние потери за период}}$$

называется *добротностью*. Добротность равна набегу фазы (2π на число колебаний) за время уменьшения амплитуды в e раз (а энергии в $\mathrm{e}^2 \approx 7{,}389$ раз).

3.3.2 Вынужденные колебания

Добавим в уравнение осциллятора *вынуждающую силу* $F(t) = mf(t)$:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t).$$

Такую силу можно описать, введя в функцию Лагранжа добавку $L_{\text{в.с.}} = -xF(t)$. Впрочем, мы уже ввели силу вязкого трения как внешнюю силу, поэтому всё равно последовательно применять лагранжев формализм мы не будем.

Ищем решение уравнения движения осциллятора с гармонической вынуждающей силой

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

в виде

$$x = A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}.$$

При подстановке в уравнение экспонента сокращается и получается алгебраическое уравнение на *амплитудно-частотную характеристику* $A(\omega)$:

$$(-\omega^2 - \mathrm{i}2\omega\gamma + \omega_0^2)A = 1 \quad \Rightarrow \quad A(\omega) = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - \mathrm{i}2\omega\gamma}.$$

$$x(t) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{(\omega_0^2 - \omega^2) - \mathrm{i}2\omega\gamma}.$$

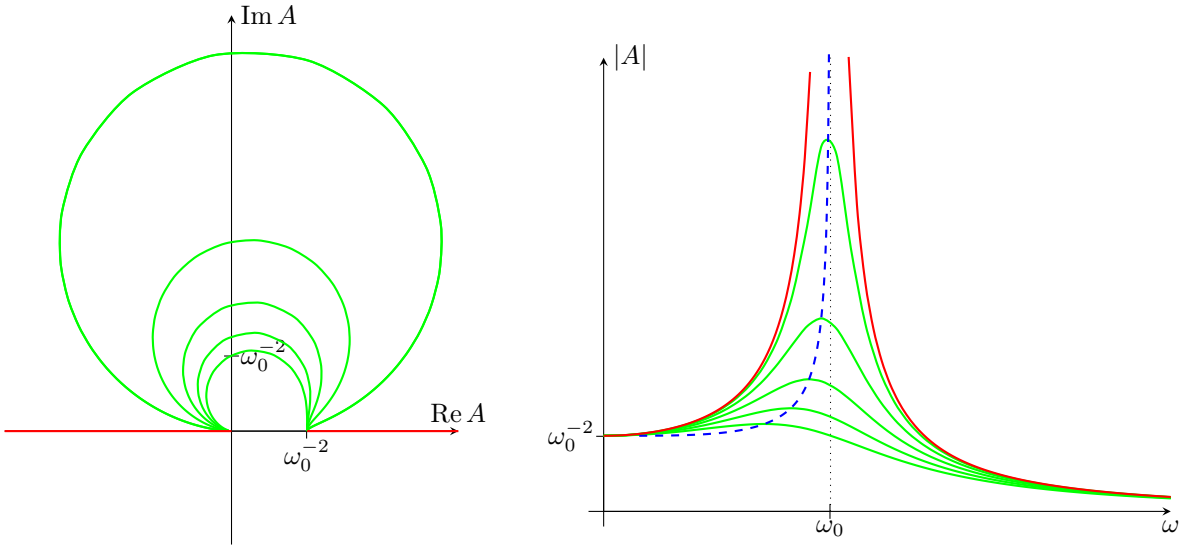
При сколь угодно малом затухании $\gamma > 0$ осциллятор под действием внешней силы на большом времени выйдет на этот режим, т.к. его собственные колебания (мы их исследовали выше) затухают как $\mathrm{e}^{-\gamma t}$.

Рассмотрим внимательно комплексную амплитуду (домножим числитель и знаменатель на комплексное сопряжённое знаменателя):

$$A = a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - \mathrm{i}2\omega\gamma} = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) + \mathrm{i}2\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}. \tag{3.3.2}$$

Средняя энергия осциллятора связана с квадратом амплитуды:

$$a^2 = |A|^2 = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}.$$



Комплексная амплитуда при $\frac{\gamma}{\omega_0} = 0; 0{,}1; 0{,}2; 0{,}3; 0{,}4; 0{,}5$. На втором рисунке штриховой линией обозначено положение резонансных максимумов при разных $\frac{\gamma}{\omega_0}$

При не слишком большом параметре затухания γ абсолютная величина амплитуды $|A|$ имеет узкий (шириной порядка γ) максимум при частоте, близкой к ω_0. Такое поведение амплитуды называется *резонансом*.

Максимум амплитуды приходится на *резонансную частоту*

$$\omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}.$$

При этом максимальная амплитуда равна

$$a_{\max} = \frac{1}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}.$$

Понятно, что координата частицы не может быть комплексной, но мы можем взять вещественную часть от комплексного уравнения и его решения и получить[2]

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \cos(\omega t),$$

$$\begin{aligned} x(t) &= a\cos(\omega t + \alpha) = a\cos\alpha\,\cos(\omega t) - a\sin\alpha\,\sin(\omega t), \\ v(t) &= -\omega a\sin(\omega t + \alpha) = -\omega a\cos\alpha\,\sin(\omega t) - \omega a\sin\alpha\,\cos(\omega t). \end{aligned}$$

Интересно, что при $\omega = \omega_0$ меняется знак вещественной части амплитуды $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ и комплексная амплитуда переходит в другую координатную четверть. При этом $v(t) = \omega a\cos(\omega t)$, т.е. скорость колеблется синфазно с внешней силой, и энергия передаётся осциллятору наиболее эффективно (тратится энергия на преодоление вязкого трения).

При $\omega < \omega_0$ имеем фазу в диапазоне $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ и скорость опережает по фазе внешнюю силу.

При $\omega > \omega_0$ имеем фазу в диапазоне $\alpha \in (-\pi, -\frac{\pi}{2})$ и скорость отстаёт по фазе от внешней силы.

(ф) Поведение это вполне естественно: внешняя сила задаёт осциллятору частоту колебаний, но если частота внешней силы меньше собственной частоты, то ей приходится тормозить осциллятор, а при большей частоте внешней силе приходится ускорять осциллятор.

Случай $\omega = \omega_0$ при $\gamma = 0$ нуждается в отдельном рассмотрении. В этом случае внешняя сила накачивает энергию в осциллятор, энергия не диссипируется трением, так что амплитуда неограниченно возрастает. Переданная за период энергия должна быть пропорциональна произведению амплитуды колебаний на амплитуду силы, откуда находим оценку (это грубая оценка, мы подменяем разности производными)

$$\delta\mathcal{E} \sim a \sim \sqrt{\mathcal{E}} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} \sim t^2 \quad \Rightarrow \quad a \sim t.$$

Это позволяет выдвинуть гипотезу, что в данном случае

$$x(t) = At\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}.$$

[2]Тут важна линейность уравнения. Вещественное уравнение получаем как линейную комбинацию (полусумму) двух комплексно-сопряжённых друг к другу уравнений, при этом вещественное решение получается как такая же линейная комбинация (полусумма) соответствующих решений.

Подставим это выражение в уравнение:

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x = A(\tfrac{d}{dt}-\mathrm{i}\omega_0)(\tfrac{d}{dt}+\mathrm{i}\omega_0)t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} = A(\tfrac{d}{dt}-\mathrm{i}\omega_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} = -\mathrm{i}2A\omega_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\mathrm{i}}{2\omega_0}.$$

Убеждаемся, что гипотеза оказалась верна.

Получаем *резонансное поведение для осциллятора без трения*:

$$x(t) = \frac{\mathrm{i}t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}}{2\omega_0}. \tag{3.3.3}$$

Это решение описывает переходный режим в случае малого трения $\gamma \ll \omega_0$, пока амплитуда мала по сравнению с равновесной амплитудой $a_{\max}$, т.е. на временах $t \ll \frac{1}{\gamma}$, или пока число колебаний мало по сравнению с добротностью, $2\pi N \ll Q$.

3.3.2.1 Вынужденные колебания и собственные частоты**

В отсутствие затухания амплитуда установившихся вынужденных колебаний стремится к бесконечности, когда частота стремится к собственной частоте осциллятора: $\omega \to \omega_0$.

Для осциллятора с затуханием амплитуда остаётся конечной при любой вещественной частоте. Но, как мы уже отмечали, при наличии затухания собственная частота становится комплексной (см. формулу (3.3.1)).

Рассмотрим комплексную амплитуду вынужденного колебания как функцию комплексной частоты. Как мы установили выше (см. формулу (3.3.2)),

$$A = \frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)-\mathrm{i}2\omega\gamma}.$$

Комплексная амплитуда стремится к бесконечности (имеет особенности вида *полюс*) в точках

$$\omega_{1,2} = \pm\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}-\mathrm{i}\gamma,$$

т.е. при собственных частотах (3.3.1) осциллятора.

В дальнейшем в случае нескольких степеней свободы мы будем считать, что особенности амплитудно-частотной характеристики — это (по определению!) собственные частоты.

3.3.2.2 Функция Грина для осциллятора**

Рассмотрим поведение осциллятора, испытывающего короткий удар.

Чтобы описать удар, нам понадобится δ-*функция Дирака* — бесконечно короткий и бесконечно высокий импульс в нулевой момент времени с единичным интегралом. Это так называемая *обобщённая функция*, её значение в нуле не имеет смысла, смысл имеет только интеграл от неё. По определению для достаточно хорошей функции[3] ϕ постулируется

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\phi(t)\,dt = \phi(0).$$

Уравнение осциллятора, испытывающего такой удар, имеет вид

$$\ddot{g}+2\gamma\dot{g}+\omega_0^2 g = \delta(t).$$

Его решение — функция $g(t)$ — называется *функцией Грина осциллятора*.

Как и всякое решение неоднородного уравнения, функция Грина определена с точностью до решения однородного уравнения. Поскольку нас интересует реакция осциллятора на удар, нанесённый в момент времени $t=0$, естественно наложить условие $g(t)|_{t<0}=0$. Такая функция Грина называется *запаздывающей функцией Грина*.

Проинтегрируем уравнение движения по малому интервалу $(-\varepsilon,\varepsilon)$:

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\Big(\ddot{g}+2\gamma\dot{g}+\omega_0^2 g\Big)\,dt = \Big(\dot{g}+2\gamma g\Big)\Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \omega_0^2\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g(t)\,dt = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(t) = 1.$$

[3]Обычно берут бесконечно дифференцируемые функции, либо обращающиеся в нуль за пределами конечного отрезка (пространство $\mathcal{D}$), либо спадающие на бесконечности (вместе со всеми производными) быстрее любой степени аргумента (пространство Шварца $\mathcal{S}$). Подробнее обобщённые функции обсуждаются в п. 4.3.2.4 на с. 430.

Устремим $\varepsilon \to +0$. Если функция $g(t)$ непрерывна, то

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\left(\dot g+2\gamma g\right)\Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon}+\omega_0^2\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}g(t)\,dt\right)=\dot g(t)\Big|_{-0}^{+0}=\dot g(+0)=1.$$

Таким образом, как и следовало ожидать, переданный импульс мгновенно ускорил частицу до единичной скорости. Далее $\delta(t)|_{t>0}=0$, т.е. осциллятор ведёт себя как свободный осциллятор, который мы уже исследовали.

Запаздывающая функция Грина легко находится как вещественное решение на положительной полуоси, для которого $g(+0)=0$ и $\dot g(+0)=1$:

$$g(t)=\frac{\theta(t)}{\omega}\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\,\sin(\omega t),\qquad \omega=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2},\qquad \theta(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}.$$

Функция $\theta(t)$ называется θ-*функцией Хевисайда* (или просто *ступенькой*).

Движение осциллятора под действием произвольной внешней силы может быть описано через функцию Грина, поскольку любая внешняя сила может быть разложена по δ-импульсам:

$$\ddot x+2\gamma\dot x+\omega_0^2x=f(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t_0)\,dt_0,\qquad x(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}g(t-t_0)f(t_0)\,dt_0.$$

3.3.3 Параметрический резонанс*

Рассмотрим гармонический осциллятор, параметры которого зависят от времени τ:

$$\frac{d}{d\tau}\left(m(\tau)\,\frac{d}{d\tau}x\right)+m(\tau)\omega_1^2(\tau)x=0.$$

От зависимости $m(\tau)$ можно избавиться репараметризацией времени:

$$\frac{d\tau}{m(\tau)}=dt,\qquad m(t)=m(\tau(t)),$$

$$\frac{1}{m(t)}\frac{d}{dt}\frac{dx}{dt}+m(t)\omega_1^2(t)x=0.$$

Обозначив $\omega_1 m=\omega_2$, мы получаем уравнение, в котором от времени зависит только частота:

$$\ddot x+\omega_2^2(t)x=0.$$

Обозначим

$$\omega_2^2(t)=\omega_0^2-\varepsilon u(t),$$

где $\omega_0=\mathrm{const}$ — частота невозмущённого осциллятора, а $\varepsilon=\mathrm{const}$ — параметр возмущения.

Пусть $u(t)$ — периодическая функция,

$$u(t+T)=u(t),\qquad T=\frac{2\pi}{\Omega}.$$

Нас интересует, будет ли амплитуда колебаний осциллятора неограниченно нарастать[4], или осциллятор выйдет на некоторый стационарный режим с ограниченной амплитудой колебаний.

Понятно, что если $x(0)=\dot x(0)=0$, то $x\equiv0$, т.е. при $x=0$ имеется точка равновесия. Но будет ли это равновесие устойчивым?

Поскольку параметры задачи зависят от времени периодически, сравнивать состояния осциллятора надо в моменты, отличающиеся на целое число периодов T.

Мы рассматриваем линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Оно имеет два линейно независимых решения. В силу периодичности параметров если $x(t)$ — решение, то $x(t+T)$ также должно быть решением. Поэтому для двух линейно независимых решений $x_{1,2}(t)$ можно написать

$$\begin{pmatrix}x_1(t+T)\\ x_2(t+T)\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\ a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}}_{\hat A}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}.$$

[4]Таким способом, меняя собственный период колебаний за счёт перемещения центра масс, люди раскачиваются на качелях.

Выбрав другую пару линейно независимых решений $X_{1,2}(t)$, матрицу $\hat{A}$ можно диагонализовать. Тогда

$$\begin{aligned} X_1(t+T) &= \mu_1 X_1(t), \\ X_2(t+T) &= \mu_2 X_2(t). \end{aligned}$$

Здесь μ — собственное число матрицы $\hat{A}$.

Скомбинируем уравнения движения для двух линейно-независмых решений

$$\begin{array}{rcl} -x_2 \cdot \left(\ddot{x}_1 + \omega_2^2 x_1\right) &=& 0, \\ x_1 \cdot \left(\ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2\right) &=& 0, \\ \hline \ddot{x}_1 x_2 - \ddot{x}_2 x_1 &=& 0, \end{array},$$

$$\ddot{x}_1 x_2 - \ddot{x}_2 x_1 = \frac{d}{dt}(\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1) = -\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1 = -\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{vmatrix} = \text{const}$$

(л*) Этот определитель называется *определителем Вроньского* или *вронскианом* второго порядка. Если вронскиан порядка n для решений уравнения порядка n равен нулю, то решения линейно зависимы.

Сравнив вронскианы в моменты времени, различающиеся на период, получаем

$$(\dot{X}_1 X_2 - \dot{X}_2 X_1)|_{t+T} = \mu_1\mu_2(\dot{X}_1 X_2 - \dot{X}_2 X_1)|_t = (\dot{X}_1 X_2 - \dot{X}_2 X_1)|_t.$$

$$\mu_1\mu_2 = \det \hat{A} = 1.$$

Собственные числа должны удовлетворять характеристическому уравнению:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \mu & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \mu \end{vmatrix} = \mu^2 - \operatorname{tr}\hat{A}\,\mu + \underbrace{\det \hat{A}}_{1} = 0.$$

Решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ можно было выбрать вещественными, тогда $x_1(t+T)$ и $x_2(t+T)$ также вещественны, вещественны и коэффициенты матрицы A. Следовательно,

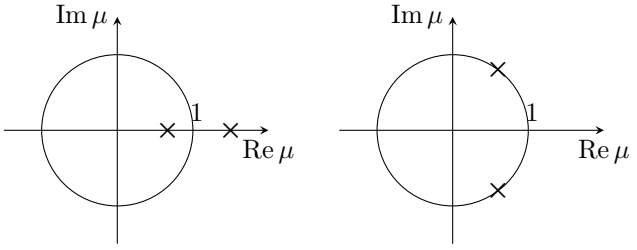
$$\operatorname{tr}\hat{A} = \mu_1 + \mu_2 \in \mathbb{R}.$$

Мы имеем квадратное уравнение с вещественными коэффициентами

$$\mu^2 - \operatorname{tr}\hat{A}\,\mu + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \frac{\operatorname{tr}\hat{A} \pm \sqrt{(\operatorname{tr}\hat{A})^2 - 4}}{2}. \tag{3.3.4}$$

Возможны следующие варианты.

- $|\operatorname{tr}\hat{A}| < 2$, тогда $\mu_1 = \mu_2^*$, $|\mu_1| = |\mu_2| = 1$. Система *сильно устойчива*: малые поправки к матрице $\hat{A}$ оставят систему устойчивой.
- $|\operatorname{tr}\hat{A}| > 2$, тогда $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $|\mu_1| > 1$, $|\mu_2| < 1$. Система *неустойчива*. Малые возмущения неограниченно нарастают. Наблюдается *параметрический резонанс*.
- $|\operatorname{tr}\hat{A}| = 2$, тогда $\mu_1 = \mu_2 \in \mathbb{R}$, $|\mu_1| = |\mu_2| = 1$. Система *слабо устойчива*: малые поправки к матрице $\hat{A}$ могут сделать систему неустойчивой.



Собственные числа матрицы $\hat{A}$ в неустойчивом (слева) и устойчивом (справа) случаях.

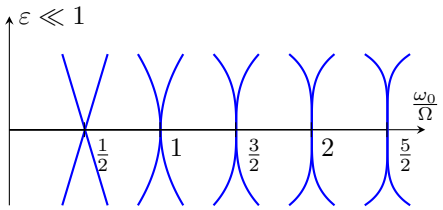
Рассмотрим сначала тривиальный случай, когда параметры осциллятора постоянны, т.е. $\varepsilon = 0$. В этом случае

$$\begin{aligned} X_1(t) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}, \quad \mu_1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 T}, \\ X_2(t) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}, \quad \mu_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 T}, \\ \operatorname{tr}\hat{A} &= \mu_1 + \mu_2 = 2\cos(\omega_0 T) \in [-2, 2]. \end{aligned}$$

Таким образом, при всех ω_0 имеется устойчивость, но в точках $\omega_0 T = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, т.е. при

$$\omega_0 = \frac{\Omega n}{2},$$

устойчивость слабая, в этом случае сколь угодно малое возмущение может сделать систему неустойчивой.



Область неустойчивости клином подходит к точкам $\frac{\omega_0}{\Omega} = \frac{n}{2}$. Это следует из непрерывности $\mu_{1,2}$ по Ω и ε

За счёт чего берётся энергия для раскачки? Энергия сообщается системе, если при удалении осциллятора от нуля жёсткость уменьшается и/или при приближении к нулю жёсткость увеличивается. При резонансе $\frac{\omega_0}{\Omega} \approx \frac{n}{2}$, но чем больше n, тем меньше средняя энергия, передаваемая за период колебаний осциллятора. По этой причине по мере роста n клин неустойчивых состояний (см. рисунок) становится всё уже.

3.3.3.1 Параметрический резонанс с трением**

Рассмотрим, как изменится решение задачи о параметрическом резонансе при наличии вязкого трения. Пусть

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_2^2(t)x = 0.$$

Как мы знаем, амплитуда свободных колебаний осциллятора убывает как $\mathrm{e}^{-\gamma t}$. Поэтому попробуем учесть затухание в определении координаты. Введём координату y, единица измерения которой экспоненциально уменьшается со временем[5]:

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{e}^{-\gamma t} y(t), \\ \dot{x}(t) &= \mathrm{e}^{-\gamma t}(\dot{y} - \gamma y), \\ \ddot{x}(t) &= \mathrm{e}^{-\gamma t}(\ddot{y} - 2\gamma\dot{y} + \gamma^2 y). \end{aligned}$$

Из уравнения движения исчезает сила вязкого трения, а частота получает добавку:

$$\ddot{y} + (\omega_2^2(t) - \gamma^2)y = 0.$$

(*) Добавка к силе $m\gamma^2 y$ имеет смысл силы инерции. По теореме Лармора мы можем компенсировать пропорциональную скорости силу Лоренца вращением системы координат, но возникает центробежная сила, пропорциональная расстоянию от центра вращения. Здесь мы компенсируем пропорциональную скорости силу вязкого трения растяжением системы координат, но возникает «центробежная» сила, пропорциональная расстоянию до центра растяжения:

$$\ddot{y} + \Big[(\omega_0^2 - \gamma^2) - \varepsilon u(t)\Big] y = 0.$$

Условие резонанса раньше имело вид $|\mu_1| > 1$. Теперь надо учесть, что за период T масштаб координаты y уменьшается в $\mathrm{e}^{-\gamma T} < 1$ раз. Новое условие резонанса оказывается более жёстким:

$$|\mu_1| \mathrm{e}^{-\gamma T} > 1.$$

Если вернуться к рисунку, изображающему области резонанса в плоскости $\frac{\omega_0}{\Omega} - \varepsilon$, то теперь следует заменить ω_0 на $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ и всюду отступить от границы области резонанса тем дальше, чем больше n.

[5] В этом состоит исходная идея калибровочных преобразований: перекалибровка масштабных линеек. **(**)** С точки зрения развиваемой ниже аналогии с квантовой механикой это действительно калибровочное преобразование с мнимой функцией.

3.3.3.2 Параметрический резонанс и спектральная задача***

Уравнение на параметрический резонанс можно переписать как задачу *на собственные числа и собственные функции дифференциального оператора* (*спектральную задачу*):

$$\ddot{X} + (\omega_0^2(t) - \varepsilon u(t))X = 0.$$

Мы ищем такие функции $X(t)$ и такие числа $\lambda = \omega_0^2$, чтобы под действием оператора $\hat{L}$ функция умножалась на λ:

$$\underbrace{\left(-\tfrac{d^2}{dt^2} + \varepsilon u(t)\right)}_{\hat{L}} X(t) = \underbrace{\omega_0^2}_{\lambda} X(t).$$

В этом уравнении можно узнать стационарное *уравнение Шрёдингера в периодическом потенциале* $U(x) = \varepsilon u(x)$ в условиях $x = t$ (время в роли координаты), $\psi(x) = X(x)$ (координата в роли волновой функции), $m = \frac{1}{2}$, $\hbar = 1$, $\mathcal{E} = \lambda$.

Периодический потенциал в квантовой механике естественным образом возникает при моделировании кристалла.

(!) Для уравнения Шрёдингера разрешённые уровни энергии соответствуют наличию ограниченных решений. В механике условие параметрического резонанса соответствует наличию неограниченных решений.

Переход $X(t) \to \hat{S}X(t) = X(t+T)$ можно рассматривать как действие *оператора* $\hat{S}$ *сдвига* на период (операторы бывают не только дифференциальные). Периодичность потенциала означает, что для любого $X(t)$ выполняется условие $\hat{S}^{-1}\hat{L}\hat{S}X = \hat{L}X \Rightarrow \hat{L}\hat{S}X = \hat{S}\hat{L}X$, т.е. $\hat{L}\hat{S} = \hat{S}\hat{L}$, операторы $\hat{L}$ и $\hat{S}$ коммутируют друг с другом, и для них можно искать общие собственные функции.

Матрица $\hat{A}$ — это ограничение оператора $\hat{S}$ (бесконечномерной матрицы) на двумерное подпространство собственных функций оператора $\hat{L}$ при фиксированном λ.

3.3.4 Задачи 43–46

Задача 43. Малые колебания. Найдите частоты малых колебаний:
а) $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$; **б)** $H = \frac{p^2}{2} - \sin x$; **в)** $L = \frac{\dot{x}^2 - x^2 - 1}{2x}$;
г) $H = p^2 + x^2\mathrm{e}^x$; **д**^{c}**)** $L = \operatorname{ch} x\,(\dot{x}^2 - 1)$; **е)** $L = \frac{\dot{x}^2}{x} - \frac{x}{\ln x}$;
ж*) неваляшка имеет массу M, момент инерции для горизонтальной оси, проходящей через центр масс, равный I, радиус основания R и высоту центра масс $H < R$; неваляшка качается без проскальзывания на горизонтальной плоскости в поле силы тяжести g;
з^c***)** маятник длиной l может качаться в вертикальной плоскости, которая вращается с угловой скоростью ω_0 вокруг вертикальной оси, проходящей через точку подвеса; ускорение свободного падения равно g.

В последнем пункте найдите частоту малых колебаний в зависимости от ω и определите, что происходит с ростом ω_0.

Задача 44. Знакомство с δ-функцией.

а) $\delta_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & |x| < \frac{a}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{a}{2}, \end{cases}$ $\delta_{1a}(x) = \begin{cases} \frac{1}{a^2}, & x \in (-a, 0), \\ -\frac{1}{a^2}, & x \in (0, a), \\ 0, & |x| > a, \end{cases}$ $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

Для достаточно гладкой функции $\varphi(x)$ найдите пределы

$$\lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x)\,\varphi(x)\,dx, \quad \lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{1a}(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

б) Найдите зависимости $\ddot{x}(t), \dot{x}(t), x(t)$, если на покоящуюся при $x = 0$ частицу действует сила $f_1(t) = A\,\theta(t)$, $f_2 = B\,\delta(t)$, $f_3 = C\,\delta'(t)$.

в) Определите следующие обобщённые функции: $\delta(x - x_0), \delta(kx), \delta(\sin(2x))$.

г) Как связаны размерность $\delta(x), \delta'(x)$ и размерность x? Являются ли эти обобщённые функции чётными или нечётными?

д) Найдите преобразование Фурье функций $\delta(x - x_0)$ и $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$.

Задача 45. Резонанс при ударных воздействиях.
На гармонический осциллятор с затуханием действует периодическая ударная сила с периодом T, сообщающая импульс p_0. Исследуйте зависимость установившейся амплитуды от параметров задачи.

Задача 46. Параметрический резонанс.
У гармонического осциллятора с частотой ω_0 частота с периодом T на короткое время $\tau \ll T, \omega_0^{-1}, \Omega^{-1}$ возрастает до $\Omega \gg \omega_0$. Найдите условия параметрического резонанса.

Глава 3.4

Сложные линейные колебания (с. 435)

3.4.1 Линеаризация системы

Пусть уравнение движения имеет вид

$$\frac{d}{dt}(m_{\alpha\beta}(x)\,\dot{x}^\beta) = -2b_{\alpha\beta}(x)\,\dot{x}^\beta - \partial_\alpha U(x).$$

Здесь U — потенциальная энергия, а симметричная положительно определённая матрица $m_{\alpha\beta}(x)$ — это *матрица массовых коэффициентов* или *матрица масс* (выражение $\frac{1}{2}m_{\alpha\beta}(x)\,\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta$ даёт кинетическую энергию).

Симметричная часть матрицы $b_{\alpha\beta}(x)$ задаёт силы вязкого трения (при условии, что симметричная часть $b_{(\alpha\beta)}$ неотрицательно определена). Мощность сил вязкого трения неположительна: $-2b_{(\alpha\beta)}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta \leqslant 0$, они могут только отбирать механическую энергию у системы.

Антисимметричная часть матрицы $b_{[\alpha\beta]}$ задаёт *гироскопические силы* (сила Лоренца, сила Кориолиса и т.п.). Гироскопические силы не совершают работу, т.к. их мощность равна нулю: $-b_{[\alpha\beta]}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = 0$ в силу антисимметричности $b_{[\alpha\beta]}$.

Экстремальной точке потенциальной энергии соответствует положение равновесия системы. Помещённая в такую точку с нулевой начальной скоростью система может находиться в ней сколь угодно долго.

Определение. Пусть $\mathbf{R}$ — множество решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений порядка n. Решение $x_0(t) \in \mathbf{R}$ *устойчиво по Ляпунову*, если начальное малое отклонение (со всеми производными до $(n-1)$-й) остаётся малым во все последующие моменты времени. Более точно,

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0: \quad \forall x(t) \in \mathbf{R} \qquad \max_\alpha(|x^\alpha(0) - x_0^\alpha(0)|, |\dot{x}^\alpha(0) - \dot{x}_0^\alpha(0)|, \ldots, |\tfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}x^\alpha(0) - \tfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}x_0^\alpha(0)|) < \delta \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \max_{\alpha,t>0}(|x^\alpha(t) - x_0^\alpha(t)|, |\dot{x}^\alpha(t) - \dot{x}_0^\alpha(t)|, \ldots, |\tfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}x^\alpha(t) - \tfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}x_0^\alpha(t)|) < \varepsilon.$$

Теорема. Равновесие $x(t) = 0$ устойчиво по Ляпунову, если потенциальная энергия U имеет локальный минимум при $x = 0$. В этом случае доступная для системы область конфигурационного пространства $U \leqslant \mathcal{E}(t=0)$ является ограниченной, если превышение энергии над минимумом $\mathcal{E}(t=0) - U(0)$ достаточно мало.

Теорема. Силы вязкого трения и гироскопические силы не нарушают устойчивости, т.к. они не могут сообщать системе дополнительную энергию и расширять доступную область в конфигурационном пространстве.

(!) Силы вязкого трения и гироскопические силы не нарушают устойчивости, но могут сделать устойчивой систему, которая без них была бы неустойчива.

Мы будем исследовать поведение системы вблизи некоторого положения равновесия. Будем считать, что положение равновесия совпадает с началом координат: $x^\alpha_{\text{равн.}} = 0$. Для малых отклонений от положения равновесия мы можем записать уравнения движения в линеаризованном виде, оставив только члены, линейные по x и $\dot{x}$:

$$m_{\alpha\beta}(0)\ddot{x}^\beta = -2b_{\alpha\beta}(0)\dot{x}^\beta - x^\beta\partial_\alpha\partial_\beta U(0).$$

Мы получили многомерный аналог уравнения гармонического осциллятора, в котором все коэффициенты являются матрицами:

$$M_{\alpha\beta}\ddot{x}^\beta + 2B_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta + K_{\alpha\beta}x^\beta = 0,$$
$$M_{\alpha\beta} = m_{\alpha\beta}(0), \qquad B_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}(0), \qquad K_{\alpha\beta} = \partial_\alpha\partial_\beta U(0).$$

Такую систему называют *системой связанных осцилляторов*.

В таком приближении кинетическая и потенциальная энергии имеют вид квадратичных форм (с постоянными коэффициентами!) по скорости и координатам, задаваемых *матрицей масс* $M_{\alpha\beta}$ и *матрицей жёсткости* $K_{\alpha\beta}$:

$$\mathcal{E}_{\text{к.л}} = \frac{1}{2} M_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta, \qquad U_{\text{л}} = \frac{1}{2} K_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta.$$

Мы можем легко извлечь матрицы масс и жёсткости из функции Лагранжа:

$$M_{\alpha\beta} = \left.\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^\alpha \partial \dot{x}^\beta}\right|_{x=x_0,\dot{x}=0}, \quad K_{\alpha\beta} = -\left.\frac{\partial^2 L}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right|_{x=x_0,\dot{x}=0}, \quad \left.\frac{\partial L}{\partial x^\alpha}\right|_{x=x_0,\dot{x}=0} = 0.$$

Столь же легко мы можем извлечь матрицы масс и жёсткости из функции Гамильтона:

$$(M^{-1})^{\alpha\beta} = \left.\frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial p_\beta}\right|_{x=x_0,p=p_0}, \quad K_{\alpha\beta} = \left.\frac{\partial^2 H}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right|_{x=x_0,p=p_0}, \quad \left.\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}\right|_{x=x_0,p=p_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right|_{x=x_0,p=p_0} = 0.$$

(!) Из функции Гамильтона мы получили обратную матрицу масс[1].

(!) Для положения равновесия в лагранжевом формализме мы полагали $x = x_0$, $\dot{x} = 0$, а в гамильтоновом формализме условие $\dot{x} = 0$ заменилось на $\dot{x}^\alpha = \left.\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right|_{x=x_0,p=p_0} = 0$. В равновесии импульс может быть ненулевым, $p = p_0$, главное, чтобы скорость была нулевая.

(**) В гамильтоновом формализме возможна ситуация, когда матрица жёсткости отрицательно определена и матрица масс тоже отрицательно определена. При этом эффективные массы m_a и жёсткости k_a отрицательны, но частоты $\omega_a = \sqrt{k_a/m_a}$ вещественны, и такое положение равновесия оказывается устойчивым. Например, такое возможно, если $H(x,p) = \cos(p) + U(x)$: при $p_0 = \pi(2n+1)$ ($n \in \mathbb{Z}$) устойчивые положения равновесия — минимумы функции $U(x)$, а при $p_0 = 2\pi n$ устойчивые положения равновесия — максимумы функции $U(x)$. Такие гамильтонианы могут быть полезны при описании движения *квазичастицы* в конденсированной среде.

3.4.2 Собственные колебания

Мы начнём исследование линеаризованных уравнений движения со случая $B = 0$ (вязкое трение и гироскопические силы отсутствуют), который описывается функцией Лагранжа

$$L(x,\dot{x}) = \mathcal{E}_{\text{к.л}} - U_{\text{л}} = \frac{1}{2} M_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta - \frac{1}{2} K_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta, \qquad \alpha,\beta,\gamma = 1,\ldots,N.$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа имеют вид (в тензорной и матричной форме)

$$M_{\alpha\beta}\ddot{x}^\beta + K_{\alpha\beta}x^\beta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{M}\ddot{\vec{x}} + \hat{K}\vec{x} = 0. \tag{3.4.1}$$

Если матрицы $\hat{M}$ и $\hat{K}$ диагональны, то система распадается на отдельные независимые уравнения гармонического осциллятора для каждой координаты:

$$m_{(a)}\ddot{x}^a + k_{(a)}x^a = 0, \qquad \text{по индексу } a \text{ нет суммирования!} \tag{3.4.2}$$

Мы можем свести общий случай (3.4.1) к случаю независимых осцилляторов (3.4.2) линейной заменой координат.

Соответствующая теорема из линейной алгебры гарантирует, что *две квадратичные формы, одна из которых положительно определена, могут быть одновременно приведены к диагональному виду линейным* ***вещественным*** *преобразованием.*

В нашем случае две квадратичные формы — кинетическая и потенциальная энергии, их матрицы равны $M_{\alpha\beta}$ и $K_{\alpha\beta}$. Кинетическая энергия всегда положительно определена, так что условия теоремы выполняются.

Для диагонализации удобно представить матрицу $M_{\alpha\beta}$ как метрический тензор, с её помощью мы можем опускать индексы. Обратная матрица $(M^{-1})^{\alpha\beta}$ играет роль обратного метрического тензора, с её помощью мы можем поднимать индексы.

Уравнение на собственные числа матрицы $\hat{K}$ относительно матрицы $\hat{M}$ имеет обычный вид *векового уравнения*[2] для матрицы $\hat{K}$, у которой подняли один индекс с помощью матрицы $\hat{M}^{-1}$:

$$\det((M^{-1})^{\alpha\beta}K_{\beta\gamma} - \lambda\delta^\alpha_\gamma) = 0. \tag{3.4.3}$$

[1]При нахождении собственных колебаний матрицу масс можно не обращать. У нас есть два эквивалентных уравнения на собственные частоты (3.4.3) и (3.4.4). Одно из них выражено через обратную матрицу масс, другое — через прямую. Аналогично у нас есть два эквивалентных уравнения на собственные векторы (3.4.5).

[2]Термин «вековое уравнение» пришёл из небесной механики, где такие уравнения возникали как уравнения для медленных (вековых) возмущений планетных орбит.

Корни λ данного векового уравнения *вещественны* (при условии положительной определённости матрицы масс).[3]

(*) Писать уравнение на собственные векторы для исходных матриц $\hat{M}$ и $\hat{K}$ в общем случае бессмысленно, т.к. матрицы с двумя нижними индексами превращают вектор в ковектор, который нельзя приравнять вектору.

Вековое уравнение мы можем переписать в виде

$$\det(K_{\alpha\beta} - \lambda M_{\alpha\beta}) = 0. \tag{3.4.4}$$

Решив вековое уравнение и найдя собственные числа, мы получаем для каждого найденного $\lambda_{(a)}$ систему уравнений на собственные векторы:

$$(M^{-1})^{\alpha\beta}K_{\beta\gamma}h^{\gamma} = \lambda h^{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad K_{\beta\gamma}h^{\gamma} = \lambda M_{\beta\gamma}h^{\gamma}. \tag{3.4.5}$$

Собственные векторы также можно выбрать *вещественными* (при условии положительной определённости матрицы масс).[4]

Собственные векторы, отвечающие разным собственным числам, ортогональны в смысле метрики $M_{\alpha\beta}$. Покажем это:

$$(\hat{K} - \lambda_1\hat{M})\vec{h}_1 = 0, \qquad (\hat{K} - \lambda_2\hat{M})\vec{h}_2 = 0.$$

Умножим первое равенство слева на $\vec{h}_2^T$ и транспонируем его, а второе умножим слева на $\vec{h}_1^T$:

$$\vec{h}_2^T(\hat{K} - \lambda_1\hat{M})\vec{h}_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{h}_1^T(\hat{K} - \lambda_1\hat{M})\vec{h}_2 = 0, \qquad \vec{h}_1^T(\hat{K} - \lambda_2\hat{M})\vec{h}_2 = 0.$$

(Матрицы $\hat{K}$ и $\hat{M}$ при транспонировании перешли в себя в силу симметричности.)

Вычтем теперь одно равенство из другого:

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\vec{h}_1^T\hat{M}\vec{h}_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda_2 - \lambda_1)h_1^{\alpha}M_{\alpha\beta}h_2^{\beta} = 0.$$

Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, получаем условие ортогональности.

Систему собственных векторов можно выбрать так, чтобы она была ортонормированной в смысле метрики $M_{\alpha\beta}$[5], в таком базисе матрица масс становится единичной матрицей:

$$M_{\alpha\beta}h_a^{\alpha}h_b^{\beta} = \delta_{ab} = M_{ab}.$$

Для различных собственных чисел эта ортогональность выполняется автоматически. Если некоторому собственному числу соответствует несколько собственных векторов, то любая их линейная комбинация тоже будет собственным вектором. В этом случае ортогональность надо обеспечить подбором собственных векторов (это всегда возможно, например, с помощью процедуры ортогонализации).

В таком базисе

$$M_{ab} = \delta_{ab}, \qquad K_{ab} = \operatorname{diag}(\lambda_{(1)}, \ldots, \lambda_{(N)}), \qquad x^a = (\vec{x}, \vec{h}_a) = M_{\alpha\beta}x^{\alpha}h_a^{\beta}.$$

Координаты, в которых матрицы $\hat{M}$ и $\hat{K}$ диагональны, называются *нормальными координатами.*

Уравнения Эйлера-Лагранжа приобретают вид

$$\ddot{x}^a + \lambda_{(a)}x^a = 0.$$

(!) Мы специально нумеруем собственные числа индексом в скобках, чтобы подчеркнуть, что это не тензорный индекс, $\lambda_{(a)}$ не являются компонентами вектора или ковектора и правило суммирования по повторяющимся индексам в этом случае не применяется.

Часто (например, когда исходные координаты — декартовы координаты отдельных частиц) матрица масс с самого начала диагональна: $M_{\alpha\beta} = \operatorname{diag}(m_{(1)}, \ldots, m_{(N)})$. Тогда может быть удобно сначала сделать замену

$$x^{\alpha} \to y^{\alpha} = \sqrt{m_{(\alpha)}}\,x^{\alpha}, \qquad M_{\alpha\beta} \to \delta_{\alpha\beta}, \qquad K_{\alpha\beta} \to \frac{K_{\alpha\beta}}{\sqrt{m_{(\alpha)}m_{(\beta)}}}.$$

В новых координатах матрица масс единична, и мы можем диагонализовать матрицу $\hat{K}$ ортогональными преобразованиями (поворотами) в пространстве координат y^{α}.

[3]Поскольку $\lambda_a = \frac{k_a}{m_a}$ — отношение диагональных элементов матриц $\hat{K}$ и $\hat{M}$ в системе координат, где обе матрицы диагональны, переход к такой системе, как мы уже упоминали выше, осуществляется вещественной заменой координат, а матрицы в исходных координатах были вещественны.

[4]Поскольку собственные векторы образуют обратную матрицу замены координат для преобразования, диагонализующего матрицы $\hat{K}$ и $\hat{M}$, а это преобразование, как мы упоминали выше, может быть выбрано вещественным.

[5]Это гарантирует, что суммарная энергия равна сумме энергий колебаний по отдельным собственным векторам.

Колебание, соответствующее одному собственному вектору $\vec{h}_a$, называется *собственной модой* колебаний:

$$x_a^\alpha(t) = \mathrm{Re}\left(A_{(a)}\, h_a^\alpha\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{(a)}\, t}\right) = h_a^\alpha\, \mathrm{Re}\left(A_{(a)}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{(a)}\, t}\right) = h_a^\alpha\, |A_{(a)}|\, \cos(\omega_{(a)}\, t - \arg A_{(a)}), \quad \omega_{(a)} = \sqrt{\lambda_{(a)}}.$$

Амплитуды $A_{(a)} = |A_{(a)}|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg A_{(a)}}$ могут быть комплексными. Собственные векторы вещественны, это позволяет вынести их из-под операции взятия вещественной части Re, благодаря чему при возбуждении одной моды колебаний все обобщённые координаты колеблются синхронно с одинаковой фазой.

Колебание, соответствующее одному собственному числу $\lambda_{(a)}$, называется *собственным колебанием*. Если среди собственных чисел есть одинаковые, то собственное колебание может быть комбинацией нескольких мод (при этом разные моды могут колебаться в разной фазе).

Собственные частоты $\omega_{(a)}$ могут быть вещественными или мнимыми.

Мнимые собственные частоты (отрицательные собственные числа $\lambda_b < 0$) означают, что равновесие $x(t) = 0$ не является устойчивым. Соответствующие *неколебательные моды* имеют вид

$$h_{(b)}\left(A_{(b+)}\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_{(b)}}\, t} + A_{(b-)}\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_{(b)}}\, t}\right),$$

где амплитуды $A_{(b\pm)}$ вещественны.

Если $\lambda_{(c)} = 0$, то соответствующая неколебательная мода также соответствует неустойчивому равновесию решения $x(t) = 0$:

$$h_{(c)}\left(A_{(c)} + A_{(c')}t\right),$$

где амплитуды $A_{(c)}$, $A_{(c')}$ вещественны.

(!) Случай $\lambda_{(c)} = 0$ требует более внимательного рассмотрения, если исследуемая система была получена линеаризацией, поскольку при этом устойчивость может определяться высшими производными функции $U(x)$. Например, если $U(x) = \frac{c}{4!}\, x^4$, то $\lambda = 0$ и устойчивость равновесия $x(t) = 0$ определяется знаком постоянной, которая задаётся 4-й производной потенциала: $c = \frac{d^4U}{dx^4}$. Равенство нулю собственной частоты для такого потенциала означает, что частота стремится к нулю по мере уменьшения амплитуды.

3.4.3 Диссипативная функция Релея**

Диссипативная функция Релея — квадратичная форма от скоростей, матрица которой задаётся коэффициентами вязкого трения — симметричной неотрицательно определённой матрицей $b_{(\alpha\beta)}$:

$$\mathcal{R}(x, \dot{x}) = b_{(\alpha\beta)}(x)\, \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = b_{\alpha\beta}(x)\, \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta.$$

Силы вязкого трения получаются как производные от диссипативной функции по скоростям:

$$f_\alpha = -2b_{(\alpha\beta)}(x)\, \dot{x}^\beta = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{x}^\alpha}.$$

Мощность сил вязкого трения имеет вид

$$f_\alpha \dot{x}^\alpha = -2\mathcal{R}.$$

(ф) Это определяет физический смысл диссипативной функции — половина мощности, теряемой на вязкое трение.

Уравнения Эйлера-Лагранжа в присутствии сил вязкого трения, которые рассматриваются как внешние силы, переписываются в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{x}^\alpha}.$$

3.4.4 Собственные колебания с диссипацией и гироскопическими силами**

Вернёмся к уравнению системы связанных осцилляторов с гироскопическими силами и затуханием:

$$M_{\alpha\beta}\ddot{x}^\beta + 2B_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta + K_{\alpha\beta}x^\beta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{M}\ddot{\vec{x}} + 2\hat{B}\dot{\vec{x}} + \hat{K}\vec{x} = 0. \tag{3.4.6}$$

В случае общего положения такую систему уже не удастся свести к набору невзаимодействующих осцилляторов с помощью *вещественной* замены координат: две симметричные матрицы мы можем диагонализовать одновременно, но для трёх матриц такой трюк, как правило, не проходит.

Будем искать решение в виде

$$x^\alpha(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} h^\alpha.$$

(!) Мы отказались от вещественности вектора амплитуды h^α, и теперь при собственных колебаниях разные степени свободы могут колебаться в разных фазах:

$$\mathrm{Re}\left(A\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} h^\alpha\right) = |A| \cdot |h^\alpha| \cdot \cos(\omega t - \arg A - \underbrace{\arg h^\alpha}_{\text{разные фазы}}).$$

Подставляя выражение $x^\alpha(t)$ в уравнение (3.4.6), получаем систему линейных однородных уравнений на вектор комплексных амплитуд h^α:

$$\left(-\omega^2 M_{\alpha\beta} - \mathrm{i}2\omega B_{\alpha\beta} + K_{\alpha\beta}\right) h^\beta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-\omega^2 \hat{M} - \mathrm{i}2\omega \hat{B} + \hat{K})\vec{h} = 0. \tag{3.4.7}$$

Условие существования ненулевой амплитуды — вырожденность матрицы коэффициентов уравнения

$$\det(-\omega^2 \hat{M} - \mathrm{i}2\omega \hat{B} + \hat{K}) = 0, \tag{3.4.8}$$

что даёт систему уравнений на комплексные собственные частоты ω. При положительно определённой матрице $\hat{K}$ в отсутствие диссипации (т.е. при $B_{\alpha\beta} = -B_{\beta\alpha}$) сохранение энергии гарантирует, что все собственные частоты будут вещественными.

Рассмотрим тот же осциллятор под действием гармонической вынуждающей силы $F_\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ (F_α и ω — комплексные величины), которую добавим в правую часть системы (3.4.6):

$$M_{\alpha\beta}\ddot{x}^\beta + 2B_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta + K_{\alpha\beta}x^\beta = F_\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{M}\ddot{\vec{x}} + 2\hat{B}\dot{\vec{x}} + \hat{K}\vec{x} = \vec{F}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}. \tag{3.4.9}$$

Здесь F_α — комплексный ковектор амплитуды вынуждающей силы.

Будем искать решение в виде $x^\alpha(t) = A^\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$, где частота ω та же, что у вынуждающей силы. Подставив это выражение в уравнение (3.4.9) и сократив $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$, получаем матричное уравнение и *амплитудно-частотную характеристику* $\vec{A}(\omega, \vec{F})$:

$$(-\omega^2 \hat{M} - \mathrm{i}2\omega \hat{B} + \hat{K})\vec{A} = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \vec{A}(\omega, \vec{F}) = (-\omega^2 \hat{M} - \mathrm{i}2\omega \hat{B} + \hat{K})^{-1}\vec{F}.$$

Амплитудно-частотная характеристика имеет особенности, когда матрица $(-\omega^2 \hat{M} - \mathrm{i}2\omega \hat{B} + \hat{K})$ необратима, т.е. имеет нулевой определитель:

$$\det(-\omega^2 \hat{M} - \mathrm{i}2\omega \hat{B} + \hat{K}) = 0.$$

Мы видим, что особенности амплитудно-частотной характеристики совпадают с собственными частотами системы.

Почему нам удалось найти собственные частоты, хотя мы не можем одновременно диагонализовать три матрицы $\hat{M}, \hat{B}, \hat{K}$? На самом деле для произвольных матриц мы находим собственные частоты (в количестве, равном числу степеней свободы), но иногда (для некоторых исключительных случаев с кратными собственными частотами) количество собственных векторов будет меньше. Впрочем, малым изменением параметров можно всегда вернуться к *случаю общего положения*, когда количество собственных векторов равно числу степеней свободы.

3.4.5 Задача 47

Задача 47. Собственные колебания. Запишите вековое уравнение и найдите собственные колебания (частоты и амплитуды) для следующих систем.

а) Три груза массой m каждый соединены в цепочку двумя пружинами жёсткостью k. Грузы надеты на стержень, так что двигаться они могут только вдоль прямой.

б) Груз массой m_1 подвешен на пружине жёсткостью k_1, к нему на пружине жёсткостью k_2 подвешен груз массой m_2. Грузы надеты на стержень, так что двигаться они могут только вдоль прямой.

в) Цепочка из n грузиков массой m, соединённых пружинками жёсткостью k, замкнута кольцом и нанизана на обруч.

г)* Цепочка из $2n$ грузиков, массы которых m_1 и m_2 чередуются, соединённых пружинками жёсткостью k, замкнута в кольцо и нанизана на обруч. Выделите акустическую и оптическую ветви спектра, для каждой определите фазовую и групповую скорости. Рассмотрите предельный переход к случаю $m_1 = m_2 = m$ и сравните с пунктом в).

д)* Найдите собственные колебания математического маятника, подвешенного на невесомой упругой нити (пружине).

е)** Молекула из трёх одинаковых атомов массой m имеет форму равностороннего треугольника. Жёсткость ребра равна k. (Вековое уравнение можно не писать.)

Глава 3.5

Нелинейные колебания (с. 451)

Поскольку во многих случаях линейные уравнения движения являются приближением более сложных нелинейных уравнений при малых отклонениях от точки равновесия[1], было бы полезно хотя бы приблизительно описать, что происходит с решениями линейных уравнений, когда по мере роста амплитуды колебаний начинают проявляться нелинейные эффекты. Полное описание нелинейных эффектов, разумеется, дать не удастся.

Нелинейная динамика, как правило, не допускает простого и общего описания.

Для случаев, когда нелинейные эффекты малы, есть различные приближённые методы, есть методы последовательных приближений. В частности, мы познакомимся с *теорией возмущений* для нелинейных колебаний. Методы, основанные на последовательных приближениях, называют *пертурбативными методами*[2].

Сложности с описанием нелинейных систем обычно начинаются тогда, когда число степеней свободы превышает число хорошо вычислимых (*аддитивных*) интегралов движения. *Непертурбативные методы* (т. е. методы, не связанные с теорией возмущений) в некоторых (редких) случаях позволяют найти точные решения нелинейных уравнений. Исключительные случаи, когда работают непертурбативные методы, — это либо хорошие частные решения со специальными свойствами, либо случаи, когда у нелинейной системы нашлись дополнительные интегралы движения.

Существуют также *качественные методы* исследования дифференциальных уравнений, изучающие общие характеристики решений: рост/уменьшение, асимптотики, релаксационные/колебательные режимы, наличие (не точное положение) минимумов/максимумов, бифуркации и т.п. Эти методы широко применяются в *синергетике* (науке о самоорганизации в нелинейных динамических системах).

В некоторых случаях нелинейные системы описываются *статистическими методами*.

Нелинейная динамика может быть предметом нескольких отдельных курсов лекций, а здесь мы лишь прикоснёмся к некоторым эффектам и методам.

3.5.1 Вырожденность одномерного случая

Если система имеет всего одну степень свободы, причём энергия сохраняется, то уравнения движения такой системы интегрируются в квадратурах (сводятся к нахождению определённых интегралов).

Есть закон сохранения энергии

$$\mathcal{E} = E(x, \dot{x}). \tag{3.5.1}$$

Из него выражаем скорость как функцию энергии и координаты:

$$\frac{dx}{dt} = V(\mathcal{E}, x),$$

и это уравнение оказывается уравнением с разделяющимися переменными:

$$\int \frac{dx}{V(\mathcal{E}, x)} = \int dt = t - t_0. \tag{3.5.2}$$

Интегрируя его, получаем время как функцию координаты, т.е. зависимость $x(t)$ в неявном виде:

$$t - t_0 = T(\mathcal{E}, x). \tag{3.5.3}$$

[1] Важным исключением является *уравнение Шрёдингера* в квантовой механике. Оно линейно, но не является приближением какого-либо более фундаментального нелинейного уравнения. Наоборот, *нелинейное уравнение Шрёдингера* — это приближение к линейному уравнению (вместо линейного уравнения для очень большого числа частиц рассматривается нелинейное уравнение для одной частицы).

[2] Возмущение (рус.) = perturbation (англ., фр. + тот же латинский корень в ряде других европейских языков).

Уравнения движения могут быть нелинейными, но всё равно с точки зрения теории обыкновенных дифференциальных уравнений задача решена, поскольку она сведена к алгебре (решению уравнения (3.5.1) относительно скорости), математическому анализу (взятию интеграла (3.5.2)) и снова алгебре (разрешению относительно x уравнения (3.5.3)).

Поскольку одномерный случай всегда интегрируем, он не может давать некоторые сложные виды поведения, которые свойственны неинтегрируемым системам, когда количество хорошо вычислимых (аддитивных) интегралов движения меньше, чем число степеней свободы. Тем не менее некоторые эффекты нелинейных колебаний можно обнаружить даже в этом простейшем случае.

Поэтому начнём с исследования одномерного движения частицы в потенциале:

$$L(x,\dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x), \qquad H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + U(x).$$

Уравнение движения будет иметь совершенно стандартный вид:

$$m\ddot{x} = -U'(x).$$

3.5.2 Зависимость частоты от амплитуды одномерных колебаний

Как упоминалось выше, из закона сохранения энергии

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U(x)$$

можно выразить скорость:

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[\mathcal{E} - U(x)]},$$

разделить переменные:

$$\pm\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[\mathcal{E} - U(x)]}} = dt,$$

проинтегрировать и найти половину периода колебаний:

$$\frac{T}{2} = \int\limits_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[\mathcal{E} - U(x)]}}. \tag{3.5.4}$$

Здесь $x_{\min}$ и $x_{\max}$ — граничные точки, между которыми колеблется координата, они определяются условиями

$$\mathcal{E} = U(x_{\min/\max}), \quad x_{\min} < x_{\max}.$$

Формула (3.5.4) неудобна тем, что подынтегральное выражение обычно стремится к бесконечности при стремлении x к границам области интегрирования. Это требует аккуратного определения границ области интегрирования. По этой причине писать разложение такого интеграла по малой поправке к $U(x)$ достаточно неудобно.

Однако мы можем записать период колебаний альтернативным способом.

Пусть потенциал (в области, доступной для частицы) имеет один минимум и разбивается на два участка монотонности: «левая стенка» (левее минимума) и «правая стенка» (правее минимума). Опишем потенциал с помощью двух функций: $x_{\text{л}}(U)$ — положение левой стенки (x как функция от U на нисходящем участке функции $U(x)$) как функция потенциальной энергии и $x_{\text{п}}(U)$ — положение правой стенки (x как функция от U на восходящем участке функции $U(x)$). Не теряя общности, предположим (мы всегда можем сдвинуть начало отсчёта по x и U), что $x_{\text{л}}(0) = x_{\text{п}}(0) = 0$ (минимальная потенциальная энергия равна 0 и достигается при нулевой координате). Введём также функцию

$$\ell(U) = x_{\text{п}}(U) - x_{\text{л}}(U)$$

— ширину ямы на энергии U.

Введём переменную p, задающую модуль импульса:

$$p = \sqrt{2m[\mathcal{E} - U(x)]}, \qquad \frac{dp}{dt} = \pm\frac{dU}{dx}, \qquad p_0 = \sqrt{2m\mathcal{E}}.$$

Время движения частицы по левой стенке в одну сторону равно

$$T_{\text{л}} = \int\limits_0^{p_0} \frac{dp}{|dU/dx_{\text{л}}|} = -\int\limits_0^{p_0} \frac{dx_{\text{л}}}{dU}\, dp.$$

Время движения частицы по правой стенке в одну сторону равно

$$T_{\text{п}} = \int\limits_0^{p_0} \frac{dp}{|dU/dx_{\text{п}}|} = \int\limits_0^{p_0} \frac{dx_{\text{п}}}{dU}\, dp.$$

Полупериод колебания равен

$$\frac{T}{2} = T_{\text{л}} + T_{\text{п}} = \int\limits_0^{p_0} \left(\frac{dx_{\text{п}}}{dU} - \frac{dx_{\text{л}}}{dU} \right) dp = \int\limits_0^{p_0} \frac{d\ell}{dU}\, dp. \tag{3.5.5}$$

Мы видим, что период колебаний задаётся функцией ширины ямы $\ell(U)$.

В ряде задач такое представление периода оказывается более удобным.

3.5.2.1 Линейная по возмущению поправка к периоду осциллятора*

Пусть потенциал $U(x)$ близок к потенциалу гармонического осциллятора:

$$U(x) = \frac{m\omega_0^2\, x^2}{2} + \varepsilon \cdot m \cdot u(x), \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0.$$

Разложим функции положения стенок $x_{\text{л}}(U)$, $x_{\text{п}}(U)$ в ряд по малому параметру ε:

$$\begin{aligned} x_{\text{л}}(U) &= x_{\text{л}0}(U) + \varepsilon x_{\text{л}1}(U) + \varepsilon^2 x_{\text{л}2}(U) + \ldots, \\ x_{\text{п}}(U) &= x_{\text{п}0}(U) + \varepsilon x_{\text{п}1}(U) + \varepsilon^2 x_{\text{п}2}(U) + \ldots \end{aligned}$$

Для функции ширины ямы $\ell(U)$ получаем

$$\begin{aligned} &\ell(U) = x_{\text{п}}(U) - x_{\text{л}}(U) = \ell_0(U) + \varepsilon \ell_1(U) + \varepsilon^2 \ell_2(U) + \ldots, \\ &\ell_0 = x_{\text{п}0} - x_{\text{л}0}, \quad \ell_1 = x_{\text{п}1} - x_{\text{л}1}, \quad \ell_2 = x_{\text{п}2} - x_{\text{л}2}; \end{aligned}$$

$$x_{\text{п,л}0} = \pm\sqrt{\frac{2U}{m\omega_0^2}}, \quad \ell_0(U) = 2x_{\text{п}0} = 2\sqrt{\frac{2U}{m\omega_0^2}}, \quad \frac{d\ell_0}{dU} = \sqrt{\frac{2}{m\omega_0^2 U}}.$$

Найдём производные $\left(\frac{dx_{\text{п,л}}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$ как производные неявных функций:

$$\frac{dU}{d\varepsilon} = \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx_{\text{п,л}}}{d\varepsilon} \right)_{x = x_{\text{п,л}}, \varepsilon = 0} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\left(\frac{dx_{\text{п,л}}}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = -\frac{u(x_{\text{п}0/\text{л}0})}{\omega_0^2 x_{\text{п}0/\text{л}0}};$$

$$\begin{aligned} \ell_1 &= -\frac{u(x_{\text{п}0})}{\omega_0^2 x_{\text{п}0}} + \frac{u(x_{\text{л}0})}{\omega_0^2 x_{\text{л}0}} = -\frac{u(x_{\text{п}0}) + u(-x_{\text{п}0})}{\omega_0^2 x_{\text{п}0}}; \\ \frac{d\ell_1}{dU} &= -\frac{\left[u'\left(x_{\text{п}0}\right) - u'\left(-x_{\text{п}0}\right)\right] x_{\text{п}0} - \left[u\left(x_{\text{п}0}\right) + u\left(-x_{\text{п}0}\right)\right]}{\omega_0^2\, x_{\text{п}0}^2} \frac{dx_{\text{п}0}}{dU}; \end{aligned}$$

$$x_{\text{п}0} = \sqrt{\frac{2U}{m\omega_0^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx_{\text{п}0}}{dU} = \frac{1}{dU/dx_{\text{п}0}} = \frac{1}{m\omega_0^2 x_{\text{п}0}};$$

$$\frac{d\ell_1}{dU} = -\frac{\left[u'\left(x_{\text{п}0}\right) - u'\left(-x_{\text{п}0}\right)\right] x_{\text{п}0} - \left[u\left(x_{\text{п}0}\right) + u\left(-x_{\text{п}0}\right)\right]}{m\omega_0^4\, x_{\text{п}0}^3}.$$

Функцию $u(x)$ можно представить как сумму чётной и нечётной частей:

$$u(x) = u_+(x) + u_-(x), \qquad u_+(x) = \frac{u(x)+u(-x)}{2}, \quad u_-(x) = \frac{u(x)-u(-x)}{2}.$$

Вклад в $\frac{d\ell_1}{dU}$, а значит, и в поправку к периоду в линейном по ε порядке даёт только чётная часть:

$$\frac{d\ell_1}{dU} = -2\frac{u'_+(x_{\text{п}0})\,x_{\text{п}0} - u_+(x_{\text{п}0})}{m\omega_0^4\,x_{\text{п}0}^3};$$

$$U = \frac{p_0^2-p^2}{2m}, \quad x_{\text{п}0} = \sqrt{\frac{2U}{m\omega_0^2}} = \frac{\sqrt{p_0^2-p^2}}{m\omega_0}.$$

Линейная по ε поправка к периоду составляет

$$\varepsilon\frac{dT}{d\varepsilon} = -4\int\limits_0^{p_0} \frac{u'_+(x_{\text{п}0})\,x_{\text{п}0} - u_+(x_{\text{п}0})}{m\omega_0^4\,x_{\text{п}0}^3}\bigg|_{x_{\text{п}0}=\frac{\sqrt{p_0^2-p^2}}{m\omega_0}} dp.$$

3.5.2.2 Квадратичная по возмущению поправка к периоду осциллятора**

Для нахождения квадратичной поправки по ε приходится искать уже вторую производную неявной функции:

$$\frac{d^2U}{d\varepsilon^2} = \left(\frac{\partial^2U}{\partial x_{\text{п,л}}\partial\varepsilon} + \frac{\partial^2U}{\partial x_{\text{п,л}}^2}\frac{dx_{\text{п,л}}}{d\varepsilon}\right)\frac{dx_{\text{п,л}}}{d\varepsilon} +$$
$$+\frac{\partial U}{\partial x_{\text{п,л}}}\frac{d^2x_{\text{п,л}}}{d\varepsilon^2} + \left(\frac{\partial^2U}{\partial\varepsilon^2} + \frac{\partial^2U}{\partial\varepsilon\partial x_{\text{п,л}}}\frac{dx_{\text{п,л}}}{d\varepsilon}\right) =$$
$$= \frac{\partial^2U}{\partial x_{\text{п,л}}^2}\left(\frac{dx_{\text{п,л}}}{d\varepsilon}\right)^2 + 2\frac{\partial^2U}{\partial x_{\text{п,л}}\partial\varepsilon}\frac{dx_{\text{п,л}}}{d\varepsilon} + \frac{\partial U}{\partial x_{\text{п,л}}}\frac{d^2x_{\text{п,л}}}{d\varepsilon^2} + \underbrace{\frac{\partial^2U}{\partial\varepsilon^2}}_{0} = 0;$$

$$\left.\frac{d^2x_{\text{п,л}}}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x_{\text{п,л}}}\right)^{-1}_{\varepsilon=0}\left[\frac{\partial^2U}{\partial x_{\text{п,л}}^2}\left(\frac{dx_{\text{п,л}}}{d\varepsilon}\right)^2 + 2\frac{\partial^2U}{\partial x_{\text{п,л}}\partial\varepsilon}\frac{dx_{\text{п,л}}}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0};$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x_{\text{п,л}}}\right|_{\varepsilon=0} = m\omega_0^2 x_{\text{п,л}}, \quad \left.\frac{\partial^2U}{\partial x_{\text{п,л}}^2}\right|_{\varepsilon=0} = m\omega_0^2, \quad \left.\frac{\partial^2U}{\partial\varepsilon\partial x_{\text{п,л}}}\right|_{\varepsilon=0} = m\,u'(x_{\text{п,л}}).$$

Получаем

$$\left(\frac{d^2x_{\text{п,л}}}{d\varepsilon^2}\right)_{\varepsilon=0} = \frac{1}{\omega_0^4\,x_{\text{п}0/\text{л}0}}\left[\frac{u^2(x_{\text{п}0/\text{л}0})}{x_{\text{п}0/\text{л}0}}\right]'.$$

3.5.3 Одномерный нелинейный резонанс

Рассмотрим одномерный нелинейный осциллятор под действием вынуждающей силы:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0\mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \varepsilon f_{\text{н.л.}}(x,\dot{x}).$$

Здесь f_0 — амплитуда вынуждающей силы (в линейном случае мы её не писали).

Амплитуда, которую имел бы гармонический осциллятор, составляет

$$A = \frac{f_0}{(\omega_0^2-\omega^2)+-\mathrm{i}2\omega\gamma}, \qquad |A| = \frac{|f_0|}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\gamma^2}}.$$

Как мы увидим далее, в нелинейном случае эта формула имеет смысл вблизи резонанса, поэтому мы будем считать, что $\omega = \Delta\omega + \omega_0$, $|\Delta\omega| \ll \omega_0$. Тогда при $\gamma \ll \omega_0$

$$A \approx \frac{f_0}{2\omega_0(-\Delta\omega+-\mathrm{i}\gamma)}, \qquad a = |A| \approx \frac{|f_0|}{2\omega_0\sqrt{\Delta\omega^2+\gamma^2}}.$$

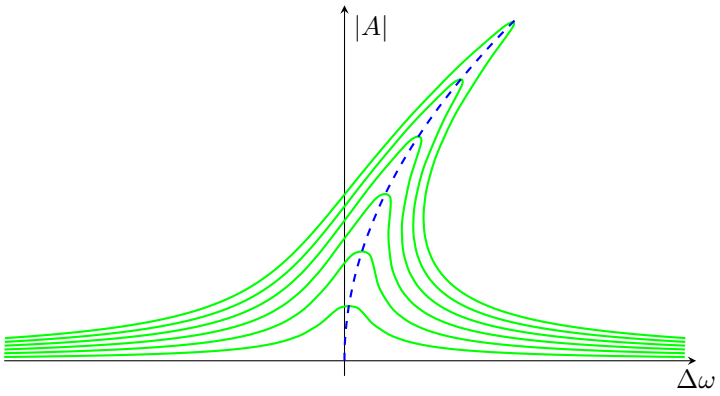
Как было видно из обсуждения резонанса для линейного осциллятора, форма резонансной кривой в существенной степени определяется разностью фаз между скоростью и вынуждающей силой. Точная

гармоническая форма колебаний при этом не влияет на качественный вид зависимости. Примем, что в низшем порядке по ε поправка к собственной частоте пропорциональна квадрату амплитуды[3]:

$$\delta\omega = \varkappa |A|^2.$$

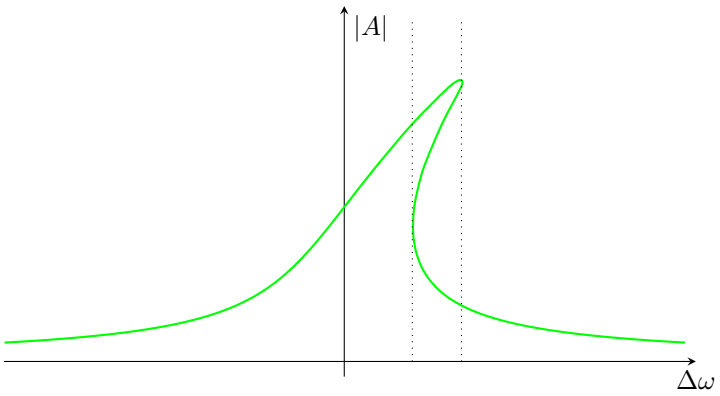
Подставив в формулу для амплитуды $\Delta\omega - \delta\omega$ вместо $\Delta\omega$, получаем

$$A \approx \frac{f_0}{2\omega_0(\varkappa a^2 - \Delta\omega + -\mathrm{i}\gamma)}, \qquad a \approx \frac{|f_0|}{2\omega_0\sqrt{[\varkappa a^2 - \Delta\omega]^2 + \gamma^2}}.$$



Резонансные кривые нелинейного осциллятора при разных амплитудах вынуждающей силы

При достаточно большой амплитуде $f > f_{\text{к}}$ вынуждающей силы резонансная кривая теряет однозначность. В этом случае в системе может наблюдаться *гистерезис* — зависимость состояния системы не только от текущих условий, но и от предыстории.



Область неоднозначности резонансной кривой — одной частоте соответствуют три значения амплитуды

При повышении частоты система заходит на верхнюю ветвь кривой, пока не срывается в конце области неоднозначности вниз.

При понижении частоты система заходит на нижнюю ветвь кривой, пока не срывается в конце области неоднозначности вверх.

Средняя ветвь кривой неустойчива.

3.5.4 Теория возмущений

Рассмотрим линейную систему в нормальных координатах с нелинейными поправками, которые будем рассматривать как малое возмущение:

$$\ddot{x}^a + \omega_{(a)}^2 x^a = \varepsilon f^a(x, \dot{x}).$$

Здесь функции $f^a(x, \dot{x})$ описывают нелинейную часть обобщённых сил, а $\varepsilon \ll 1$ — параметр малости, который выделен для удобства оценки малости поправок теории возмущений.

Рассмотрим процедуру построения решения как ряда по ε в рамках *теории возмущений*:

$$x^a = x^a_{(0)} + \varepsilon^1 x^a_{(1)} + \varepsilon^2 x^a_{(2)} + \varepsilon^3 x^a_{(3)} + \cdots + \varepsilon^n x^a_{(n)} + \cdots$$

[3]Как видно из задач к данной главе, это не обязательно так, например, для поправки к потенциалу вида $\varepsilon \cdot |x|^3$ поправка оказывается линейной по амплитуде. Но если поправка к потенциалу — аналитическая функция, то это условие выполняется.

* Нулевой порядок теории возмущений пропорционален ε^0, т.е. даёт решение *невозмущённых уравнений* при $\varepsilon = 0$. В нашем случае невозмущённые решения — собственные колебания линеаризованной системы.
* $(n+1)$-й порядок теории возмущений получается как вынужденное колебание, в котором вынуждающая сила получается при подстановке в правую часть суммы первых n порядков теории возмущений и удержании *только членов порядка* ε^{n+1} (меньшие порядки уже учтены в предыдущих членах, следующие будут учтены в следующих)

$$\sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k \left[\ddot{x}^a_{(k)} + \omega^2_{(a)} x^a_{(k)} \right] = \varepsilon f^a \left(\sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k x_{(k)}, \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k \dot{x}_{(k)} \right) + o(\varepsilon^{n+1}).$$

$$\ddot{x}^a_{(n+1)} + \omega^2_{(a)} x^a_{(n+1)} = \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \left[\varepsilon f^a \left(\sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k x_{(k)}, \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k \dot{x}_{(k)} \right) + \underbrace{o(\varepsilon^{n+1}) + O(\varepsilon^n)}_{\text{высшие и низшие степени отброшены}} \right].$$

* При достаточно малом ε первые несколько порядков теории возмущений обычно дают удовлетворительное описание системы.
* Ряд теории возмущений, взятый целиком, часто (как правило) расходится.

В нулевом порядке все координаты и скорости выражаются через гармонические колебания

$$\cos(\omega_{(a)} t), \qquad \sin(\omega_{(a)} t).$$

При вычислении правой части эти функции и производные от них умножаются и возводятся в степени. Из тригонометрии мы знаем, что при умножении синусов и косинусов получаются синусы и косинусы от суммы и разности аргументов:

$$\begin{aligned}
\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t) &= \frac{1}{2}\Big(\cos(\omega_1 - \omega_2)t + \cos(\omega_1 + \omega_2)t \Big), \\
\sin(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t) &= \frac{1}{2}\Big(\sin(\omega_1 - \omega_2)t + \sin(\omega_1 + \omega_2)t \Big), \\
\sin(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t) &= \frac{1}{2}\Big(\cos(\omega_1 - \omega_2)t - \cos(\omega_1 + \omega_2)t \Big).
\end{aligned}$$

Частота вынужденных колебаний гармонического осциллятора совпадает с частотой вынуждающей силы.

Таким путём кроме собственных частот, которые имели место для малых колебаний, появляются их *суммы и разности*. В высших порядках теории возмущений появляются и более сложные комбинации собственных частот. Если какая-то появившаяся комбинация собственных частот равна собственной частоте (такое обычно возникает, начиная со 2-го порядка теории возмущений $\omega_1 = \omega_a + \omega_2 - \omega_2$), то возникает кажущийся резонанс (для настоящего резонанса нет источника энергии), который связан со сдвигом собственных частот (сдвиг частоты зависит от амплитуды!):

$$a\cos(\omega_1 + \delta\omega_1)t \approx a\cos(\omega_1 t) - \underbrace{\delta\omega_1 t a \sin(\omega_1 t)}_{\text{якобы резонанс}}. \tag{3.5.6}$$

Поскольку при изменении знака амплитуды частота меняться не может, ряд для частоты должен быть чётной функцией от амплитуды и содержит амплитуду только в чётных степенях.

Если точно решить задачу для одномерного ангармонического осциллятора (эта задача *решается в квадратурах*), то его частота будет зависеть от амплитуды. Если частота колебаний конечна, то в фурье-разложении ангармонических колебаний будут присутствовать только частоты, целые кратные собственной частоте (*обертоны*). Это общее свойство преобразований Фурье для периодических функций (рядов Фурье).

Избавиться от кажущихся резонансов можно, если начинать ряд теории возмущений с пробных гармонических колебаний на сдвинутых частотах $\omega_{(a)} + \delta\omega_{(a)}$, где сдвиги частот $\delta\omega_{(a)}$ вначале считаются неопределёнными, а в каждом порядке теории возмущений находятся из условий самосогласованности амплитуд: амплитуды вынужденных колебаний на частотах $\omega_{(a)} + \delta\omega_{(a)}$ должны совпадать с амплитудами пробных колебаний.

Рассмотрим, как работает теория возмущений, на конкретном простом примере.

Пример. Рассмотрим влияние поправки 4-й степени к потенциалу одномерного осциллятора:

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 - \varepsilon m \frac{1}{4} x^4.$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\varepsilon x^3.$$

Невозмущённое решение:

$$x_{(0)}(t) = a\cos\omega_0 t.$$

Возмущённое решение:

$$x(t) = x_{(0)}(t) + \varepsilon x_{(1)}(t) + o(\varepsilon).$$

Уравнение 1-го порядка теории возмущений имеет вид

$$\ddot{x}_{(1)} + \omega_0^2 x_{(1)} = -x_{(0)}^3 = -a^3\left(\frac{3}{4}\cos\omega_0 t + \frac{1}{4}\cos 3\omega_0 t\right).$$

Для вынуждающей силы $\operatorname{Re} f_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} = f_0\cos\omega_0 t$ решение имеет вид (3.3.3):

$$x_{\text{рез.}}(t) = \operatorname{Re} f_0 \frac{t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}}{-\mathrm{i}2\omega_0} = \frac{f_0 t}{2\omega_0}\sin\omega_0 t.$$

Так что первый порядок теории возмущений даёт (с учётом $f_0 = -\frac{3}{4}\varepsilon a^3$) поправку к $x(t)$:

$$\varepsilon x_{(1)}(t) = -\underbrace{\frac{3}{8\omega_0}\varepsilon a^2}_{\delta\omega} t a\sin\omega_0 t + \frac{a^3\varepsilon}{32\omega_0^2}\cos 3\omega_0 t.$$

Сравнение с формулой (3.5.6) позволяет определить сдвиг частоты уже в первом порядке теории возмущений:

$$\delta\omega = \frac{3}{8\omega_0}\varepsilon a^2.$$

Тот же сдвиг частоты можно найти из *условия самосогласованности* амплитуды основной гармоники. Возьмём в качестве пробного решения гармоническое колебание с частотой, отличной от ω_0:

$$x_{\text{пр.}}(t) = a\cos(\omega_0 + \delta\omega)t.$$

Рассмотрим уравнение с вынуждающей силой, определяемой пробным решением:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\varepsilon x_{\text{пр.}}^3 = -\varepsilon a^3\left(\frac{3}{4}\cos(\omega_0 + \delta\omega)t + \frac{1}{4}\cos 3(\omega_0 + \delta\omega)t\right).$$

Такая вынуждающая сила уже не попадает в резонанс, и соответствующее решение имеет вид

$$x(t) = -\varepsilon a^3\frac{3}{4}\frac{\cos(\omega_0 + \delta\omega)t}{\omega_0^2 - (\omega_0 + \delta\omega)^2} - \varepsilon a^3\frac{1}{4}\frac{\cos 3(\omega_0 + \delta\omega)t}{\omega_0^2 - 9(\omega_0 + \delta\omega)^2}.$$

Потребуем, чтобы гармоника с частотой $(\omega_0 + \delta\omega)$ имела ту же амплитуду, что и пробное решение:

$$\frac{3}{8}\frac{\varepsilon a^3}{\delta\omega\,\omega_0 + \delta\omega^2} = a.$$

С учётом малости $\delta\omega/\omega_0$ пренебрегаем в знаменателе членом $\delta\omega^2$ и получаем тот же ответ:

$$\delta\omega = \frac{3}{8\omega_0}\varepsilon a^2.$$

3.5.5 Нелинейный резонанс

В нелинейной системе возникают колебания на комбинациях собственных частот, аналогично возникают колебания на комбинации собственных частот и частоты вынуждающей силы. Это может приводить к появлению дополнительных резонансов на частотах вида $\omega_{a/b} = \frac{a}{b}\omega_0$, где a и b — не слишком большие натуральные числа. С ростом a и b увеличивается число гармоник, которые участвуют в возникновении резонанса, растёт порядок теории возмущений, в котором этот резонанс проявляется, и его амплитуда уменьшается.

В нелинейных системах возможны сложные резонансные эффекты, вызывающие перекачивание энергии между разными степенями свободы.

3.5.6 Задачи 48, 49

Задача 48. ** Обобщённый осциллятор (М.Г. Иванов).
Задача давалась на олимпиаде МФТИ по теоретической физике 2019 г.
Нерелятивистская частица с массой m совершает одномерные колебания в гладком потенциале $U(x)$, при этом период колебаний T не зависит от энергии частицы E. Найдите общий вид потенциала $U(x)$.

Задача 49. Нелинейный осциллятор.
а) Для осциллятора с кубической нелинейностью

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 - \varepsilon m\frac{1}{3}x^3$$

найдите поправку к частоте в зависимости от амплитуды (можно использовать теорию возмущений).
б) Что изменится, если взять $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 - \varepsilon m\frac{1}{3}|x^3|$?

Глава 3.6

Поле как механическая система (с. 454)

Чтобы описать поле как динамическую систему, мы будем рассматривать его как механическую систему с бесконечным числом степеней свободы и обобщим на этот случай построенный ранее формализм.

3.6.1 Пример: цепочка осцилляторов*

Рассмотрим бесконечную одномерную цепочку одинаковых грузиков массой m, связанных одинаковыми пружинками с жёсткостью k.

Пусть все грузики движутся вдоль одной прямой. Координата грузика с номером $\alpha \in \mathbb{Z}$ относительно положения равновесия — ϕ^α.

(*) Цепочка осцилляторов может рассматриваться как модель одномерного кристалла (грузики — атомы, пружинки — химические связи). Такая модель описывает не только одномерный кристалл, но и кристалл в двух или трёх измерениях, если вектор смещения параллелен одной из осей и зависит только от соответствующей координаты.

Чтобы энергия была конечной, сначала будем считать, что ϕ^α и $\dot\phi^\alpha$ зависят от α периодически с периодом N, и будем брать сумму по одному периоду. Будем считать, что $\alpha \in \mathbb{Z}(N) = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ и сумма в $\mathbb{Z}(N)$ определена по модулю N:

$$(N-1)+1 = 0 \,(\mathrm{mod}\ N), \qquad \alpha + N = \alpha \,(\mathrm{mod}\ N).$$

Выпишем основные величины и уравнения, описывающие систему.

Кинетическая и потенциальная энергии:

$$\mathcal{E}_\text{к} = \frac{m}{2}\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}(N)} (\dot\phi^\alpha)^2, \qquad U = \frac{k}{2}\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}(N)} (\phi^\alpha - \phi^{\alpha-1})^2.$$

Функция Лагранжа:

$$L(\phi^\alpha, \dot\phi^\alpha) = \mathcal{E}_\text{к} - U = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}(N)} \left(\frac{m}{2}(\dot\phi^\alpha)^2 - \frac{k}{2}(\phi^\alpha - \phi^{\alpha-1})^2\right).$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$m\ddot\phi^\alpha - k\left[(\phi^{\alpha+1} - \phi^\alpha) - (\phi^\alpha - \phi^{\alpha-1})\right] = 0.$$

Импульсы:

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot\phi^\alpha} = m\dot\phi^\alpha.$$

Перейдём к непрерывному пределу. Пусть $a \to 0$ — равновесное расстояние между частицами. При этом зафиксируем массу на единицу длины $\mu = \frac{m}{a}$, длину периода $Na = \Xi$ и, поскольку жёсткость пружинки $\sim a^{-1}$, зафиксируем произведение $Y = ka$:

$$x = \alpha \cdot a, \qquad \phi^\alpha \to \phi(\alpha\cdot a) = \phi(x);$$

$$L(\phi^\alpha, \dot\phi^\alpha) = \mathcal{E}_\text{к} - U = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}(N)} \left[\frac{m}{2a}(\dot\phi^\alpha)^2 - \frac{ka}{2}\left(\frac{\phi^\alpha - \phi^{\alpha-1}}{a}\right)^2\right] a \to \int\limits_0^\Xi \left[\frac{\mu}{2}\dot\phi^2(x) - \frac{Y}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right] dx.$$

В пределе функция Лагранжа превращается в *функционал Лагранжа*, который является интегралом от *плотности функции Лагранжа*[1] $\mathcal{L}$:

$$L[\phi(x), \partial_t\phi(x)] = \int\limits_0^\Xi \underbrace{\left[\frac{\mu}{2}(\partial_t\phi)^2 - \frac{Y}{2}(\partial_x\phi)^2\right]}_{\mathcal{L}(\phi,\partial_i\phi)} dx.$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа разделим на a

$$\frac{m}{a}\ddot\phi^\alpha - ka\frac{\frac{1}{a}(\phi^{\alpha+1} - \phi^\alpha) - \frac{1}{a}(\phi^\alpha - \phi^{\alpha-1})}{a} = 0 \quad\to\quad \mu\partial_t^2\phi - Y\partial_x^2\phi = 0.$$

В пределе получаем *волновое уравнение* для упругих волн со скоростью $c = \sqrt{\frac{Y}{\mu}}$:

$$\partial_t^2\phi - c^2\partial_x^2\phi = 0.$$

Для исходной системы осцилляторов мы могли ставить задачу нахождения собственных колебаний. Эту же задачу можно ставить и для волнового уравнения.

Поскольку теперь $\phi(x,t)$ — функция двух переменных (*поле*), мы ввели более полевые обозначения

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}.$$

Импульсы стремятся к нулю: $p_\alpha = m\dot\phi^\alpha \to 0$, но остаётся конечной *плотность импульса*:

$$\frac{p_\alpha}{a} = \frac{m}{a}\,\dot\phi^\alpha \to \pi(x) = \mu\,\partial_t\phi.$$

Плотность импульса может быть определена через вариационную производную от функционала Лагранжа или обычную производную от плотности функции Лагранжа:

$$\pi(x) = \mu\,\partial_t\phi(x) = \frac{\delta L}{\delta(\partial_t\phi(x))} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\phi)}(x).$$

Все суммы по α превращаются в интегралы по dx. Пространственная координата нумерует степени свободы и играет роль, которую раньше играл индекс α.

Энергия также превращается в функционал, который представляет собой интеграл от *плотности энергии* W:

$$\mathcal{E} = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}(N)} p_\alpha\dot\phi^\alpha - L \to \int\limits_0^\Xi \pi(x)\,\partial_t\phi(x)\,dx - L[\phi(x), \partial_t\phi(x)] = \int\limits_0^\Xi \underbrace{\Big(\pi(x)\,\partial_t\phi(x) - \mathcal{L}(\phi, \partial_i\phi)\Big)}_{W} dx.$$

Действие имеет вид интеграла от плотности функции Лагранжа по пространственным и временны́м координатам:

$$S[\phi(x,t)] = \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_0^\Xi \left[\frac{\mu}{2}(\partial_t\phi)^2 - \frac{Y}{2}(\partial_x\phi)^2\right] dx\,dt. \tag{3.6.1}$$

Проварьируем действие по полю, считая, что вариация $\delta\phi(x,t)$ обращается в нуль на границе области интегрирования, т. е. при $x \in \{0, \Xi\}$ или при $t \in \{t_0, t_1\}$:

$$\delta S = \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_0^\Xi \left[\mu(\partial_t\phi)(\partial_t\delta\phi) - Y(\partial_x\phi)(\partial_x\delta\phi)\right] dx\,dt = \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_0^\Xi \left[-\mu\,\partial_t^2\phi + Y\,\partial_x^2\phi\right]\delta\phi\,dx\,dt.$$

Мы проинтегрировали первый член по частям по t, а второй член по частям по x.

Вариационная производная даёт уравнение поля, которое мы получили выше предельным переходом:

$$\frac{\delta S}{\delta\phi(x,t)} = -\mu\,\partial_t^2\phi + Y\,\partial_x^2\phi.$$

[1] Именно плотность функции Лагранжа в теории поля обычно называют лагранжианом.

3.6.2 Решение одномерного волнового уравнения (л)

Мы получили *одномерное волновое уравнение* вида

$$-\tfrac{1}{c^2}\partial_t^2\phi + \partial_x^2\phi = 0,$$

где $c = \sqrt{\frac{Y}{\mu}}$ — константа с размерностью скорости.

Перепишем уравнение через *одномерный волновой оператор* $\Box_1$:

$$-\frac{1}{c^2}\partial_t^2\phi + \partial_x^2\phi = \underbrace{(-\tfrac{1}{c^2}\partial_t^2 + \partial_x^2)}_{\Box_1}\phi = 0.$$

Волновой оператор можно разложить (как разность квадратов) в произведение двух дифференциальных операторов первого порядка:

$$\Box_1 = \partial_x^2 - \tfrac{1}{c^2}\partial_t^2 = \underbrace{(\partial_x - \tfrac{1}{c}\partial_t)}_{\frac{\partial}{\partial x_1}}\underbrace{(\partial_x + \tfrac{1}{c}\partial_t)}_{\frac{\partial}{\partial x_2}} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2},$$

где

$$x_1 = x - ct, \qquad x_2 = x + ct.$$

Волновое уравнение в новых координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

Очевидно, что функция вида

$$\phi = \phi_1(x_1) + \phi_2(x_2) = \phi_1(x - ct) + \phi_2(x + ct),$$

где ϕ_1 и ϕ_2 — произвольные дважды гладкие функции одной переменной, является решением волнового уравнения. В курсе уравнений математической физики будет показано, что это общее решение одномерного волнового уравнения.

(**) Мы не будем сейчас этого доказывать, просто ограничимся упоминанием, что волновое уравнение — это уравнение динамики (*гиперболическое уравнение*) второго порядка. Для задания начальных условий при $t = 0$ достаточно задать две функции одной переменной x: $\phi(x, 0)$ и $\partial_t\phi(x, 0)$, а найденное нами решение содержит как раз две произвольные функции одной переменной ϕ_1 и ϕ_2.

Графики функций $\phi_1(x - ct_1)$ и $\phi_1(x - ct_2)$ при фиксированных t_1 и t_2 получаются друг из друга сдвигом по x на $c(t_2 - t_1)$. Так что член $\phi_1(x - ct)$ соответствует волне, которая, не меняя формы, бежит со скоростью c в положительном направлении по x.

Аналогично член $\phi_2(x + ct)$ соответствует волне, которая, не меняя формы, бежит со скоростью c в отрицательном направлении по x.

(!*) Найденное нами общее решение одномерного волнового уравнения является также решением двумерного и трёхмерного волновых уравнений:

$$-\tfrac{1}{c^2}\partial_t^2\phi + \partial_x^2\phi + \partial_y^2\phi = 0, \qquad -\tfrac{1}{c^2}\partial_t^2\phi + \partial_x^2\phi + \partial_y^2\phi + \partial_z^2\phi = 0,$$

если ϕ не зависит от остальных пространственных координат (от y и z). В этом случае найденное нами решение описывает комбинацию двух плоских волн, бегущих слева направо и справа налево со скоростью c. Общие решения волновых уравнений в двумерии и трёхмерии также разлагаются в комбинацию плоских волн, бегущих со скоростью c, но эти волны уже могут бежать во всех возможных направлениях в пространстве соответствующей размерности. Это мы покажем далее, исследуя волновое уравнение на примере электромагнитных волн в главе 3.10 (с. 363).

3.6.3 Полевое действие в сравнении с механическим

3.6.3.1 Точка пространства как номер степени свободы

Сравним действие для механической системы с конечным числом степеней свободы $S[x^\alpha(t)]$ и полевое действие $S[\phi^a(\mathbf{r}, t)]$, рассматривая поле ϕ^a как механическую систему с бесконечным числом степеней свободы.

- Время t играет одинаковую роль в обоих случаях.
- Индекс α, нумерующий степени свободы, — пара $\mathbf{r}, a$: пространственные координаты $\mathbf{r}$, нумерующие точки пространства, и индекс a, нумерующий компоненты поля.
- Сумма по степеням свободы $\sum_\alpha(\cdots)$ — интеграл по пространству и сумма по компонентам поля $\int(\sum_a \cdots)\, d^3\mathbf{r}$.
- Обобщённая координата X^α с номером α — компонента поля $\phi^a(\mathbf{r})$ с номером a в точке $\mathbf{r}$.
- Обобщённая скорость $\dot{X}^\alpha$ с номером α — производная по времени $\partial_t\phi^a(\mathbf{r})$ компоненты поля с номером a в точке $\mathbf{r}$.
- Функция Лагранжа $L(X^\alpha, \dot{X}^\alpha, t)$ — функционал Лагранжа $L[\phi^a(\mathbf{r}), \partial_t\phi^a(\mathbf{r}), t] = \int \mathcal{L}\, d^3\mathbf{r}$.
- *Обобщённый импульс* $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\alpha}$ — *плотность обобщённого импульса* $\pi_a(\mathbf{r}) = \frac{\delta L}{\delta \partial_t\phi^a(\mathbf{r})} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t\phi^a}(\mathbf{r})$.
- Энергия $\mathcal{E} = p_\alpha\dot{X}^\alpha - L$ — энергия $\mathcal{E} = \int \pi_a\partial_t\phi^a\, d^3\mathbf{r} - L = \int(\pi_a\partial_t\phi^a - \mathcal{L})\, d^3\mathbf{r}$ (по повторяющимся индексам α и a подразумевается суммирование).

Описанная аналогия выделяет время среди пространственно-временных координат, что не всегда удобно с точки зрения теории относительности. Ниже мы посмотрим на полевое действие с другой точки зрения.

3.6.3.2 Пространство-время как «многомерное время»

Действие для поля записывается как интеграл по времени от функционала Лагранжа, который, в свою очередь, является интегралом по пространству от плотности функции Лагранжа:

$$S[\phi^a(\mathbf{r},t)] = \int\limits_{t_0}^{t_1} L\, dt = \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_V \mathcal{L}\, d^3\mathbf{r}dt = \frac{1}{c}\int\limits_{[ct_0,ct_1]\times V} \mathcal{L}\, d^4\underline{x}.$$

В результате можно записать действие как 4-мерный интеграл по некоторой области пространства-времени. В механике у нас был один параметр, по которому велось интегрирование, — время, теперь пространственные координаты выступили в той же роли, т.е. пространство-время играет роль многомерного времени.

Такая точка зрения особенно удобна, если поля надо рассматривать в рамках теории относительности. В последнем интеграле появился множитель $\frac{1}{c}$, потому что $dx^0 = c\, dt$.

(!) Когда мы работаем с пространством-временем, скорость света лучше положить равной единице и не отвлекаться на отслеживание правильных степеней скорости света в разных выражениях. Мы будем писать скорость света, рассматривая уравнения для электродинамики, только потому, что электродинамика — теория, имеющая множество практических применений, которые требуют использования общепринятых единиц измерения. В абстрактных примерах скорость света мы будем, как правило, опускать.

Следуя этой же аналогии, *лагранжианом* в теории поля обычно называют не функционал Лагранжа $L[\phi^a(\mathbf{r}), \partial_t\phi^a(\mathbf{r}), t]$, а *плотность функции Лагранжа*[2] $\mathcal{L}$.

Сравним действие для механической системы с конечным числом степеней свободы, зависящих от одномерного параметра t, и полевое действие, рассматривая поле как механическую систему с конечным числом степеней свободы, зависящих от 4-мерного параметра $\underline{x}$.

- Время t — точка в пространстве-времени $\underline{x}$.
- Интеграл по отрезку времени $\int_{[t_0,t_1]}(\cdots)\, dt$ — интеграл по 4-мерной области:

$$\int_U (\cdots)\, d^3\mathbf{r}\, dt = \tfrac{1}{c}\int_U (\cdots)\, d^4\underline{x}.$$

- Граница области интегрирования $\{t_1, t_0\}$ (точки t_1 и t_0 идут с противоположной ориентацией) — ориентированная граница области интегрирования ∂U.
- Индекс α, нумерующий степени свободы, — индекс a, нумерующий компоненты поля.

[2] Строго говоря, эту величину следовало бы назвать *плотностью функционала Лагранжа*, но подавляющее большинство авторов использует термин *плотность функции Лагранжа*. Если учесть, что функционал — это тоже функция, хотя и от функционального аргумента, нестрогость здесь вполне простительная, так что мы присоединяемся к большинству.

- Сумма по степеням свободы $\sum_\alpha(\cdots)$ — сумма по компонентам поля $\sum_a(\cdots)$.
- Обобщённая координата X^α с номером α — компонента поля ϕ^a с номером a.
- Обобщённая скорость $\dot{X}^\alpha$ с номером α — 4-мерный градиент $\partial_i\phi^a$ компоненты поля с номером a.
- Функция Лагранжа $L(X^\alpha, \dot{X}^\alpha, t)$ — *плотность функции Лагранжа=лагранжиан* $\mathcal{L}(\phi^a, \partial_i\phi^a, \underline{x})$.
- Внешняя обобщённая сила $F_\alpha(t)$ описывается добавкой к функции Лагранжа $L_{\text{внеш}} = X^\alpha F_\alpha(t)$ — внешний *источник поля* $j_a(\underline{x})$ описывается добавкой к лагранжиану $\mathcal{L}_{\text{внеш}} = \phi^a j_a$.

(*) Действие $S[\phi^a(\underline{x})]$ может не быть скаляром, но его полезно выбирать так, чтобы оно было скаляром, это гарантирует, что уравнения поля окажутся тензорными.

(**) Даже если действие — скаляр, лагранжиан $\mathcal{L}$ не является скаляром *относительно общекоординатных преобразований*. Лагранжиан $\mathcal{L}$ преобразуется как элемент объёма, поэтому, чтобы получить скаляр, надо взять его отношение к инвариантному элементу объёма. Инвариантный интеграл по пространству-времени имеет вид

$$\int\limits_U \mathrm{L}\sqrt{-g}\,d^4\underline{x} = \int\limits_U (\text{скаляр})\sqrt{-g}\,d^4\underline{x} = \int\limits_U \mathcal{L}\,d^4\underline{x}.$$

Сравнив одно с другим, получаем, что скаляром является следующее выражение, которое мы будем называть *инвариантным* (*скалярным*) *лагранжианом*:

$$\mathrm{L} = \frac{\mathcal{L}}{\sqrt{-g}} = (\text{скаляр}).$$

(!) Если мы ограничиваемся лоренцевыми координатами, то $\mathcal{L}$ является скаляром (по отношению к преобразованиям из группы Пуанкаре).

(!) Индекс, нумерующий компоненты поля a, может быть

- пространственно-временным тензорным индексом (как верхним, так и нижним);
- совокупностью пространственно-временных тензорных индексов (компоненты поля в данной точке образуют тензор);
- тензорным индексом в некотором вспомогательном пространстве (с точки зрения пространства-времени компоненты поля являются скалярами, с точки зрения вспомогательного пространства компоненты образуют тензор);
- совокупностью индексов, относящихся к разным пространствам.

(!) В любом случае для индексов, нумерующих компоненты полей, мы будем использовать тензорное правило суммирования по повторяющимся индексам.

3.6.4 Полевые уравнения Эйлера-Лагранжа

Проварьируем полевое действие общего вида с источником и получим соответствующие уравнения движения (*уравнения поля*):

$$S[\phi^a(\mathbf{r},t)] = \int\limits_U \left[\mathcal{L}(\phi^a, \partial_i\phi^a, \underline{x}) + j_a\phi^a\right] d^4\underline{x};$$

$$\begin{aligned}\delta S &= \int\limits_U \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^a}\,\delta\phi^a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_i\phi^a}\,\partial_i\delta\phi^a + j_a\,\delta\phi^a\right] d^4\underline{x} = \\ &= \int\limits_U \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^a}\,\delta\phi^a + \partial_i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_i\phi^a}\,\delta\phi^a\right) - \delta\phi^a\partial_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_i\phi^a} + j_a\,\delta\phi^a\right] d^4\underline{x}.\end{aligned}$$

Мы выделили член, который имеет вид 4-мерной дивергенции $\partial_i(\cdots)^i$. Перепишем его по теореме Гаусса-Остроградского:

$$\delta S = \int\limits_U \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^a} - \partial_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_i\phi^a} + j_a\right]\delta\phi^a\,d^4\underline{x} + \int\limits_{\partial U}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_i\phi^a}\,\delta\phi^a\,d^3s_i.$$

Здесь $d^3 s_i$ — элемент 3-мерной площади границы области интегрирования ∂U. На границе области интегрирования мы считаем вариацию равной нулю: $\delta\phi^a|_{\partial U} = 0$.

Мы получили вариацию действия и вариационную производную:

$$\delta S = \int\limits_U \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_i \phi^a} + j_a \right] \delta\phi^a \, d^4 \underline{x}, \qquad \frac{\delta S}{\delta \phi^a(\underline{x})} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_i \phi^a} + j_a.$$

При сравнении этого уравнения с вариационной производной в механике получаем прежнее соответствие:

- $t \to \underline{x}$;
- $X^\alpha \to \phi^a$;
- $\frac{d}{dt} \to \partial_i$;
- $L \to \mathcal{L}$;
- $F_\alpha \to j_a$;
- $\frac{\partial L}{\partial X^\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\alpha} + F_\alpha \to \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_i \phi^a} + j_a$.

3.6.5 Энергия и импульс поля

Энергия поля по аналогии с энергией механической системы может быть записана как интеграл от плотности энергии:

$$\mathcal{E} = \int\limits_V \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t \phi^a} \, \partial_t \phi^a - \mathcal{L} \right] d^3 \mathbf{r}, \qquad W = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t \phi^a} \, \partial_t \phi^a - \mathcal{L}.$$

Это соответствует нашей первой аналогии (пространственные координаты как непрерывные индексы, нумерующие компоненты поля), но не соответствует второй аналогии (пространство-время как многомерное время).

Более того, мы видим, что плотность энергии W не является скаляром даже по отношению к преобразованиям пространственно-временных координат из группы Пуанкаре. По отношению к таким преобразованиям W — компонента некоторого тензора:

$$W = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t \phi^a} \, \partial_t \phi^a - \mathcal{L} = -T^0{}_0, \qquad T^i{}_j = \mathcal{L} \, \delta^i_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_i \phi^a} \, \partial_j \phi^a.$$

Также обратим внимание на то, что элемент 3-мерного объёма — это тоже компонента 4-ковектора (элемента площади 3-мерной поверхности $t = \text{const}$):

$$d^3 \mathbf{r} = d^3 s_0.$$

Это позволяет определить физический смысл компонент $T^i{}_j$.

Раз $-T^0{}_0$ — объёмная плотность энергии, а энергия связана с 4-мерным ковектором энергии импульса $cp_0 = -\mathcal{E}$, то $\frac{1}{c} T^0{}_j$ — объёмная плотность 4-импульса.

4-импульс поля определяется как поток тензора $\frac{1}{c} T^i{}_j$ через поверхность $t = \text{const}$:

$$p_j = \frac{1}{c} \int\limits_V T^0{}_j \, d^3 \mathbf{r} = \frac{1}{c} \int\limits_V T^i{}_j \, d^3 s_i \Big|_{t=\text{const}}.$$

Таким образом, $\frac{1}{c} T^i{}_j$ — это плотность потока компоненты p_j в направлении оси x^i.

(!) До сих пор мы пользовались выражением для энергии поля, написанным по аналогии с механикой. Чтобы убедиться в правомерности этого определения, нам надо проверить закон сохранения энергии-импульса.

3.6.5.1 Сохранение электрического заряда

Сначала запишем, как выглядит в дифференциальной форме — в форме *уравнения непрерывности* — закон сохранения скалярной величины. В качестве примера возьмём электрический заряд. Пусть ρ — плотность электрического заряда (электрический заряд на единичный объём), $\mathbf{j}$ — плотность потока электрического заряда (j^α — заряд, протекающий в единицу времени через единичную площадку по оси x^α).

Закон сохранения гласит, что изменение заряда в единичном объёме в единичное время $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ и заряд, вытекший из единичного объёма в единичное время (дивергенция вектора $\mathbf{j}$), взаимно компенсируются:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0.$$

Это *уравнение непрерывности*.

Если ввести 4-мерный вектор $j^i = (c\rho, \mathbf{j})$, то уравнение непрерывности (*дифференциальная форма закона сохранения заряда*) записывается как 4-мерная дивергенция:

$$\partial_i j^i = 0,$$

(*) или, в криволинейных координатах,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_i(\sqrt{-g}\, j^i) = 0.$$

3.6.5.2 Сохранение энергии-импульса

Тензор энергии-импульса — плотность ковекторной величины 4-импульса. Соответственно, *уравнение непрерывности для энергии-импульса* несёт дополнительный индекс, нумерующий компоненты 4-импульса:

$$\partial_i j^i \quad \to \quad \partial_i T^i{}_j.$$

Вычислим дивергенцию тензора энергии-импульса для произвольного лагранжиана, не зависящего явно от координат. Пусть поля удовлетворяют уравнениям Эйлера-Лагранжа с источником j_a (вклад в тензор энергии-импульса лагранжиана взаимодействия $\phi^a j_a$ здесь не учитывается):

$$\begin{aligned}
\partial_i T^i{}_j &= \partial_i\left(\mathcal{L}\,\delta^i_j - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_i\phi^a}\,\partial_j\phi^a\right) = \partial_j\mathcal{L} - \partial_i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_i\phi^a}\,\partial_j\phi^a\right) = \\
&= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^a}\,\partial_j\phi^a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_i\phi^a}\,\partial_j\partial_i\phi^a - \partial_i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_i\phi^a}\right)\partial_j\phi^a - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_i\phi^a}\,\partial_i\partial_j\phi^a = \\
&= \underbrace{\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^a} - \partial_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_i\phi^a}\right)}_{-j_a}\partial_j\phi^a = -j_a\,\partial_j\phi^a.
\end{aligned}$$

При отсутствии источника мы получаем *закон сохранения энергии-импульса*, а при наличии источника — *уравнения баланса энергии-импульса*.

3.6.5.3 Тонкости с энергией и импульсом поля (!)

(!) Плотность *обобщённого* импульса поля $\pi_a = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_t\phi^a}$, как правило, не имеет отношения к обычному механическому импульсу.

(!) Плотность механического импульса в направлении α — это $\frac{1}{c}T^0{}_\alpha$.

(!*) К тензору энергии-импульса можно прибавлять добавки $\delta T^i{}_j$ с нулевой дивергенцией $\partial_i\delta T^i{}_j = 0$.

(!*) Предпочтительно использовать симметричный тензор энергии-импульса $T^{ij} = T^{ji}$. Тогда можно ввести *плотность момента импульса* и *плотность потока момента импульса*:

$$x^i T^{0j} - x^j T^{0i}, \qquad x^i T^{kj} - x^j T^{ki}.$$

Уравнение непрерывности для плотности момента импульса требует симметричности тензора энергии-импульса:

$$\partial_k(x^i T^{kj} - x^j T^{ki}) = (\delta^i_k T^{kj} - \delta^j_k T^{ki}) + (x^i\partial_k T^{kj} - x^j\partial_k T^{ki}) = T^{ij} - T^{ji} = 0.$$

(!) $\frac{1}{c}T^i{}_j$ — это плотность потока компоненты p_j в направлении оси x^i. Для симметричного тензора энергии-импульса компоненты имеют следующий смысл:

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} W & \frac{S_x}{c} & \frac{S_y}{c} & \frac{S_z}{c} \\ \frac{S_x}{c} & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \frac{S_y}{c} & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \frac{S_z}{c} & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix},$$

где

- W — *плотность энергии*;
- $\mathbf{S}$ — *вектор Умова–Пойнтинга* (плотность потока энергии);
- $\frac{1}{c^2}\mathbf{S}$ — *объёмная плотность импульса*;
- $\sigma_{\alpha\beta}$ — *тензор напряжения* (обычно определяется с противоположным знаком), т. е. сила, действующая в направлении x_α на единицу площади границы объёма (изнутри объёма), если нормаль к границе направлена по x_β;
- σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz} — *давление* по осям x, y, z;
- σ_{xy}, σ_{yz}, σ_{zx} — *сдвиговые напряжения*.

(*) Однозначно тензор энергии импульса определяется только в общей теории относительности (или её обобщениях).

(**) Для того чтобы вычислить суммарный вектор (или ковектор) энергии-импульса, нужен независимый от траектории параллельный перенос, чтобы просуммировать вклад разных элементов объёма.

(***) Если параллельный перенос не однозначен (в искривлённом пространстве-времени), то поля могут обмениваться энергией и импульсом с полем метрического тензора.

(***) Если метрический тензор переходит в себя при сдвиге вдоль некоторого векторного поля (*вектор Киллинга*), то сохраняется проекция импульса на этот вектор. Для пространства Минковского это 4 компоненты вектора энергии-импульса и 6 компонент тензора момента импульса.

3.6.6 Задача 50

Задача 50. От действия к системе. Проварьируйте действия и определите уравнения поля, обобщённые импульсы и тензор энергии-импульса (там, где лагранжиан записан через 4-мерные свёртки). Считайте, что $c = 1$. **(*)** Опишите словами и проиллюстрируйте графиками, какой системе может соответствовать такое действие.

Все приведённые ниже функционалы действия описывают широко использующиеся в математической физике модели, имеющие хороший физический смысл.

а) Модель φ^4 с *потенциалом «мексиканская шляпа»* используется для описания *спонтанного нарушения симметрии* (при изменении знака k) и фазовых переходов второго рода. Параметр порядка φ мы считаем вещественным:

$$S[\varphi(\underline{x})] = \int \left(-\frac{1}{2}(\partial_i\varphi)(\partial^i\varphi) + \frac{k}{2}\varphi^2 - \frac{C}{4}\varphi^4\right) d^4\underline{x} \quad (k, C = \text{const}).$$

Можно сделать параметр порядка φ комплексным или векторным, но тогда надо взять все члены по модулю.

б) Комплексное скалярное поле описывается *уравнением Клейна-Фока-Гордона*:

$$S = \int \left(-\frac{1}{2}(\partial_i\varphi^*)(\partial^i\varphi) - \frac{1}{2}|\varphi|^2\right) d^4\underline{x}.$$

Покажите, что при варьировании по $\operatorname{Re}\varphi(\underline{x})$ и $\operatorname{Im}\varphi(\underline{x})$ и при варьировании по $\varphi(\underline{x})$ и $\varphi^*(\underline{x})$ (как по независимым переменным) получаются эквивалентные уравнения поля. Покажите, что оба способа выбора независимых полей дают одинаковые тензоры энергии-импульса.

в) *Временно́е уравнение Шрёдингера*:

$$S[\psi(\mathbf{r},t), \psi^*(\mathbf{r},t)] = \int \left(\frac{\hbar^2}{2m}(\boldsymbol{\nabla}\psi^*, \boldsymbol{\nabla}\psi) + U(\mathbf{r})\psi^*\psi - \psi^*\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi\right) d^3\mathbf{r}\,dt \qquad m, \hbar = \text{const}, \quad \mathrm{i}^2 = -1.$$

г) *Стационарное уравнение Шрёдингера*:

$$S[\psi(\mathbf{r}), \psi^*(\mathbf{r}), \mathcal{E}] = \mathcal{E} + \int \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\psi^*\triangle\psi + U(\mathbf{r})|\psi|^2 - \mathcal{E}|\psi|^2\right) d^3\mathbf{r},$$

где $m, \hbar = \text{const}$, $\mathcal{E}$ — число (без аргументов!),

д) *Уравнение синус-Гордона*[3] — нелинейный аналог уравнения Клейна-Фока-Гордона. Оно является одной из наиболее популярных нелинейных моделей (обычно оставляют одну пространственную координату). Допускает решения типа *солитонов* (устойчивые уединённые волны):

$$S[\varphi(\underline{x})] = \int \left(\frac{1}{2}\varphi\Box\varphi + \cos(\varphi) \right) d^4\underline{x} \quad (\Box = \triangle - \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \partial_i\partial^i).$$

е)* *Электрически заряженное комплексное скалярное поле*: $\varphi(\underline{x})$, взаимодействующее с электромагнитным полем, которое описывается вещественным 4-потенциалом $A_i(\underline{x})$:

$$S[\varphi(\underline{x}), \varphi^*(\underline{x})] = \int \left(-\frac{1}{2}(\partial^i\varphi^* + \mathrm{i}eA^i(\underline{x})\,\varphi^*)(\partial_i\varphi - \mathrm{i}eA_i(\underline{x})\,\varphi) + \frac{1}{2}|\varphi|^2 \right) d^4\underline{x}.$$

ж)* Непрерывное распределение невзаимодействующих *релятивистских мембран*, заданных условием постоянства вещественного скалярного поля $\varphi = \mathrm{const}$:

$$S[\varphi(\underline{x})] = -\sigma \int \sqrt{(\partial_i\varphi)(\partial^i\varphi)}\, d^4\underline{x} \qquad (\sigma = \mathrm{const}).$$

з)** $(n-1)$-мерная *релятивистская мембрана* в D-мерном пространстве-времени. Действие пропорционально n-мерной площади n-мерного мирового листа:

$$S[X^i(\xi^a)] = -\sigma \int \sqrt{-\det(h_{ab})}\, d^n\xi,$$

где $h_{ab} = g_{ij}\frac{\partial X^i}{\partial\xi^a}\frac{\partial X^j}{\partial\xi^b}$, $i = 0, \ldots, D$, $a = 1, \ldots, n$. Сравните с предыдущим пунктом.

[3] М.Г. Иванов, В.П. Крайнов. "Пластические деформации и уравнение синус-Гордона (модель Френкеля-Конторовой)" Учеб.-метод. пособие, М.: МФТИ, 2024; https://mipt.ru/upload/New Folder/krajnov-ivanov-20fin.pdf

Глава 3.7

Описание электромагнитного поля (с. 458)

Здесь и далее при работе с электромагнитным полем мы будем использовать лоренцевы координаты, кроме тех случаев, когда иное оговорено явно.

3.7.1 Кинематика электромагнитного поля

Мы уже встречались с электромагнитным полем как с внешним полем, с которым взаимодействовали заряженные частицы. Поэтому кинематика электромагнитного поля уже была нами построена. Повторим основные результаты применительно к лоренцевым координатам в пространстве Минковского.

(!) Последовательное описание электромагнитного поля без теории относительности невозможно!

Поле описывается *ковекторным потенциалом*

$$A_i = (-\varphi, \mathbf{A}),$$

компоненты которого выступают в роли обобщённых координат и называются *скалярным потенциалом* φ и *векторным потенциалом* $\mathbf{A}$.

По потенциалу можно построить *тензор электромагнитного поля* F_{ij}, компоненты которого являются компонентами *электрического поля* $\mathbf{E}$ и *магнитного поля* $\mathbf{B}$:

$$F_{ij} = (dA)_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Также строится *дуальный псевдотензор электромагнитного поля*, в котором электрическое и магнитное поля поменялись местами по правилу $\mathbf{E} \to -\mathbf{B}$, $\mathbf{B} \to \mathbf{E}$:

$$(*F)_{ij} = \tilde{F}_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{klij}F^{kl} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & E_z & -E_y \\ -B_y & -E_z & 0 & E_x \\ -B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Из определения тензора электромагнитного поля F_{ij} через потенциалы следует автоматическое выполнение *первой пары уравнений Максвелла* (тех уравнений, которые не содержат зарядов и токов):

$$(dF)_{ijk} = \partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} + \partial_k F_{ij} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{cases}.$$

Потенциалы не имеют непосредственного физического смысла. Для заданного электромагнитного поля они определены неоднозначно. При *калибровочном* (*градиентном*) *преобразовании* потенциалов электромагнитное поле (тензор F_{ij}, 3-векторное поле $\mathbf{E}$ и 3-псевдовекторное поле $\mathbf{B}$) не изменяется:

$$A_i \to A'_i = A_i + \partial_i f \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \varphi \to \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \\ \mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f \end{cases}.$$

При замене координат ковекторный потенциал A_i, тензор электромагнитного поля F_{ij} и дуальный псевдотензор $\tilde{F}_{ij}$ преобразуются так, как полагается тензорам/псевдотензорам с соответствующим набором индексов:

$$A_{i'} = A_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}, \qquad A^{i'} = A^i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \qquad F_{i'j'} = F_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}, \qquad \tilde{F}_{i'j'} = \tilde{F}_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \operatorname{sgn} \frac{Dx}{Dx'}.$$

В частности, при чисто пространственных преобразованиях (не зависящих от времени и не затрагивающих время), сохраняющих евклидову метрику, $\mathbf{A}$, $\mathbf{E}$ ведут себя как 3-векторы, $\mathbf{B}$ — как псевдовектор (при заменах с отрицательным якобианом общий знак противоположен знаку для вектора), а φ — как скаляр.

При преобразованиях Лоренца (бустах) вдоль оси x со скоростью v и гамма-фактором $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ получаем

$$A^{i'} = \begin{pmatrix} \varphi' \\ A_{1'} \\ A_{2'} \\ A_{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(\varphi - \frac{v}{c} A_1) \\ \gamma(A_1 - \frac{v}{c}\varphi) \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix},$$

$$E_x = E'_x, \qquad E_y = \gamma(E'_y + \frac{v}{c} B'_z), \qquad E_z = \gamma(E'_z - \frac{v}{c} B'_y),$$
$$B_x = B'_x, \qquad B_y = \gamma(B'_y - \frac{v}{c} E'_z), \qquad B_z = \gamma(B'_z + \frac{v}{c} E'_y).$$

3.7.2 4-мерная плотность электрического тока

Мы уже рассматривали *действие для взаимодействия заряженной частицы с электромагнитным полем*:

$$S_{\text{вз.}}[X^i(l)] = \frac{q}{c} \int A_i(\underline{X}(l)) \frac{dX^i}{dl}\, dl = \frac{q}{c} \int A_i(\underline{X}(l))\, dX^i = \int \left(-q\varphi + \frac{q}{c}(\mathbf{A}, \mathbf{v}) \right) dt.$$

Мы варьировали это действие вместе с действием для свободной частицы по $X^i(l)$, чтобы получить уравнения движения заряженной частицы во внешнем поле.

Теперь это действие *вместе с действием для свободного электромагнитного поля* (оно появится в следующем параграфе) мы будем варьировать также по потенциалам $A_i(\underline{x})$. Но полевое действие задаётся как интеграл по 4-мерному объёму, а действие для взаимодействия пока задано как интеграл вдоль мировой линии частицы, поэтому его придётся преобразовать.

Заряженных частиц может быть много, так что полное действие их взаимодействия с полем должно быть просуммировано по всем частицам, и каждая частица взаимодействует с полем в той точке, где она находится:

$$S_{\text{вз.}}[X^i_a(l_a), A_i(\underline{x})] = \sum_a \frac{q_a}{c} \int A_i(\underline{X}_a(l_a)) \frac{dX^i_a}{dl_a}\, dl_a.$$

(!) Не путайте $X^i_a(l_a)$ — координаты частицы номер a как функции от параметра l_a, заданного вдоль мировой линии данной частицы, и x^i — независимые переменные (координаты, нумерующие точки пространства-времени), от которых зависит поле $A_i(\underline{x})$.

Для перехода к интегралу по 4-объёму воспользуемся δ-функцией, чтобы переписать поле в точке, где находится частица:

$$A_i(\underline{X}_a(l_a)) = \int\limits_U A_i(\underline{x})\, \delta^4(\underline{X}_a(l_a) - \underline{x})\, d^4\underline{x}.$$

Подставим получившееся выражение в действие:

$$S_{\text{вз.}}[X^i(l), A_i(\underline{x})] = \sum_a \frac{q_a}{c} \int \left(\int\limits_U A_i(\underline{x}) \delta^4(\underline{X}_a(l_a) - \underline{x})\, d^4\underline{x} \right) \frac{dX^i_a}{dl_a}\, dl_a.$$

Теперь внесём всё под интеграл по 4-объёму и вынесем из-под интеграла по dl_a всё, что не зависит от l_a:

$$S_{\text{вз.}}[X^i(l), A_i(\underline{x})] = \frac{1}{c^2} \int\limits_U A_i(\underline{x}) \underbrace{\left(\sum_a q_a c \int \delta^4(\underline{X}_a(l_a) - \underline{x}) \frac{dX^i_a}{dl_a}\, dl_a \right)}_{j^i(\underline{x})} d^4\underline{x} = \frac{1}{c^2} \int\limits_U A_i(\underline{x}) j^i(\underline{x})\, d^4\underline{x}.$$

Мы получили действие для взаимодействия поля $A_i(\underline{x})$ с источником $j^i(\underline{x})$, который не зависит от полевых переменных.

Осталось установить физический смысл 4-вектора $j^i(\underline{x})$:

$$j^i(\underline{x}) = \sum_a q_a c \int \delta^4(\underline{X}_a(l_a) - \underline{x}) \, \frac{dX_a^i}{dl_a} \, dl_a.$$

Параметры l_a вдоль мировых линий выбираются произвольным образом, поскольку действие от них не зависит. Пусть все они совпадают с координатным временем: $l_a = T$.

Временна́я часть источника выражается через *плотность заряда* $\rho(\underline{x})$. Это видно из того, что интеграл по 3-мерному объёму (по свойству δ-функции) даёт суммарный заряд в объёме:

$$j^0(\underline{x}) = \sum_a q_a c \int \underbrace{\delta^4(\underline{X}_a(T) - \underline{x})}_{\delta(cT-ct)\delta^3(\mathbf{R}-\mathbf{r})} \underbrace{\frac{dX_a^0}{dT}}_{c} \, dT = c \sum_a q_a \delta^3(\mathbf{R_a}(t) - \mathbf{r}) = c\rho(\underline{x}).$$

Пространственная часть источника даёт произведение плотности заряда на скорость заряженных частиц в данной точке (в предположении, что мировые линии частиц не пересекаются), в этом выражении можно узнать *плотность электрического тока*:

$$\mathbf{j}(\underline{x}) = \sum_a q_a c \int \underbrace{\delta^4(\underline{X}_a(T) - \underline{x})}_{\delta(cT-ct)\delta^3(\mathbf{R}-\mathbf{r})} \underbrace{\frac{d\mathbf{R}_a}{dT}}_{\mathbf{v}_a} \, dT = \sum_a q_a \delta^3(\mathbf{R_a}(t) - \mathbf{r})\mathbf{v}_a = \rho(\underline{x})\mathbf{v}(\underline{x}).$$

Таким способом источник $j^i = (c\rho; \mathbf{j})$ идентифицируется с *4-мерной плотностью тока.*

3.7.3 Действие для электромагнитного поля

Попытаемся *угадать* лагранжиан для электромагнитного поля из следующих *соображений симметрии.*

* Пусть лагранжиан будет инвариантом (это условие не обязательно, но оно гарантирует ковариантность (тензорность) уравнений поля).

* Поскольку уравнения Максвелла линейны, ищем лагранжиан, квадратичный по полю.

* Поскольку уравнения Максвелла имеют 1-й порядок по полям (и 2-й по потенциалу), не используем в лагранжиане производных от потенциалов выше 1-й.

* Поскольку 4-потенциал не имеет непосредственного физического смысла, выражаем лагранжиан через тензор электромагнитного поля F_{ij}.

Из компонент электромагнитного поля можно построить два независимых *инварианта* (остальные выражаются через эти два) — скаляр и псевдоскаляр соответственно:

$$F^{ij}F_{ij} = 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2), \qquad \tilde{F}^{ij}F_{ij} = 4(\mathbf{E}, \mathbf{B}).$$

Квадратичный по полю инвариантный лагранжиан должен быть линейной комбинацией этих инвариантов.

(*) Псевдоскалярный инвариант может быть представлен в виде 4-мерной дивергенции:

$$\tilde{F}^{ij}F_{ij} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijkl}F_{ij}F_{kl} = -\varepsilon^{ijkl}F_{ij}\partial_{[k}A_{l]} = -\varepsilon^{ijkl}F_{ij}\partial_k A_l = -\varepsilon^{ijkl}\partial_k(F_{ij}A_l) + \underbrace{\varepsilon^{ijkl}(\partial_k F_{ij})}_{(*dF)^l=0} A_l = \partial_k(-\varepsilon^{ijkl}F_{ij}A_l).$$

Интеграл от 4-дивергенции по 4-объёму сводится к интегралу по границе объёма и не даёт вклада в уравнения поля.

Таким образом, остаётся *лагранжиан электромагнитного поля* в виде $\mathrm{const} \cdot F^{ij}F_{ij}$. Постоянную определим задним числом из соответствия с уравнениями Максвелла[1]. Пусть

$$\mathcal{L}_\text{п} = -\frac{F^{ij}F_{ij}}{16\pi k_\text{к}}.$$

[1] $k_\text{к}$ — это *постоянная Кулона*, входящая в закон Кулона: $F = k_\text{к}\frac{q_1 q_2}{r^2}$. Мы пользуемся *физико-технической системой единиц*, в которой, как и в *системе СИ*, $k_\text{к} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, где $\varepsilon_0 \approx 8{,}8541878128(13) \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{Кл}^2}{\text{Дж}\cdot\text{м}}$ (две цифры в скобках — погрешность двух последних цифр числа) называется *электрической постоянной.*

Форма записи уравнений электродинамики в физико-технической системе близка к принятой в *гауссовой системе СГС* и отличается от принятой в СИ. **Принятой в СИ формой записи уравнений электродинамики мы пользоваться не будем!** Кратко особенности физико-технической системы описаны в предисловии в параграфе «Некоторые обозначения и соглашения» (с. 20). Подробнее проблема единиц измерения в электродинамике и связь стандартной системы СИ и физико-технической системы обсуждены в главе 3.15 «Электродинамика в среде и единицы измерения в электродинамике» (с. 391).

Для перехода от физико-технической формы записи уравнений к гауссовой можно положить $k_\text{к} = 1$. Обратный переход можно выполнить из *соображений размерности.*

Действие для электромагнитного поля, взаимодействующего с заряженными частицами, — сумма действия для свободных частиц, действия для взаимодействия частиц с полем и действия для свободного поля:

$$S[X^i_a(l_a), A_i(\underline{x})] = \underbrace{-\sum_a m_a c \int \sqrt{-g_{ij}\frac{\partial X^i_a}{\partial l_a}\frac{\partial X^j_a}{\partial l_a}}\, dl_a}_{S_{\text{ч}}[X^i_a(l_a)]} + \underbrace{\sum_a \frac{q_a}{c}\int A_i(\underline{X}_a(l_a))\,\frac{dX^i_a}{dl_a}\,dl_a}_{S_{\text{вз.}}[X^i_a(l_a),A_i(\underline{x})]=\frac{1}{c^2}\int\limits_U A_i(\underline{x})j^i(\underline{x})\,d^4\underline{x}} + \underbrace{\frac{-1}{16\pi k_{\text{к}} c}\int\limits_U F^{ij}F_{ij}\,d^4\underline{x}}_{S_{\text{п}}[A_i(\underline{x})]}. \tag{3.7.1}$$

Если мы варьируем общее действие по потенциалам $A_i(\underline{x})$, то мы можем откинуть член, описывающий свободные частицы $S_{\text{ч}}[X^i_a(l_a)]$, поскольку он не зависит от полевых переменных. Член, описывающий взаимодействие, удобнее написать в виде интеграла по 4-объёму.

То, что остаётся, — действие для поля с внешними источниками (подобно тому как ранее мы рассматривали действие для частицы во внешнем поле):

$$S[A_i(\underline{x})] = \int\limits_U \left(\frac{-F^{ij}F_{ij}}{16\pi k_{\text{к}} c} + \frac{1}{c^2}j^i(\underline{x})A_i(\underline{x})\right) d^4\underline{x}. \tag{3.7.2}$$

3.7.4 Вторая пара уравнений Максвелла

Проварьируем действие (3.7.2) для электромагнитного поля с внешними источниками.

При вариации $\delta(F^{ij}F_{ij}) = 2F^{ij}\,\delta F_{ij}$ (поскольку оба вхождения F_{ij} дают одинаковый вклад) получаем

$$\delta S = \int\limits_U \left(\frac{-F^{ij}\,\delta F_{ij}}{8\pi k_{\text{к}} c} + \frac{1}{c^2}j^i\,\delta A_i\right) d^4\underline{x}.$$

Числитель в силу антисимметричности F^{ij} преобразуется как $F^{ij}\,\delta F_{ij} = F^{ij}(\partial_i\delta A_j - \partial_j\delta A_i) = -2F^{ij}\partial_j\delta A_i$

$$\delta S = \int\limits_U \left(\frac{F^{ij}}{4\pi k_{\text{к}} c}\,\partial_j\delta A_i + \frac{1}{c^2}j^i\,\delta A_i\right) d^4\underline{x} = \int\limits_U \left(\partial_j\left[\frac{F^{ij}}{4\pi k_{\text{к}} c}\,\delta A_i\right] - \delta A_i\frac{\partial_j F^{ij}}{4\pi k_{\text{к}} c} + \frac{1}{c^2}j^i\,\delta A_i\right) d^4\underline{x}.$$

4-мерная дивергенция, которую мы выделили, сводится к поверхностному интегралу и не даёт вклада в действие в силу граничных условий $\delta A_i|_{\partial U} = 0$:

$$\delta S = \int\limits_U \left(-\frac{1}{4\pi k_{\text{к}} c}\partial_j F^{ij} + \frac{1}{c^2}j^i\right)\delta A_i\, d^4\underline{x}, \qquad \frac{\delta S}{\delta A_i(\underline{x})} = -\frac{1}{4\pi k_{\text{к}} c}\partial_j F^{ij} + \frac{1}{c^2}j^i.$$

Приравнивая нулю вариационную производную, получаем уравнения поля:

$$\partial_j F^{ij} = \frac{4\pi k_{\text{к}}}{c} j^i. \tag{3.7.3}$$

Покажем, что уравнения (3.7.3) — это вторая пара уравнений Максвелла в 4-мерной записи.

При $i = 0$ подставляем компоненты тензора поля и 4-вектора плотности тока:

$$\partial_j F^{0j} = \partial_0 \underbrace{F^{00}}_{0} + \partial_\alpha \underbrace{F^{0\alpha}}_{E_\alpha} = \frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\underbrace{j^0}_{c\rho}.$$

Получаем одно из уравнений Максвелла:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi k_{\text{к}}\rho.$$

При $i = \alpha$ имеем

$$\partial_j F^{\alpha j} = \underbrace{\partial_0}_{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}}\underbrace{F^{\alpha 0}}_{-E_\alpha} + \partial_\beta \underbrace{F^{\alpha\beta}}_{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}B_\gamma} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}E_\alpha + \underbrace{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial_\beta B_\gamma}_{(\operatorname{rot}\mathbf{B})_\alpha} = \frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}j^\alpha.$$

Отсюда получаем оставшееся уравнение Максвелла:

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\mathbf{j}.$$

Коэффициент $\frac{-1}{16\pi k_{\text{к}}}$ задним числом определился из соответствия с уравнениями Максвелла. Его численное значение обусловлено выбором единиц измерения. Знак, как мы увидим ниже (обсуждая тензор

энергии-импульса), обусловлен знаком энергии электромагнитного поля и знаком сил, действующих на заряды.

Таким образом, *вторая пара уравнений Максвелла* может быть записана как в 4-мерном, так и в 3-мерном виде:

$$\partial_j F^{ij} = \frac{4\pi k_к}{c}\, j^i \qquad \Leftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi k_к \rho \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi k_к}{c}\, \mathbf{j} \end{array} \right. .$$

(**) Как обычно, если два тензора равны в одной системе координат, то они равны в любой другой. Это позволяет записать уравнения поля в криволинейных координатах через дивергенцию антисимметричного тензора F^{ij} (2.12.3):

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_j \left(\sqrt{-g}\, F^{ij} \right) = \frac{4\pi k_к}{c}\, j^i.$$

(!) В силу антисимметричности F^{ij} 4-дивергенция от уравнений поля даёт нуль, откуда следует *уравнение непрерывности электрического тока*, которое в данном случае возникает как *условие совместности уравнений Максвелла*:

$$\partial_i \partial_j F^{ij} = 0 = \frac{4\pi k_к}{c} \partial_i j^i \qquad \Rightarrow \qquad \partial_i j^i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \tag{3.7.4}$$

(**) Может показаться странным, почему первая и вторая пара так похожи в 3-мерном виде и совсем не похожи в 4-мерном. Чтобы увидеть их сходство в 4-мерном виде, надо переписать одну из пар через $\tilde{F}_{ij}$, а вторую оставить записанной через F_{ij} (применить к одному из уравнений ходжевскую дуальность). Тогда сходство станет явным:

$$\partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} + \partial_k F_{ij} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_j \tilde{F}^{ij} = 0,$$

$$\partial_j F^{ij} = \frac{4\pi k_к}{c}\, j^i \quad \Leftrightarrow \quad \partial_i \tilde{F}_{jk} + \partial_j \tilde{F}_{ki} + \partial_k \tilde{F}_{ij} = \frac{4\pi k_к}{c}\, (\tilde{j})_{ijk} = \frac{4\pi k_к}{c}\, \varepsilon_{mijk} j^m.$$

3.7.5 Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

Построим *канонический тензор энергии-импульса электромагнитного поля*. Будем учитывать только вклад лагранжиана свободного поля $\mathcal{L}_п = -\frac{1}{16\pi k_к} F^{ij} F_{ij}$.

Как мы уже установили, варьируя действие для поля,

$$\delta(F^{kl} F_{kl}) = 2F^{kl}\, \delta F_{kl} = -4F^{kl} \delta(\partial_l A_k), \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \mathcal{L}_п}{\partial(\partial_i A_k)} = -\frac{1}{4\pi k_к} F^{ik}.$$

Таким образом, действие свободного поля даёт

$$T^i{}_j = \mathcal{L}_п \delta^i_j - \frac{\partial \mathcal{L}_п}{\partial \partial_i A_k} \partial_j A_k = -\delta^i_j \frac{1}{16\pi k_к} F^{kl} F_{kl} + \frac{1}{4\pi k_к} F^{ik} \partial_j A_k. \tag{3.7.5}$$

Получившееся выражение не является симметричным (если поднять оба индекса), оно даже не является калибровочно-инвариантным, потому что $\partial_j A_k$ меняется при калибровочных преобразованиях потенциала.

3.7.5.1 Симметризация тензора энергии-импульса

Естественно попробовать сделать к найденному тензору энергии-импульса (3.7.5) добавку

$$\delta T^i{}_j = -\frac{1}{4\pi k_к} F^{ik} \partial_k A_j,$$

которая достроит $\partial_j A_k$ до F_{jk}. Проверим, равна ли нулю дивергенция от этой добавки:

$$\partial_i \delta T^i{}_j = -\frac{1}{4\pi k_к} \partial_i (F^{ik} \partial_k A_j) = -\frac{1}{4\pi k_к} \underbrace{\partial_i (F^{ik})}_{-\frac{4\pi k_к}{c} j^k} \partial_k A_j - \frac{1}{4\pi k_к} \underbrace{F^{ik}\, \partial_i \partial_k}_{0} A_j.$$

Второй член обнуляется из симметрии $\partial_i \partial_k$ и антисимметрии F^{ik}. Первый член обнуляется, только если нет зарядов и токов (для свободного поля).

Таким образом, мы построили *симметричный тензор энергии-импульса для свободного электромагнитного поля*:

$$T^i{}_j = -\delta^i_j \frac{1}{16\pi k_к} F^{kl} F_{kl} + \frac{1}{4\pi k_к} F^{ik} F_{jk} \quad \Leftrightarrow \quad T^{ij} = -g^{ij} \frac{1}{16\pi k_к} F^{kl} F_{kl} + \frac{1}{4\pi k_к} F^{ik} F^j{}_k. \tag{3.7.6}$$

Важное свойство этого тензора энергии-импульса, специфичное для электромагнитного поля, — равенство нулю следа:

$$T^i{}_i = 0.$$

В частности, для фотонного газа в системе центра инерции из изотропии, симметрии и нулевого следа получаем *тензор энергии-импульса фотонного газа* $T^{ij} = \mathrm{diag}(W, \frac{1}{3}W, \frac{1}{3}W, \frac{1}{3}W)$, т.е. *давление фотонного газа* равно трети от плотности энергии.

Надо проверить, пригоден ли этот тензор для электромагнитного поля, взаимодействующего с источниками:

$$\begin{aligned}
\partial_i T^i{}_j &= -\partial_j \frac{1}{16\pi k_к} F^{kl} F_{kl} + \partial_i \frac{1}{4\pi k_к} F^{ik} F_{jk} = -\frac{1}{8\pi k_к} F^{kl}\,\partial_j F_{kl} + \frac{1}{4\pi k_к} F^{ik}\,\partial_i F_{jk} + \underbrace{\frac{1}{4\pi k_к}(\partial_i F^{ik})}_{-\frac{1}{c}j^k} F_{jk} = \\
&= -\frac{1}{c}\,F_{jk} j^k + \frac{1}{8\pi k_к}\left(-F^{kl}\,\partial_j F_{kl} + 2F^{lk}\,\partial_l F_{jk}\right) = -\frac{1}{c}\,F_{jk} j^k + \frac{F^{lk}}{8\pi k_к}\left(\partial_j F_{kl} + 2\partial_l F_{jk}\right) = \\
&= -\frac{1}{c}\,F_{jk} j^k + \frac{F^{lk}}{8\pi k_к}\left(\partial_j F_{kl} + \partial_l F_{jk} - \partial_k F_{jl}\right) = -\frac{1}{c}\,F_{jk} j^k + \frac{F^{lk}}{8\pi k_к}\underbrace{\left(\partial_j F_{kl} + \partial_l F_{jk} + \partial_k F_{lj}\right)}_{0}.
\end{aligned}$$

Во второй строчке мы переименовали немой индекс $i \to l$. В третьей строчке мы воспользовались тем, что при свёртке с F^{lk} вклад даёт только антисимметричная по k, l часть выражения $\partial_l F_{jk}$. В итоге большая часть членов уничтожилась в силу первой пары уравнений Максвелла, и мы получили уравнение баланса энергии-импульса:

$$\partial_i T^i{}_j = -\frac{1}{c}\,F_{jk} j^k \qquad \Leftrightarrow \qquad \partial_i T^{ij} = -\frac{1}{c}\,F^j{}_k j^k.$$

При $j = 0$ получается *уравнение баланса энергии электромагнитного поля*:

$$\partial_i T^{i0} = \frac{1}{c}\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial S^\alpha}{\partial x^\alpha} = -\frac{1}{c}\,F^0{}_k j^k = -\frac{1}{c}\,\underbrace{F^0{}_0}_{0} j^0 - \frac{1}{c}\,\underbrace{F^0{}_\beta}_{E_\beta} j^\beta;$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathrm{div}\,\mathbf{S} = -(\mathbf{j}, \mathbf{E}).$$

Здесь $-(\mathbf{j}, \mathbf{E})$ — плотность мощности, передаваемой от частиц полю.

При $j = \alpha$ получается уравнение *баланса импульса электромагнитного поля*:

$$\partial_i T^{i\alpha} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial S^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{\beta\alpha}}{\partial x^\beta} = -\frac{1}{c}\,F^\alpha{}_k j^k = -\frac{1}{c}\,\underbrace{F^\alpha{}_0}_{E_\alpha}\underbrace{j^0}_{c\rho} - \frac{1}{c}\,\underbrace{F^\alpha{}_\beta}_{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}B_\gamma}\,j^\beta = -\rho E_\alpha - \frac{1}{c}\,\underbrace{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} j^\beta B_\gamma}_{[\mathbf{j}\times\mathbf{B}]_\alpha};$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial S^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{\beta\alpha}}{\partial x^\beta} = -\Big(\rho\mathbf{E} + \tfrac{1}{c}[\mathbf{j}\times\mathbf{B}]\Big)_\alpha \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \mathrm{div}\,\hat{\sigma} = -\Big(\rho\mathbf{E} + \tfrac{1}{c}[\mathbf{j}\times\mathbf{B}]\Big).$$

Здесь $-\Big(\rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{j}\times\mathbf{B}]\Big)$ — *объёмная плотность силы*, действующей со стороны частиц на единицу объёма электромагнитного поля (импульс, переданный от частиц полю в единице объёма за единицу времени).

То, что правая часть соответствует мощностям и силам взаимодействия поля и частиц, показывает, что коэффициент (и величина, и знак) в действии для свободного поля выбран правильно.

3.7.5.2 Компоненты и силовые линии

Выпишем компоненты тензора энергии-импульса (3.7.6) через электрическое и магнитное поле:

$$T^{00} = W = -\underbrace{g^{00}}_{-1}\frac{1}{16\pi k_к}\underbrace{F^{kl}F_{kl}}_{2(\mathbf{B}^2-\mathbf{E}^2)} + \frac{1}{4\pi k_к}\underbrace{F^{0k}F^0{}_k}_{\mathbf{E}^2} = \frac{\mathbf{E}^2+\mathbf{B}^2}{8\pi k_к};$$

$$\frac{S^\alpha}{c} = T^{0\alpha} = -\underbrace{g^{0\alpha}}_{0}\frac{1}{16\pi k_к}F^{kl}F_{kl} + \frac{1}{4\pi k_к}F^{0k}F^\alpha{}_k = \frac{1}{4\pi k_к}\underbrace{F^{00}}_{0}F^\alpha{}_0 + \frac{1}{4\pi k_к}\underbrace{F^{0\beta}}_{E_\beta}\underbrace{F^\alpha{}_\beta}_{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}B_\gamma} = \frac{1}{4\pi k_к}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}E_\beta B_\gamma = \frac{1}{4\pi k_к}[\mathbf{E}\times\mathbf{B}]_\alpha;$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\beta} &= T^{\alpha\beta} = -\underbrace{g^{\alpha\beta}}_{\delta_{\alpha\beta}}\frac{1}{16\pi k_к}\underbrace{F^{kl}F_{kl}}_{2(\mathbf{B}^2-\mathbf{E}^2)} + \frac{1}{4\pi k_к}F^{\alpha k}F^\beta{}_k = \delta_{\alpha\beta}\frac{\mathbf{E}^2-\mathbf{B}^2}{8\pi k_к} + \frac{1}{4\pi k_к}\underbrace{F^{\alpha0}}_{-E_\alpha}\underbrace{F^\beta{}_0}_{E_\beta} + \frac{1}{4\pi k_к}\underbrace{F^{\alpha\gamma}}_{\varepsilon_{\alpha\gamma\mu}B_\mu}\underbrace{F^\beta{}_\gamma}_{\varepsilon_{\beta\gamma\nu}B_\nu} = \\
&= \delta_{\alpha\beta}\frac{\mathbf{E}^2-\mathbf{B}^2}{8\pi k_к} - \frac{1}{4\pi k_к}E_\alpha E_\beta + \frac{1}{4\pi k_к}\underbrace{\varepsilon_{\alpha\gamma\mu}\varepsilon_{\beta\gamma\nu}}_{\delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu}-\delta_{\alpha\nu}\delta_{\mu\beta}}B_\mu B_\nu = \delta_{\alpha\beta}\frac{E^2+B^2}{8\pi k_к} - \frac{E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta}{4\pi k_к}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$W = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi k_{\text{к}}}, \qquad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi k_{\text{к}}}[\mathbf{E} \times \mathbf{B}], \qquad \sigma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} W - \frac{E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta}{4\pi k_{\text{к}}}.$$

Плотность энергии и тензор напряжений (но не вектор Умова-Пойнтинга!) могут быть представлены как сумма электрической и магнитной частей:

$$W_E = \frac{\mathbf{E}^2}{8\pi k_{\text{к}}}, \qquad W_B = \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi k_{\text{к}}}, \qquad \sigma^E_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} W_E - \frac{E_\alpha E_\beta}{4\pi k_{\text{к}}}, \qquad \sigma^B_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} W_B - \frac{B_\alpha B_\beta}{4\pi k_{\text{к}}}.$$

Пусть в некоторой точке $\mathbf{E} \uparrow\uparrow x$, тогда

$$W_E = \frac{E_x^2}{8\pi k_{\text{к}}}, \qquad \sigma^E_{xx} = -W_E, \qquad \sigma^E_{yy} = \sigma^E_{zz} = W_E, \qquad \sigma^E_{xy} = \sigma^E_{yz} = \sigma^E_{zx} = 0.$$

(!ф) Таким образом, вдоль электрического поля мы имеем *отрицательное давление* (*натяжение*), численно равное плотности энергии W_E, а поперёк поля — положительное *давление*, численно равное плотности энергии W_E.

(!ф) Аналогично вдоль магнитного поля мы имеем *натяжение*, численно равное плотности энергии W_H, а поперёк — положительное *давление*, численно равное плотности энергии W_H.

(!ф) Мы полностью *описали словами* тензор напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$!

(!ф) Эти факты очень удобно описывать в терминах *силовых линий поля* (как электрического, так и магнитного).
Вдоль силовых линий поля имеется натяжение — линии стремятся сократиться,
Поперёк линий поля имеется давление — линии отталкиваются друг от друга.

(ф) Эту механическую аналогию на каком-то уровне понял ещё Фарадей и довёл до уравнений поля Максвелл. Аналогия была проведена слишком далеко и привела к моделям *электромагнитного эфира* — гипотетической среды, напряжения которой описывают электромагнитное поле. После создания специальной теории относительности термин *эфир* постепенно исчез из физики[2]. Тем не менее **механическая аналогия остаётся справедливой и позволяет лучше понять ряд свойств электромагнитного поля**.

3.7.6 Картины силовых линий и их физический смысл

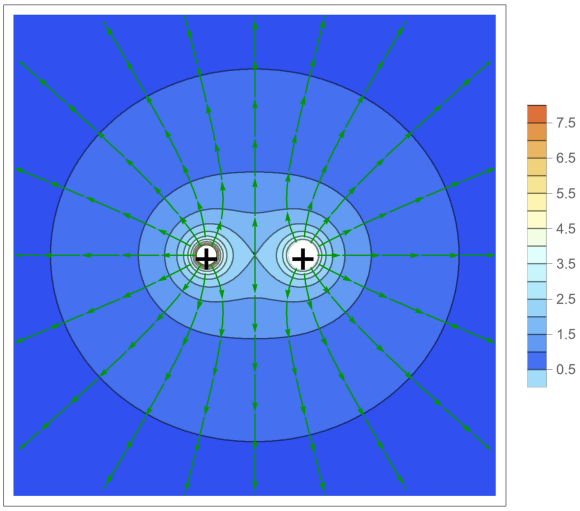
Постараемся наработать физическую интуицию, рассматривая картины силовых линий. Помните, что вдоль силовых линий действует натяжение, а поперёк — давление, которое расталкивает соседние линии поля.

Приведённые ниже чертежи (не рисунки!) запрограммированы А.В. Дорофеенко специально для этой книги.

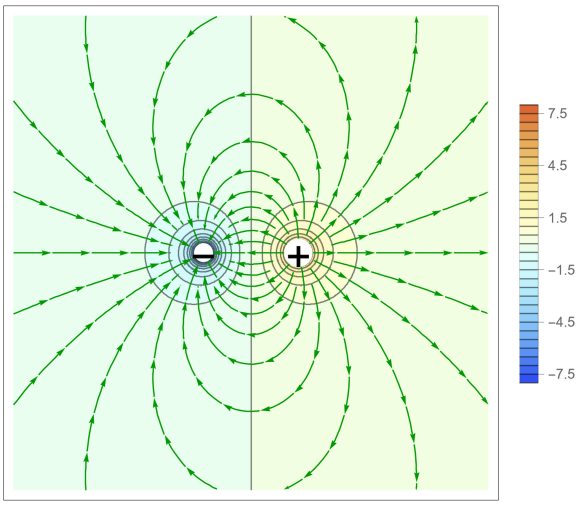
На чертежах электростатических полей кроме линий поля изображены линии постоянного электростатического потенциала.

На чертежах магнитостатических полей кроме линий поля изображены линии постоянного векторного потенциала.

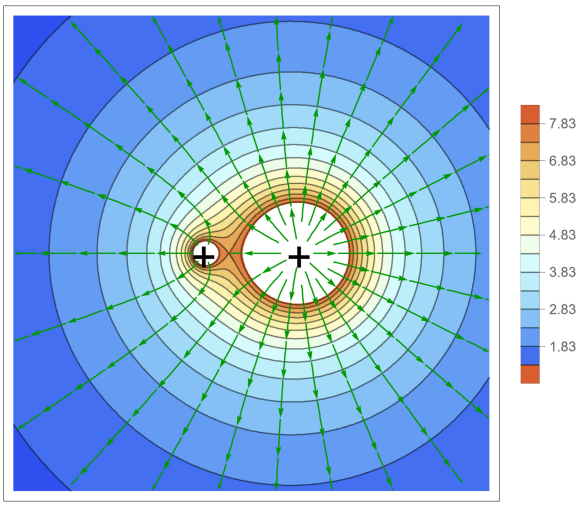
[2]Термин *эфир* можно было бы сохранить в физике, если бы своевременно была придумана среда, движение относительно которой невозможно обнаружить, как требует принцип относительности. В современной физике такая среда называется *вакуумом*. Тензор энергии-импульса вакуума пропорционален метрическому тензору $T^{ij}_{\text{вак}} = \text{const} \cdot g^{ij}$. (Есть и другие, неэквивалентные определения вакуума.)



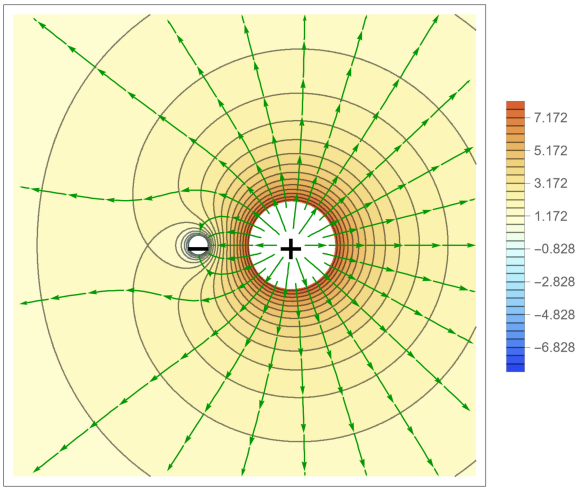
Два одноимённых заряда $q_1 = q_2$ расталкиваются линиями поля



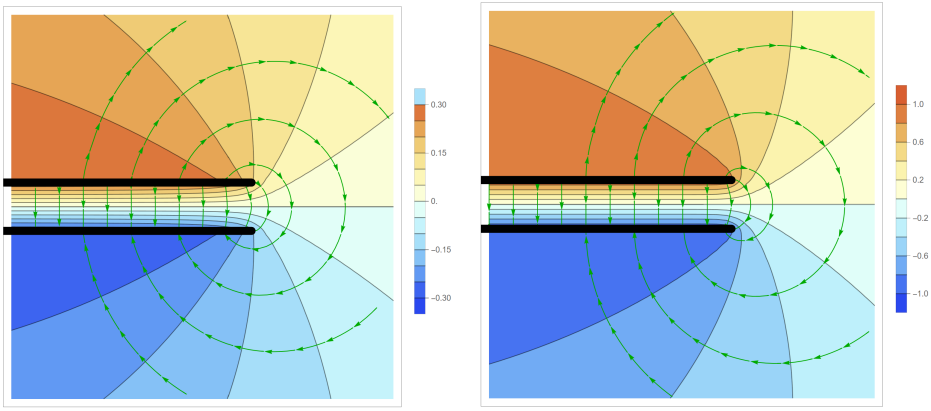
Два разноимённых заряда $q_1 = -q_2$ притягиваются линиями поля



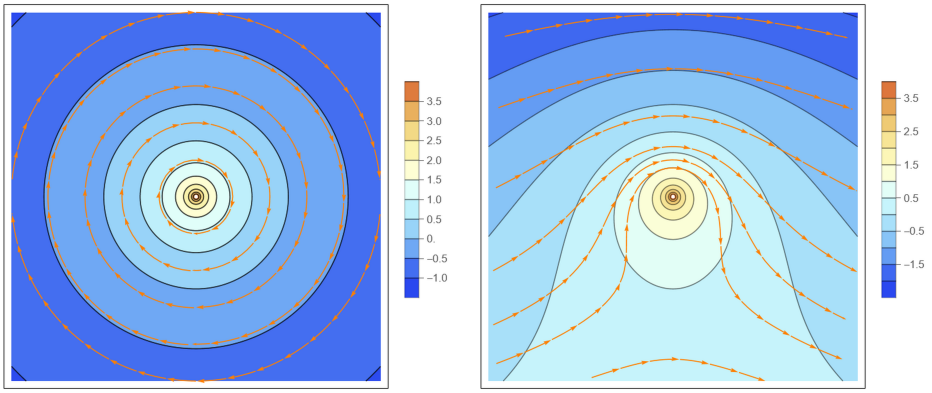
Два одноимённых заряда $8q_1 = q_2$ расталкиваются линиями поля



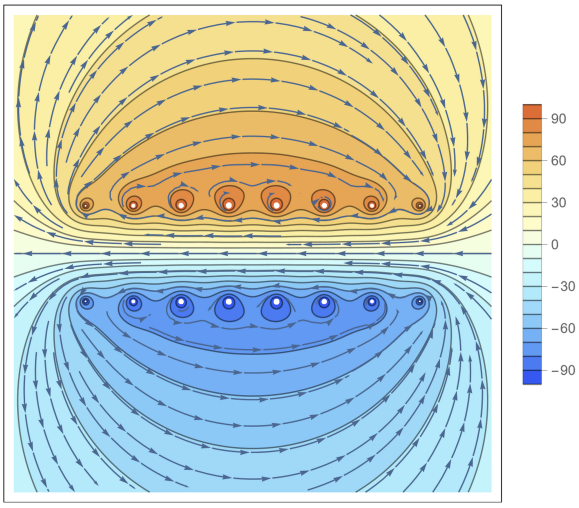
Два разноимённых заряда $8q_1 = -q_2$ притягиваются линиями поля



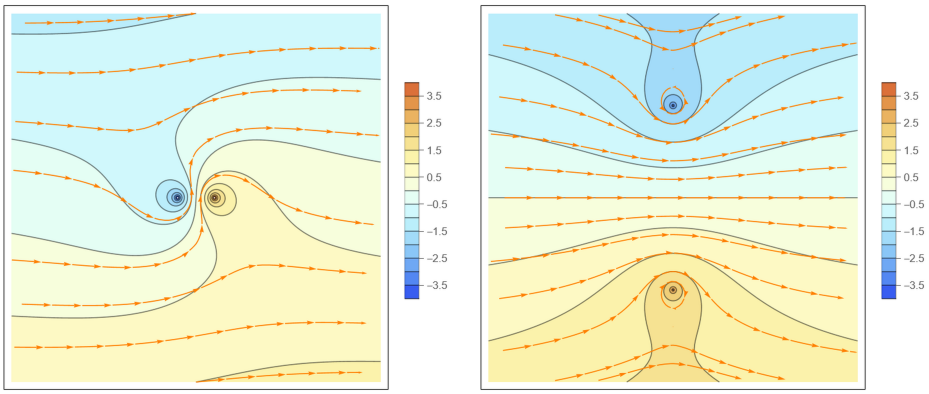
Посмотрите, как силовые линии стягивают между собой пластины конденсатора. На первом рисунке заряд распределён равномерно вдоль пластин, видно как натяжение линий поля пытается сдвинуть заряды к краям. На втором рисунке равновесное распределение зарядов, видно что линии поля перпендикулярны поверхности пластин. Обратите внимание на то, как на краю конденсатора давление поперёк линий поля заставляет линии поля выгибаться наружу, чтобы противостоять этому давлению



Магнитное поле прямого провода с током (ток втыкается в плоскость рисунка) обжимает провод силовыми линиями, как обручами. Если провод поместить во внешнее однородное магнитное поле (направленное слева направо), то поле провода и внешнее поле складываются, а силовые линии изгибаются так, что их натяжение тянет провод вниз



«Прямой соленоид» — 16 прямых проводов, направленных перпендикулярно плоскости рисунка. По 8 верхним проводам ток направлен от читателя, по 8 нижним — к читателю. Цвет обозначает проекцию векторного потенциала A_z на направление, перпендикулярное рисунку ($A_x = A_y = 0$). Мы видим, что давление магнитного поля расталкивает провода с разным направлением тока и притягивает провода с одинаковым направлением тока. Также давление поля «обжимает» каждый провод, оказывая давление на его поверхность



Рамка с током (большого размера в направлении, перпендикулярном рисунку), внесённая в однородное магнитное поле, разворачивается нормалью по полю (рамка изображена в разных масштабах)

3.7.7 Задача 51

Задача 51. Нелинейная электродинамика.
Рассмотрим следующее действие, переходящее в пределе малых полей в действие для электромагнитного поля:

$$S[A_i(\underline{x})] = -\int \sqrt{1 + \frac{F^{ij}F_{ij}}{8\pi}}\, d^4\underline{x}, \qquad F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i.$$

а) Выведите аналоги уравнений Максвелла.
б)* Найдите решение уравнений поля, переходящее на бесконечности в поле точечного заряда.
в)* Какое распределение зарядов соответствовало бы полю из п. б) в линейной электродинамике?

Глава 3.8

Волновое уравнение для электромагнитного поля (с. 464)

3.8.1 Уравнения поля через потенциалы

Уравнения Максвелла, выраженные через поля, — это дифференциальные уравнения в частных производных 1-го порядка. В 4-мерном виде они имеют вид

$$\partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} + \partial_k F_{ij} = 0, \qquad \nabla_j F^{ij} = \frac{4\pi k_{\text{к}}}{c} j^i.$$

Если выразить поля через потенциалы, $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$, и подставить в уравнения поля, то первая пара даст тождество $0 = 0$ (что естественно, ведь из определения полей через потенциалы первая пара и была нами выведена), а из второй пары получим

$$\nabla_j \left(\nabla^i A^j - \nabla^j A^i \right) = \nabla^i \nabla_j A^j - \underbrace{\nabla_j \nabla^j}_{\Box} A^i = \frac{4\pi k_{\text{к}}}{c} j^i.$$

Удобно ввести *волновой оператор* (*оператор Даламбера=даламбертиан*)

$$\Box = \nabla_j \nabla^j = \triangle - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Теперь уравнения поля записались через волновой оператор и градиент от 4-дивергенции:

$$\nabla^i (\nabla_j A^j) - \Box A^i = \frac{4\pi k_{\text{к}}}{c} j^i. \tag{3.8.1}$$

То, что во всех уравнениях присутствуют все компоненты потенциала, не очень удобно. Например, хотелось бы избавиться от первого члена (с 4-дивергенцией) и получить 4 отдельных волновых уравнения для отдельных компонент 4-потенциала.

К счастью, потенциалы определены не однозначно, их можно подвергать *калибровочным преобразованиям* $A_i \to A_i + \partial_i f$, которые содержат произвольную скалярную функцию f. Таким образом, при выборе потенциалов имеется произвол на одну скалярную функцию.

Мы можем ограничить этот произвол, если наложим на потенциалы какое-то одно удобное нам *калибровочное условие = калибровку*. Наложение калибровки позволяет без потери общности немного упростить уравнения поля.

(!) Надо различать разные термины, включающие слово «калибровочный»:

- *калибровочные* (*градиентные*) *преобразования* потенциалов $A_i \to A_i + \partial_i f$ приводят к неоднозначности выбора потенциалов для описания поля;
- *калибровочная инвариантность* — неизменность электромагнитного поля ($\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, F_{ij}), а также функционала действия при калибровочных преобразованиях;
- *калибровочные условия* (*калибровка*) частично фиксируют неоднозначность выбора потенциалов.

Рассмотрим некоторые калибровки, которые могут встретиться нам чаще всего.

3.8.2 Калибровка Лоренца

Чтобы избавиться от первого члена в уравнении (3.8.1), удобно наложить *калибровочное условие Лоренца* (*калибровку Лоренца*)

$$\nabla_i A^i = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \tag{3.8.2}$$

Тогда уравнения поля превращаются в 4 отдельных *неоднородных волновых уравнения* на 4 компоненты потенциала:

$$\Box A^i = -\tfrac{4\pi k_{\text{к}}}{c} j^i.$$

Эти уравнения можно решать независимо, но потом надо будет проверить, что их решения удовлетворяют калибровочному условию Лоренца (3.8.2), которое перемешивает все компоненты.

Всегда ли можно наложить калибровку Лоренца? Пусть имеется 4-потенциал A^i, который калибровке Лоренца не удовлетворяет. Мы хотим построить с помощью калибровочного преобразования потенциал A'^i, который удовлетворяет калибровке Лоренца:

$$A'^i = A^i + \nabla^i f \qquad \Rightarrow \qquad \nabla_i A'^i = \nabla_i A^i + \underbrace{\nabla_i \nabla^i}_{\Box} f = 0.$$

Мы получили, что скалярная функция f должна удовлетворять волновому уравнению

$$\Box f = \underbrace{\nabla_i A'^i}_{0} - \nabla_i A^i. \tag{3.8.3}$$

Как мы увидим далее, исследуя волновое уравнение, такая функция f существует для достаточно хорошей правой части (в физически осмысленных случаях). Таким образом, во всех случаях мы можем перейти к потенциалам, удовлетворяющим калибровке Лоренца.

(!) Как правило, мы не будем решать уравнение (3.8.3), вместо этого мы сразу будем искать потенциалы, удовлетворяющие условию Лоренца.

(!) Калибровка Лоренца также хороша тем, что она лоренц-инвариантна, т.е. если потенциалы удовлетворяли калибровке Лоренца, то после преобразования Лоренца они по-прежнему будут удовлетворять калибровке Лоренца[1].

(!) Даже после наложения калибровочного условия Лоренца потенциалы, описывающие данное электромагнитное поле, определены не однозначно. Мы уже не можем сделать калибровочное преобразование с произвольной функцией f, но, как следует из уравнения (3.8.3), по-прежнему можем сделать калибровочное преобразование с функцией f, удовлетворяющей однородному волновому уравнению

$$\Box f = 0.$$

Такое преобразование превратит потенциал, удовлетворяющий условию Лоренца, в новый потенциал, тоже удовлетворяющий условию Лоренца.

Калибровочные преобразования, не нарушающие калибровочного условия, называются *остаточными калибровочными преобразованиями*.

3.8.3 Калибровка Кулона*

Часто бывает удобно использовать *калибровочное условие Кулона* (*калибровку Кулона*)

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \nabla_\alpha A^\alpha = 0.$$

Калибровка Кулона похожа на калибровку Лоренца, но накладывается только на векторный потенциал. Соответственно с 4-мерной точки зрения это условие не является скаляром (инвариантом), т.е. при преобразованиях Лоренца калибровка Кулона нарушается (не является лоренц-инвариантной).

Уравнения поля в калибровке Кулона не могут быть записаны в 4-мерном тензорном виде, поскольку в таком виде не может быть записана калибровка Кулона:

$$\nabla^i(\nabla_j A^j) - \Box A^i = \nabla^i\Big(\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \underbrace{\operatorname{div} \mathbf{A}}_{0}\Big) - \left(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A^i = \frac{4\pi k_{\text{к}}}{c} j^i.$$

[1] Преобразования Лоренца вывел Хендрик Антон Лоренц (нидерл. Hendrik Antoon Lorentz; 18.06.1853–04.02.1928), а калибровку Лоренца — Людвиг Валентин Лоренц (дат. Ludvig Valentin Lorenz; 18.01.1829–09.06.1891), так что эти понятия связаны с двумя разными людьми, которые даже не однофамильцы.

При $i = 0$ имеем

$$\underbrace{\nabla^0}_{-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \underbrace{\operatorname{div}\mathbf{A}}_{0}\right) - \left(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\underbrace{A^0}_{\varphi} = \frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\underbrace{j^0}_{c\rho}.$$

Мы получаем *уравнение Пуассона* для скалярного потенциала:

$$\triangle\varphi = -4\pi k_{\text{к}}\rho.$$

Это в точности такое же уравнение, как для электростатического потенциала! Более того, потенциал, вычисленный по этому уравнению, мгновенно реагирует на изменение плотности заряда на любом расстоянии. Может показаться, что это противоречит СТО, но это не так: потенциал не имеет непосредственного физического смысла, и передать какой-либо сигнал таким образом незвозможно.

Пространственная часть уравнений поля $i = \alpha$ даёт уравнение

$$\nabla^\alpha\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \Box A^\alpha = \frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}j^\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \Box\mathbf{A} = -\tfrac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\mathbf{j} + \tfrac{1}{c}\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Мы получили систему уравнений электромагнитного поля в калибровке Кулона:

$$\begin{cases} \triangle\varphi = -4\pi k_{\text{к}}\rho \\ \Box\mathbf{A} = -\frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \end{cases}.$$

Естественный порядок её решения:

- найти скалярный потенциал из уравнения Пуассона (в точности как электростатический);
- решить неоднородное волновое уравнение для векторного потенциала (в правой части которого помимо плотности тока есть добавка, связанная со скалярным потенциалом, который уже известен).

Калибровка Кулона удобна для описания поправок к электростатическому полю.

(!) В калибровке Кулона скалярный потенциал однозначно привязан к электрическим зарядам и не описывает отдельных степеней свободы, а все степени свободы электромагнитного поля оказываются связаны с векторным потенциалом. Обсуждение этого см. в § 2.13.1 «Классическая потенциальная энергия и макроскопические силы из СТО» (с. 277).

Если мы делаем калибровочное преобразование $A^i \to A'^i = A^i + \nabla^i f$, то

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{div}\mathbf{A}' = \operatorname{div}\mathbf{A} + \underbrace{\operatorname{div}\operatorname{grad}}_{\triangle} f.$$

Таким образом, для скалярной функции получаем уравнение Пуассона

$$\triangle f = \underbrace{\operatorname{div}\mathbf{A}'}_{0} - \operatorname{div}\mathbf{A}.$$

Решив это уравнение, мы можем перейти от произвольного потенциала к потенциалу, удовлетворяющему условию Кулона.

Впрочем, как и калибровка Лоренца, калибровка Кулона обычно накладывается до решения уравнений поля, и потенциалы с самого начала ей удовлетворяют.

Для калибровки Кулона также есть *остаточные калибровочные преобразования*. Задающая их скалярная функция должна удовлетворять *уравнению Лапласа*

$$\triangle f = 0.$$

3.8.4 Уравнение Пуассона

Уравнение Пуассона получается из волнового уравнения, если источник и потенциал не зависят от времени:

$$\triangle\varphi = -4\pi k_{\text{к}}\rho,$$
$$\triangle\mathbf{A} = -\tfrac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\mathbf{j}.$$

В рамках нашего курса уравнение Пуассона для скалярного потенциала возникает в электростатике и при решении уравнений электромагнитного поля в калибровке Кулона. Уравнение Пуассона на векторный потенциал возникает в магнитостатике.

Это, как говорят математики в курсе «Уравнения математической физики», *линейное неоднородное уравнение 2-го порядка эллиптического типа.*

Расшифруем все эти термины с точки зрения физики.

Линейное — есть принцип суперпозиции, т. е. можно сложить решения и получится решение для суммы правых частей.

Неоднородное — в уравнении есть правая часть (*источник поля*).

2-го порядка — содержит 2-е производные (и может содержать производные не выше 2-й); важно не только значение функции в точке, но и скорость её изменения.

Эллиптического типа — дифференциальный оператор построен с помощью квадратичной формы, у которой все собственные числа одного знака (такая квадратичная форма позволяет определить эллипсоид). Обычно эллиптические уравнения характерны для задач статики, часто они описывают условия равновесия.

Мы можем вычесть два уравнения Пуассона с одинаковыми правыми частями:

$$\begin{array}{rcl} \triangle\varphi_1 & = & -4\pi k_\text{к}\rho, \\ \triangle\varphi_2 & = & -4\pi k_\text{к}\rho, \\ \hline \triangle(\varphi_1-\varphi_2) & = & 0. \end{array}$$

Отсюда следует, что, как и для обыкновенных линейных неоднородных дифференциальных уравнений, общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения в частных производных представляется как сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

(ф) Неоднозначность решения уравнения Пуассона можно интерпретировать как неопределённость влияния источников, расположенных за пределами рассматриваемой области (может быть, на бесконечности). Если на границе области поставить соответствующие граничные условия, то решение однозначно фиксируется.

Чтобы получить частное решение неоднородного уравнения, мы можем определить *для уравнения Пуассона функцию Грина*[2]

$$\triangle_{\mathbf{r}} g(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = -4\pi k_\text{к}\,\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0).$$

(ф) Физический смысл функции Грина для уравнения Пуассона — электростатический потенциал, создаваемый единичным точечным зарядом, помещённым в точке $\mathbf{r}_0$.

Умножим уравнение функции Грина на $\rho(\mathbf{r}_0)$ и проинтегрируем по $d^3\mathbf{r}_0$:

$$\int\limits_V \rho(\mathbf{r}_0)\triangle_{\mathbf{r}} g(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\,d^3\mathbf{r}_0 = -4\pi k_\text{к}\int\limits_V \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\rho(\mathbf{r}_0)\,d^3\mathbf{r}_0 = -4\pi k_\text{к}\rho(\mathbf{r}).$$

В левой части под лапласиан по $\mathbf{r}$ можно внести всё, что от $\mathbf{r}$ не зависит, и вынести лапласиан из-под интеграла:

$$\triangle_{\mathbf{r}}\int\limits_V \rho(\mathbf{r}_0) g(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\,d^3\mathbf{r}_0 = -4\pi k_\text{к}\rho(\mathbf{r}).$$

Мы получили частное решение уравнения Пуассона

$$\varphi_\text{ч.р.}(\mathbf{r}) = \int\limits_V \rho(\mathbf{r}_0) g(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\,d^3\mathbf{r}_0.$$

В общем случае мы можем определить функцию Грина в некоторой области V, на границе которой ∂V поставлены граничные условия (граничные условия должны быть линейными однородными). Например, граничное условие $\varphi|_{\partial V} = 0$ соответствует тому, что граница области — заземлённый проводник. Такая функция Грина учитывает не только поле самого заряда, но и поле зарядов, наведённых на границе области, причём $g(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) \neq g(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$.

Во всём пространстве $\mathbb{R}^3$ можно (хотя и не обязательно) определить функцию Грина так, что

$$g(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = g(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0).$$

Это условие тоже не до конца фиксирует функцию Грина. При дополнительных условиях $g(\mathbf{r}) = g(|\mathbf{r}|)$ и $g(r\to\infty) = 0$ функция Грина — это просто кулоновский потенциал единичного заряда:

$$g(r) = \frac{k_\text{к}}{r}.$$

[2]Функцию Грина для уравнения Пуассона часто определяют без множителя $-4\pi k_\text{к}$, как $\triangle_{\mathbf{r}} g(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$. Мы предпочли выбрать функцию Грина так, чтобы она имела наглядный физический смысл потенциала *единичного* точечного заряда.

Соответствующее частное решение уравнения Пуассона имеет вид

$$\varphi_{\text{ч.р.}}(\mathbf{r}) = k_{\text{к}} \int\limits_V \frac{\rho(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\, d^3\mathbf{r}_0 = k_{\text{к}} \int\limits_V \frac{dq(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}, \qquad dq(\mathbf{r}_0) = \rho(\mathbf{r}_0)\, d^3\mathbf{r}_0.$$

(ф) Это разложение электростатического потенциала по кулоновским потенциалам точечных частиц.

3.8.5 Волновое уравнение

Волновые уравнения

$$\Box A^i = -\tfrac{4\pi k_{\text{к}}}{c} j^i \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \Box\varphi = -4\pi k_{\text{к}}\rho, \\ \Box\mathbf{A} = -\tfrac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\mathbf{j} \end{array} \right.$$

в рамках нашего курса возникают при решении уравнений электромагнитного поля в калибровке Лоренца, а для векторного потенциала (с модифицированной правой частью) также в калибровке Кулона.

Это, как говорят математики в курсе «Уравнения математической физики», *линейное неоднородное уравнение 2-го порядка гиперболического типа.*

Расшифруем все эти термины с точки зрения физики.

Линейное — есть принцип суперпозиции, т. е. можно сложить решения и получится решение для суммы правых частей.

Неоднородное — в уравнении есть правая часть (*источник поля*).

2-го порядка — содержит 2-е производные (и может содержать производные не выше 2-й); при задании начальных данных (*постановке задачи Коши*) на пространственноподобной поверхности надо задать не только функцию, но и производную по направлению, непараллельному поверхности.

Гиперболического типа — дифференциальный оператор построен с помощью квадратичной формы, у которой все собственные числа отличны от нуля, но имеют разные знаки (такая квадратичная форма позволяет определить гиперболоид). Обычно гиперболические уравнения характерны для задач динамики.

Мы будем рассматривать уравнение для скалярного потенциала, имея в виду, что уравнения для остальных компонент потенциала решаются аналогично.

Мы можем вычесть два волновых уравнения с одинаковыми правыми частями:

$$\begin{array}{rcl} \Box\varphi_1 & = & -4\pi k_{\text{к}}\rho, \\ \Box\varphi_2 & = & -4\pi k_{\text{к}}\rho, \\ \hline \Box(\varphi_1-\varphi_2) & = & 0. \end{array}$$

Отсюда следует, что, как и для обыкновенных линейных неоднородных дифференциальных уравнений, общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения в частных производных представляется как сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

(ф) Неоднозначность решения волнового уравнения можно интерпретировать как неопределённость влияния источников, расположенных за пределами рассматриваемой области (может быть, на бесконечности). Если на границе области поставить соответствующие граничные условия, то решение однозначно фиксируется.

Чтобы получить частное решение неоднородного уравнения, мы можем определить *для волнового уравнения функцию Грина*[3]

$$\Box_{\underline{x}} G(\underline{x}, \underline{x}_0) = -4\pi k_{\text{к}}\, \delta^4(\underline{x}-\underline{x}_0).$$

(!ф) Физический смысл функции Грина волнового уравнения — потенциал, создаваемый точечным источником, который «мигнул» в момент времени t_0 в точке $\mathbf{r}_0$ так, что интеграл от источника по $d^4\underline{x}$ равен 1.

(!ф*) Что за мигающий точечный источник имеется в виду? Если рассматривать не электромагнитную волну, а звук в газе и взять в волновом операторе скорость звука вместо скорости света, то функция Грина волнового уравнения приобретает хороший физический смысл — сферическая волна, расходящаяся от мгновенного точечного симметричного источника. Для звука (продольного звука!) такой источник никаких законов сохранения не нарушает.

(!ф)** Если мы не хотим переходить от электродинамики к акустике, то источник для функции Грина не может быть электрическим зарядом, т.к. такое мигание нарушит закон сохранения заряда, но это может быть пространственная компонента плотности тока. Как мы увидим далее (рассмотрев ток,

[3]Функцию Грина для волнового уравнения часто определяют без множителя $-4\pi k_{\text{к}}$, как $\Box_{\underline{x}} G(\underline{x}, \underline{x}_0) = \delta^4(\underline{x}-\underline{x}_0)$.

текущий при изменении величины точечного электрического диполя), если в момент времени t_0 в точке $\mathbf{r}_0$ возник точечный электрический диполь единичной величины, направленный по оси x: $\mathbf{d} = \mathbf{e}_x\,\theta(t-t_0)$, то в уравнении для A_x появится как раз такая правая часть, как в уравнении для функции Грина:

$$-\frac{4\pi k_{\text{к}}}{c} j_x = -\frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\,\dot{d}_x\,\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = -\frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\delta(t-t_0)\,\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = -4\pi k_{\text{к}}\delta^4(\underline{x}-\underline{x}_0).$$

Умножим уравнение функции Грина на источник $\frac{1}{c}j^i(\underline{x}_0)$ и проинтегрируем по $d^4\underline{x}_0$:

$$\frac{1}{c}\int\limits_U j^i(\underline{x}_0)\Box_{\underline{x}} G(\underline{x},\underline{x}_0)\,d^4\underline{x}_0 = -\frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\int\limits_U \delta^4(\underline{x}-\underline{x}_0)j^i(\underline{x}_0)\,d^4\underline{x}_0 = -\frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}j^i(\underline{x}).$$

В левой части под даламбертиан по $\underline{x}$ можно внести всё, что от $\underline{x}$ не зависит, и вынести даламбертиан из-под интеграла:

$$\Box_{\underline{x}}\frac{1}{c}\int\limits_U j^i(\underline{x}_0)G(\underline{x},\underline{x}_0)\,d^4\underline{x}_0 = -\frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\,j^i(\underline{x}).$$

Мы получили частное решение волнового уравнения

$$A^i_{\text{ч.р.}}(\underline{x}) = \frac{1}{c}\int\limits_U j^i(\underline{x}_0)G(\underline{x},\underline{x}_0)\,d^4\underline{x}_0. \tag{3.8.4}$$

Мы можем определить функцию Грина в некоторой области, например $U = V\times[t_0,t_1]$, на пространственной части границы которой $\partial V\times[t_0,t_1]$ поставлены граничные условия (граничные условия должны быть линейными однородными), а на $V\times\{t_0\}$ поставлены начальные условия. Такая функция Грина учитывает не только поле самого источника, но и поле источников, наведённых на пространственной границе области (отражение волны от стенок), причём $G(\underline{x},\underline{x}_0)\neq G(\underline{x}-\underline{x}_0)$.

Во всём пространстве $\mathbb{R}^4$ можно (хотя и не обязательно) определить функцию Грина так, что

$$G(\underline{x},\underline{x}_0) = G(\underline{x}-\underline{x}_0).$$

Это условие тоже не до конца фиксирует функцию Грина. При дополнительных условиях $G(\underline{x}) = G(|\mathbf{r}|,t)$ и $G(r\to\infty,t)=0$ функция Грина всё равно определена не вполне однозначно; она оказывается комбинацией двух функций Грина: *запаздывающей* $G_R(r,t)$ и *опережающей* $G_A(r,t)$,

$$G(r,t) = p\cdot G_R(r,t) + (1-p)\cdot G_A(r,t).$$

Запаздывающая и опережающая функции Грина фиксируются условиями

$$G_R(r,t<0)=0, \qquad G_A(r,t>0)=0.$$

Они так называются потому, что в одном случае сигнал (поле) появляется после того, как мигнёт источник (сигнал запаздывает), а в другом сигнал (поле) появляется до того, как мигнёт источник (сигнал опережает). Таким образом, *запаздывающая функция Грина* описывает, как источник испускает волну, а *опережающая функция Грина* — как источник поглощает волну.

Запаздывающую и опережающую функции Грина дадим без вывода (они выводятся в курсе «Уравнения математической физики», проверку для запаздывающей функции Грина см. в дополнениях, на с. 464):

$$G_R(r,t) = k_{\text{к}}\frac{\delta(r-ct)}{r}, \qquad G_A(r,t) = k_{\text{к}}\frac{\delta(r+ct)}{r}. \tag{3.8.5}$$

Соответствующее запаздывающей функции Грина частное решение волнового уравнения называется *запаздывающими потенциалами* и имеет вид

$$A^i_{\text{з.п.}}(\mathbf{r},t) = k_{\text{к}}\int\frac{j^i(\mathbf{r}_0,t_0)\,\delta(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|-c(t-t_0))}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\,d^3\mathbf{r}_0\,dt_0 = \frac{k_{\text{к}}}{c}\int\frac{j^i(\mathbf{r}_0,t-\frac{1}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\,d^3\mathbf{r}_0.$$

(ф) Это разложение волнового потенциала по сферическим волнам мгновенных точечных источников.

В компонентах запаздывающие потенциалы имеют вид

$$\varphi_{\text{з.п.}}(\mathbf{r},t) = k_{\text{к}}\int\frac{\rho(\mathbf{r}_0,t-\frac{1}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\,d^3\mathbf{r}_0, \qquad \mathbf{A}_{\text{з.п.}}(\mathbf{r},t) = \frac{k_{\text{к}}}{c}\int\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_0,t-\frac{1}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\,d^3\mathbf{r}_0.$$

(!!ф) Запаздывающие потенциалы очень похожи на потенциалы в электростатике и магнитостатике, с одним существенным отличием: источники (плотности зарядов и токов) берутся в более ранние моменты времени, чем поля. Более ранние моменты времени берутся такие, чтобы сигнал со скоростью света добежал из точки $\mathbf{r}_0$ в точку $\mathbf{r}$ как раз к моменту времени t.

Для запаздывающих потенциалов выполняется калибровочное условие Лоренца, *если выполняется уравнение непрерывности для зарядов и токов*[4]:

$$\begin{aligned}\nabla_i^{(\mathbf{r},t)} A^i_{\text{з.п.}}(\mathbf{r},t) &= \nabla_i^{(\mathbf{r},t)} \frac{k_\text{к}}{c} \int \frac{j^i(\mathbf{r}_0, t - \frac{1}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\, d^3\mathbf{r}_0 = \nabla_i^{(\mathbf{r},t)} \frac{k_\text{к}}{c} \int \frac{j^i(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho}, t - \frac{1}{c}|\boldsymbol{\rho}|)}{|\boldsymbol{\rho}|}\, d^3\boldsymbol{\rho} = \\ &= \frac{k_\text{к}}{c} \int \frac{\nabla_i^{(\mathbf{r},t)} j^i(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho}, t - \frac{1}{c}|\boldsymbol{\rho}|)}{|\boldsymbol{\rho}|}\, d^3\boldsymbol{\rho} = 0.\end{aligned}$$

Поскольку здесь появляются разные наборы пространственно-временных координат, вместо ∇_i мы пишем $\nabla_i^{(\mathbf{r},t)} = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$, обозначая в виде индекса в скобках, по каким именно координатам идёт дифференцирование.

Здесь мы ввели новую переменную интегрирования $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}$ и внесли $\nabla_i^{(\mathbf{r},t)}$ под интеграл. Теперь в подынтегральном выражении от переменных $\mathbf{r}, t$ зависит только j^i. В числителе получаем уравнение непрерывности со сдвинутыми аргументами $\nabla_i^{(\mathbf{r},t)} j^i(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho}, t - \frac{1}{c}|\boldsymbol{\rho}|) = 0$.

[4]Напомним, что ранее мы получили, что уравнение непрерывности для зарядов и токов следует из уравнений Максвелла (3.7.4) как условие их совместимости.

Глава 3.9

Электро- и магнитостатика (с. 466)

В электростатике и магнитостатике поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ и источники ρ и $\mathbf{j}$ от времени не зависят. Соответственно, можно ввести электростатический потенциал φ:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}=-\operatorname{grad}\varphi.$$

Для него получаем *уравнение Пуассона*:

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi k_{\text{к}}\rho \quad \Rightarrow \quad \triangle\varphi=-4\pi k_{\text{к}}\rho.$$

Также можно ввести векторный потенциал $\mathbf{A}$, не зависящий от времени:

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}=\operatorname{rot}\mathbf{A};$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{B}=\frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}=[\nabla\times[\nabla\times\mathbf{A}]]=\nabla(\nabla,\mathbf{A})-(\nabla,\nabla)\mathbf{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}-\triangle\mathbf{A}=\frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\mathbf{j}.$$

Если наложить калибровку Кулона $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$, то для векторного потенциала тоже получается *уравнение Пуассона*[1]:

$$\triangle\mathbf{A}=-\frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\mathbf{j}.$$

3.9.1 Электростатическая энергия

Энергия электростатического поля равна

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_E &= \int\limits_U W_E\,d^3\mathbf{r}=\int\limits_U\frac{\mathbf{E}^2}{8\pi k_{\text{к}}}\,d^3\mathbf{r}=\int\limits_U\frac{-E_\alpha\nabla_\alpha\varphi}{8\pi k_{\text{к}}}\,d^3\mathbf{r}=\int\limits_U\left(\nabla_\alpha\frac{-E_\alpha\varphi}{8\pi k_{\text{к}}}+\frac{\varphi\nabla_\alpha E_\alpha}{8\pi k_{\text{к}}}\right)d^3\mathbf{r}=\\ &= \int\limits_{\partial U}\frac{-E_\alpha\varphi}{8\pi k_{\text{к}}}\,ds_\alpha+\int\limits_U\frac{\varphi\,\operatorname{div}\mathbf{E}}{8\pi k_{\text{к}}}\,d^3\mathbf{r}.\end{aligned}$$

Если на границе области интегрирования $\mathbf{E}=0$ (например, если область интегрирования — $\mathbb{R}^3$), то интеграл по поверхности исчезает. Поскольку $\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi k_{\text{к}}\rho$, получаем

$$\mathcal{E}_E=\frac{1}{2}\int\limits_U\varphi(\mathbf{r})\,\rho(\mathbf{r})\,d^3\mathbf{r}, \qquad \triangle\varphi=-4\pi k_{\text{к}}\rho.$$

Откуда взялся множитель $\frac{1}{2}$? Пусть

$$\rho=\rho_1+\rho_2, \quad \varphi=\varphi_1+\varphi_2, \qquad \triangle\varphi_1=-4\pi k_{\text{к}}\rho_1, \quad \triangle\varphi_2=-4\pi k_{\text{к}}\rho_2.$$

Тогда суммарная энергия распадается на 4 члена, соответствующие взаимодействию двух распределений зарядов друг с другом и самих с собой:

$$\mathcal{E}_E=\frac{1}{2}\int\limits_U(\varphi_1+\varphi_2)\,(\rho_1+\rho_2)\,d^3\mathbf{r}=\underbrace{\frac{1}{2}\int\limits_U\varphi_1\rho_1\,d^3\mathbf{r}}_{\mathcal{E}_{E1}}+\underbrace{\frac{1}{2}\int\limits_U\varphi_1\rho_2\,d^3\mathbf{r}}_{\mathcal{E}_{E12}}+\underbrace{\frac{1}{2}\int\limits_U\varphi_2\rho_1\,d^3\mathbf{r}}_{\mathcal{E}_{E21}}+\underbrace{\frac{1}{2}\int\limits_U\varphi_2\rho_2\,d^3\mathbf{r}}_{\mathcal{E}_{E2}}.$$

[1] Мы уже получали раньше эти уравнения из волновых уравнений в предположении, что источники и потенциалы не зависят от времени.

В предположении, что поверхностные члены можно откидывать, находим

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{E12} &= \frac{1}{2}\int\limits_U \varphi_1\rho_2\,d^3\mathbf{r} = -\frac{1}{4\pi k_\text{к}}\frac{1}{2}\int\limits_U \varphi_1\nabla_\alpha\nabla_\alpha\varphi_2\,d^3\mathbf{r} = \frac{1}{4\pi k_\text{к}}\frac{1}{2}\int\limits_U (\nabla_\alpha\varphi_1)(\nabla_\alpha\varphi_2)\,d^3\mathbf{r} = -\frac{1}{4\pi k_\text{к}}\frac{1}{2}\int\limits_U (\nabla_\alpha\nabla_\alpha\varphi_1)\varphi_2\,d^3\mathbf{r} = \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_U \rho_1\varphi_2\,d^3\mathbf{r} = \mathcal{E}_{E21}.\end{aligned}$$

Получаем, что полная энергия — это *энергия самодействия* каждой подсистемы плюс *энергия взаимодействия*:

$$\mathcal{E}_E = \mathcal{E}_{E1} + \mathcal{E}_{E2} + \underbrace{\mathcal{E}_{E1+2}}_{2\mathcal{E}_{E12}}.$$

Энергия взаимодействия может быть выражена привычным образом как энергия 1-й системы зарядов в поле 2-й системы зарядов или наоборот. Множителя $\frac{1}{2}$ энергия взаимодействия не содержит:

$$\mathcal{E}_{E1+2} = \int\limits_U \varphi_1\rho_2\,d^3\mathbf{r} = \int\limits_U \varphi_2\rho_1\,d^3\mathbf{r}.$$

Так что множитель $\frac{1}{2}$ в полной энергии и в энергиях самодействия нужен, чтобы избежать двойного счёта при вычислении энергии взаимодействия пары зарядов.

Если имеется несколько систем зарядов, для каждой из них исключаем энергию самодействия и получаем

$$U_\text{взаим.} = \frac{1}{2}\sum_{a\neq b}\int\limits_U \varphi_a\rho_b\,d^3\mathbf{r} = \sum_{a<b}\int\limits_U \varphi_a\rho_b\,d^3\mathbf{r}. \tag{3.9.1}$$

(!) Энергия электростатического поля (3.9.1) может рассматриваться как потенциальная энергия взаимодействия электрических зарядов. В частности, дифференцируя её по координатам заряженных объектов, можно получить действующие на них силы $\mathbf{F}_a = -\boldsymbol{\nabla}_a U_\text{взаим.}$, а дифференцируя по углу $\phi_{a\alpha}$ (угол поворота объекта a вокруг оси x^α) — проекцию момента сил на данную ось $L_{a\alpha} = -\frac{\partial U_\text{взаим.}}{\partial\phi_{a\alpha}}$.

3.9.1.1 Проблема точечного заряда

Если в системе есть хотя бы один точечный заряд, то его энергия самодействия оказывается бесконечной. Представим точечный заряд как заряженную сферу радиусом $a \to 0$:

$$\mathcal{E}_\text{сферы} = \frac{1}{2}\;\underbrace{\frac{k_\text{к}q}{r}}_{\varphi(r=a)}\;q = \frac{k_\text{к}q^2}{2a} \to +\infty \qquad \text{при } a \to 0.$$

Поскольку нас обычно интересует не сама энергия, а её изменение, энергии самодействия точечных зарядов отбрасывают, но оставляют энергии взаимодействия разных точечных зарядов между собой:

$$\sum_{k<l}\varphi_k(\mathbf{r}_l)q_l = k_\text{к}\sum_{k<l}\frac{q_kq_l}{|\mathbf{r}_k-\mathbf{r}_l|}.$$

Однако энергия в системе покоя — это масса. Соответственно, энергия поля вносит бесконечный вклад в массу точечного заряда. Чтобы полная масса осталась конечной, приходится считать, что *масса голого заряда* m_0 (без учёта поля) тоже бесконечная и отрицательная, так что полная масса конечна:

$$0 < m = \underbrace{\frac{\mathcal{E}_E}{c^2}}_{+\infty} + \underbrace{m_0}_{-\infty} < +\infty.$$

Если предположить, что вся масса заряда — это энергия его поля, а сам заряд представляет собой заряженную сферу, то

$$\frac{k_\text{к}q^2}{2a} = mc^2 \quad\Rightarrow\quad a = \frac{k_\text{к}q^2}{2mc^2}.$$

Величину

$$r_0 = \frac{k_\text{к}e^2}{m_ec^2} = 2{,}81794033\times10^{-13}\text{ см}$$

называют *классическим радиусом электрона.*

(*) Почему не учтён множитель $\frac{1}{2}$, который возникает при оценке энергии поля заряженной сферы? Это было бы заведомым превышением точности. Можно придумывать разные классические модели электрона: учитывать, что у него кроме заряда есть магнитный момент; учитывать, что общая теория относительности не позволяет натяжению (которое должно удерживать элементы заряда вместе) быть без энергии, и т.д. и т.п. Но любая классическая модель электрона из соображений размерности даст r_0 с каким-то безразмерным множителем порядка 1. И все эти классические модели не имеют смысла: квантовую частицу так моделировать нельзя. Более того, даже современная *квантовая теория поля* рассматривает электрон как бесструктурную частицу.

(!) Так что r_0 — это просто комбинация заряда и массы электрона (а также скорости света), имеющая размерность расстояния.

(*) В *квантовой теории поля* энергия покоя и масса точечной заряженной частицы (в том числе электрона) также оказываются бесконечными. И решается эта проблема приписыванием такой частице конечной массы, полученной из эксперимента. Такое отбрасывание полученной в результате вычислений бесконечности — частный случай процедуры *перенормировки*. Физики давно мечтают избавиться от бесконечностей каким-либо другим, более физическим способом, но пока это не получается.

3.9.1.2 Границы применимости классической электродинамики

На масштабах менее классического радиуса электрона в классической электродинамике прячется бесконечная энергия, которой нельзя позволить проявиться на больших масштабах и, в частности, привести к рождению частиц из ничего.

Условие применимости классической электродинамики требует, чтобы на расстояниях порядка классического радиуса электрона элементарная частица не могла набрать энергию порядка массы электрона (самой лёгкой заряженной частицы) и за счёт этого не могло происходить рождение *электрон-позитронных пар*:

$$eEr_0 \ll m_e c^2 \qquad \Rightarrow \qquad E \ll \frac{(mc^2)^2}{k_к e^3}. \tag{3.9.2}$$

На магнитное поле накладываем аналогичное ограничение исходя из того, что длина волны с *ларморовской частотой* $\omega_B = \frac{eB}{2mc}$ (частотой вращения частицы в поле) должна быть много больше классического радиуса электрона:

$$c/\omega_B \gg r_0 \qquad \Rightarrow \qquad B \ll \frac{(mc^2)^2}{k_к e^3}. \tag{3.9.3}$$

Числовыми множителями порядка 1 мы пренебрегаем.

Мы дали грубую оценку границ применимости классической электродинамики исходя из неё самой.

(/)** По-настоящему границы применимости теории можно определить исходя из сравнения с более общими теориями. Для классической электродинамики сравнивать надо с квантовой механикой, квантовой теорией поля, общей теорией относительности.

Наиболее важные ограничения даёт квантовая механика. Они оказываются более строгими, чем оценки, полученные из самой классической электродинамики.

При рассмотрении поведения электрона в поле протона характерное расстояние — *радиус Бора*:

$$r_Б = \frac{\hbar^2}{m_e k_к e^2} = 5{,}29 \times 10^{-9} \text{ см} = 0{,}529 \text{ Å}, \qquad \frac{r_Б}{r_0} = \frac{\hbar^2}{m_e k_к e^2}\frac{m_e c^2}{k_к e^2} = \left(\frac{\hbar c}{k_к e^2}\right)^2 = \alpha^{-2} \approx 137^2.$$

Здесь **безразмерная**[2] комбинация фундаментальных констант $\alpha = \frac{k_к e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$ — *постоянная тонкой структуры*.

При рассеянии фотона на электроне характерная длина — приведённая *комптоновская длина волны* электрона:

$$\lambda_C = \frac{2\pi\hbar}{mc} \approx 0{,}0242 \text{ Å}, \qquad \frac{\lambda_C}{r_0} = \frac{2\pi\hbar}{m_e c}\frac{m_e c^2}{k_к e^2} = \frac{2\pi\hbar c}{k_к e^2} = \frac{2\pi}{\alpha} \approx 137 \times 2\pi.$$

(/)**

3.9.2 Разложение кулоновского потенциала

Мы научились решать уравнение Пуассона через разложения источника на систему точечных зарядов. Система n зарядов характеризуется $4n$ параметрами (n зарядов и $3n$ их координат), но при наблюдении

[2]Именно безразмерные комбинации фундаментальных констант являются наиболее фундаментальными, поскольку их численное значение не зависит от произвола в выборе единиц измерения.

с достаточно большого (по сравнению с размером системы a) расстояния столь детальное описание представляется чрезмерным. На большом расстоянии $R \gg a$ в первом приближении поле системы зарядов заменяется полем одного точечного заряда, далее можно вводить поправки в виде степенного ряда по малому безразмерному параметру a/R.

Рассмотрим кулоновский потенциал единичного заряда расположенного в точке $\mathbf{r}$ (*функцию Грина уравнения Пуассона*),

$$\frac{k_{\text{к}}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|},$$

и разложим его в ряд[3] по $\mathbf{r}$ (оператор ∇ здесь задан через производные по компонентам вектора $\mathbf{R}$, поэтому $\mathbf{r}$ можно свободно выносить из-под оператора набла):

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} &= \frac{1}{R} - (\mathbf{r},\nabla)\frac{1}{R} + \frac{1}{2}(\mathbf{r},\nabla)^2\frac{1}{R} + \cdots + \frac{1}{l!}(-\mathbf{r},\nabla)^l\frac{1}{R} + \cdots = \\ &= \frac{1}{R} - r_\alpha\nabla_\alpha\frac{1}{R} + \frac{1}{2}r_\alpha r_\beta\nabla_\alpha\nabla_\beta\frac{1}{R} + \cdots + \frac{(-1)^l}{l!}r_{\alpha_1}\cdots r_{\alpha_l}\nabla_{\alpha_1}\cdots\nabla_{\alpha_l}\frac{1}{R} + \cdots\end{aligned}$$

Выпишем первые члены разложения:

$$\nabla_\alpha\frac{1}{R} = -\frac{1}{R^2}\nabla_\alpha R = -\frac{1}{R^2}\frac{R_\alpha}{R} = -\frac{R_\alpha}{R^3};$$

$$\nabla_\alpha\nabla_\beta\frac{1}{R} = \nabla_\beta\left(-\frac{R_\alpha}{R^3}\right) = -3\frac{-R_\alpha}{R^4}\underbrace{\nabla_\beta R}_{\frac{R_\beta}{R}} - \frac{1}{R^3}\underbrace{\nabla_\beta R_\alpha}_{\delta_{\alpha\beta}} = \frac{3R_\alpha R_\beta - R^2\delta_{\alpha\beta}}{R^5};$$

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla_\gamma\frac{1}{R} &= \nabla_\gamma\left(\frac{3R_\alpha R_\beta - R^2\delta_{\alpha\beta}}{R^5}\right) = \frac{3\delta_{\alpha\gamma}R_\beta + 3R_\alpha\delta_{\beta\gamma} - 2R_\gamma\delta_{\alpha\beta}}{R^5} - 5\frac{3R_\alpha R_\beta - R^2\delta_{\alpha\beta}}{R^6}\underbrace{\nabla_\gamma R}_{\frac{R_\gamma}{R}} = \\ &= \frac{-15R_\alpha R_\beta R_\gamma + 3\delta_{\alpha\beta}R^2R_\gamma + 3\delta_{\beta\gamma}R^2R_\alpha + 3\delta_{\gamma\alpha}R^2R_\beta}{R^7}.\end{aligned}$$

Легко видеть, что[4]

$$\nabla_{\alpha_1}\cdots\nabla_{\alpha_l}\frac{1}{R} = \frac{(-1)^l(2l-1)!!R_{\alpha_1}\cdots R_{\alpha_l} + \cdots}{R^{2l+1}}.$$

Выражение в числителе является однородным выражением степени l, симметричным по всем индексам, все его члены, кроме выписанного явно, содержат хотя бы один δ-символ, причём свёртка этого выражения по любой паре индексов даёт нуль[5].

Последнее следует из того, что при свёртке по любой паре индексов выражения $\nabla_{\alpha_1}\cdots\nabla_{\alpha_l}\frac{1}{R}$ выделяется $\triangle\frac{1}{R}\big|_{R>0} = 0$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} &= \frac{1}{R} + r_\alpha\frac{R_\alpha}{R^3} + r_\alpha r_\beta\frac{3R_\alpha R_\beta - R^2\delta_{\alpha\beta}}{2R^5} + r_\alpha r_\beta r_\gamma\frac{5R_\alpha R_\beta R_\gamma - \delta_{\alpha\beta}R^2R_\gamma - \delta_{\beta\gamma}R^2R_\alpha - \delta_{\gamma\alpha}R^2R_\beta}{2R^7} + \\ &+ \cdots + r_{\alpha_1}\cdots r_{\alpha_l}\frac{(2l-1)!!R_{\alpha_1}\cdots R_{\alpha_l} + \cdots}{l!R^{2l+1}} + \cdots \qquad (3.9.4)\end{aligned}$$

В числителе l-го члена мы сначала достроим $r_{\alpha_1}\cdots r_{\alpha_l}$ до $\frac{1}{(2l-1)!!}((2l-1)!!r_{\alpha_1}\cdots r_{\alpha_l} + \cdots)$. Все добавленные члены содержат δ-символы, которые при свёртке с $((2l-1)!!R_{\alpha_1}\cdots R_{\alpha_l} + \cdots)$ дадут нули. После этого в выражении $((2l-1)!!R_{\alpha_1}\cdots R_{\alpha_l} + \cdots)$ можно выкинуть все члены, кроме первого, т.к. они содержат δ-символы, которые при свёртке с $((2l-1)!!r_{\alpha_1}\cdots r_{\alpha_l} + \cdots)$ дадут нули.

В результате в числителях можно поменять местами r и R:

$$\begin{aligned}r_{\alpha_1}\cdots r_{\alpha_l}((2l-1)!!R_{\alpha_1}\cdots R_{\alpha_l} + \cdots) &= \frac{1}{(2l-1)!!}((2l-1)!!r_{\alpha_1}\cdots r_{\alpha_l} + \cdots)((2l-1)!!R_{\alpha_1}\cdots R_{\alpha_l} + \cdots) = \\ &= ((2l-1)!!r_{\alpha_1}\cdots r_{\alpha_l} + \cdots)R_{\alpha_1}\cdots R_{\alpha_l}.\end{aligned}$$

[3]Напомним, как записать ряд Тейлора в многомерном случае. Ряд Тейлора связывает значения функции в двух точках, а через две точки всегда можно провести прямую, на которой можно записать обычный одномерный ряд Тейлора, используя производные вдоль этой прямой. В нашем случае направление прямой задаёт вектор $\mathbf{r}$, а производная по направлению (уже умноженная на величину смещения) задаётся оператором $(-\mathbf{r},\nabla)$.

[4]Здесь мы используем *двойной факториал* — произведение всех натуральных чисел с заданной чётностью, не превосходящих данное:

$$(2l-1)!! = 1\cdot 3\cdots(2l-1), \qquad (2l)!! = 2\cdot 4\cdots 2l.$$

[5]Мы описали это выражение достаточно подробно, чтобы его можно было восстановить.

Разложение (3.9.4) переписывается в следующем виде:

$$\frac{1}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} = \frac{1}{R} + r_\alpha \frac{R_\alpha}{R^3} + (3r_\alpha r_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta})\frac{R_\alpha R_\beta}{2R^5} + (5r_\alpha r_\beta r_\gamma - \delta_{\alpha\beta}r^2 r_\gamma - \delta_{\beta\gamma}r^2 r_\alpha - \delta_{\gamma\alpha}r^2 r_\beta)\frac{R_\alpha R_\beta R_\gamma}{2R^7} + \\ + \cdots + ((2l-1)!!\, r_{\alpha_1}\cdots r_{\alpha_l} + \cdots)\frac{R_{\alpha_1}\cdots R_{\alpha_l}}{l!R^{2l+1}} + \cdots \qquad (3.9.5)$$

3.9.3 Электрические мультипольные моменты

3.9.3.1 Мультипольное разложение потенциала

Воспользуемся разложением (3.9.5), чтобы расписать кулоновский потенциал системы точечных зарядов:

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{R}) &= k_\text{к}\sum_a \frac{q_a}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}_a|} = \\
&= k_\text{к}\frac{1}{R}\sum_a q_a + \qquad \text{(монопольный потенциал)} \\
&\quad + k_\text{к}\frac{N_\alpha}{R^2}\sum_a q_a r_{a\alpha} + \qquad \text{(дипольный потенциал)} \\
&\quad + k_\text{к}\frac{N_\alpha N_\beta}{2!R^3}\sum_a q_a(3r_{a\alpha}r_{a\beta} - r_a^2\delta_{\alpha\beta}) + \qquad \text{(квадрупольный потенциал)} \\
&\quad + k_\text{к}\frac{N_\alpha N_\beta N_\gamma}{3!R^4}\sum_a 3q_a(5r_{a\alpha}r_{a\beta}r_{a\gamma} - \delta_{\alpha\beta}r_a^2 r_{a\gamma} - \delta_{\beta\gamma}r_a^2 r_{a\alpha} - \delta_{\gamma\alpha}r_a^2 r_{a\beta}) + \quad \text{(октупольный потенциал)} \\
&\quad + \cdots + k_\text{к}\frac{N_{\alpha_1}\cdots N_{\alpha_l}}{l!R^{l+1}}\sum_a q_a((2l-1)!!\, r_{a\alpha_1}\cdots r_{a\alpha_l} + \cdots) + \cdots \qquad (2^l\text{-польный потенциал}).
\end{aligned}$$

Здесь $N_\alpha = \frac{R_\alpha}{R}$ — единичный вектор в направлении радиус-вектора R.

Мы видим, что 2^l-польный потенциал пропорционален $\frac{1}{R^{l+1}}$ и зависит от некоторой суммы, которая содержит заряды частиц и компоненты их радиус-векторов в степени l.

Эти суммы называют (*электрическими*) *мультипольными моментами* и по традиции нумеруют степенями двойки:
$q = \sum_a q_a$ — *монопольный момент* (заряд);
$\mathbf{d} = \sum_a q_a \mathbf{r}_a$ — *дипольный момент*;
$Q_{\alpha\beta} = \sum_a q_a(3r_{a\alpha}r_{a\beta} - r_a^2\delta_{\alpha\beta})$ — *квадрупольный момент*;
$O_{\alpha\beta\gamma} = \sum_a 3q_a(5r_{a\alpha}r_{a\beta}r_{a\gamma} - \delta_{\alpha\beta}r_a^2 r_{a\gamma} - \delta_{\beta\gamma}r_a^2 r_{a\alpha} - \delta_{\gamma\alpha}r_a^2 r_{a\beta})$ — *октупольный момент*;
$M_{\alpha_1\cdots\alpha_l} = \sum_a q_a((2l-1)!!\, r_{a\alpha_1}\cdots r_{a\alpha_l} + \cdots)$ — *2^l-польный момент.*

Для непрерывного распределения зарядов надо заменить сумму в формулах для мультипольных моментов на интеграл по заряду:

$$\sum_a q_a(\cdots) \to \int(\cdots)dq = \int(\cdots)\rho(\mathbf{r})\, d^3\mathbf{r}.$$

2^l-польный момент — это тензор (относительно вращений) с l индексами, по которым он симметричен. При свёртке по любой паре индексов он обращается в нуль. Число независимых компонент вследствие этого составляет $2l+1$ (см. формулу (4.9.13)).

Угловая зависимость мультипольного потенциала зависит от[6] l:

- монопольный потенциал сферически-симметричен;
- дипольный потенциал — есть одно выделенное направление;
- квадрупольный потенциал — есть выделенный ортогональный базис (базис собственных осей);
- высшие мультипольные члены — всё более сложная угловая зависимость.

[6] И определяется *сферическими функциями* (*сферическими гармониками*) $P_{l\ \alpha_1\cdots\alpha_l}$. Мультипольное разложение потенциала — разложение по сферическим функциям, аналог ряда Фурье на сфере.

Подробнее со сферическими функциями в контексте разложения $\frac{1}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}$ можно ознакомиться в дополнениях (см. с. 473).

(!) Мультипольные моменты (кроме монопольного момента = заряда) зависят от выбора начала координат, однако если первые l_0 моментов равны нулю, то первый ненулевой (l_0+1)-й (2^{l_0+1}-польный) момент не меняется при сдвиге начала координат.

Часто для $R \gg r$ первые несколько членов мультипольного разложения оказываются достаточно хорошим приближением. Во многих случаях достаточно оказывается первого ненулевого члена.

3.9.3.2 Мультипольное разложение энергии

Рассмотрим энергию системы электрических зарядов, локализованных около начала координат, во внешнем электростатическом потенциале:

$$\mathcal{E} = \sum_a q_a \varphi(\mathbf{r}_a) = \left(\sum_a q_a\right)\varphi(0) + \left(\sum_a q_a r_{a\alpha}\right)\nabla_\alpha\varphi(0) + \frac{1}{2}\left(\sum_a q_a r_{a\alpha} r_{a\beta}\right)\nabla_\alpha\nabla_\beta\varphi(0) + \cdots + \\ + \frac{1}{l!}\left(\sum_a q_a r_{a\alpha_1}\cdots r_{a\alpha_l}\right)\nabla_{\alpha_1}\cdots\nabla_{\alpha_1}\varphi(0) + \cdots$$

Мы видим, что суммы в этом выражении очень похожи (с точностью до множителя) на первые члены мультипольных моментов, однако мы можем дописать недостающие члены: каждый такой член содержит δ-символ, который, свернувшись с производными от потенциала, даст $\triangle\varphi(0)$. *Внешний* потенциал не имеет источников в точке 0, так что $\triangle\varphi(0) = 0$.

Таким образом, для энергии зарядов во внешнем потенциале получается мультипольное разложение:

$$\mathcal{E} = \sum_a q_a \varphi(\mathbf{r}_a) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!(2l-1)!!} M_{\alpha_1\cdots\alpha_l}\nabla_{\alpha_1}\cdots\nabla_{\alpha_1}\varphi(0).$$

Опять во многих случаях хорошее приближение дают первые несколько членов, часто достаточно первого ненулевого члена.

3.9.4 Магнитный дипольный момент

Векторный потенциал в магнитостатике мы можем записать в виде интеграла от плотности тока либо в виде усреднённой по времени суммы по зарядам:

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}) = \frac{k_к}{c}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}\,d^3\mathbf{r} = \overline{\frac{k_к}{c}\sum_a \frac{q_a\dot{\mathbf{r}}_a}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}_a|}}.$$

Воспользуемся для преобразования этого выражения разложением (3.9.5) в предположении, что заряды совершают финитное движение с малыми скоростями.

Ограничимся первыми двумя членами.

В нулевом порядке выражение обнуляется в результате усреднения по времени производной от финитной функции $\mathbf{r}_a$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}) = \overline{\frac{k_к}{c}\sum_a \frac{q_a\dot{\mathbf{r}}_a}{R}} = \frac{k_к}{Rc}\sum_a q_a \underbrace{\overline{\dot{\mathbf{r}}_a}}_{0} = 0.$$

Таким образом, магнитный монопольный момент автоматически равен нулю, как и должно быть, поскольку магнитных зарядов (*магнитных монополей*) пока не обнаружено.

В первом порядке

$$A_\mu(\mathbf{R}) = \overline{\frac{k_к}{c}\sum_a q_a \dot{r}_{a\mu} r_{a\alpha}\frac{R_\alpha}{R^3}} = \frac{k_к}{c}\frac{R_\alpha}{R^3}\sum_a q_a\overline{\dot{r}_{a\mu}r_{a\alpha}}.$$

Выделим из $\overline{\dot{r}_{a\mu}r_{a\alpha}}$ полную производную и антисимметричное выражение (векторное произведение в матричном виде):

$$\overline{\dot{r}_{a\mu}r_{a\alpha}} = \frac{1}{2}\overline{\left(\dot{r}_{a\mu}r_{a\alpha} + \frac{d}{dt}(r_{a\mu}r_{a\alpha}) - r_{a\mu}\dot{r}_{a\alpha}\right)} = \frac{1}{2}\overline{(\dot{r}_{a\mu}r_{a\alpha} - r_{a\mu}\dot{r}_{a\alpha})} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\alpha\gamma}\overline{[\dot{\mathbf{r}}_a\times\mathbf{r}_a]_\gamma},$$

$$A_\mu(\mathbf{R}) = \frac{k_к}{c}\frac{R_\alpha}{R^3}\sum_a q_a\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\alpha\gamma}\overline{[\dot{\mathbf{r}}_a\times\mathbf{r}_a]_\gamma} = \frac{k_к}{R^3}\left[\overline{\frac{1}{2c}\sum_a q_a[\mathbf{r}_a\times\dot{\mathbf{r}}_a]}\times\mathbf{R}\right]_\mu.$$

Выражение

$$\boldsymbol{\mu} = \overline{\frac{1}{2c}\sum_a q_a[\mathbf{r}_a \times \dot{\mathbf{r}}_a]} = \frac{1}{2c}\int [\mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r})]\, d^3\mathbf{r}$$

называется *магнитным дипольным моментом.*

Векторный потенциал магнитного диполя имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}) = k_к \frac{[\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{R}]}{R^3} = k_к \frac{[\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{N}]}{R^2} = -k_к \left[\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\nabla}\frac{1}{R}\right], \qquad \mathbf{N} = \frac{\mathbf{R}}{R}.$$

3.9.5 Поля диполей

Электрический дипольный потенциал имеет вид

$$\varphi(\mathbf{R}) = k_к \frac{(\mathbf{d}, \mathbf{N})}{R^2} = -k_к \left(\mathbf{d}, \boldsymbol{\nabla}\frac{1}{R}\right).$$

Соответствующее электрическое поле:

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi_d = k_к \boldsymbol{\nabla}\left(\mathbf{d}, \boldsymbol{\nabla}\frac{1}{R}\right) = k_к \boldsymbol{\nabla}\left(\mathbf{d}, \boldsymbol{\nabla}\right)\frac{1}{R},$$

$$E_\alpha = d_\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta \frac{k_к}{R} = k_к d_\beta \frac{3R_\alpha R_\beta - R^2\delta_{\alpha\beta}}{R^5} = k_к \frac{3R_\alpha(\mathbf{d}, \mathbf{R}) - R^2 d_\alpha}{R^5},$$

$$\mathbf{E} = k_к \frac{3\mathbf{R}(\mathbf{d}, \mathbf{R}) - R^2\mathbf{d}}{R^5}.$$

Аналогично векторный потенциал магнитного диполя имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}) = -k_к \left[\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\nabla}\frac{1}{R}\right].$$

Соответствующее магнитное поле:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A} = -\left[\boldsymbol{\nabla} \times \left[\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\nabla}\frac{k_к}{R}\right]\right] = -\left[\boldsymbol{\nabla} \times [\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\nabla}]\right]\frac{k_к}{R} = -\boldsymbol{\mu}\underbrace{(\boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{\nabla})}_{\triangle}\frac{k_к}{R} + \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nabla})\frac{k_к}{R}.$$

С учётом равенства $\triangle\frac{1}{R} = -4\pi\delta^3(\mathbf{R})$ получаем (при $R \neq 0$) для магнитного поля магнитного диполя выражение, аналогичное электрическому полю электрического диполя:

$$\mathbf{B} = k_к \frac{3\mathbf{R}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{R}) - R^2\boldsymbol{\mu}}{R^5}.$$

3.9.6 Задачи 52–55

Задача 52. Потенциальная энергия двух диполей. Определите потенциальную энергию взаимодействия двух диполей с моментами $\mathbf{d}_1$ и $\mathbf{d}_2$.

Задача 53. Квадрупольный момент эллипсоида.
а) Найдите тензор квадрупольного момента равномерно заряженного эллипсоида относительно его центра.
б) Найдите электрическое поле на больших расстояниях.
в) Найдите энергию взаимодействия диполя с эллипсоидом.

Задача 54. Разложение потенциала по мультипольным членам. Потенциал $\varphi(R, \theta)$ аксиально-симметричной системы зарядов на оси z ($\theta = 0$) имеет вид

$$\varphi(R, 0) = V_0\left(1 - \frac{R^2 - a^2}{R\sqrt{R^2 + a^2}}\right), \quad r > a\,.$$

Найдите два ведущих члена разложения $\varphi(R, \theta)$ в области $r \gg a$.

Задача 55. Магнитная линза. Магнитное поле, направленное по оси z вдоль этой оси, убывает с постоянным градиентом $\partial B_z/\partial z = -h = \text{const}$.
а) Может ли поле во всем пространстве быть параллельным оси z?
б) Найдите радиальные компоненты поля вне оси z.
в) Представьте картину силовых линий.

3.9.7 Ответ к задаче 52

Задача 52. Потенциальная энергия двух диполей. $\mathcal{E}_{d_1 d_2} = k_{\text{к}} \frac{R^2(\mathbf{d}_1,\mathbf{d}_2) - 3(\mathbf{d}_1,\mathbf{R})(\mathbf{d}_2,\mathbf{R})}{R^5}$

Глава 3.10

Свободное электромагнитное поле (с. 476)

Рассмотрим уравнения электромагнитного поля без источников. При наложении калибровки Лоренца они имеют вид

$$\Box A^j = 0, \qquad \nabla_j A^j = 0.$$

Мы будем решать эти уравнения с помощью преобразований Фурье.

3.10.1 4-мерное преобразование Фурье*

На всякий случай повторите п. 4.3.2.5 (с. 432), в котором описывается одномерное преобразование Фурье.

В одномерном случае прямое и обратное *преобразования Фурье* имеют вид[1]

$$F[f](k) = \tilde f(k) = \int \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{\sqrt{2\pi}}\, f(x)\, dx, \qquad f(x) = \int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\sqrt{2\pi}}\, \tilde f(k)\, dk.$$

Какое из этих преобразований считать прямым, а какое обратным — вопрос соглашения.

В четырёхмерном случае нам надо сделать преобразование Фурье сразу по четырём осям координат ct, x, y, z:

$$F[f](\underline{k}) = \tilde f(\underline{k}) = \int \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_m x^m}}{(2\pi)^2}\, f(\underline{x})\, d^4\underline{x}, \qquad f(\underline{x}) = \int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m x^m}}{(2\pi)^2}\, \tilde f(\underline{k})\, d^4\underline{k}.$$

Мы хотим, чтобы фурье-гармоника $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m x^m}}{(2\pi)^2}$ была скаляром, следовательно, скаляром должен быть показатель экспоненты $k_m x^m$. В силу того, что x^m пробегает все возможные значения в $\mathbb{R}^4$, по признаку тензора k_m — ковектор.

Вектор $k^m = (\frac{\omega}{c}, \mathbf{k})$ называется *4-мерным волновым вектором*. Его компоненты выражаются через циклическую частоту ω и *3-мерный волновой вектор* $\mathbf{k}$.

Прямое и обратное преобразования Фурье, выраженные через циклическую частоту и 3-мерный волновой вектор, имеют вид

$$\tilde f(\mathbf{k}, \omega) = c \int \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}((\mathbf{k},\mathbf{r})-\omega t)}}{(2\pi)^2}\, f(\mathbf{r}, t)\, d^3\mathbf{r}\, dt, \qquad f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}((\mathbf{k},\mathbf{r})-\omega t)}}{(2\pi)^2}\, \tilde f(\mathbf{k}, \omega)\, d^3\mathbf{k}\, d\omega.$$

Для временно́й координаты прямое и обратное преобразования Фурье поменялись местами, но это, как мы отмечали, не существенно.

Если на разложенную по Фурье функцию подействовать оператором ∇_j, то его можно внести под интеграл, там он подействует на единственный множитель, зависящий от $\underline{x}$, — гармонику $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m x^m}$ — и даст множитель $\mathrm{i}k_j$:

$$\nabla_j f(\underline{x}) = \int \frac{\nabla_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m x^m}}{(2\pi)^2}\, \tilde f(\underline{k})\, d^4\underline{k} = \int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m x^m}}{(2\pi)^2}\, \mathrm{i}k_j \tilde f(\underline{k})\, d^4\underline{k}.$$

Таким образом, при преобразовании Фурье оператор ∇_j превращается в умножение на $\mathrm{i}k_j$:

$$F[\nabla_j f](\underline{k}) = \mathrm{i}k_j\, F[f](\underline{k}) = \mathrm{i}k_j\, \tilde f(\underline{k}).$$

[1] Здесь мы вводим сразу два стандартных обозначения для преобразования Фурье функции f: $\tilde f = F[f]$.

3.10.2 Решение уравнения свободного электромагнитного поля*

Решим с помощью преобразования Фурье волновое уравнение и калибровочное условие Лоренца:

$$\begin{aligned} \Box A^j = \nabla_m \nabla^m A^j = 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad (\mathrm{i}k_m)(\mathrm{i}k^m)\tilde{A}^j = -\underline{k}^2 \tilde{A}^j = 0, \\ \nabla_j A^j = 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad \mathrm{i}k_j \tilde{A}^j = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, отличны от нуля могут быть только те $\tilde{A}^j(\underline{k})$ (коэффициенты при тех гармониках), для которых

$$k_m k^m = \mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad v_\Phi = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} = c,$$

т.е. отличны от нуля только те гармоники, для которых *фазовая скорость* $v_\Phi = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|}$ равна скорости света[2].

Калибровочное условие Лоренца даёт для этих гармоник *условие 4-мерной поперечности*:

$$k_m \tilde{A}^m = (\underline{k}, \underline{\tilde{A}}) = (\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{A}}) - \frac{\omega}{c}\tilde{\varphi} = 0.$$

Это ещё не та поперечность электромагнитных волн, к которой мы привыкли, поскольку здесь мы имеем условие ортогональности 4-мерных векторов, однако и привычная нам поперечность может быть получена отсюда.

Мы работаем с калибровкой Лоренца, без нарушения которой можно делать *остаточные калибровочные преобразования*:

$$A_j \to A'_j = A_j + \nabla_j f, \qquad \Box f = 0.$$

После преобразования Фурье получаем

$$\tilde{A}_j(\underline{k}) \to \tilde{A}'_j(\underline{k}) = \tilde{A}_j(\underline{k}) + \mathrm{i}k_j \tilde{f}(\underline{k}), \qquad (k_m k^m)\tilde{f}(\underline{k}) = \left(\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\tilde{f}(\underline{k}) = 0.$$

Итак, условия на $\tilde{f}(\underline{k})$ такие же, как на фурье-образ потенциала, — отличие от нуля только на тех гармониках, у которых фазовая скорость равна скорости света.

Для ненулевых гармоник $\mathbf{k} = |\mathbf{k}|\mathbf{n} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор, в направлении которого бежит волна, описываемая данной гармоникой.

Воспользуемся остаточным калибровочным преобразованием, чтобы обнулить скалярный потенциал:

$$\begin{aligned} &\tilde{\varphi}' = \tilde{\varphi} + \mathrm{i}\frac{\omega}{c}\tilde{f} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{f} = -\frac{\tilde{\varphi}}{\mathrm{i}\omega/c}, \\ &\tilde{\mathbf{A}}' = \tilde{\mathbf{A}} + \mathrm{i}\mathbf{k}\tilde{f} = \tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{n}\tilde{\varphi} \quad \Rightarrow \quad (\tilde{\mathbf{A}}', \mathbf{k}) = (\tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{k}) - \underbrace{(\mathbf{k}, \mathbf{n})}_{\frac{\omega}{c}}\tilde{\varphi} = 0. \end{aligned} \tag{3.10.1}$$

При устранении с помощью остаточного калибровочного преобразования скалярной компоненты потенциала φ мы одновременно устранили у амплитуд $\tilde{A}(\underline{k})$ продольную (направленную вдоль $\mathbf{k}$) компоненту и получили уже *трёхмерное условие поперечности*:

$$(\tilde{\mathbf{A}}', \mathbf{k}) = 0 \qquad \text{при} \qquad \varphi' \equiv 0.$$

Фурье-амплитуды для электрического и магнитного поля также получаются тривиально:

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{E}} = -\mathrm{i}\mathbf{k}\tilde{\varphi} + \mathrm{i}\frac{\omega}{c}\tilde{\mathbf{A}} = \mathrm{i}\frac{\omega}{c}\tilde{\mathbf{A}}',$$

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathrm{i}\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{A}} = \mathrm{i}\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{A}}' = \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}}.$$

Мы видим, что векторы $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{B}}, \mathbf{k}$ взаимно ортогональны и образуют правую тройку, причём всюду $|\tilde{\mathbf{E}}| = |\tilde{\mathbf{B}}|$.

[2] Условие $k_m k^m = 0$ выделяет в пространстве 4-мерных волновых векторов 3-мерную коническую поверхность, на которой функция $\tilde{A}^j(\underline{k})$ отлична от нуля. Если $\tilde{A}^j(\underline{k}) \not\equiv 0$, то это неизбежно обобщённая функция.

3.10.3 Плоская монохроматическая волна

Повторим выкладки из предыдущего параграфа для одной гармоники[3] — *плоской монохроматической волны*:

$$A^j(\underline{x}) = \mathrm{Re}\left(a^j \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m x^m}\right) = \frac{1}{2}\left(a^j \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m x^m} + a^{*j}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_m x^m}\right) = (\mathrm{Re}\, a^j)\cos(k_m x^m) - (\mathrm{Im}\, a^j)\sin(k_m x^m).$$

Здесь $A^j = (\varphi, \mathbf{A})$ и $a^j = (a^0, \mathbf{a})$ — 4-векторы, поэтому гармоника $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m x^m}$ должна быть скаляром, также скаляром является $k_m x^m$, и в силу произвольности x^m объект k_m оказывается ковектором согласно признаку тензора.

$k^m = (\frac{\omega}{c}, \mathbf{k})$ — *4-мерный волновой вектор.*

Подставив k^m в гармонику $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m x^m} = \exp\left(\mathrm{i}\big[(\mathbf{k},\mathbf{r}) - \omega t\big]\right)$, видим, что волна смещается как целое вдоль *3-мерного волнового вектора* $\mathbf{k}$ со скоростью

$$v_\Phi = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|},$$

которая называется *фазовой скоростью.*

Действие оператора ∇_l даёт умножение комплексной амплитуды на $\mathrm{i}k_l$:

$$\nabla_l A^j(\underline{x}) = \mathrm{Re}\left(a^j \nabla_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m x^m}\right) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{i}k_l a^j \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m x^m}\right).$$

Таким образом, волновое уравнение даёт условие светоподобности 4-мерного волнового вектора:

$$\Box A^j = \nabla_l \nabla^l A^j = 0 \quad \Rightarrow \quad \Box A^j(\underline{x}) = \mathrm{Re}\left((\mathrm{i}k_l)(\mathrm{i}k^l) a^j \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m x^m}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_l k^l = \mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0.$$

Условие светоподобности 4-мерного волнового вектора эквивалентно тому, что фазовая скорость волны равна скорости света:

$$v_\Phi = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} = c.$$

Калибровочное условие Лоренца, которое мы накладывали, чтобы получить волновое уравнение, даёт *4-мерное условие поперечности*:

$$\nabla_j A^j = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla_j A^j = \mathrm{Re}\left(\mathrm{i}k_j a^j \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m x^m}\right) \quad \Rightarrow \quad k_j a^j = (\mathbf{k},\mathbf{a}) - \frac{\omega}{c} a^0 = 0;$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \mathrm{Re}\left(a^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\mathbf{k},\mathbf{r}) - \omega t]}\right), \\ \mathbf{A} &= \mathrm{Re}\left(\mathbf{a} \mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\mathbf{k},\mathbf{r}) - \omega t]}\right). \end{aligned}$$

Обозначим

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = \frac{\mathbf{k}}{\omega/c}.$$

С помощью *остаточного калибровочного преобразования* мы можем, не нарушая калибровки Лоренца (если $\Box f = 0$), обнулить скалярную компоненту потенциала:

$$\varphi \to \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad f = \mathrm{Re}\left(\frac{-a^0}{\mathrm{i}\omega/c} \mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\mathbf{k},\mathbf{r}) - \omega t]}\right), \qquad \Box\varphi = 0 \Rightarrow \Box f = 0,$$
$$\mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla} f = \mathrm{Re}\left(\big[\mathbf{a} - \mathbf{n}a^0\big] \mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\mathbf{k},\mathbf{r}) - \omega t]}\right).$$

После калибровочного преобразования амплитуда скалярного потенциала обнулилась, а амплитуда векторного потенциала стала ортогональна $\mathbf{k}$, и мы получили уже *3-мерную поперечность*:

$$(\mathbf{a}', \mathbf{k}) = (\big[\mathbf{a} - \mathbf{n}a^0\big], \mathbf{k}) = (\mathbf{a},\mathbf{k}) - a^0 \underbrace{(\mathbf{n},\mathbf{k})}_{|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c}} = 0.$$

Электрическое и магнитное поля имеют вид

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = \mathrm{Re}\left(\mathrm{i}\frac{\omega}{c}\big[\mathbf{a} - \mathbf{n}a^0\big] \mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\mathbf{k},\mathbf{r}) - \omega t]}\right) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{i}\frac{\omega}{c}\mathbf{a}' \mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\mathbf{k},\mathbf{r}) - \omega t]}\right),$$
$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \mathrm{Re}\left(\mathrm{i}[\mathbf{k} \times \mathbf{a}] \mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\mathbf{k},\mathbf{r}) - \omega t]}\right) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{i}[\mathbf{k} \times \mathbf{a}'] \mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\mathbf{k},\mathbf{r}) - \omega t]}\right) = \mathbf{n} \times \mathbf{E}.$$

[3] Точнее, для двух гармоник с учётом комплексно-сопряжённой.

Мы видим, что векторы $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{k}$ взаимно ортогональны и образуют правую тройку, причём всюду $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$.

Вычислим энергетические характеристики плоской монохроматической волны[4]. Пусть $\mathbf{k} \uparrow\uparrow z$, тогда

$$\begin{aligned} W &= \frac{E^2}{4\pi k_{\text{к}}}, \\ \mathbf{S} &= Wc\mathbf{n}, \\ \sigma_{zz} &= W, \\ \sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = 0, \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0. \end{aligned}$$

Обозначим *комплексную амплитуду электрического поля* $\mathbf{E}_0 = \mathrm{i}\frac{\omega}{c}\mathbf{a}'$:

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}\left(\mathbf{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\mathbf{k},\mathbf{r})-\omega t]}\right) = (\mathrm{Re}\mathbf{E}_0)\cos\big((\mathbf{k},\mathbf{r})-\omega t\big) - (\mathrm{Im}\mathbf{E}_0)\sin\big((\mathbf{k},\mathbf{r})-\omega t\big), \qquad \mathbf{B} = [\mathbf{n}\times\mathbf{E}].$$

Средняя плотность энергии в плоской монохроматической волне:

$$\overline{W} = \frac{1}{4\pi k_{\text{к}}}\overline{\mathbf{E}^2} = \frac{1}{8\pi k_{\text{к}}}\Big((\mathrm{Re}\mathbf{E}_0)^2 + (\mathrm{Im}\mathbf{E}_0)^2\Big) = \frac{(\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_0^*)}{8\pi k_{\text{к}}}.$$

(!) Здесь и ниже при обсуждении поляризации для комплексных векторов мы используем «обычное» скалярное произведение $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sum_{\alpha=1}^{3} A_\alpha B_\alpha$. Часто в литературе *скалярное произведение комплексных векторов* определяют с комплексным сопряжением одного из множителей (математики предпочитают сопрягать второй множитель, а физики — первый), такое скалярное произведение (оно встречается в приложениях, см. с. 476) мы будем обозначать угловыми скобками: $\langle\mathbf{A}|\mathbf{B}\rangle = \sum_{\alpha=1}^{3} A_\alpha^* B_\alpha$.

Для плоской бегущей электромагнитной волны мы получили следующие свойства.

- Плотности энергии электрического и магнитного полей равны в каждой точке.
- В направлении распространения волны течёт поток энергии с плотностью $\mathbf{S}$, который соответствует тому, что вся энергия волны движется вдоль $\mathbf{k}$ со скоростью света.
- В том же направлении направлен импульс волны, плотность которого равна $\frac{\mathbf{S}}{c}$.
- Направление оси z является поперечным как для электрического, так и для магнитного поля, оба поля создают вдоль оси z давление, равное плотности их энергии $\sigma_{zz} = W$.
- Направление, продольное для поля $\mathbf{E}$, является поперечным для поля $\mathbf{B}$, и натяжение поля $\mathbf{E}$ компенсируется давлением поля $\mathbf{B}$. Аналогично вдоль поля $\mathbf{B}$ натяжение одного поля компенсируется давлением другого.
- Плоская бегущая монохроматическая волна — *собственное колебание электромагнитного поля.* Одной частоте ω соответствуют разные волновые векторы $|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c}$, а каждому волновому вектору соответствуют две независимые поляризации $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 \perp \mathbf{k}$, $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2^*) = 0$. Любая линейная комбинация собственных колебаний с одинаковой частотой также даёт собственные колебания с той же частотой, таким образом, мы можем получить собственные колебания в виде плоских стоячих волн, сферических волн, цилиндрических волн и т.д.

При поглощении или отражении электромагнитной волны (в том числе световой волны) каким-либо объектом эта поверхность испытывает *давление электромагнитного поля. Давление света* было экспериментально обнаружено Петром Николаевичем Лебедевым в 1899 г.

3.10.4 Плоская волна произвольной формы*

Легко видеть, что монохроматичность волны для того, чтобы она была решением волнового уравнения, не важна, можно взять потенциал в виде плоской поперечной волны произвольной формы, бегущей со скоростью света и задаваемой векторной функцией $\mathbf{F}(\cdot)$:

$$\begin{aligned} \varphi(\underline{x}) &\equiv 0, \\ \mathbf{A}(\underline{x}) &= \mathbf{F}\big((\mathbf{n},\mathbf{r}) - ct\big), \qquad (\mathbf{n},\mathbf{F}) = 0, \quad |\mathbf{n}| = 1. \end{aligned}$$

[4] *Локальные* энергетические характеристики (компоненты тензора энергии-импульса) квадратичны по электромагнитному полю, поэтому для суперпозиции волн складываются их поля, но не локальные энергетические характеристики, в которых появляются перекрёстные (интерференционные) члены.

Такая волна может быть получена как суперпозиция монохроматических волн, распространяющихся в одном направлении, задаваемом единичным вектором $\mathbf{n}$.

(*) Для того чтобы плоская волна произвольной формы двигалась, не меняя формы со временем, важно, чтобы *фазовая скорость* $v_\Phi = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|}$ не зависела от частоты. В вакууме это условие выполняется, а в среде, как правило, нарушается.

3.10.5 Поляризация

3.10.5.1 Вектор поляризации

Поляризация плоской монохроматической волны полностью описывается комплексной амплитудой электрического поля $\mathbf{E}_0$. Часто бывает удобно отнормировать этот вектор на единицу и получить *вектор поляризации*:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{E}_0}{\sqrt{(\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_0^*)}}, \qquad (\mathbf{e}, \mathbf{e}^*) = 1.$$

Во многих задачах нас не интересует фаза волны (обычно потому, что волна колеблется очень быстро), поэтому мы можем сдвигать нулевой момент времени: $t \to t - \frac{\alpha}{\omega}$. Для комплексных амплитуд это соответствует умножению на фазовый множитель $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$:

$$\begin{aligned} a^j &\to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} a^j, \\ \mathbf{E}_0 &\to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \mathbf{E}_0, \\ \mathbf{e} &\to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \mathbf{e}. \end{aligned}$$

Поскольку вектор комплексной амплитуды ортогонален волновому вектору $(\mathbf{E}_0, \mathbf{k}) = 0$, у него 2 независимые комплексные компоненты, т. е. 4 независимые вещественные компоненты. Условие нормировки накладывает одно вещественное условие на компоненты вектора $\mathbf{e}$, так что у вектора поляризации 3 независимые вещественные компоненты. С учётом произвольности фазы для описания вектора поляризации $\mathbf{e}$ оказывается достаточно двух вещественных чисел или одного комплексного.

Для неполяризованной или частично поляризованной волны вектор комплексной амплитуды $\mathbf{E}_0$ зависит от времени:

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}\left(\mathbf{E}_0((\mathbf{n}, \mathbf{r}) - ct)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\mathbf{k},\mathbf{r})-\omega t]}\right), \qquad \mathbf{B} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}].$$

(!) Любая строго монохроматическая волна полностью поляризована.

Характерное время T, на котором существенно изменяется $\mathbf{E}_0$, — *время когерентности*. Чаще используется cT — *длина когерентности*.

Неполяризованная волна или частично поляризованная волна могут быть сколь угодно близки к монохроматической волне (их спектральное распределение может быть сколь угодно узким), если время когерентности велико: $\omega T \gg 1$.

Пример 1. Если мы наблюдаем интерференцию двух лучей, полученных расщеплением одного исходного луча на полупрозрачной пластинке, то длина когерентности должна быть не меньше, чем разность хода лучей, что в лабораторных условиях обычно не превышает нескольких метров (чаще сантиметров).

Пример 2. Если мы наблюдаем интерференцию двух лучей, полученных от двух монохроматических источников, то время когерентности каждого источника должно быть не меньше, чем время реакции детектора. Кроме того, частоты источников должны совпадать с точностью порядка $\frac{1}{T}$. Если наблюдать интерференцию невооружённым глазом, то время реакции датчика (глаза) составляет порядка 0,1 секунды. Соответствующая длина когерентности составляет порядка $10^9 - 10^{10}$ сантиметров. Таким образом, для наблюдения интерференции света от независимых источников источники должны быть очень хорошо стабилизированы.

Если $\mathrm{Re}(\mathbf{e}) \| \mathrm{Im}(\mathbf{e})$, то колебания электрического поля (в фиксированной плоскости, перпендикулярной $\mathbf{k}$) происходят вдоль одной прямой. Это называется *линейной поляризацией*. Умножением на фазовый множитель вектор линейной поляризации может быть сделан вещественным.

Если $\mathrm{Re}(\mathbf{e}) \perp \mathrm{Im}(\mathbf{e})$, причём $|\mathrm{Re}(\mathbf{e})| = |\mathrm{Im}(\mathbf{e})|$, то вектор электрического поля (в фиксированной плоскости, перпендикулярной $\mathbf{k}$) вращается с угловой скоростью $\pm\omega$ и его конец описывает окружность. Это называется *круговой поляризацией*. Есть две круговые поляризации, отличающиеся направлением вращения. Различают *левую круговую поляризацию* (=*положительная спиральность*) и *правую круговую поляризацию* (=*отрицательная спиральность*), смотря в какую сторону вращается (в фиксированной

плоскости, перпендикулярной $\mathbf{k}$) вектор электрического поля с точки зрения наблюдателя, смотрящего *навстречу лучу* (левая — вращение против часовой стрелки, правая — по часовой стрелке)[5].

В случае общего положения конец вектора $\mathbf{E}$ описывает (в фиксированной плоскости, перпендикулярной $\mathbf{k}$) эллипс и мы имеем *эллиптическую поляризацию.*

В плоскости, перпендикулярной $\mathbf{k}$, мы можем выбрать базис из двух ортогональных векторов поляризации:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1^*) = 1, \qquad (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2^*) = 1, \qquad (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2^*) = 0.$$

Тогда любая комплексная амплитуда поперечной волны, распространяющейся вдоль $\mathbf{k}$, может быть разложена по этому базису, причём энергия волны будет представлять собой сумму компонент с поляризацией $\mathbf{e}_1$ и с поляризацией $\mathbf{e}_2$.

Чаще всего используется пара линейных поляризаций по перпендикулярным направлениям либо пара круговых поляризаций противоположной спиральности.

Примеры базисных поляризация для $\mathbf{k} \uparrow\uparrow z$.

- Базис линейных поляризаций по x и y:

$$\mathbf{e}_x = (1;0;0), \qquad \mathbf{e}_y = (0;1;0).$$

- Базис линейных поляризаций, повёрнутый на $\frac{\pi}{4}$:

$$\mathbf{e}_{\nearrow} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1;1;0), \qquad \mathbf{e}_{\nwarrow} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(-1;1;0).$$

- Базис круговых поляризаций ($\pm$ означают спиральность):

$$\mathbf{e}_+ = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1;\mathrm{i};0), \qquad \mathbf{e}_- = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1;-\mathrm{i};0).$$

(!) Умножение на фазовый множитель, упомянутое выше, следует делать для всех комплексных амплитуд и поляризаций одновременно. Нельзя умножить на $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ колебания по x и не умножить колебания по y. Это видно из сравнения базиса линейных поляризаций, повёрнутых на $\frac{\pi}{4}$, и базиса круговых поляризаций. Для нас может быть не важен общий сдвиг фаз, но относительная фаза разных колебаний важна.

3.10.5.2 Тензор поляризации*

Все компоненты тензора энергии-импульса вещественны и имеют 2-й порядок по полю. Поэтому, если нас интересуют средние энергетические характеристики волны, нам надо усреднять по времени не саму комплексную амплитуду $\mathbf{E}_0$, а всевозможные произведения её компонент на сопряжённые:

$$J_{\alpha\beta} = \overline{E_{0\alpha} E_{0\beta}^*}, \qquad J_{\alpha\beta} = J_{\beta\alpha}^*.$$

Интенсивность волны определяется следом этого тензора:

$$J = J_{\alpha\alpha} = \overline{(\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_0^*)}, \qquad \overline{W} = \frac{J}{8\pi}.$$

Отнормировав $J_{\alpha\beta}$ на единицу, получаем *тензор поляризации*:

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{J_{\alpha\beta}}{J}, \qquad \rho_{\alpha\alpha} = 1.$$

Если $\mathbf{k} \uparrow\uparrow z$, то от нуля отличны только компоненты тензора поляризации с индексами x и y.

Снова считаем компоненты. На диагонали тензора $J_{\alpha\beta}$ два вещественных числа, недиагональные компоненты сопряжены друг другу: $J_{xy} = J_{yx}^*$, чтобы их описать, нужно ещё 2 вещественных числа. Так что $J_{\alpha\beta}$ описывается 4 вещественными числами.

Тензор $\rho_{\alpha\beta}$ имеет на одну независимую компоненту меньше из-за условия нормировки и описывается 3 вещественными числами.

Для полностью поляризованного света тензор поляризации выражается через вектор поляризации (информация об общей фазе колебаний при этом теряется):

$$\rho_{\alpha\beta} = e_\alpha e_\beta^*$$

[5]Разделение круговых и эллиптических поляризаций на левые и правые с точки зрения наблюдателя, в глаз которого попадает свет, — это традиция в оптике. В теории поля принята противоположная традиция, правая поляризация означает вращение по правому винту по отношению к волновому вектору, а левая — вращение по левому винту. Мы будем следовать оптической традиции, а от теоретико-полевой возьмём термин *спиральность*.

Для неполяризованного света тензор поляризации не позволяет определить в плоскости x, y выделенные линейные направления или направления вращения:

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta\right), \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}.$$

Выражение для тензора поляризации неполяризованного света через компоненты единичного вектора $\mathbf{n}$ справедливо для произвольного направления $\mathbf{k}$.[6]

В общем случае тензор поляризации представляет собой среднее взвешенное от тензора поляризации неполяризованного света и тензора поляризации полностью поляризованного света с вектором поляризации $\mathbf{e}$:

$$\rho_{\alpha\beta} = (1-P)\frac{1}{2}\left(\delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta\right) + P e_\alpha e^*_\beta.$$

Здесь $P \in [0,1]$ — *степень поляризации*.

Это утверждение легко проверить, посчитав независимые параметры: полностью поляризованный свет описывают 2 вещественных параметра, ещё 1 вещественный параметр — степень поляризации P.

(**) В квантовой механике комплексные амплитуды, определённые с точностью до общего фазового множителя, появляются как *амплитуды вероятности* (квадрат модуля амплитуды вероятности даёт вероятность соответствующего исхода). В частности, при описании поляризации фотона вектор поляризации становится *вектором состояния* (*волновой функцией*), а тензор поляризации — *матрицей плотности*. Переход к квантовому описанию поляризации электромагнитной волны мы рассмотрим в дополнении (см. с. 481).

3.10.6 Стоячая монохроматическая волна*

Рассмотрим суперпозицию двух монохроматических волн с одинаковой амплитудой $\frac{1}{2}\mathbf{E}_0 \uparrow\uparrow x$, бегущих навстречу друг другу:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2}\mathbf{E}_0 \operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\mathbf{k},\mathbf{r})-\omega t]} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}[-(\mathbf{k},\mathbf{r})-\omega t]}\right) = \mathbf{E}_0\, \cos(\mathbf{k},\mathbf{r})\, \cos\omega t, \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{2}[\mathbf{n}\times\mathbf{E}_0] \operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\mathbf{k},\mathbf{r})-\omega t]} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}[-(\mathbf{k},\mathbf{r})-\omega t]}\right) = [\mathbf{n}\times\mathbf{E}_0]\, \sin(\mathbf{k},\mathbf{r})\, \sin\omega t. \end{aligned}$$

Мы получили *стоячую волну*.

Мы видим, что теперь в разных точках пространства $|\mathbf{E}|$ и $|\mathbf{B}|$, как правило, не совпадают. Поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ колеблются как стоячие волны. *Узлы* (нули) электрического поля совпадают с *пучностями* (максимумами модуля) магнитного поля, и наоборот. При этом колебания идут со сдвигом по фазе.

Поскольку принцип суперпозиции имеет место для полей, но не для компонент тензора энергии-импульса, для стоячей волны энергетические характеристики поля устроены совсем иначе. Выпишем их в случае $\mathbf{E}_0 \uparrow\uparrow x$, $\mathbf{n} \uparrow\uparrow z$, $[\mathbf{n}\times\mathbf{E}_0] \uparrow\uparrow y$:

$$\begin{aligned} W &= \frac{E_0^2}{8\pi k_{\text{к}}}\Big[\cos^2(\mathbf{k},\mathbf{r})\, \cos^2\omega t + \sin^2(\mathbf{k},\mathbf{r})\, \sin^2\omega t\Big] = \frac{E_0^2}{16\pi k_{\text{к}}}\Big[\cos 2(\mathbf{k},\mathbf{r})\, \cos 2\omega t + 1\Big], \\ \mathbf{S} &= \mathbf{n}\,\frac{cE_0^2}{16\pi k_{\text{к}}}\, \sin 2(\mathbf{k},\mathbf{r})\, \sin 2\omega t, \\ \sigma_{zz} &= W, \\ \sigma_{xx} &= -\sigma_{yy} = \frac{E_0^2}{8\pi k_{\text{к}}}\Big[\sin^2(\mathbf{k},\mathbf{r})\, \sin^2\omega t - \cos^2(\mathbf{k},\mathbf{r})\, \cos^2\omega t\Big] = -\frac{E_0^2}{8\pi k_{\text{к}}}\, \cos[(\mathbf{k},\mathbf{r}) - \omega t]\, \cos[(\mathbf{k},\mathbf{r}) + \omega t], \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, плотность энергии периодически (с циклической частотой 2ω) перетекает от пучностей электрического поля к пучностям магнитного поля и обратно.

[6] Если два тензора равны в одной системе координат (где $\mathbf{n} \uparrow\uparrow z$), то они равны в любой другой системе координат.

Глава 3.11

Собственные колебания электромагнитного поля (с. 484)

Мы перешли к одномерному скалярному полю от механической системы (цепочки осцилляторов) предельным переходом к бесконечному числу степеней свободы. Поэтому для такого поля, как и для исходной цепочки осцилляторов, можно поставить задачу о собственных колебаниях.

Для электромагнитного поля мы ввели действие, квадратичное по полю (поле задаёт обобщённые координаты) и его первым производным. Это даёт основания думать, что и для электромагнитного поля задача о собственных колебаниях тоже может быть поставлена.

Для случая бесконечного пространства в предыдущей главе мы уже нашли два набора собственных колебаний свободного (без источников, т.е. без зарядов и токов) электромагнитного поля.

Один набор — бегущие монохроматические волны. Из них можно построить ортонормированный базис в пространстве решений свободных уравнений Максвелла.

Другой набор — стоячие монохроматические волны. Из них тоже можно построить ортонормированный базис в пространстве решений свободных уравнений Максвелла.

Неоднозначность выбора базиса собственных колебаний возникает всегда, когда одинаковым частотам соответствуют разные собственные колебания. В данном случае все бегущие и стоячие волны с одинаковым по модулю волновым вектором $|\mathbf{k}|$ соответствуют одной частоте $\omega = c\,|\mathbf{k}|$. Любая линейная комбинация собственных колебаний с одинаковой частотой снова будет собственным колебанием.

Полная энергия плоской монохроматической волны в бесконечном пространстве бесконечна. Чтобы избежать этого неудобства, часто вместо бесконечного пространства рассматривают область в форме прямоугольного параллелепипеда $\ell_x \times \ell_y \times \ell_z$ *с периодическими граничными условиями — «ящик»*[1]. Предполагается, что все поля, заданные внутри ящика, можно продолжить гладким периодическим образом на всё 3-мерное пространство:

$$f(x,y,z) = f(x + n_x\ell_x, y + n_y\ell_y, z + n_z\ell_z), \qquad n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}. \tag{3.11.1}$$

(*) Другое описание ящика с периодическими граничными условиями: это прямоугольный параллелепипед, замкнутый на себя, т.е. объект, покидающий параллелепипед через одну грань, одновременно возвращается в него через противоположную.

При наложении на плоские монохроматические волны условия периодичности (3.11.1) волновые векторы должны принадлежать 3-мерной решётке с периодами $\frac{2\pi}{\ell_\alpha}$:

$$\mathbf{k} = (\tfrac{2\pi}{\ell_x}\,N_x; \tfrac{2\pi}{\ell_y}\,N_y; \tfrac{2\pi}{\ell_z}\,N_z), \qquad N_\alpha \in \mathbb{Z}$$

Рассмотрим одну гармонику (собственное колебание) и подберём для неё функцию Гамильтона исходя из следующих соображений:

1) функция Гамильтона должна давать правильное значение энергии поля в ящике;

2) функция Гамильтона параметризует поле данной гармоники через координату и импульс гармонического осциллятора с соответствующей частотой.

После этого мы получим функцию Гамильтона поля в ящике как сумму энергий гармонических осцилляторов, соответствующих отдельным гармоникам.

[1] Физически такой ящик, конечно, не реализуем, более физично было бы рассмотреть *оптический резонатор* с зеркальными стенками. Но рассмотрение резонатора было бы несколько сложнее, при том что ничего существенно нового мы бы не получили. Если нас интересует предельный переход к бесконечному пространству, то ящик с периодическими граничными условиями существенно удобнее, поскольку в нём с самого начала можно ввести бегущие (а не только стоячие) волны. Для подсчёта числа колебательных мод в некотором диапазоне частот $\delta\omega$ (задача важна для статистической физики) ящик и резонатор (если они достаточно большие по сравнению с $c/\delta\omega$) дают эквивалентные выражения.

Вопрос о том, как функция Гамильтона поля в ящике связана с функцией Лагранжа, мы вынесем в дополнение (см. с. 484).

3.11.1 Разложение по бегущим волнам

Электрическое поле плоской бегущей монохроматической волны, как мы установили в предыдущей лекции, имеет вид

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= (\mathrm{Re}\mathbf{E}_0)\,\cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha) + (\mathrm{Im}\mathbf{E}_0)\,\sin(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha) = \\ &= (\mathrm{Re}\mathbf{E}_0)\,\Big[\cos(\omega t + \alpha)\,\cos(\mathbf{kr}) + \sin(\omega t + \alpha)\,\sin(\mathbf{kr})\Big] + \\ &\quad + (\mathrm{Im}\mathbf{E}_0)\,\Big[\sin(\omega t + \alpha)\,\cos(\mathbf{kr}) - \cos(\omega t + \alpha)\,\sin(\mathbf{kr})\Big].\end{aligned}$$

Мы добавили произвольную фазу α, которая может быть обнулена сдвигом начала координат.

Магнитное поле в бегущей волне может быть выражено через электрическое:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{n}\times\mathbf{E}], \qquad (\mathbf{E}_0, \mathbf{n}) = 0, \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}, \qquad \omega = c\,|\mathbf{k}|.$$

Полная энергия волны в ящике:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \int\limits_V \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi k_{\text{к}}}\,dx\,dy\,dz = \int\limits_V \frac{\mathbf{E}^2}{4\pi k_{\text{к}}}\,dx\,dy\,dz = \\ &= \frac{(\mathrm{Re}\mathbf{E}_0)^2 + (\mathrm{Im}\mathbf{E}_0)^2}{8\pi k_{\text{к}}}\,V = \frac{(\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_0^*)}{8\pi k_{\text{к}}}\,V, \qquad V = \ell_x\ell_y\ell_z.\end{aligned}$$

Подберём обобщённую координату и импульс так, чтобы получить *гармонический осциллятор* с частотой ω. Удобно подобрать такие единицы координаты и импульса, чтобы их амплитуды были одинаковы:

$$q(t) = q_0\,\cos(\omega t + \alpha), \qquad p(t) = q_0\,\sin(\omega t + \alpha).$$

$$H(q,p) = \frac{\omega}{2}(q^2 + p^2) = \frac{\omega q_0^2}{2} = \frac{V}{8\pi k_{\text{к}}}(\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_0^*).$$

Отсюда находим

$$q_0 = \sqrt{\frac{V}{4\pi k_{\text{к}}\omega}\,(\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_0^*)}.$$

Введём комплексный вектор поляризации:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{E}_0}{\sqrt{(\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_0^*)}};$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= (\mathrm{Re}\mathbf{E}_0)\,\Big[\cos(\omega t + \alpha)\,\cos(\mathbf{kr}) + \sin(\omega t + \alpha)\,\sin(\mathbf{kr})\Big] + \\ &\quad + (\mathrm{Im}\mathbf{E}_0)\,\Big[\sin(\omega t + \alpha)\,\cos(\mathbf{kr}) - \cos(\omega t + \alpha)\,\sin(\mathbf{kr})\Big] = \\ &= \sqrt{\frac{4\pi k_{\text{к}}\omega}{V}}\,(\mathrm{Re}\,\mathbf{e})\,\Big[q\,\cos(\mathbf{kr}) + p\,\sin(\mathbf{kr})\Big] + \\ &\quad + \sqrt{\frac{4\pi k_{\text{к}}\omega}{V}}\,(\mathrm{Im}\,\mathbf{e})\,\Big[p\,\cos(\mathbf{kr}) - q\,\sin(\mathbf{kr})\Big].\end{aligned}$$

Мы описали одну моду колебаний электромагнитного поля в ящике с помощью гармонического осциллятора с функцией Гамильтона

$$H(q,p) = \frac{\omega}{2}(q^2 + p^2).$$

Для того чтобы выразить электромагнитное поле в ящике, нам также понадобились следующие параметры:

$$\mathbf{k}, \qquad \omega = c\,|\mathbf{k}|, \qquad V = \ell_x\ell_y\ell_z, \qquad \mathbf{e}.$$

Если возбуждено несколько мод колебаний с разными волновыми векторами, например $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$, то их энергия складывается, поскольку (на примере энергии электрического поля двух волн)

$$\int\limits_V \frac{(\mathbf{E}_{\mathbf{k}_1}+\mathbf{E}_{\mathbf{k}_2})^2}{8\pi k_{\text{к}}}\,dx\,dy\,dz = \int\limits_V \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{k}_1}^2+\mathbf{E}_{\mathbf{k}_2}^2+2(\mathbf{E}_{\mathbf{k}_1},\mathbf{E}_{\mathbf{k}_2})}{8\pi k_{\text{к}}}\,dx\,dy\,dz,$$

$$\int\limits_V \frac{(\mathbf{E}_{\mathbf{k}_1},\mathbf{E}_{\mathbf{k}_2})}{4\pi k_{\text{к}}}\,dx\,dy\,dz = \text{интеграл по целому числу периодов гармонического колебания} = 0.$$

Если даны две моды с одинаковым волновым вектором, но с разными векторами поляризации, например $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, то их энергии складываются при условии ортогональности векторов поляризации, т.е. при условии

$$(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2^*)=0.$$

Таким образом, если для каждого волнового вектора, удовлетворяющего условию периодичности (3.11.1):

$$\mathbf{k}: \qquad k_x\frac{\ell_x}{2\pi},\ k_y\frac{\ell_y}{2\pi},\ k_z\frac{\ell_z}{2\pi}\in\mathbb{Z},$$

ввести пару векторов поляризации

$$\mathbf{e}_{\mathbf{k}a},\quad a\in\{1,2\}: \qquad (\mathbf{e}_{\mathbf{k}a},\mathbf{e}_{\mathbf{k}b}^*)=\delta_{ab},\quad (\mathbf{e}_{\mathbf{k}a},\mathbf{k})=0,$$

то свободное электромагнитное поле в ящике $\ell_x\times\ell_y\times\ell_z$ можно описать с помощью бесконечного ансамбля не взаимодействующих осцилляторов:

$$H(q,p)=\sum_{\mathbf{k}}\sum_{a=1}^{2}\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}(q_{\mathbf{k}a}^2+p_{\mathbf{k}a}^2).$$

Поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ выражаются через обобщённые координаты и импульсы с помощью рядов Фурье:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \sum_{\mathbf{k}}\sqrt{\frac{4\pi k_{\text{к}}\omega_{\mathbf{k}}}{V}}\sum_{a=1}^{2}\Big((\operatorname{Re}\mathbf{e}_{\mathbf{k}a})\,\Big[q_{\mathbf{k}a}\,\cos(\mathbf{kr})+p_{\mathbf{k}a}\,\sin(\mathbf{kr})\Big]+(\operatorname{Im}\mathbf{e}_{\mathbf{k}a})\,\Big[p_{\mathbf{k}a}\,\cos(\mathbf{kr})-q_{\mathbf{k}a}\,\sin(\mathbf{kr})\Big]\Big)= \\
&= \sum_{\mathbf{k}}\sqrt{\frac{4\pi k_{\text{к}}\omega_{\mathbf{k}}}{V}}\sum_{a=1}^{2}\operatorname{Re}\left(\mathbf{e}_{\mathbf{k}a}(q_{\mathbf{k}a}-\mathrm{i}p_{\mathbf{k}a})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{kr}}\right), \\
\mathbf{B} &= \sum_{\mathbf{k}}\sqrt{\frac{4\pi k_{\text{к}}\omega_{\mathbf{k}}}{V}}\sum_{a=1}^{2}\operatorname{Re}\left([\mathbf{n}_{\mathbf{k}}\times\mathbf{e}_{\mathbf{k}a}](q_{\mathbf{k}a}-\mathrm{i}p_{\mathbf{k}a})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{kr}}\right), \qquad \mathbf{n}_{\mathbf{k}}=\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}.
\end{aligned}$$

(*) В бесконечном пространстве сумма по $\mathbf{k}$ заменяется на интеграл, а ряд Фурье — на интеграл Фурье.

(/)** В квантовой теории осцилляторы, описывающие электромагнитное поле, становятся квантовыми и их энергия меняется конечными шагами $\hbar\omega_{\mathbf{k}}$, энергия поля при этом имеет вид

$$\mathcal{E}=\sum_{\mathbf{k}}\sum_{a=1}^{2}\hbar\omega_{\mathbf{k}}(n_{\mathbf{k}a}+\tfrac{1}{2}), \qquad n_{\mathbf{k}a}\in\{0,1,2,3,\dots\}.$$

Число $n_{\mathbf{k}a}$ интерпретируется как число фотонов с волновым числом $\mathbf{k}$ и поляризацией $\mathbf{e}_{\mathbf{k}a}$. Каждый такой фотон имеет импульс (обычный механический, не путайте с обобщённым) $\hbar\mathbf{k}$ и энергию $\hbar\omega_{\mathbf{k}}$. Энергия поля в ящике в отсутствие фотонов (*энергия вакуума*) оказывается бесконечной:

$$\mathcal{E}_0=\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{a=1}^{2}\hbar\omega_{\mathbf{k}}=+\infty.$$

В некоторых задачах этой бесконечной константой можно пренебречь, но зависимость этой бесконечности от размеров ящика связана с возникновением конечной силы притяжения между стенками — *эффекта Казимира*. Проблема бесконечной энергии вакуума — это ещё один пример проблемы *перенормировок* в квантовой теории поля[2]. **(/**)**

[2] Другой пример, с которым мы уже встречались ранее (см. с. 356), — бесконечная электростатическая энергия точечного заряда.

3.11.2 Резонаторы и волноводы (ф)

Задача о собственных колебаниях электромагнитного поля важна при рассмотрении *резонаторов* и *волноводов*. При решении задачи на собственные колебания на поверхности идеального резонатора или волновода ставятся граничные условия, соответствующие идеальной проводимости:

$$\mathbf{E}_{\parallel} = 0, \qquad \mathbf{B}_{\perp} = 0.$$

Для реальных резонаторов и волноводов присутствует затухание, связанное с омическими потерями на границах и утечками электромагнитной волны вовне.

Отличие волновода от резонатора в том, что резонатор — ограниченный объём, спектр собственных колебаний дискретен. Волновод — объём, неограниченный (или очень большой) хотя бы в одном направлении, спектр собственных колебаний непрерывен или близок к непрерывному.

Глава 3.12

Излучение в мультипольном приближении (с. 488)

3.12.1 Волновая зона

Пусть система зарядов совершает финитное движение в окрестности начала координат с характерным размером r_0 и характерным временем $T_0 \gg \frac{r_0}{c}$. Рассмотрим электромагнитное поле на большом расстоянии R от системы:

$$R \gg cT_0 \gg r_0.$$

Электростатическое поле спадает с расстоянием как $E \sim \frac{1}{R^2}$ для монополя и быстрее для старших мультипольных моментов. Магнитостатическое поле спадает с расстоянием как $B \sim \frac{1}{R^3}$ для диполя и быстрее для старших мультипольных моментов. Плотность энергии излучения спадает как $W \sim \frac{1}{R^2}$, следовательно, поле излучения спадает как $E, B \sim \frac{1}{R}$, т.е. медленнее всех статических полей. Именно поле излучения должно доминировать на больших расстояниях — в *волновой зоне*.

На больших расстояниях сферическая волна близка к плоской волне. При этом волна распространяется по радиусу в направлении, задаваемом единичным вектором $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{R}}{R}$. Мы знаем, что в плоской бегущей волне электрическое поле получается из магнитного поворотом на $-\pi/2$ вокруг направления распространения волны:

$$\mathbf{E} = [\mathbf{B} \times \mathbf{N}].$$

В волновой зоне это соотношение будет выполняться для главных членов разложения, которые спадают с расстоянием по закону $\sim \frac{1}{R}$. Это позволяет нам ограничиться рассмотрением векторного потенциала, из которого можно получить магнитное поле.

Запаздывающий векторный потенциал имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}, t) = \frac{k_к}{c} \int\limits_{r<r_0} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}, t - \frac{1}{c}|\mathbf{R} - \mathbf{r}|)}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}\, d^3\mathbf{r}.$$

На больших расстояниях главный член $\sim \frac{1}{R}$, им мы и ограничимся[1]:

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}, t) \approx \frac{k_к}{cR} \int\limits_{r<r_0} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t - \tfrac{1}{c}|\mathbf{R} - \mathbf{r}|)\, d^3\mathbf{r} \approx \frac{k_к}{cR} \int\limits_{r<r_0} \mathbf{j}\big(\mathbf{r}, t - \tfrac{1}{c}[R - (\mathbf{N}, \mathbf{r})]\big)\, d^3\mathbf{r}.$$

Мы воспользовались малостью $r < r_0 \ll R$. Эта малость не позволяет нам пренебречь $\mathbf{r}$ во временно́м аргументе плотности тока:

$$t - \tfrac{1}{c}|\mathbf{R} - \mathbf{r}| \approx t - \tfrac{1}{c}[R - (\mathbf{N}, \mathbf{r})],$$

поскольку тут надо сравнивать r не с R, а с характерной длиной волны $\lambda_0 = cT_0$.

Величина $(\mathbf{N}, \mathbf{r}) \sim r_0$ учитывает разность хода сигнала от разных точек источника. Таким образом, параметр малости — $r_0/\lambda_0 = r_0/(cT_0) \approx v_0/c$, где $v_0 = r_0/T_0$ — характерная скорость частицы источника. По этой величине мы разложим подынтегральное выражение в степенной ряд.

[1] Если бы мы разложили $\frac{1}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}$ по степеням $\mathbf{r}$, то получили бы мультипольный ряд, как в магнитостатике, но с запаздывающим источником. Здесь же мы удержали член нулевого порядка разложения $\frac{1}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}$ по $\mathbf{r}$, т.е. $\frac{1}{R}$.

3.12.2 Мультипольное разложение для потенциала в волновой зоне

Разложим векторный потенциал по $(\mathbf{N},\mathbf{r})$ до первого порядка:

$$\mathbf{A}(\mathbf{R},t)\approx\frac{k_{\text{к}}}{cR}\int\limits_{r<r_0}\mathbf{j}\big(\mathbf{r},t-\tfrac{1}{c}[R-(\mathbf{N},\mathbf{r})]\big)\,d^3\mathbf{r}\approx\frac{k_{\text{к}}}{cR}\int\limits_{r<r_0}\left(\mathbf{j}\big(\mathbf{r},t-\tfrac{R}{c}\big)+\tfrac{1}{c}(\mathbf{N},\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{j}\big(\mathbf{r},t-\tfrac{R}{c}\big)\right)d^3\mathbf{r}.$$

В нулевом порядке разложения

$$\mathbf{A}_d(\mathbf{R},t)=\frac{k_{\text{к}}}{cR}\int\limits_{r<r_0}\mathbf{j}(\mathbf{r},t')\,d^3\mathbf{r},\qquad t'=t-\tfrac{R}{c}.$$

Чтобы установить смысл интеграла по объёму от плотности тока, предположим, что ток создаётся дискретными частицами, тогда

$$\int\limits_{r<r_0}\mathbf{j}(\mathbf{r},t')\,d^3\mathbf{r}=\int\limits_{r<r_0}\mathbf{v}\,\underbrace{\rho\,d^3\mathbf{r}}_{dq}=\int\limits_{r<r_0}\mathbf{v}\,dq(\mathbf{r})=\sum_a q_a\mathbf{v}_a=\frac{d}{dt}\underbrace{\sum_a q_a\mathbf{r}_a}_{\mathbf{d}}=\dot{\mathbf{d}}(t').$$

Таким образом, в нулевом порядке разложения получаем векторный потенциал *электрического дипольного излучения*:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{d}}(\mathbf{R},t)=k_{\text{к}}\frac{\dot{\mathbf{d}}(t-\frac{R}{c})}{cR}.\tag{3.12.1}$$

Это главный член мультипольного разложения для излучения.

В первом порядке разложения

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{R},t)=\frac{k_{\text{к}}}{c^2R}\int\limits_{r<r_0}(\mathbf{N},\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{j}\big(\mathbf{r},t'\big)\,d^3\mathbf{r}=\frac{k_{\text{к}}}{c^2R}\frac{d}{dt}\int\limits_{r<r_0}(\mathbf{N},\mathbf{r})\,\mathbf{j}\big(\mathbf{r},t'\big)\,d^3\mathbf{r},\qquad t'=t-\tfrac{R}{c}.$$

Опять предположим, что ток создаётся дискретными частицами, и распишем интеграл как сумму:

$$\int\limits_{r<r_0}(\mathbf{N},\mathbf{r})\,\mathbf{j}(\mathbf{r},t')\,d^3\mathbf{r}=\int\limits_{r<r_0}(\mathbf{N},\mathbf{r})\,\mathbf{v}\,\underbrace{\rho\,d^3\mathbf{r}}_{dq}=\int\limits_{r<r_0}(\mathbf{N},\mathbf{r})\,\mathbf{v}\,dq(\mathbf{r})=\sum_a q_a(\mathbf{N},\mathbf{r}_a)\,\dot{\mathbf{r}}_a.$$

Выражение $(\mathbf{N},\mathbf{r}_a)\,\dot{\mathbf{r}}_a$ распишем в тензорных обозначениях, выделив антисимметричную по радиус-вектору и скорости часть:

$$\begin{aligned}\Big((\mathbf{N},\mathbf{r})\,\dot{\mathbf{r}}\Big)_\alpha&=\dot r_\alpha r_\beta N_\beta=\frac{1}{2}\left(\dot r_\alpha r_\beta N_\beta+N_\beta\frac{d}{dt}(r_\alpha r_\beta)-r_\alpha\dot r_\beta N_\beta\right)=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}[\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{r}]_\gamma N_\beta+N_\beta\frac{d}{dt}(r_\alpha r_\beta)\right)=\\&=\frac{1}{2}\left([[\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}]\times\mathbf{N}]_\alpha+N_\beta\frac{d}{dt}(r_\alpha r_\beta)\right).\end{aligned}$$

Подставим это выражение в сумму, которая получилась из интеграла:

$$\begin{aligned}\left(\sum_a q_a(\mathbf{N},\mathbf{r}_a)\dot{\mathbf{r}}_a\right)_\alpha&=\sum_a q_a\frac{1}{2}\left([[\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}_a]\times\mathbf{N}]_\alpha+N_\beta\frac{d}{dt}(r_{a\alpha}r_{a\beta})\right)=\\&=\Big[\underbrace{\frac{1}{2}\sum_a q_a[\mathbf{r}_a\times\dot{\mathbf{r}}_a]}_{c\boldsymbol{\mu}}\times\mathbf{N}\Big]_\alpha+N_\beta\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_a q_a\,r_{a\alpha}r_{a\beta}.\end{aligned}$$

В первом члене выделился магнитный дипольный момент, что позволяет нам выделить векторный потенциал *магнитного дипольного излучения*:

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{R},t)=k_{\text{к}}\frac{[\dot{\boldsymbol{\mu}}(t')\times\mathbf{N}]}{cR},\qquad t'=t-\frac{R}{c}.$$

Из оставшейся части суммы выделим электрический квадрупольный момент:

$$N_\beta\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_a q_a\,r_{a\alpha}r_{a\beta}=N_\beta\frac{1}{6}\frac{d}{dt}\sum_a q_a(3r_{a\alpha}r_{a\beta}-\delta_{\alpha\beta}\mathbf{r}_a^2+\delta_{\alpha\beta}\mathbf{r}_a^2)=N_\beta\frac{1}{6}\frac{d}{dt}\left(Q_{\alpha\beta}+\delta_{\alpha\beta}\sum_a q_a\,\mathbf{r}_a^2\right).$$

Теперь мы можем выписать векторный потенциал *электрического квадрупольного излучения* (здесь $\mathbf{e}_\alpha$ — базисный вектор с номером α):

$$\mathbf{A}_Q(\mathbf{R},t) = k_\text{к}\frac{\mathbf{e}_\alpha \ddot{Q}_{\alpha\beta}(t')N_\beta}{6c^2R}, \qquad t' = t - \frac{R}{c}.$$

В первом порядке разложения остался один дополнительный член, ещё не учтённый нами:

$$\mathbf{A}_\text{доп.}(\mathbf{R},t) = k_\text{к}\frac{\mathbf{N}}{6c^2R}\frac{d^2}{dt^2}\sum_a q_a\,\mathbf{r}_a^2(t').$$

Этот член сферически-симметричен и может быть представлен как градиент скалярной функции. Он не даёт вклада в магнитное поле и может быть устранён калибровочным преобразованием.

В результате, разложив запаздывающий потенциал в волновой зоне до первого порядка по $(\mathbf{N},\mathbf{r})$, мы получили

$$\mathbf{A}(\mathbf{R},t) \approx k_\text{к}\frac{\dot{\mathbf{d}}(t')}{cR} + k_\text{к}\frac{[\dot{\boldsymbol{\mu}}(t')\times\mathbf{N}]}{cR} + k_\text{к}\frac{\ddot{Q}(t')\mathbf{N}}{6c^2R}, \qquad t' = t - \frac{R}{c}.$$

В квадрупольном члене $\ddot{Q}(t')\mathbf{N} = \mathbf{e}_\alpha\ddot{Q}_{\alpha\beta}(t')N_\beta$ — результат действия матрицы $\ddot{Q}$ на вектор $\mathbf{N}$.

3.12.3 Поля в волновой зоне и поляризация

Из полученных векторных потенциалов получим магнитное и электрическое поле в волновой зоне, удерживая только члены $\sim \frac{1}{R}$ (с учётом того, чем мы уже пренебрегли, удерживать следующие члены было бы превышением точности).

- Все рассматриваемые нами потенциалы пропорциональны $\frac{1}{R}$. Дифференцирование знаменателя приведёт к членам следующего порядка малости. Так что знаменатель считаем постоянным.
- Числители в потенциалах содержат вектор $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{R}}{R}$. Дифференцирование этого вектора даст дополнительный множитель $\sim \frac{1}{R}$, в результате получится член следующего порядка малости. Так что вектор $\mathbf{N}$ считаем постоянным.
- Числители содержат мультипольные моменты, взятые в момент времени $t' = t - \frac{R}{c}$, $\nabla_\alpha t' = -\frac{1}{c}\nabla_\alpha R = -\frac{1}{c}N_\alpha$.

Таким образом, мы можем при вычислении полей в волновой зоне заменить оператор набла по следующему правилу:

$$\boldsymbol{\nabla} \to -\frac{1}{c}\mathbf{N}\frac{d}{dt}.$$

Поля в волновой зоне имеют вид

$$\mathbf{B}(\mathbf{R},t) = [\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}] \approx -\frac{k_\text{к}}{c}\mathbf{N}\times\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR} + \frac{[\dot{\boldsymbol{\mu}}\times\mathbf{N}]}{cR} + \frac{\ddot{Q}\mathbf{N}}{6c^2R}\right) = k_\text{к}\frac{[\ddot{\mathbf{d}}\times\mathbf{N}]}{c^2R} + k_\text{к}\frac{[[\ddot{\boldsymbol{\mu}}\times\mathbf{N}]\times\mathbf{N}]}{c^2R} + k_\text{к}\frac{[\dddot{Q}\mathbf{N}\times\mathbf{N}]}{6c^3R};$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{R},t) \approx [\mathbf{B}\times\mathbf{N}] = k_\text{к}\frac{[[\ddot{\mathbf{d}}\times\mathbf{N}]\times\mathbf{N}]}{c^2R} + k_\text{к}\frac{[[[\ddot{\boldsymbol{\mu}}\times\mathbf{N}]\times\mathbf{N}]\times\mathbf{N}]}{c^2R} + k_\text{к}\frac{[[\dddot{Q}\mathbf{N}\times\mathbf{N}]\times\mathbf{N}]}{6c^3R}.$$

Здесь удобно разложить векторы мультипольных моментов на часть, параллельную радиусу, и часть, перпендикулярную радиусу:

$$\mathbf{c}_\parallel = \mathbf{N}(\mathbf{N},\mathbf{c}), \qquad \mathbf{c}_\perp = \mathbf{c} - \mathbf{N}(\mathbf{N},\mathbf{c}), \qquad \mathbf{c}_\perp^2 = \mathbf{c}^2 - (\mathbf{N},\mathbf{c})^2, \qquad (\mathbf{a}_\perp,\mathbf{b}_\perp) = (\mathbf{a},\mathbf{b}) - (\mathbf{N},\mathbf{a})(\mathbf{N},\mathbf{b}).$$

В частности,

$$[[\mathbf{c}\times\mathbf{N}]\times\mathbf{N}] = [\underbrace{\mathbf{N}}_{\vec{a}}\times[\underbrace{\mathbf{N}}_{\vec{b}}\times\underbrace{\mathbf{c}}_{\vec{c}}]] = \underbrace{\mathbf{N}(\mathbf{N},\mathbf{c})}_{\vec{b}(\vec{a},\vec{c})} - \underbrace{\mathbf{c}}_{\vec{c}(\vec{a},\vec{b})} = -\mathbf{c}_\perp.$$

Воспользовавшись этим, получаем

$$\mathbf{B}(\mathbf{R},t) = k_\text{к}\frac{[\ddot{\mathbf{d}}_\perp\times\mathbf{N}]}{c^2R} + k_\text{к}\frac{-\ddot{\boldsymbol{\mu}}_\perp}{c^2R} + k_\text{к}\frac{[(\dddot{Q}\mathbf{N})_\perp\times\mathbf{N}]}{6c^3R}; \tag{3.12.2}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{R},t) = k_\text{к}\frac{-\ddot{\mathbf{d}}_\perp}{c^2R} + k_\text{к}\frac{[\mathbf{N}\times\ddot{\boldsymbol{\mu}}_\perp]}{c^2R} + k_\text{к}\frac{-(\dddot{Q}\mathbf{N})_\perp}{6c^3R}. \tag{3.12.3}$$

- Электрический дипольный член обращается в нуль при $\ddot{\mathbf{d}} \| \mathbf{N}$ (2 противоположных направления).
- Магнитный дипольный член обращается в нуль при $\ddot{\boldsymbol{\mu}} \| \mathbf{N}$ (2 противоположных направления).
- Электрический квадрупольный член обращается в нуль при $(\ddot{\dot{Q}}\mathbf{N}) \| \mathbf{N}$, т.е. если $\mathbf{N}$ — собственный вектор матрицы $\ddot{\dot{Q}}$ (6 попарно противоположных направлений вдоль 3 ортогональных осей, или 2 противоположных направления и перпендикулярная им плоскость).

- Если направить $\ddot{\mathbf{d}}$ по оси глобуса, то его электрическое поле в волновой зоне будет направлено по меридианам, а магнитное — по параллелям. На полюсах электрическое поле имеет особые точки типа узел, а магнитное — особые точки типа центр.
- Если направить $\ddot{\boldsymbol{\mu}}$ по оси глобуса, то его магнитное поле в волновой зоне будет направлено по меридианам, а электрическое — по параллелям. На полюсах магнитное поле имеет особые точки типа узел, а электрическое — особые точки типа центр.
- Если у $\ddot{\dot{Q}}$ два собственных числа совпадают, а собственная ось для отличного от других собственного числа направлена по оси глобуса, то его электрическое поле в волновой зоне будет направлено по меридианам, а магнитное — по параллелям. На полюсах электрическое поле имеет особые точки типа узел, а магнитное — особые точки типа центр.
- **(**)** В случае общего положения (если у $\ddot{\dot{Q}}$ все собственные числа разные и среди них нет нулевых), поскольку $\operatorname{tr} \ddot{\dot{Q}} = 0$, два собственных числа λ_1, λ_2 должны быть одного знака, а третье собственное число λ_3 — противоположного знака. Тогда собственным направлениям для λ_3 соответствуют две особые точки типа узел для электрического поля (и типа центр для магнитного), а собственным направлениям для λ_1, λ_2 соответствуют 4 особые точки типа седло (для обоих полей).

3.12.4 Интенсивность излучения

Плотность потока энергии задаётся вектором Умова-Пойнтинга, который в волновой зоне направлен по радиусу:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi k_{\text{к}}}[\mathbf{E} \times \mathbf{B}] = \frac{c}{4\pi k_{\text{к}}}[\mathbf{E} \times [\mathbf{N} \times \mathbf{E}]] = \frac{c\mathbf{N}}{4\pi k_{\text{к}}}\mathbf{E}^2.$$

Поток энергии в единицу времени через элемент поверхности сферы (большого радиуса R) $d\mathbf{s} = \mathbf{N}R^2\, d\Omega$ ($d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\phi$ — элемент телесного угла) задаёт распределение интенсивности излучения по углам:

$$dI = (d\mathbf{s}, \mathbf{S}) = \frac{d\Omega}{4\pi k_{\text{к}}}\, cR^2\mathbf{E}^2.$$

В волновой зоне $\mathbf{E}^2 \sim \frac{1}{R^2}$ и интенсивность не зависит от радиуса сферы.

(!) $dI \geqslant 0$.

Для выписанных выше членов мультипольного разложения

$$dI = k_{\text{к}}\frac{d\Omega}{4\pi c^3}\left(\ddot{\mathbf{d}}_\perp^2 + \ddot{\boldsymbol{\mu}}_\perp^2 + \frac{1}{36c^2}(\ddot{\dot{Q}}\mathbf{N})_\perp^2 + 2(\ddot{\mathbf{d}}_\perp, \ddot{\boldsymbol{\mu}}_\perp, \mathbf{N}) + \frac{1}{3c}\big((\ddot{\dot{Q}}\mathbf{N})_\perp, \ddot{\boldsymbol{\mu}}_\perp, \mathbf{N}\big) + \frac{1}{3c}\big((\ddot{\dot{Q}}\mathbf{N})_\perp, \ddot{\mathbf{d}}_\perp\big)\right).$$

В этом выражении присутствуют интенсивности отдельных мультипольных членов:

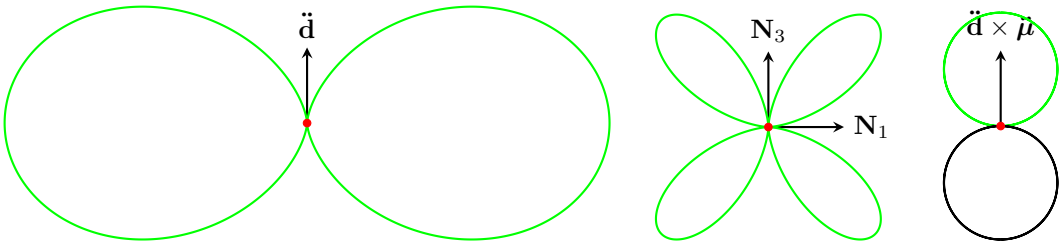
$$\begin{aligned}
dI_{\mathbf{d}} &= k_{\text{к}}\frac{d\Omega}{4\pi c^3}\ddot{\mathbf{d}}_\perp^2 = k_{\text{к}}\frac{d\Omega}{4\pi c^3}\left(\ddot{\mathbf{d}}^2 - (\mathbf{N}, \ddot{\mathbf{d}})^2\right) = k_{\text{к}}\frac{d\Omega}{4\pi c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2\, \sin^2(\angle \mathbf{N}\ddot{\mathbf{d}}),\\
dI_{\boldsymbol{\mu}} &= k_{\text{к}}\frac{d\Omega}{4\pi c^3}\ddot{\boldsymbol{\mu}}_\perp^2 = k_{\text{к}}\frac{d\Omega}{4\pi c^3}\left(\ddot{\boldsymbol{\mu}}^2 - (\mathbf{N}, \ddot{\boldsymbol{\mu}})^2\right) = k_{\text{к}}\frac{d\Omega}{4\pi c^3}\ddot{\boldsymbol{\mu}}^2\, \sin^2(\angle \mathbf{N}\ddot{\boldsymbol{\mu}}),\\
dI_Q &= k_{\text{к}}\frac{d\Omega}{144\pi c^5}(\ddot{\dot{Q}}\mathbf{N})_\perp^2 = k_{\text{к}}\frac{d\Omega}{144\pi c^5}\left(N_\alpha \ddot{\dot{Q}}_{\alpha\beta}\ddot{\dot{Q}}_{\beta\gamma}N_\gamma - (N_\alpha \ddot{\dot{Q}}_{\alpha\gamma}N_\gamma)^2\right),
\end{aligned}$$

а также *интерференционные члены*, содержащие комбинации разных мультипольных моментов:

$$\begin{aligned}
dI_{\mathbf{d}\boldsymbol{\mu}} &= k_{\text{к}}\frac{d\Omega}{2\pi c^3}(\ddot{\mathbf{d}}, \ddot{\boldsymbol{\mu}}, \mathbf{N}),\\
dI_{Q\boldsymbol{\mu}} &= k_{\text{к}}\frac{d\Omega}{12\pi c^4}\big((\ddot{\dot{Q}}\mathbf{N}), \ddot{\boldsymbol{\mu}}, \mathbf{N}\big),\\
dI_{\mathbf{d}Q} &= k_{\text{к}}\frac{d\Omega}{12\pi c^4}\left(\big(\ddot{\mathbf{d}}, (\ddot{\dot{Q}}\mathbf{N})\big) - (\mathbf{N}, \ddot{\mathbf{d}})N_\alpha \ddot{\dot{Q}}_{\alpha\gamma}N_\gamma\right).
\end{aligned}$$

(!) Выражения $dI, dI_{\mathbf{d}}, dI_{\boldsymbol{\mu}}, dI_Q \geqslant 0$ положительно определены, а интерференционные члены $dI_{\mathbf{d}\boldsymbol{\mu}}, dI_{Q\boldsymbol{\mu}}, dI_{\mathbf{d}Q}$ знакопеременны.

Диаграмма направленности — это поверхность, образуемая концами векторов длины $\frac{dI}{d\Omega}$, отложенных во всевозможных направлениях $\mathbf{N}$.



Сечения диаграмм направленности: **а)** для дипольного излучения; **б)** для квадрупольного излучения (случай, когда собственные числа $\ddot{Q}_{\alpha\beta}$ соответствуют аксиальной симметрии: $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2}\lambda_3$, $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_3$ — собственные векторы); **в)** для интерференционного члена $dI_{\mathbf{d}\boldsymbol{\mu}}$ (в верхнем полупространстве интенсивность положительна, в нижнем — отрицательна).

Вычислим суммарную интенсивность, проинтегрировав распределение интенсивности по телесному углу:

$$I = \int\limits_{S^2} dI = \frac{c}{4\pi k_{\text{к}}} \int\limits_{S^2} R^2 \mathbf{E}^2 \, d\Omega = \frac{c}{k_{\text{к}}} R^2 \overline{\mathbf{E}^2}.$$

Мы видим, что интегрирование сводится к усреднению по телесному углу. От направления зависит только вектор $\mathbf{N}$, поэтому интегрирование сводится к усреднению произведений разного числа компонент вектора $\mathbf{N}$ по единичной сфере (по всем направлениям). Из соображений симметрии мы можем получить следующие средние (см. задачу 35):

$$\overline{N_\alpha} = 0, \qquad \overline{N_\alpha N_\beta} = \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}, \qquad \overline{N_\alpha N_\beta N_\gamma} = 0, \qquad \overline{N_\alpha N_\beta N_\gamma N_\delta} = \frac{1}{15}\left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}\right).$$

Используя эти соотношения, получаем полные интенсивности отдельных мультипольных членов:

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{d}} &= k_{\text{к}} \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2, \\ I_{\boldsymbol{\mu}} &= k_{\text{к}} \frac{2}{3c^3} \ddot{\boldsymbol{\mu}}^2, \\ I_Q &= k_{\text{к}} \frac{\ddot{Q}_{\alpha\beta} \dddot{Q}_{\alpha\beta}}{180c^5}. \end{aligned}$$

Полные интенсивности интерференционных членов оказываются равны нулю. Для $I_{\mathbf{d}\boldsymbol{\mu}}$ и $I_{\mathbf{d}Q}$ это сразу видно из того, что вектор $\mathbf{N}$ присутствует в каждом члене нечётное число раз. Для $I_{Q\boldsymbol{\mu}}$ придётся немного посчитать:

$$I_{Q\boldsymbol{\mu}} = \frac{k_{\text{к}}}{3c^4} \overline{\left((\ddot{Q}\mathbf{N}), \ddot{\boldsymbol{\mu}}, \mathbf{N}\right)} = \frac{k_{\text{к}}}{3c^4} \overline{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \ddot{Q}_{\alpha\delta} N_\delta \ddot{\mu}_\beta N_\gamma} = \frac{k_{\text{к}}}{3c^4} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \ddot{Q}_{\alpha\delta} \ddot{\mu}_\beta \underbrace{\overline{N_\delta N_\gamma}}_{\frac{1}{3}\delta_{\gamma\delta}} = \frac{k_{\text{к}}}{9c^4} \underbrace{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \ddot{Q}_{\alpha\gamma}}_{0} \ddot{\mu}_\beta = 0.$$

3.12.5 Задачи 56–60

Задача 56. Дипольное излучение в ближней и волновой зонах. Определите электрическое и магнитное поля гармонически колеблющегося диполя на расстояниях r, много бóльших размеров диполя a, но необязательно бóльших длины волны λ.

Задача 57. Интерференция дипольного излучения и отражённого. Гармонически колеблющийся диполь помещён на высоте ℓ над идеально проводящей металлической плоскостью. Найдите интенсивность излучения диполя в зависимости от угла наблюдения и угла между диполем и нормалью к плоскости:
а) для случая $\ell \ll \lambda$;
б)* для случая $\ell \gg \lambda$ (можно ограничиться случаем, когда диполь перпендикулярен плоскости).

Задача 58. Атом Резерфорда. Два разноимённых заряда (q_1, m_1) и (q_2, m_2) обращаются один вокруг другого под действием кулоновского притяжения по круговой орбите радиусом R.

а) Определите энергию, теряемую на излучение за один оборот.
б) Найдите зависимость расстояния между зарядами от времени.
в) Определите время, за которое один заряд упадёт на другой.

Задача 59. Излучение при лобовом столкновении в кулоновском поле. Два одноимённых заряда (q_1, m_1) и (q_2, m_2) испытывают лобовое столкновение. Определите полную излучённую энергию, если задана относительная скорость на бесконечности $v_\infty \ll c$.
а) Дипольный случай $(q_1/m_1 \neq q_2/m_2)$.
б) Квадрупольный случай $(q_1/m_1 = q_2/m_2)$.

Задача 60. Излучение колеблющегося сфероида. Тело, ограниченное близкой к сфере поверхностью (сфероид) с уравнением

$$R(\theta) = R_0[1 + \beta P_2(\cos\theta)],$$

заряжено с постоянной плотностью. Полный заряд равен Q. Малый параметр β ($\beta \ll 1$) гармонически меняется во времени с частотой ω. Удерживая низшие члены разложения по β, вычислите в длинноволновом приближении отличные от нуля мультипольные моменты, угловое распределение и полную мощность излучения. Здесь $P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$ (о полиномах Лежандра и сферических функциях см. с. 473).

Глава 3.13

Реакция излучения и излучение релятивистских частиц (с. 492)

3.13.1 Радиационное трение

3.13.1.1 Интенсивность излучения в нуле и на бесконечности

Интенсивность излучения — это мощность, которая передаётся от системы зарядов электромагнитному полю необратимым образом и уносится (если ничто не помешает) на бесконечность. Попытаемся представить эту мощность как мощность силы. Запишем в электрическом дипольном приближении интенсивность излучения одного заряда:

$$I_{\mathbf{d}} = \frac{2k_{\text{к}}}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2 = \frac{2k_{\text{к}}q^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{r}}^2.$$

Мы видим, что интенсивность не имеет вида $(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{F})$, как следовало бы ожидать. Однако вспомним, что мы считали интенсивность в волновой зоне, пренебрегая всеми членами, кроме тех, которые дают вклад в поле $\sim \frac{1}{R}$. Но в ближней зоне члены $\sim \frac{1}{R}$ являются малыми по сравнению с членами $\sim \frac{1}{R^n}$, $n > 1$. Если бы мы учли отброшенные члены, то вектор Умова-Пойнтинга получил бы добавку, однако эта добавка спадает на больших расстояниях быстрее, чем $\frac{1}{R^2}$, и не уносит энергию на бесконечность. Это означает, что отброшенные члены описывают обмен энергией между зарядами и полем, происходящий обратимым образом. Интенсивность обратимого обмена энергией должна быть полной производной по времени[1]. Выделим из $I_{\mathbf{d}}$ такой член и член вида мощность силы $(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{F})$:

$$I_{\mathbf{d}} = \frac{2k_{\text{к}}q^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{r}}^2 = \frac{2k_{\text{к}}q^2}{3c^3}\left(\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}) - (\dot{\mathbf{r}},\ \dddot{\mathbf{r}})\right).$$

Теперь мы можем выделить мгновенную мощность, передаваемую от заряда полю:

$$I_{\mathbf{d}\text{мгн.}} = -\left(\dot{\mathbf{r}}, \frac{2k_{\text{к}}q^2}{3c^3}\dddot{\mathbf{r}}\right) = \underbrace{\frac{2k_{\text{к}}q^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{r}}^2}_{I_{\mathbf{d}}} \underbrace{-\frac{d}{dt}\frac{2k_{\text{к}}q^2}{3c^3}(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})}_{I_{\text{обр.}}}.$$

Она разбивается на интенсивность на бесконечности $I_{\mathbf{d}}$ и интенсивность обратимого обмена энергией $I_{\text{обр.}}$, связанного с полями ближней зоны, которые на бесконечность не уходят.

Мгновенная мощность соответствует мощности силы, с которой заряд действует на поле. Однако привычнее написать силу с противоположным знаком, с которой поле действует на заряд, — *силу радиационного трения*:

$$\mathbf{F}_{\text{р.тр.}} = \frac{2k_{\text{к}}q^2}{3c^3}\dddot{\mathbf{r}}.$$

(*) Силу радиационного трения мы определили через её интенсивность $(\mathbf{F}_{\text{р.тр.}}, \mathbf{v})$, поэтому возникает вопрос, можно ли к полученному выражению для силы радиационного трения прибавить добавку $\delta\mathbf{F}$, перпендикулярную скорости $\mathbf{v}$. Мы рассматриваем нерелятивистский предел $v \ll c$, в этом пределе сила не меняется при переходе в другую инерциальную систему (при преобразованиях Галилея). Это позволяет зафиксировать $\delta\mathbf{F} = 0$, т.к. с помощью преобразований Галилея можно придать скорости $\mathbf{v}$ произвольное направление.

[1] Выделим из полной энергии электромагнитного поля энергию *ближней зоны* $\mathcal{E}_{\text{б}}$ (например, энергию поля до расстояния в 100 длин волн), тогда интенсивность обратимого обмена энергией с полем имеет вид $\frac{d\mathcal{E}_{\text{б}}}{dt}$, т.е. представима в виде полной производной по времени.

3.13.1.2 Проблемы с радиационным трением

(!) Сила радиационного трения — это сила, с которой на частицу действует поле собственного излучения (в *ближней зоне*) частицы. Ведь именно собственному излучению частица передаёт энергию. Мы можем представить себе, что частица ускоряется под действием каких-то сторонних не электромагнитных сил, тогда сила радиационного трения всё равно будет действовать. Впрочем, поле «не знает», является ли оно для частицы собственным: излучаемая частицей волна и поглощаемая частицей волна принципиально не отличаются друг от друга и меняются местами при обращении времени.

(*) В литературе силу радиационного трения могут получать, придавая смысл силе взаимодействия точечной частицы с собственным полем, однако точечность частицы здесь не существенна. Достаточно, чтобы выполнялись условия применимости электрического дипольного приближения для излучения.

(ф*) Сила радиационного трения зависит от *третьей* производной по времени (!) от радиус-вектора частицы. В этом её принципиальное отличие от ранее встречавшихся нам сил. Уравнение движения заряженной частицы в присутствии силы радиационного трения — дифференциальное уравнение *третьего*(!) порядка, т. е., чтобы задать начальные условия (поставить задачу Коши) для частицы, недостаточно задать начальное положение $\mathbf{r}_0$ и начальную скорость $\mathbf{v}_0$, надо ещё задать начальное ускорение $\mathbf{a}_0$. Решения такого уравнения движения при этом могут оказаться *нефизическими*. Решим уравнение движения заряженной частицы под действием силы радиационного трения:

$$
\begin{aligned}
m\ddot{\mathbf{r}} &= \frac{2k_{\text{к}}q^2}{3c^3}\dddot{\mathbf{r}} \quad \Rightarrow \\
\Rightarrow \qquad \dddot{\mathbf{r}} &= \frac{3mc^3}{2k_{\text{к}}q^2}\ddot{\mathbf{r}}, \\
\ddot{\mathbf{r}}(t) &= \mathbf{a}_0 \exp\left(\frac{3mc^3}{2k_{\text{к}}q^2}\,t\right), \\
\dot{\mathbf{r}}(t) &= \mathbf{v}_0 + \frac{2k_{\text{к}}q^2}{3mc^3}\,\mathbf{a}_0\,\exp\left(\frac{3mc^3}{2k_{\text{к}}q^2}\,t\right), \\
\mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \left(\frac{2k_{\text{к}}q^2}{3mc^3}\right)^2 \mathbf{a}_0\,\exp\left(\frac{3mc^3}{2k_{\text{к}}q^2}\,t\right).
\end{aligned}
$$

Это решение описывает частицу, которая сама собой начинает экспоненциально ускоряться, получая энергию неизвестно откуда. Это связано с тем, что полная система при рассмотрении силы радиационного трения — это не частица сама по себе, а частица+поле. Для полной системы (включая поле) уравнения движения не содержат высших производных, но описание поля требует бесконечного числа степеней свободы[2]. Можно организовать поле так, что оно обеспечит такое ускорение частицы, которое мы описали.

3.13.1.3 Радиационное трение как возмущение

(!) Чтобы избежать нефизических решений, силу радиационного трения обычно рассматривают только тогда, когда она является *малой поправкой* к остальным силам, действующим на частицу. При таком подходе, когда вычисляется сила радиационного трения, она рассматривается как малое *возмущение*: $\dddot{\mathbf{r}}$ вычисляется без учёта силы радиационного трения (для *невозмущённой траектории*).

Рассмотрим движение нерелятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле с учётом радиационного трения:

$$
m\mathbf{a} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}] + \frac{2k_{\text{к}}q^2}{3c^3}\dot{\mathbf{a}}.
$$

Считая, что сила радиационного трения мала и v/c мало, вычислим $\dot{\mathbf{a}}$, опуская все члены, содержащие скорость[3]:

$$
\dot{\mathbf{a}} \approx \frac{d}{dt}\left(\frac{q}{m}\mathbf{E} + \frac{q}{mc}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]\right) \approx \frac{q}{m}\dot{\mathbf{E}} + \frac{q}{mc}[\underbrace{\mathbf{a}}_{\approx\frac{q}{m}\mathbf{E}}\times\mathbf{B}] \approx \frac{q}{m}\dot{\mathbf{E}} + \frac{q^2}{m^2c}[\mathbf{E}\times\mathbf{B}],
$$

$$
\mathbf{F}_{\text{р.тр.}} \approx \frac{2k_{\text{к}}q^3}{3mc^3}\dot{\mathbf{E}} + \frac{2k_{\text{к}}q^4}{3m^2c^4}[\mathbf{E}\times\mathbf{B}] = \frac{2k_{\text{к}}q^3}{3mc^3}\dot{\mathbf{E}} + \frac{8\pi}{3}\left(\frac{k_{\text{к}}q^2}{mc^2}\right)^2\frac{\mathbf{S}}{c}.
$$

[2]Высшие производные могут быть исключены из уравнений движения путём задания скоростей как дополнительных независимых переменных. Таким образом, появление *высших производных* в уравнениях движения частицы соответствует введению для частицы конечного числа дополнительных степеней свободы, которые отчасти заменяют бесконечное число степеней свободы поля. Про исключение полевых степеней свободы см. также § 2.13.1 «Классическая потенциальная энергия и макроскопические силы из СТО» (с. 277).

[3]Напоминаем, что точка — полная производная по времени, т.е. производная по времени вдоль траектории частицы.

Второй член в этом выражении — импульс поля, втекающий в единицу времени в площадку с площадью поперечного сечения $\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{k_к q^2}{mc^2}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} r_0^2$, где r_0 — классический радиус частицы. Например, это может быть давление излучения, которое рассеивается на частице[4]. С диссипацией этот член не связан.

Если $\mathbf{E}$ гармонически колеблется и раскачивает частицу, то $\dot{\mathbf{E}} \sim -\mathbf{v}$, т.е. первый член создаёт вязкое трение, связанное с потерей энергии на излучение.

Если характерная частота поля — $\omega \sim \frac{c}{\lambda}$, то первый член мал по сравнению с электрической силой при следующем условии:

$$\frac{2k_к q^3}{3mc^3}\omega E \ll qE \quad \Rightarrow \quad \frac{k_к q^2}{mc^2} \ll \frac{c}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \lambda \gg \frac{k_к q^2}{mc^2} = r_0.$$

Сравнивая с электрической силой второй член, находим

$$\frac{2k_к q^4}{3m^2c^4} EB \ll qE \quad \Rightarrow \quad B \ll \frac{(mc^2)^2}{k_к q^3}.$$

Мы получили, что условия малости силы радиационного трения совпадают с *условиями применимости классической электродинамики* (3.9.2), (3.9.3) (с. 357).

3.13.2 Интенсивность излучения релятивистских частиц

Мы можем записать поле релятивистской частицы через запаздывающие потенциалы, которые в этом случае называются *потенциалами Лиенара–Вихерта* (см. дополнения, с. 492), но есть более простые подходы.

Мы можем выразить интенсивность излучения релятивистской частицы через временну́ю компоненту 4-мерной силы радиационного трения:

$$I_{\text{мгн.}} = -(\mathbf{v}, \mathbf{F}_{\text{р.тр.}}) = -cf^0_{\text{р.тр.}}.$$

(См. дополнения, с. 492.) Это будет интенсивность излучения в точке самой частицы, включающая обратимую передачу энергии от частицы полю ближней зоны.

Здесь мы вычислим интенсивность на бесконечности (которая отличается на полную производную по времени[5]), проделав аналогичные выкладки:

$$\frac{dp^i_{\text{поля}}}{d\tau} = \underbrace{\frac{dt}{d\tau}}_{\gamma} \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{c}\mathcal{E}_{\text{поля}}; \mathbf{p}_{\text{поля}}\right) = \gamma\left(\frac{1}{c} I; \frac{d\mathbf{p}_{\text{поля}}}{dt}\right).$$

При $v = 0$ имеется только электрическое дипольное излучение, в силу симметричности диаграммы направленности импульс оно не уносит: $\frac{d\mathbf{p}_{\text{поля}}}{dt} = \vec{0}$. Отсюда находим

$$\left.\frac{dp^i_{\text{поля}}}{d\tau}\right|_{v=0} = \left(\frac{1}{c} I_{\mathbf{d}}; \vec{0}\right) = \frac{2k_к q^2}{3c^5}\mathbf{a}^2\,(c; \vec{0}) = \frac{2k_к q^2}{3c^5} w^j w_j\, u^i.$$

Мы выразили 4-силу, действующую на заряд, через 4-скорость $u^i|_{v=0} = (1; \vec{0})$ и 4-ускорение $w^i|_{v=0} = (0; \mathbf{a})$ с помощью хороших тензорных операций: произведений и свёрток. Если два вектора равны в одной системе отсчёта, то они равны в любой другой системе отсчёта.

Таким образом, в произвольной лоренцевой системе отсчёта

$$\frac{dp^i_{\text{поля}}}{d\tau} = \frac{2k_к q^2}{3c^5} w^j w_j\, u^i.$$

Полная интенсивность излучения оказывается скаляром:

$$I = \underbrace{c\frac{d\tau}{dt}}_{\frac{c^2}{u^0}} \frac{dp^0_{\text{поля}}}{d\tau} = \frac{2k_к q^2}{3c^3} w^j w_j.$$

[4] σ — сечение рассеяния электромагнитной волны на свободном заряде, см. п. 3.14.3.1 «Рассеяние и радиационное трение» (с. 389)

[5] Для интенсивности электромагнитного излучения возможны *различные* ***правильные*** формулы, отличающиеся на полную производную по времени. Полная интенсивность на бесконечности также определена неоднозначно и зависит от того, поток энергии через поверхность какой формы мы вычисляем. Для нерелятивистской частицы мы брали поток энергии через большую сферу. Для релятивистской частицы мы будем считать поток энергии через эллипсоид, в который эта сфера расплющилась в результате преобразований Лоренца.

Выражая 4-ускорение через 3-мерные величины:

$$w^j = \left(\gamma^4(\tfrac{\mathbf{v}}{c},\mathbf{a});\gamma^4(\tfrac{\mathbf{v}}{c},\mathbf{a})\tfrac{\mathbf{v}}{c}+\gamma^2\mathbf{a}\right)$$

(см. формулу (1.7.2)), получаем

$$\begin{aligned} w^j w_j &= [\tfrac{1}{c^2}\gamma^4(\mathbf{a},\mathbf{v})\mathbf{v}+\gamma^2\mathbf{a}]^2 - [\tfrac{1}{c}\gamma^4(\mathbf{a},\mathbf{v})]^2 = \\ &= \tfrac{1}{c^4}\gamma^8(\mathbf{a},\mathbf{v})^2\mathbf{v}^2+\gamma^4\mathbf{a}^2+2\tfrac{1}{c^2}\gamma^6(\mathbf{a},\mathbf{v})^2-\tfrac{1}{c^2}\gamma^8(\mathbf{a},\mathbf{v})^2 = \\ &= \gamma^4\mathbf{a}^2+\tfrac{1}{c^2}\gamma^6(\mathbf{a},\mathbf{v})^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$I = \frac{2k_{\text{к}}q^2}{3c^3}w^j w_j = \frac{2k_{\text{к}}q^2}{3c^3}\left(\gamma^4\mathbf{a}^2+\gamma^6(\mathbf{a},\tfrac{\mathbf{v}}{c})^2\right). \tag{3.13.1}$$

Поскольку $\gamma \geqslant 1$, полученная формула даёт большую интенсивность, чем исходная формула для дипольного излучения. Это связано с тем, что новая формула учитывает сразу все порядки мультипольного разложения.

3.13.3 Преобразование частот и углового распределения

Пусть релятивистский источник в сопутствующей системе испускает на частоте ω_0 излучение с интенсивностью по углам

$$dI_0 = f(\theta_0,\phi_0)\,d\Omega_0.$$

Качественно обсудим, как изменятся частота и угловое распределение излучения в лабораторной системе отсчёта.

Более подробное рассмотрение вынесем в дополнения (см. с. 493).

Запишем преобразование для 4-мерного волнового вектора. Скорость излучателя направим по оси x, сферический угол θ тоже будем отсчитывать от оси x:

$$\frac{1}{c}\begin{pmatrix}\omega\\ \omega\,\cos\theta\\ \omega\,\sin\theta\,\cos\phi\\ \omega\,\sin\theta\,\sin\phi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma & \gamma\frac{v}{c} & 0 & 0\\ \gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{c}\begin{pmatrix}\omega_0\\ \omega_0\,\cos\theta_0\\ \omega_0\,\sin\theta_0\,\cos\phi_0\\ \omega_0\,\sin\theta_0\,\sin\phi_0\end{pmatrix} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix}\omega_0\gamma(1+\frac{v}{c}\cos\theta_0)\\ \omega_0\gamma(\frac{v}{c}+\cos\theta_0)\\ \omega_0\,\sin\theta_0\,\cos\phi_0\\ \omega_0\,\sin\theta_0\,\sin\phi_0\end{pmatrix}.$$

Сравнивая пространственные компоненты 4-мерного волнового вектора, находим

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0, \\ \cos\theta &= \frac{\frac{v}{c}+\cos\theta_0}{1+\frac{v}{c}\cos\theta_0}, \\ \cos\theta_0 &= \frac{-\frac{v}{c}+\cos\theta}{1-\frac{v}{c}\cos\theta}. \end{aligned}$$

Сравнивая временны́е компоненты, находим

$$\omega = \omega_0\gamma\left(1+\frac{v}{c}\cos\theta_0\right) = \omega_0\gamma\left(1+\frac{v}{c}\frac{-\frac{v}{c}+\cos\theta}{1-\frac{v}{c}\cos\theta}\right) = \omega_0\gamma\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v}{c}\cos\theta} = \frac{\omega_0}{\gamma(1-\frac{v}{c}\cos\theta)}.$$

Если $v/c \approx 1$ (ультрарелятивистская частица), то частота излучения, испущенного строго вперёд ($\theta = 0$), возрастает в $(1+\frac{v}{c})\gamma \approx 2\gamma$ раз. При этом частоты, излучаемые на углы, существенно отличные от нулевого ($1-\frac{v}{c}\cos\theta \sim 1$), уменьшаются примерно в γ раз (строго назад — примерно в 2γ раз).

Преобразование углов переводит угол $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, разграничивавший переднюю полусферу и заднюю полусферу в системе источника, в угол, определяемый соотношением

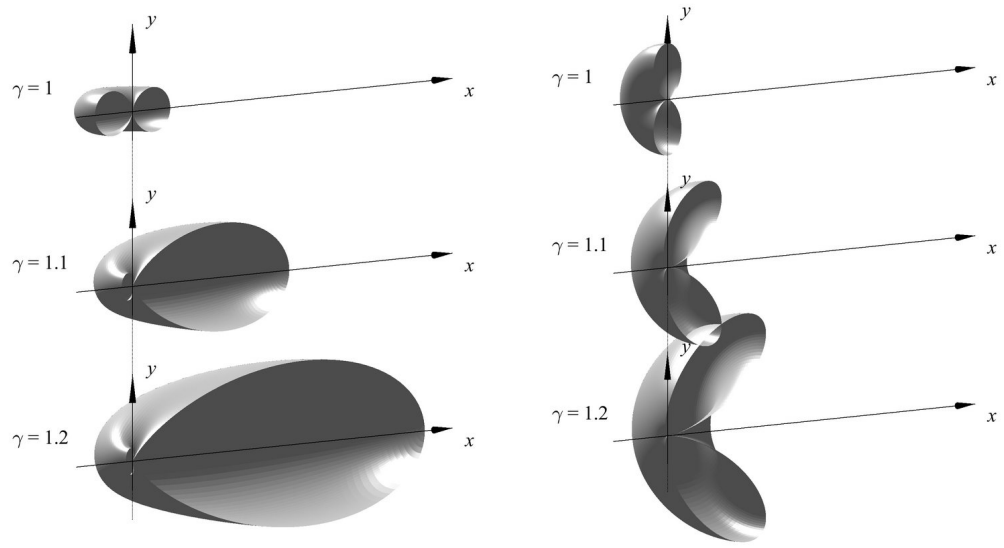
$$\cos\theta\big|_{\theta_0=\frac{\pi}{2}} = \frac{v}{c} \quad\Rightarrow\quad \sin\theta|_{\theta_0=\frac{\pi}{2}} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \gamma^{-1}.$$

В ультрарелятивистском случае $\theta|_{\theta_0=\frac{\pi}{2}} \approx \gamma^{-1}$.

Таким образом, всё то излучение, которое раньше шло в переднюю полусферу, в ультрарелятивистском случае идёт внутрь конуса с углом раствора γ^{-1}. При этом частота (и энергия!) каждого фотона в этом конусе возрастает (по сравнению с системой источника) от γ до $\approx 2\gamma$ раз.

Это даёт *эффект прожектора* — для ультрарелятивистской частицы бóльшая часть излучения ($\frac{1}{2}$, если считать фотоны по штукам, и $\sim \frac{3}{4}$, если считать по энергии[6]) идёт внутрь узкого конуса с углом раствора γ^{-1}.

В частности, для излучения вперёд внутрь конуса для интенсивности получаем множитель γ за счёт эффекта Доплера (каждый фотон несёт больше энергии), $\frac{1}{\gamma}$ за счёт релятивистского замедления времени (фотоны вылетают реже) и $\sim \gamma^2$ за счёт эффекта прожектора (телесный угол внутри конуса $\sim \pi\frac{1}{\gamma^2}$, телесный угол передней полусферы равен 2π). В результате интенсивность возрастает в $\sim \gamma^2$ раз (с помощью более аккуратного расчёта в дополнении получаем $8\gamma^2$ для интенсивности излучения строго вперёд).



Диаграммы направленности для разных значений γ-фактора (скорости: 0; 0,42 c; 0,55 c) для перпендикулярных (левый рисунок) и параллельных (правый рисунок) скорости и ускорения.[7]

3.13.4 Задачи 61, 62

Задача 61. Синхротронное излучение. Найдите энергию излучения релятивистского электрона в однородном магнитном поле за один оборот. Найдите полную мощность (в мегаваттах) синхротронного излучения в ускорителе на встречных пучках электронов и позитронов с энергией 100 ГэВ. Длина окружности ускорителя — 30 км, число ускоряемых частиц в кольце — $5 \cdot 10^{12}$. Оцените характерную длину волны излучения.

Задача 62. Ондуляторное излучение. Пучок релятивистских электронов пролетает через плоский конденсатор, к которому приложено переменное напряжение с частотой ω_0. Найдите частоту излучения электронов в зависимости от угла θ между наблюдателем и направлением движения пучка.

[6]Оценка $\frac{3}{4}$ соответствует равномерному распределению излучения по углам и пределу $\gamma \gg 1$.

[7]Рисунки воспроизводятся с разрешения автора по книге Сыщенко В.В. Электродинамика для начинающих. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований; НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика» — РХД, 2020. — 356 с.

Глава 3.14

Рассеяние (с. 495)

Представляю, как чувствовали бы себя физики, если бы при неизменных условиях опыта литий иногда превращался в гелий, иногда в соломенную шляпу, иногда в малинового медвежонка... Игра без правил, сказали бы шокированные физики.

к.м.н. Журавлёва Валентина Николаевна, фантастический рассказ «Приключение», сборник «Снежный мост над пропастью», 1971 г.

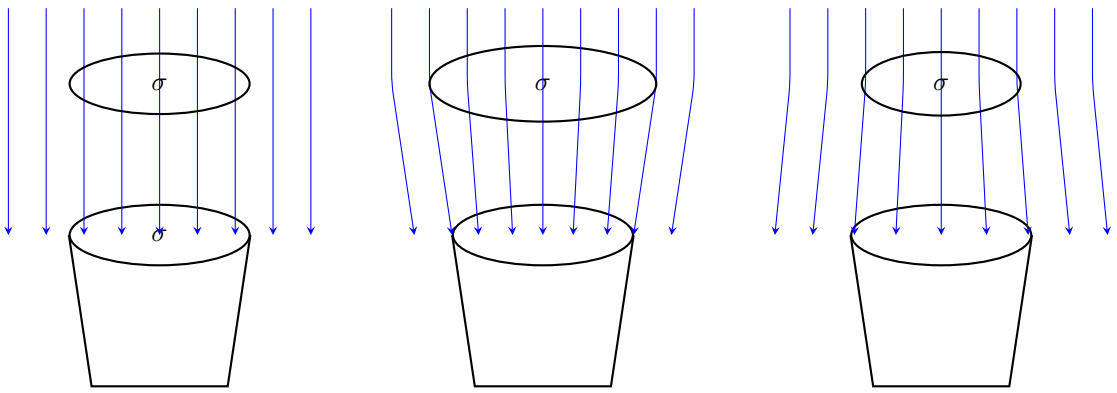
Со времён Резерфорда физики знают, что делать в подобных случаях: надо измерить сечение реакции неупругого рассеяния (превращения) исходной частицы в тот или иной объект, а потом попробовать подобрать подходящий гамильтониан взаимодействия.

3.14.1 Понятие о сечениях рассеяния и поглощения

3.14.1.1 Рассеяние и поглощение частиц

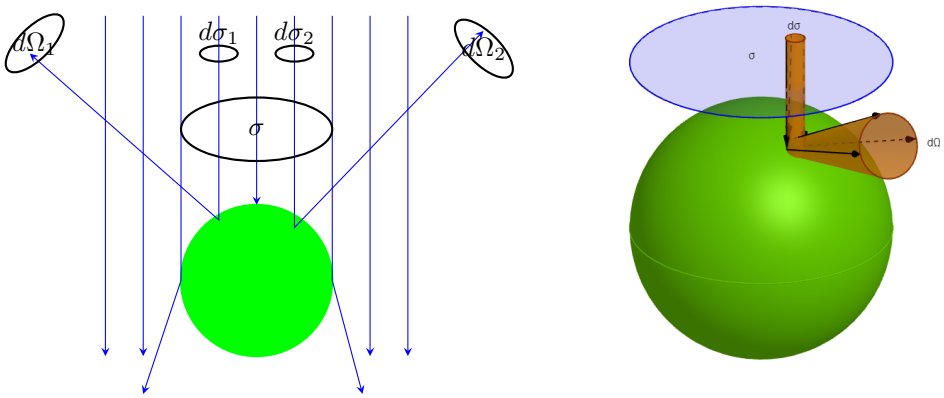
Пусть на мишень, занимающую ограниченную область в пространстве, падает поток частиц с плотностью потока $\mathbf{j}$. Например, представьте, что вы поставили под дождь ведро. Тогда число капель, попавших в ведро в единицу времени, равно площади поперечного сечения ведра σ, умноженной на $|\mathbf{j}|$. В данном случае σ — *сечение поглощения* капли дождя ведром.

Если представить себе, что ведро как-то притягивает или отталкивает капли (например, капли и ведро электрически заряжены), то сечение поглощения может не совпадать с геометрическим сечением ведра: в случае притяжения поток при приближении к ведру будет сужаться, и в результате площадь поперечного сечения потока, который потом залетит в ведро (измеренная на большом расстоянии от ведра, когда его притяжение ещё не сказывается), будет больше, чем собственно площадь ведра. Именно эта площадь сечения будет сечением поглощения. Для отталкивания сечение поглощения может быть меньше.



Сечения поглощения σ капель дождя в зависимости от того, притягивает или отталкивает ведро капли.

В данном случае нет смысла говорить о *дифференциальном сечении*, т.к. при такой постановке эксперимента нам нечего дифференцировать (различать): если капля поглотилась ведром, то мы знаем только, что она поглотилась, в какую точку ведра она попала — неважно.



Полное сечение рассеяния σ и дифференциальное сечение $d\sigma_{1,2}$ горошин на арбузе (гравитацией пренебрегаем); $d\Omega_{1,2}$ — элементы телесного угла (определяются на расстоянии, большом по сравнению с размерами арбуза), куда отлетают горошины, пролетевшие через $d\sigma_{1,2}$ (рисунок справа выполнен В.А. Гуськовым)

При рассеянии мы можем различать рассеянные частицы хотя бы по телесному углу, в который они отлетели. Это позволяет определить *дифференциальное сечение рассеяния* как площадь поперечного сечения потока $d\sigma$, откуда частица отлетела в данный телесный угол $d\Omega$:

$$d\sigma = f(\theta, \phi)\, d\Omega.$$

Интеграл по полному телесному углу даёт *полное сечение рассеяния*:

$$\sigma = \int\limits_{S^2} d\sigma = \int\limits_{S^2} f(\theta, \phi)\, d\Omega.$$

Если рассеянные частицы различаются не только по углу, то дифференциальное сечение может иметь более сложный вид, например, для реакции[1], когда мишень превращает одну падающую частицу в две, энергии которых могут быть разными, сечение будет иметь вид

$$d\sigma_{\text{реакц.}} = f(\theta_1, \phi_1, \mathcal{E}_1, \theta_2, \phi_2, \mathcal{E}_2)\, d\Omega_1\, d\mathcal{E}_1\, d\Omega_2\, d\mathcal{E}_2.$$

Дифференциальное сечение рассеяния частиц на потенциале можно представить в виде элемента площади плоскости, стоящей перпендикулярно набегающему потоку на минус бесконечности (пока частицы набегающего потока ещё не испытывают влияния мишени и летят прямолинейно):

$$d\sigma = b\, d\tilde{\phi}\, db.$$

Здесь b и $\tilde{\phi}$ — полярные координаты на вышеупомянутой плоскости; b — *прицельный параметр* (*прицельное расстояние* — расстояние от оси мишени до траектории частицы в набегающем потоке на минус бесконечности). Углы θ и ϕ, задающие направление рассеяния частицы, выражаются через b и $\tilde{\phi}$. Выразив b и $\tilde{\phi}$ через углы рассеяния, получаем дифференциальное сечение рассеяния в стандартной форме:

$$d\sigma = b(\theta, \phi)\, d\tilde{\phi}(\theta, \phi)\, db(\theta, \phi) = f(\theta, \phi) \underbrace{\sin\theta\, d\phi\, d\theta}_{d\Omega}.$$

Если мишень аксиально-симметрична, причём прицельный параметр отсчитывается от оси симметрии, то $\tilde{\phi} = \phi$, $b = b(\theta)$:

$$d\sigma = b(\theta)\, d\phi\, db(\theta) = b(\theta)\frac{db}{d\theta}\, d\phi\, d\theta = \underbrace{b(\theta)\frac{db}{d\theta}\frac{1}{\sin\theta}}_{f(\theta)}\, d\Omega.$$

(!!ф) В классической механике часто полное сечение рассеяния оказывается бесконечным. Например, любой сферически-симметричный потенциал, который не обращается в константу на конечном расстоянии, будет отклонять (хотя бы чуть-чуть) частицу, пролетающую сколь угодно далеко от центра. В

[1] Если при рассеянии происходит реакция, то это называется *неупругим рассеянием*.

результате интеграл для полного сечения рассеяния расходится на больших прицельных расстояниях (на малых углах θ):

$$\sigma = \int d\sigma = \int^{+\infty} 2\pi b\, db = \infty.$$

Замена переменной интегрирования (с b на θ) не сможет сделать расходящийся интеграл сходящимся.

(!ф) На самом деле при изучении рассеяния мы можем не знать, как устроена мишень. Выше мы предполагали, что мишень рассеивает частицы детерминистическим образом, но это не обязательно, результат рассеяния конкретной частицы может быть случайным. Если рассеиватель — гномик с теннисной ракеткой, который по своему настроению отбивает налетающие частицы туда или сюда, то мы всё равно можем ввести сечение рассеяния (конечно, если гномик работает достаточно стабильно). Мы обычно не имеем возможности отслеживать судьбу отдельной частицы в набегающем потоке (у нас нет возможности даже различать частицы потока) и не знаем, какое было прицельное расстояние у частицы, которая отлетела на тот или иной угол. Более того, согласно квантовой механике частица в одинаковых условиях может с той или иной вероятностью вести себя по-разному. *Поэтому сечения разных процессов определяются через те величины, которые мы можем реально наблюдать на эксперименте, — потоки частиц*:

$$\sigma = \frac{\text{число событий в единицу времени}}{\text{набегающий поток частиц}};$$

$$d\sigma = \frac{\text{число частиц, отлетевших в единицу времени в телесный угол } d\Omega}{\text{набегающий поток частиц}}.$$

Здесь «набегающий поток частиц» — это число частиц в падающем потоке в единицу времени на единицу площади, так что сечение имеет размерность площади.

(!!ф)** Интересно, что *в квантовой механике полное сечение рассеяния оказывается конечным для многих потенциалов, для которых в классической механике получалось бесконечное сечение. Это чисто квантовый эффект.* Сечения рассеяния на кулоновском потенциале совпадают в классическом и квантовом случае (при этом в обоих случаях полное сечение бесконечно). Однако для потенциала Юкавы $\frac{q}{r}\mathrm{e}^{-\kappa r}$ полное сечение рассеяния в квантовой механике оказывается конечным, тогда как в классической — бесконечным (как мы показали выше). Такое различие связано с тем, что *рассеяние на малые углы не попадает в область применимости классической механики.*

3.14.1.2 Рассеяние и поглощение волн

Может также рассматриваться рассеяние не частиц, а волн. При этом как для налетающего потока, так и для рассеянного вместо числа частиц считаем энергию, усреднённую по периоду:

$$\sigma_{\text{погл.}} = \frac{\text{средняя энергия, поглощённая в единицу времени}}{\text{средний набегающий поток энергии}};$$

$$\sigma_{\text{расс.}} = \frac{\text{средняя энергия, рассеянная в единицу времени}}{\text{средний набегающий поток энергии}};$$

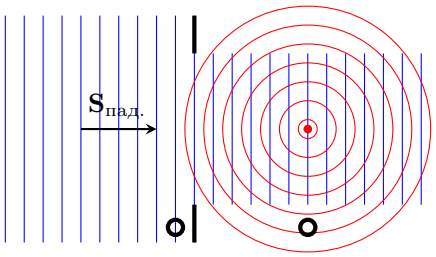
$$d\sigma_{\text{расс.}} = \frac{\text{средняя энергия, рассеянная в единицу времени в телесный угол } d\Omega}{\text{средний набегающий поток энергии}}.$$

Здесь «набегающий поток энергии» — это количество энергия в падающем потоке в единицу времени на единицу площади, так что сечение имеет размерность площади.

С использованием ранее введённых обозначений *сечения рассеяния волн* можно записать

$$\sigma = \frac{\overline{I_{\text{расс.}}}}{|\mathbf{S}_{\text{пад.}}|}, \qquad d\sigma = \frac{\overline{dI_{\text{расс.}}}}{|\mathbf{S}_{\text{пад.}}|}.$$

Все потоки энергии надо измерять далеко от рассеивателя, исключая для падающей волны интерференцию с рассеянной, а для рассеянной волны — с падающей.



Падающий поток измеряем там, куда не попадает рассеянный, а рассеянный — там, куда не попадает падающий. (Датчики обозначены жирными кружками.) По этой причине измерение рассеяния на малые углы оказывается сложным. Волна, рассеянная на нулевой угол, неизбежно интерферирует с прошедшей волной и ослабляет её (энергия рассеяния и поглощения вычитается из энергии набегающего потока)

3.14.2 Постановка задачи рассеяния в электродинамике

Имеется рассеиватель, на который падает плоская монохроматическая волна с циклической частотой ω, потоком энергии $\mathbf{S}_{\text{пад.}}$ и *тензором поляризации* $\rho_{\alpha\beta}$.

Под действием волны в рассеивателе возбуждаются колебания зарядов и токов.

Колебания зарядов и токов излучают вторичные (рассеянные) электромагнитные волны с угловым распределением интенсивности $dI_{\text{расс.}}$.

Сечение рассеяния определяется как

$$\sigma = \frac{\overline{I_{\text{расс.}}}}{|\mathbf{S}_{\text{пад.}}|}, \qquad d\sigma = \frac{\overline{dI_{\text{расс.}}}}{|\mathbf{S}_{\text{пад.}}|} = f(\omega, \rho_{\alpha\beta}, \theta, \phi)\, d\Omega.$$

Если размер рассеивателя мал по сравнению с длиной падающей волны $\frac{2\pi}{\omega}$, то излучение вторичной волны может быть вычислено в мультипольном приближении.

3.14.3 Рассеяние электромагнитной волны на осцилляторе

Рассмотрим рассеяние электромагнитной волны с амплитудой $\mathbf{E}_0$, распространяющейся в направлении $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$, и циклической частотой ω на электрически заряженном осцилляторе с собственной частотой ω_0 и коэффициентом затухания γ. Размеры осциллятора малы по сравнению с длиной волны $\frac{2\pi}{\omega}$. Колебания осциллятора происходят с нерелятивистскими скоростями.

Решим задачу о вынужденных колебаниях осциллятора:

$$m\ddot{\mathbf{r}} + 2m\gamma\dot{\mathbf{r}} + m\omega_0^2\mathbf{r} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}[\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}] = q\mathrm{Re}\left(\mathbf{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}((\mathbf{k},\mathbf{r})-\omega t)}\right) + \frac{q}{c}\left[\dot{\mathbf{r}} \times \mathrm{Re}\left([\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0]\mathrm{e}^{\mathrm{i}((\mathbf{k},\mathbf{r})-\omega t)}\right)\right].$$

Уравнение нелинейно, поскольку $\mathbf{r}$ присутствует в показателях комплексных экспонент. Тем не менее в условиях задачи уравнение можно существенно упростить.

- Пренебрежём магнитным полем, поскольку создаваемая им сила содержит множитель $\left|\frac{\dot{\mathbf{r}}}{c}\right| \ll 1$, с учётом того, что в бегущей волне $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$ эта сила много меньше, чем $q\mathbf{E}$.
- Пренебрежём зависимостью от $\mathbf{r}$ электрического поля. Для нерелятивистского колебания $|\mathbf{r}| \ll \lambda = \frac{2\pi}{\omega}$, в показателе экспоненты $|(\mathbf{k}, \mathbf{r})| \ll 1$, поэтому для осциллятора электрическое поле практически однородно, хотя и зависит от времени.

В результате мы получаем стандартное уравнение для вынужденных колебаний осциллятора под действием гармонической внешней силы:

$$\ddot{\mathbf{r}} + 2\gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{q}{m}\mathrm{Re}\left(\mathbf{E}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right).$$

Ищем решение в виде

$$\mathbf{r} = \mathrm{Re}\left(\mathbf{r}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right).$$

Подставив это решение в уравнение движения и отбросив Re, получаем уравнение на комплексную амплитуду:

$$-\omega^2\mathbf{r}_0 - \mathrm{i}2\gamma\omega\mathbf{r}_0 + \omega_0^2\mathbf{r}_0 = \frac{q}{m}\mathbf{E}_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_0 = \frac{\frac{q}{m}\mathbf{E}_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) - \mathrm{i}2\gamma\omega}.$$

Отсюда получаем дипольный момент и его вторую производную:

$$\mathbf{d} = \mathrm{Re}\left(\frac{\frac{q^2}{m}\mathbf{E}_0\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{(\omega_0^2 - \omega^2) - \mathrm{i}2\gamma\omega}\right), \qquad \ddot{\mathbf{d}} = \mathrm{Re}\left(\frac{-\omega^2\frac{q^2}{m}\mathbf{E}_0\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{(\omega_0^2 - \omega^2) - \mathrm{i}2\gamma\omega}\right).$$

Интенсивность дипольного излучения по углам:

$$dI_{\mathbf{d}} = k_{\text{к}}\frac{d\Omega}{4\pi c^3}\ddot{\mathbf{d}}_\perp^2, \qquad \ddot{\mathbf{d}}_\perp = \ddot{\mathbf{d}} - \mathbf{N}(\mathbf{N}, \ddot{\mathbf{d}}), \qquad \mathbf{N} = \frac{\mathbf{R}}{R}.$$

С учётом вещественности единичного вектора $\mathbf{N}$, задающего направление рассеяния, получаем

$$\ddot{\mathbf{d}}_\perp = \mathrm{Re}\left(\frac{-\omega^2 \frac{q^2}{m}\mathbf{E}_{0\perp}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{(\omega_0^2-\omega^2)-\mathrm{i}2\gamma\omega}\right).$$

Средняя по времени плотность потока энергии в падающей волне:

$$\overline{|\mathbf{S}|} = \frac{c}{4\pi k_\text{к}}\overline{(E^2)_t} = \frac{c}{4\pi k_\text{к}}\overline{(\mathrm{Re}\mathbf{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})_t^2} = \frac{c}{8\pi k_\text{к}}(\mathbf{E}_0^*,\mathbf{E}_0).$$

Средняя по времени интенсивность рассеянной волны вычисляется аналогично с заменой амплитуды $\mathbf{E}_0$ на $\frac{-\omega^2\frac{q^2}{m}\mathbf{E}_{0\perp}}{(\omega_0^2-\omega^2)-\mathrm{i}2\gamma\omega}$:

$$\overline{dI_\mathbf{d}} = k_\text{к}\frac{d\Omega}{4\pi c^3}\overline{(\ddot{\mathbf{d}}_\perp^2)_t} = k_\text{к}\frac{d\Omega}{8\pi c^3}\left(\left[\frac{-\omega^2\frac{q^2}{m}\mathbf{E}_{0\perp}}{(\omega_0^2-\omega^2)-\mathrm{i}2\gamma\omega}\right]^*, \frac{-\omega^2\frac{q^2}{m}\mathbf{E}_{0\perp}}{(\omega_0^2-\omega^2)-\mathrm{i}2\gamma\omega}\right) = k_\text{к}\frac{d\Omega}{8\pi c^3}\frac{\omega^4\frac{q^4}{m^2}(\mathbf{E}_{0\perp}^*,\mathbf{E}_{0\perp})}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}.$$

Дифференциальное сечение рассеяния имеет вид

$$d\sigma = \frac{\overline{dI_\mathbf{d}}}{\overline{|\mathbf{S}|}} = \left(\underbrace{\frac{k_\text{к}q^2}{mc^2}}_{r_0}\right)^2\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}(\mathbf{e}_\perp^*,\mathbf{e}_\perp)\,d\Omega,$$

где $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{E}_0}{\sqrt{(\mathbf{E}_0^*,\mathbf{E}_0)}}$ — *вектор поляризации* падающей волны. Угловую зависимость можно переписать так:

$$(\mathbf{e}_\perp^*,\mathbf{e}_\perp) = (\mathbf{e}^*,\mathbf{e}) - (\mathbf{e}^*,\mathbf{N})(\mathbf{e},\mathbf{N}) = 1 - |(\mathbf{e},\mathbf{N})|^2 = 1 - e_\alpha e_\beta^* N_\alpha N_\beta.$$

Если падающая волна не была полностью поляризована, то при усреднении по времени, большому по сравнению со временем когерентности падающей волны, получаем, что $e_\alpha e_\beta^* \to \rho_{\alpha\beta}$.

Ответ можно записать через *тензор поляризации*:

$$d\sigma = \frac{\overline{dI_\mathbf{d}}}{\overline{|\mathbf{S}|}} = r_0^2\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}(1-\rho_{\alpha\beta}N_\alpha N_\beta)\,d\Omega, \qquad r_0 = \frac{q^2}{mc^2}.$$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}r_0^2\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}.$$

Поляризация рассеянной волны задаётся вектором $\mathbf{E}_{0\perp}$ (прочие множители можно откинуть). Аналогично проецируется на плоскость, нормальную к $\mathbf{N}$, тензор поляризации:

$$\rho_{\alpha\beta}^\text{расс.} = \mathrm{const}\cdot\rho_{\mu\nu}(\delta_{\mu\alpha}-N_\mu N_\alpha)(\delta_{\nu\beta}-N_\nu N_\beta).$$

Нормировочная константа определяется из условия $\rho_{\alpha\alpha}^\text{расс.} = 1$.

(!ф) Для монохроматической падающей волны осциллятор в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{n}$ (напомним, что $\mathbf{n}$ задаёт направление распространения падающей волны), выписывает со сдвигом по фазе такую же кривую, как вектор поля $\mathbf{E}$. Поляризация рассеянной волны соответствует проекции этой фигуры на плоскость зрения наблюдателя (плоскость, нормальную к оси зрения наблюдателя $\mathbf{N}$).

Мы видим, что, даже если падающая волна не была поляризована, волна, рассеянная на $\frac{\pi}{2}$, будет полностью линейно поляризована в плоскости фронта падающей волны.

Если падающая волна поляризована по кругу, то для рассеяния строго вперёд поляризация сохраняется, для рассеяния строго назад спиральность меняется на противоположную, а для рассеяния на промежуточные углы получаются эллиптические поляризации, причём в волне, рассеянной в переднюю полусферу, направление вращения поля то же, что в падающей волне, а для рассеяния в заднюю полусферу — противоположное.

3.14.3.1 Рассеяние и радиационное трение

При гармоническом колебании с циклической частотой ω третья производная может быть выражена через первую:

$$\dddot{\mathbf{r}} = -\omega^2\dot{\mathbf{r}} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{F}_\text{р.тр.} = \frac{2k_\text{к}q^2}{3c^3}\,\dddot{\mathbf{r}} = -2\,\frac{\omega^2 k_\text{к}q^2}{3c^3}\dot{\mathbf{r}} = -2m\gamma_\text{р.тр.}\dot{\mathbf{r}}.$$

Это позволяет описать *радиационное трение* как вязкое трение, выбрав

$$\gamma_\text{р.тр.} = \frac{\omega^2 k_\text{к}q^2}{3mc^3}.$$

Также с радиационным трением связано давление света на рассеиватель. В дипольном приближении диаграмма направленности симметрична, поэтому рассеянная волна уносит энергию, но не уносит импульс, а значит, на частицу действует сила давления волны

$$\mathbf{F}_{\text{дав.в.}} = \tfrac{1}{c}\sigma\mathbf{S}_{\text{пад.}}.$$

В случае свободной частицы получается результат, который уже был нами получен в параграфе про радиационное трение:

$$\mathbf{F}_{\text{дав.в.}} = \frac{1}{c}\frac{8\pi}{3}r_0^2\mathbf{S}_{\text{пад.}}.$$

(ф*) Вязкое трение связано с поглощением энергии падающей электромагнитной волны и переводом её в тепло. Мощность силы вязкого трения связана с *сечением поглощения*. Радиационное трение связано с переизлучением энергии падающей электромагнитной волны в виде рассеянных волн. Мощность силы радиационного трения связана с *сечением рассеяния*.

3.14.4 Задачи 63—65

Задача 63. Рассеяние горошин на арбузе. В соответствии с рассмотренным при постановке задачи рассеяния примером найдите дифференциальное и полное сечения рассеяния точечных частиц на абсолютно твёрдой сфере радиусом R.

Задача 64. Резерфордовское рассеяние. Найдите дифференциальное сечение рассеяния заряженных частиц на кулоновском потенциале. Проверьте, что полное сечение рассеяния бесконечно (расходится на малых углах).

Задача 65. Рассеяние электромагнитной волны.
а) Запишите дифференциальные и полные сечения рассеяния линейно поляризованного и «естественного» (неполяризованного) света осциллятором с затуханием.
б) Найдите сечение поглощения света на осцилляторе с затуханием.

Глава 3.15

Электродинамика в среде и единицы измерения в электродинамике (с. 498)

До сих пор среди физиков существуют разногласия по поводу выбора наиболее удобной системы единиц для электродинамики. В данной книге используется «физико-техническая» (ФТ) система единиц, которая отличается как от международной системы единиц (СИ), так и от популярной у теоретиков гауссовой системы сантиметр-грамм-секунда (СГС).

Чтобы обосновать данный выбор, надо сравнить системы ФТ, СИ и СГС. Такое сравнение требует хотя бы начального знакомства с электродинамикой в среде.

До сих пор мы рассматривали классическую электродинамику в вакууме. В вакууме могут присутствовать поля и частицы, причём важно, что частицы описываются дополнительными (по отношению к полям) степенями свободы. Вакуум выступает как некоторая «арена», на которой действуют поля и частицы. Вакуум — это то, что остаётся, если убрать все частицы и выключить все поля.

Электродинамика в среде также может рассматриваться методами электродинамики в вакууме, в этом случае надо учитывать степени свободы, связанные со всеми частицами среды независимо от полевых степеней свободы.

Обычно электродинамика в среде (*электродинамика сплошных сред*, или *макроскопическая электродинамика*) использует упрощённое описание среды, при котором бóльшая часть связанных со средой степеней свободы приближённо выражается через полевые степени свободы[1]. При этом не вся динамика частиц относятся к «среде»: часть связанных с частицами степеней свободы рассматриваются отдельно, как некоторые *сторонние* (*внешние*) *заряды и токи* на фоне среды[2]. Таким образом, электродинамика в среде обычно подразумевает, что среда — некоторая «арена», на которой действуют сторонние поля, заряды и токи. Среда — это то, что остаётся, если убрать все сторонние заряды и токи и выключить все сторонние поля.

Разделение зарядов и токов в среде на сторонние (описывающиеся отдельными степенями свободы) и связанные (выражающиеся через полевые степени свободы) зависит от задачи. Например, ток проводимости в одних задачах описывается как сторонний, а в других — как связанный. Но при этом предполагается, что как для сторонних, так и для связанных токов и зарядов по отдельности выполняется уравнение непрерывности, т. е. сторонние и связанные заряды сохраняются по отдельности, не превращаясь друг в друга.

3.15.1 Параметризация связанных источников

Выпишем уравнения Максвелла с разделением сторонних и связанных зарядов и токов в 3-мерном и 4-мерном видах.

Первая пара уравнений Максвелла не содержит источников (зарядов и токов), так что она переписывается без изменений:

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0,\quad \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\quad\Leftrightarrow\quad \partial_i F_{jk}+\partial_j F_{ki}+\partial_k F_{ij}=0.$$

[1] Похожий подход мы обсуждали в § 2.13.1 «Классическая потенциальная энергия и макроскопические силы из СТО» (стр. 277). Там речь шла о том, что при скоростях, малых по сравнению со скоростью распространения возмущений в среде (или поле), связанные со средой (или полем) степени свободы можно приближённо выразить через степени свободы частиц и заменить взаимодействие частиц через среду (или поле) дальнодействием.

[2] Поскольку электродинамика в среде — макроскопическая теория, сторонние заряды и токи обычно (хотя и не всегда) рассматриваются как непрерывные.

Вторая пара уравнений Максвелла принимает вид

$$\left\{\begin{array}{l}\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi k_{\text{к}}\rho_{\text{связ}}+4\pi k_{\text{к}}\rho_{\text{стор}},\\ \operatorname{rot}\mathbf{B}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\mathbf{j}_{\text{связ}}+\frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\mathbf{j}_{\text{стор}}\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \partial_k F^{jk}=\frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}j^j_{\text{связ}}+\frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}j^j_{\text{стор}}.$$

Поскольку для связанных зарядов и токов выполняется *уравнение непрерывности*

$$\frac{\partial\rho_{\text{связ}}}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{j}_{\text{связ}}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \partial_i j^i_{\text{связ}}=0,$$

мы можем ввести параметризацию с помощью антисимметричного *тензора поляризации среды* P^{ik}, из которой уравнение непрерывности следует автоматически:

$$j^i_{\text{связ}}=c\partial_k P^{ik},\quad P^{ik}=-P^{ki}.$$

(!*) Параметризация связанных зарядов и токов через тензор поляризации среды неоднозначна! Преобразование вида $P^{jk}\to P'^{jk}=P^{jk}+\partial_l\phi^{jkl}$, где ϕ^{ijk} — произвольный полностью антисимметричный тензор, меняет тензор P^{ij}, оставляя 4-вектор связанных токов $j^i_{\text{связ}}$ неизменным. Подробнее мы обсудим это в факультативных параграфах 4.15.1 «Неоднозначность полей $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$» (стр. 498) и 4.15.2 «Откуда берётся неоднозначность полей $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$?» (стр. 499).

Компоненты 4-мерного тензора P^{ik} можно параметризовать двумя 3-мерными векторами, подобно тому как мы параметризуем тензор электромагнитного поля:

$$P^{ik}=\begin{pmatrix}0 & -P_x & -P_y & -P_z\\ P_x & 0 & M_z & -M_y\\ P_y & -M_z & 0 & M_x\\ P_z & M_y & -M_x & 0\end{pmatrix},$$

где

- $\mathbf{P}$ — (*диэлектрическая*) *поляризация среды*,
- $\mathbf{M}$ — *намагниченность среды*.

Физический смысл этих векторов мы обсудим ниже.

Через эти векторы мы можем переписать параметризацию в 3-мерном виде:

$$\rho_{\text{связ}}=\frac{1}{c}j^0_{\text{связ}}=\partial_\alpha P^{0\alpha}=-\operatorname{div}\mathbf{P},$$

$$j^\alpha_{\text{связ}}=c\,\partial_k P^{\alpha k}=\underbrace{c\,\partial_0}_{\frac{\partial}{\partial t}}\underbrace{P^{\alpha 0}}_{P_\alpha}+c\,\partial_\beta\underbrace{P^{\alpha\beta}}_{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}M_\gamma} \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{j}_{\text{связ}}=\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}+c\operatorname{rot}\mathbf{M}.$$

С использованием введённой параметризации вторая пара уравнений Максвелла приобретает вид

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}+4\pi k_{\text{к}}\mathbf{P})=4\pi k_{\text{к}}\rho_{\text{стор}},\quad \operatorname{rot}(\mathbf{B}-4\pi k_{\text{к}}\mathbf{M}_{\text{связ}})=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}+4\pi k_{\text{к}}\mathbf{P})+\frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\mathbf{j}_{\text{стор}}\quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad \partial_k\left(F^{jk}-4\pi k_{\text{к}}P^{jk}\right)=\frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}j^j_{\text{стор}}.$$

Мы видим, что компоненты тензора P^{jk} комбинируются с компонентами тензора электромагнитного поля F^{jk} и образуют новый тензор:

$$H^{jk}=F^{jk}-4\pi k_{\text{к}}P^{jk}\quad\Leftrightarrow\quad\left\{\begin{array}{rcl}\mathbf{D}&=&\mathbf{E}+4\pi k_{\text{к}}\mathbf{P},\\ \mathbf{H}&=&\mathbf{B}-4\pi k_{\text{к}}\mathbf{M}.\end{array}\right.$$

Если использовать эти комбинации полей и поляризаций, то уравнения Максвелла в присутствии связанных зарядов и токов пишутся в форме, похожей на уравнения Максвелла в вакууме, но во второй паре используются новые поля $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$, образующие тензор H^{jk}:

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0,\quad \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\quad\Leftrightarrow\quad \partial_i F_{jk}+\partial_j F_{ki}+\partial_k F_{ij}=0, \tag{3.15.1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D}=4\pi k_{\text{к}}\rho_{\text{стор}},\quad \operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\mathbf{j}_{\text{стор}}\quad\Leftrightarrow\quad \partial_k H^{jk}=\frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}j^j_{\text{стор}}. \tag{3.15.2}$$

Для четырёх полей, входящих в уравнения Максвелла в присутствии связанных зарядов и токов, используются следующие названия.

- Для полей из первой пары уравнений Максвелла:
  - $\mathbf{E}$ — ***напряжённость*** *электрического поля*;
  - $\mathbf{B}$ — ***индукция*** *магнитного поля.*
- Для полей из второй пары уравнений Максвелла:
  - $\mathbf{D}$ — ***индукция*** *электрического поля*;
  - $\mathbf{H}$ — ***напряжённость*** *магнитного поля.*

Терминология непоследовательна, но именно такое употребление терминов сложилось исторически.

Пока мы ничем не пренебрегали и не получили ничего нового по сравнению с обычными уравнениями Максвелла: мы лишь выделили часть источников и параметризовали их. Чтобы получить электродинамику в среде, нам понадобятся ещё два предположения.

- Усредним (сгладим) поля и источники по пространственным координатам на масштабе нескольких размеров образующих среду молекул (чтобы среда стала действительно сплошной).
- Предположим, что поля $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ могут быть *приближённо* выражены через поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$.

3.15.2 Усреднение (сглаживание) полей и источников

Пространственное усреднение (сглаживание) возможно благодаря тому, что уравнения Максвелла линейны по полям и источникам. Усреднение можно представить как свёртку[3] исходной функции $f(\mathbf{r})$ с некоторой сглаживающей функцией $\chi(\mathbf{r})$:

$$\bar f(\mathbf{r}) = \int \chi(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, f(\mathbf{r}')\, d^3\mathbf{r}' = \int \chi(\mathbf{r}')\, f(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, d^3\mathbf{r}', \qquad \int \chi(\mathbf{r})\, d^3\mathbf{r} = 1. \tag{3.15.3}$$

Функция $\chi(\mathbf{r})$ описывает плотность заряда, которую такое сглаживание сопоставляет единичному точечному заряду, находящемуся в начале координат.

В качестве сглаживающей функции $\chi(\mathbf{r})$ можно использовать (отнормировав на единицу), например, характеристическую функцию шара, гауссову функцию или *шапочку Соболева.* Для сглаживания на расстоянии r_0 эти функции имеют вид

$$\begin{aligned}
\chi_1(\mathbf{r}) &= \begin{cases} (\frac{4}{3}\pi r_0^3)^{-1}, & |\mathbf{r}| < r_0, \\ 0, & |\mathbf{r}| \geqslant r_0; \end{cases} \\
\chi_2(\mathbf{r}) &= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\mathbf{r}^2}{r_0^2}}}{(\sqrt{\pi} r_0)^3}; \\
\chi_3(\mathbf{r}) &= \begin{cases} \frac{C}{r_0^3}\, \exp\left(\frac{r_0^2}{|\mathbf{r}|^2 - r_0^2}\right), & |\mathbf{r}| < r_0, \\ 0, & |\mathbf{r}| \geqslant r_0, \end{cases} \qquad C \approx 2{,}26712.
\end{aligned}$$

Первая функция наиболее проста, но не дифференцируема. Вторая и третья функции бесконечно дифференцируемы. Вторая функция размазывает точечный заряд до бесконечности (но в основном на характерное расстояние порядка r_0), а первая и третья — по шару радиусом r_0.

В физике конкретный способ сглаживания обычно не конкретизируется, поскольку на фоне других приближений эта деталь оказывается несущественной, либо модель с самого начала описывает непрерывное распределение зарядов.

Сглаживание полей и источников переводит решения уравнения Максвелла снова в решения, но энергия поля при этом меняется. Сглаживание на масштабе r_0 подавляет фурье-гармоники поля с длиной волны меньше r_0 и уменьшает связанную этими гармониками энергию. Обычно на данных масштабах преобладают поля, связанные с устройством среды на атомном и молекулярном уровнях, тогда потерянную при усреднении энергию мы можем приписать структуре среды. Изменения на малых масштабах, связанных со структурой среды, оказываются быстрыми по сравнению с изменениями на масштабах, связанных со сторонними источниками, что позволяет исключить соответствующие степени свободы.

Для ионного кристалла (например, для поваренной соли, в которой ионы натрия и хлора чередуются в шахматном порядке) сглаживание убирает сильные электрические поля, удерживающие вместе образующие кристалл ионы. Таким образом, в этом случае сглаживание выводит из рассмотрения энергию связи элементов среды.

[3] Свёртка в смысле *свёртки функций* из математического анализа, не путайте с тензорной свёрткой. Формулу для свёртки (3.15.3) мы записали в двух видах, чтобы было видно, что свёртка двух функций дифференцируема не меньшее число раз, чем более гладкая функция.

3.15.3 Смысл векторных полей P и M

Пусть вектор поляризации $\mathbf{P}$ отличен от нуля только в некотором компактном объёме V. Тогда интеграл по объёму от вектора поляризации даёт дипольный момент находящихся в этом объёме связанных зарядов:

$$\int\limits_V P_\alpha\, d^3\mathbf{r} = \int\limits_V P_\beta \underbrace{\delta_{\alpha\beta}}_{\partial_\beta r_\alpha}\, d^3\mathbf{r} = \int\limits_V r_\alpha \underbrace{(-\partial_\beta P_\beta)}_{\rho_{\text{связ}}}\, d^3\mathbf{r} = \int\limits_V r_\alpha \rho_{\text{связ}}\, d^3\mathbf{r} = d_{\alpha\ \text{связ}}.$$

Аналогично для вектора намагниченности $\mathbf{M}$ имеем

$$\mu_{\alpha\ \text{связ}} = \frac{1}{2c}\int\limits_V [\mathbf{r}\times\mathbf{j}_{\text{связ}}]_\alpha\, d^3\mathbf{r} = \frac{1}{2c}\int\limits_V \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} r_\beta j_{\gamma\ \text{связ}}, d^3\mathbf{r} = \frac{1}{2c}\int\limits_V \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} r_\beta \left(\frac{\partial P_\gamma}{\partial t} + c\varepsilon_{\gamma\mu\nu}\partial_\mu M_\nu\right) d^3\mathbf{r} =$$

$$= \frac{1}{2c}\int\limits_V \left[\mathbf{r}\times\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}\right]_\alpha d^3\mathbf{r} - \frac{1}{2}\int\limits_V \underbrace{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\overbrace{(\partial_\mu r_\beta)}^{\delta_{\beta\mu}}\varepsilon_{\gamma\mu\nu}}_{-2\delta_{\alpha\nu}} M_\nu\, d^3\mathbf{r} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2c}\int\limits_V [\mathbf{r}\times\mathbf{P}]_\alpha\, d^3\mathbf{r} + \int\limits_V M_\alpha\, d^3\mathbf{r}.$$

Мы получили, что

- $\mathbf{P}$ — электрический дипольный момент на единицу объёма;
- $\mathbf{M}$ — магнитный дипольный момент на единицу объёма при условии, что вектор $\mathbf{P}$ не зависит от времени.

(!) Мы видим, что векторные поля $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$, а вместе с ними и дипольные моменты связанных источников на единицу объёма оказываются определены неоднозначно. Таким образом, определение полей $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$ (а вместе с ними и полей $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$) в каждой конкретной задаче — это вопрос удобства. Споры о том, какое определение $\mathbf{P}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ является «правильным», столь же бессмысленны, как споры о том, какое калибровочное условие на потенциалы φ и $\mathbf{A}$ является правильным. Правильный ответ: любое при условии непротиворечивости.

Принято определять поляризацию среду таким образом, чтобы за пределами среды (в вакууме) поляризация среды отсутствовала: $\mathbf{P}_{\text{вак}} = 0$, $\mathbf{M}_{\text{вак}} = 0$, $\mathbf{D}_{\text{вак}} = \mathbf{E}$, $\mathbf{H}_{\text{вак}} = \mathbf{B}$.

На границе сред поля $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$ испытывают скачок. Дифференцирование этого скачка в смысле обобщённых функций позволяет получить *поверхностные плотности связанных зарядов* σ *и токов* $\vec{i}$:

$$\sigma = -(\delta\mathbf{P}, \mathbf{n}), \qquad \vec{i} = c[\mathbf{n}\times\delta\mathbf{M}],$$

где $\delta\mathbf{P}$ и $\delta\mathbf{M}$ — скачки соответствующих полей при переходе из одной среды в другую в направлении, заданном единичной нормалью к границе сред $\mathbf{n}$.

3.15.3.1 Как обычно определяют поля P и M?

В простейшей модели предполагается, что векторы поляризации и намагниченности пропорциональны электрическому полю $\mathbf{E}$ и магнитной индукции $\mathbf{B}$ *в данной точке в данный момент времени*, причём коэффициенты пропорциональности не зависят от направления полей (среда изотропна):

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \alpha\mathbf{E}, \\ \mathbf{M} &= \beta\mathbf{B} \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{M} = \chi\mathbf{H}. \end{aligned}$$

Коэффициенты пропорциональности называются:

α — *диэлектрической восприимчивостью*;

χ — *магнитной восприимчивостью.*

Запись $\mathbf{M}$ через нефизическую величину $\mathbf{H}$ связана с исторически сложившейся традицией.

Те же соотношения можно переписать для для напряжённостей и индукций электрического магнитного полей:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{E} + 4\pi k_{\text{к}}\mathbf{P} = \varepsilon\mathbf{E}, \qquad \varepsilon = 1 + 4\pi k_{\text{к}}\alpha, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{H} + 4\pi k_{\text{к}}\mathbf{M} = \mu\mathbf{H}, \qquad \mu = 1 + 4\pi k_{\text{к}}\chi. \end{aligned}$$

Коэффициенты пропорциональности называются:

ε — *диэлектрической проницаемостью*; μ — *магнитной проницаемостью.*

Уравнения Максвелла в однородной среде в этом случае можно переписать в форме, аналогичной уравнениям Максвелла в вакууме, если ввести модифицированные поля и параметры:

$$\mathbf{E}' = \sqrt{\varepsilon}\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\sqrt{\varepsilon}}, \qquad \mathbf{B}' = \sqrt{\mu}\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\mu}}, \qquad c' = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \qquad \rho'_{\text{стор}} = \frac{\rho_{\text{стор}}}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \mathbf{j}'_{\text{стор}} = \frac{\mathbf{j}_{\text{стор}}}{\sqrt{\varepsilon}}; \tag{3.15.4}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H}' = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E}' = -\frac{1}{c'}\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E}' = 4\pi k_{\text{к}}\rho'_{\text{стор}}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{B}' = \frac{1}{c'}\frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t} + \frac{4\pi k_{\text{к}}}{c'}\mathbf{j}'_{\text{стор}}.$$

В данном приближении мы можем перенести из вакуума в однородную среду все решения уравнения Максвелла с умножением всех зарядов и токов на $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ и заменой скорости света в вакууме c на скорость света в среде $c' = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$. Коэффициент $\sqrt{\varepsilon\mu}$ идентифицируется как *показатель преломления* среды.

(!) Более того, для однородной среды становятся реализуемыми некоторые решения, которые для электродинамики в вакууме были нефизическими. Так, движение электрического заряда со сверхсветовой скоростью в вакууме нарушает *принцип причинности*, а движение заряда со сверхсветовой скоростью в среде (со скоростью больше скорости света в среде, но меньше, чем скорость света в вакууме) возможно. При этом наблюдается *эффект Вавилова–Черенкова*: заряд излучает ударную электромагнитную волну (похожую на ударную волну, излучаемую сверхзвуковым телом в аэродинамике) — *черенковское излучение*.

Исходная симметрия вакуумных уравнений Максвелла по отношению к преобразованиям Лоренца при этом нарушается, но появляется симметрия по отношению к преобразованиям Лоренца, в которые вместо c входит c'. Новая симметрия (в отличие от исходных преобразований Лоренца) уже не является фундаментальной: ей удовлетворяют только уравнения электродинамики в однородной среде и только в данном приближении.

Более сложные модели обычно обобщают вышепреведённую, например, восприимчивости и проницаемости могут зависеть от направления, тогда они описываются вещественными матрицами:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + 4\pi k_{\text{к}}\alpha_{\alpha\beta}, \qquad \mu_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + 4\pi k_{\text{к}}\chi_{\alpha\beta}.$$

Такая модель способна описывать среды с двойным лучепреломлением (для которых скорость света в среде различается для двух ортогональных линейных поляризаций электромагнитной волны).

Можно учесть зависимость поляризации и намагниченности от полей в предыдущие моменты времени (эффект памяти, или нелокальность по времени):

$$\mathbf{P}(t, \mathbf{r}) = \int_0^\infty f(\tau)\,\mathbf{E}(t-\tau, \mathbf{r})\,d\tau.$$

Обычно нелокальность по времени учитывается как зависимость проницаемостей от частоты. При этом коэффициенты пропорциональности относятся к фурье-амплитудам:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_\omega &= \varepsilon(\omega)\,\mathbf{E}_\omega, \\ \mathbf{B}_\omega &= \mu(\omega)\,\mathbf{H}_\omega. \end{aligned}$$

Такая модель способна учитывать диссипацию энергии поля в среде.

В некоторых моделях приходится учитывать нелинейную зависимость поляризации и намагниченности от полей, тогда вводят проницаемости, зависящие от величины поля, и дифференциальные проницаемости.

3.15.4 Системы единиц измерения в электродинамике

Дав основные понятия электродинамики в среде, мы можем перейти к обсуждению используемых в электродинамике систем единиц измерения.

Данный параграф написан на основе статьи [1, 2] и имеет отдельную библиографию (см. с. 402).

В настоящее время сложилась практика преимущественного использования системы СИ для электрических цепей и гауссовой системы СГС для электромагнитного поля. Предлагается модификация международной системы единиц СИ (физико-техническая система), в которой единицы измерения для электрических цепей совпадают с единицами СИ, а уравнения для электромагнитного поля имеют почти тот же вид, что и в гауссовой системе.

Законодательство[4] и стандарты многих стран рекомендуют использование в науке и образовании международной системы единиц (СИ). В России применение системы СИ в образовании не является обязательным (обсуждение см. в статье [2]), за исключением отдельных образовательных программ связанных с различными видами безопасности и государственного управления. В частности никто не запрещает читать курс теоретической физики с использованием гауссовой системы или физико-технической системы (возражения могут возникнуть только на специальностях, связанных с использованием атомной энергии).

3.15.4.1 Спор длиной в полтора века

Вопрос о выборе единиц измерения в электродинамике восходит ко временам Фарадея (1822–1831 гг.) и Максвелла (1861–1873 гг.). Законченную форму классическая электродинамика приобрела только после геометризации специальной теории относительности Г. Минковским (1907–1909 гг.). Совершенствование и внедрение современной (4-мерной релятивистски-ковариантной) формулировки электродинамики в практику высшего образования растянулось ещё не менее чем на полвека. Обзор *некоторых* систем единиц, применявшихся и применяемых в электродинамике, можно найти, например, в книгах [5, 6].

Законодательство и стандарты многих стран рекомендуют использование в науке и образовании международной системы единиц (СИ), которая, применительно к электрическим цепям, восходит к системе «абсолютных практических единиц измерения», принятой 1-м Международным конгрессом электриков (Париж, 1881 г.) как кратные единиц СГСМ (одной из устаревших разновидностей системы СГС), которые были слишком мелки для практических применений. Применительно к электродинамике СИ восходит к предложенной в 1901 г. системе Джованни Джорджи, который показал, что можно совместить практические единицы для электрических цепей с системой МКС (метр–килограмм–секунда) (см. [8], Приложение 4).

Применение СИ в электродинамике до сих пор вызывает возражения. Среди физиков традиционно сильны позиции гауссовой (симметричной) системы СГС (далее просто СГС), которая лучше учитывает симметрии теории и является стандартом для научных публикаций и учебников по теоретической физике.

Можно (несколько утрируя ситуацию) сказать, что сегодня СИ — система для измерений, а СГС — система для записи формул и аналитических выкладок.

В настоящее время при рассмотрении электрических цепей фактическим стандартом является система СИ, а при рассмотрении электромагнитного поля — СГС. Так, в классическом учебнике И. Е. Тамма «Основы теории электричества» [7] последовательно используется СГС, но при рассмотрении задач на переменный ток (§ 80 книги [7]) используется практическая система единиц (предшественник системы СИ). Аналогичные предпочтения наблюдаются не только у классиков науки, но и, например, у современных преподавателей и студентов МФТИ.

Проблема выбора системы единиц для электродинамики не становится менее актуальной, скорее наоборот. Само Международное бюро мер и весов в предпоследнем, 8-м издании своей брошюры «Международная система единиц» [9] (2006) признавало (раздел «Units outside the SI», второй абзац, перевод цитаты и выделение курсивом — *М. Г. Иванов*):

> *Отдельные* учёные должны *также* иметь свободу *иногда* использовать единицы, не входящие в систему СИ, для которых они видят *частные* научные преимущества для *своей* работы. Пример этого — использование СГС–гауссовых единиц в электромагнитной теории применительно к квантовой электродинамике и относительности.

Читая эти фразы, необходимо помнить, что последовательное современное изложение электродинамики без специальной теории относительности невозможно. Понятно также, что основной смысл данной оговорки относится в первую очередь именно к применению системы СГС.

Предыдущее, 7-е издание (1998) брошюры «Международная система единиц» [10] этих оговорок не содержит.

Вероятно, такое смягчение отношения к СГС было связано с подготовкой к изменению определений килограмма, моля и кельвина в рамках СИ через фиксирование точных численных значений постоянных Планка, Авогадро и Больцмана [11], которое произошло 20 мая 2019 года. Это переопределение предполагает новые точные измерения с использованием методов квантовой электродинамики, в которой СГС очень часто предпочитается СИ.

Тем не менее в последнем, 9-м издании брошюры «Международная система единиц» [8] (2019) приведённые оговорки были исключены. Также была исключена таблица 9 с единицами системы СГС (которая присутствовала в 7-м и 8-м изданиях брошюры). Теперь система СГС упоминается только в контексте истории метрологии (в приложениях «Appendix 1. Decisions of the CGPM and the CIPM» и «Appendix 4. Historical notes on the development of the International System of Units and its base units»).

[4] В России согласно Федеральному закону 102-ФЗ «Об обеспечении единства измерений» действует «Федеральный информационный фонд по обеспечению единства измерений» [4]. В нём содержится вся нормативно-правовая информация по единству измерений.

3.15.4.2 Критика СИ

Применение системы СИ в теоретических исследованиях сильно затруднено по причине того, что используемые в ней единицы электродинамических величин не соответствуют симметриям теории, связанным со специальной теорией относительности. Несоответствие выражается в разных размерностях напряжённостей и индукций электрического и магнитного полей, что затрудняет применение СИ как для теоретических выкладок, так и для преподавания электродинамики, особенно в тех случаях, когда предполагается, что учащийся должен хорошо понимать структуру теории. По этой причине курс теоретической физики в ведущих вузах России традиционно читается с использованием СГС.

Данной проблеме посвящена статья Д. В. Сивухина «О международной системе физических величин» [13] (см. также [14], где дано последовательное сравнение СИ и СГС), опубликованная в 1979 году в журнале «Успехи физических наук» *по решению бюро Отделения общей физики и астрономии Академии наук СССР*, что практически означает единую позицию по данному вопросу сообщества отечественных учёных-физиков. Приведём яркую цитату из данной статьи:

> В этом отношении система СИ не более логична, чем, скажем, система, в которой длина, ширина и высота предмета измеряются не только различными единицами, но и имеют разные размерности.

Несоответствие СИ симметриям электродинамики обусловлено историческими причинами, оно связано с тем, что основы системы были заложены до создания специальной теории относительности. Кроме того, такие единицы измерения, как вольт, ампер, ом, фарад и др. (восходящие к практической системе единиц), чрезвычайно широко используются в технике, входят в СИ и не входят в СГС[5]. Когда в 1948 г. эти единицы были введены в СИ, роль специальной теории относительности для электродинамики всё ещё не была в достаточной мере осознана многими физиками-экспериментаторами и инженерами. Об изменении этих единиц измерения можно было мечтать в начале XX в., но сейчас они и основанные на них стандарты повсеместно используются не только в измерительных устройствах, но и во всей технике, включая бытовую. *Это делает практически невозможным любой пересмотр СИ, исключающий из системы ампер как основную единицу.*

Можем ли мы совместить пожелания инженеров и теоретиков? В существенной мере можем!

3.15.4.3 Какая система единиц нам нужна?

Пожелания теоретика

- Для электрического поля напряжённость $\mathbf{E}$ и индукция $\mathbf{D}$ должны иметь одинаковую размерность, причём в вакууме $\mathbf{E} = \mathbf{D}$.
- Для магнитного поля индукция $\mathbf{B}$ и напряжённость $\mathbf{H}$ должны иметь одинаковую размерность, причём в вакууме $\mathbf{B} = \mathbf{H}$.
- Поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ должны иметь одинаковую размерность, причём в вакууме для поля плоской бегущей волны $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$.
- Магнитное поле движущегося заряда — релятивистский эффект, поэтому в формулу для него *должно* входить отношение скорости частицы к скорости света $\frac{\mathbf{v}}{c}$. Избавляться от скорости света путём переопределения единиц измерения противоестественно.
- Сила Лоренца — релятивистский эффект, поэтому в формулу для неё *должно* входить отношение скорости частицы к скорости света $\frac{\mathbf{v}}{c}$. Избавляться от скорости света путём переопределения единиц измерения противоестественно.
- Введение константы $\frac{1}{4\pi}$ в закон Кулона (восходит к О. Хевисайду) вполне естественно, поскольку позволяет избавиться от множителя 4π (площадь двумерной единичной сферы) не только в уравнениях Максвелла, но и в формулах энергии и функционала действия для электромагнитного поля. Это соответствует практике, принятой у теоретиков, рассматривающих пространства с размерностью, отличной от 3. Для обычной электродинамики такая *рационализация* не вредит и не помогает.

Пожелания инженера и экспериментатора

- Единицы измерения для электрических цепей (ампер, вольт, ом, фарад, генри) используются повсеместно в приборах и стандартах и не могут быть изменены.

[5] В начале XX в. в России производились конденсаторы с маркировкой в системе СГС, единицей ёмкости в которой является сантиметр [15].

- Появление скорости света в уравнениях для электрических цепей нежелательно.
- Поля **D** и **H** непосредственно не могут быть измерены, их единицы измерения не заложены в какие-либо приборы, а потому не слишком важны.

Как примирить теоретиков с инженерами?

Мы предлагаем модифицировать систему СИ, не изменяя основных единиц измерения (килограмм, метр, секунда, ампер, моль, кельвин, кандела), но модифицировав форму записи уравнений электродинамики (максимально приблизив их к уравнениям СГС): изменив входящие в них коэффициенты (за счёт этого изменятся по сравнению с СИ некоторые производные единицы измерения).

Сохраним из старой системы СИ (далее $\text{СИ}_{\text{ст}}$) ампер в качестве единицы силы тока и те производные единицы, которые не затрагивают полей **D**, **B**, **H**:
заряда — кулон = Кл = А · с, напряжения — вольт = В = $\frac{\text{Дж}}{\text{А}\cdot\text{с}}$,
сопротивления — Ом = $\frac{\text{В}}{\text{А}}$, ёмкости — фарад = Ф = $\frac{\text{Кл}}{\text{В}}$,
индуктивности — генри = Гн = $\frac{\text{Дж}}{\text{А}^2}$.
Закон Кулона и напряжённость электрического поля сохраняют ту же форму, что и в системе СИ:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} = k_{\text{к}}\frac{q_1 q_2}{r^2}, \qquad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = k_{\text{к}}\frac{q}{r^2}.$$

Здесь $k_{\text{к}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ — *постоянная Кулона*, q_1, q_2, q — заряды.

Поля **D**, **H** и **B** определяем в соответствии с приведёнными выше «Требованиями теоретика», все они имеют одинаковую размерность $\frac{\text{В}}{\text{м}}$.

Все формулы и единицы измерения для электрических цепей (не включающие в себя поля) сохраняют тот же вид, что и в системе СИ.

Все формулы (но не единицы измерения!) для электромагнитных полей похожи на формулы гауссовой системы СГС.

Этот вариант будущей системы СИ мы назовём физико-технической системой единиц (ФТ). В названии системы заложена идея совместить преимущества систем, используемых в физике и технике.

В процессе подготовки статьи [1] было обнаружено, что такая система единиц уже предлагалась ранее (начиная с 2001 г.) Г. М. Труновым [6, 16, 17, 18] под названием *теоретическая система электромагнитных единиц* (сокращённо СИ(Т)). К сожалению, эта инициатива пока не получила широкого распространения. Изменять название системы единиц в соответствии с терминологией Г. М. Трунова представляется нецелесообразным, поскольку для распространения новой системы важнее её преимущества в сближении физики и техники, чем чисто теоретические преимущества (теоретики вполне довольны системой СГС).

3.15.4.4 Физико-техническая система единиц

Преобразование от СГС к ФТ

В ФТ-системе основные единицы совпадают с основными единицами старой системы $\text{СИ}_{\text{ст}}$. Поэтому, используя уравнения системы $\text{СИ}_{\text{ст}}$ для электрических цепей, для тока I, напряжения U, мощности $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$, энергий $\mathcal{E}_C$ и $\mathcal{E}_L$ для ёмкости C и индуктивности L:

$$I = \frac{dq}{dt}, \qquad UI = \frac{d\mathcal{E}}{dt}, \qquad R = \frac{U}{I}, \qquad \mathcal{E}_C = \frac{q^2}{2C}, \qquad \mathcal{E}_L = \frac{LI^2}{2},$$

мы выражаем через килограмм, метр, секунду и ампер единицы измерения для электрических цепей, которые совпадают с обычными единицами СИ[6].

Уравнения электромагнитного поля в ФТ-системе получим модификацией уравнений СГС.

В гауссовой системе СГС для физиков не важен конкретный выбор сантиметра, грамма и секунды как основных единиц измерения, важна форма записи уравнений (выбор коэффициентов). Поэтому, прежде чем сближать СГС и СИ для полей, мы введём вспомогательную гауссову систему МКС (метр, килограмм, секунда, далее МКСГ), все уравнения в которой записываются так же, как в гауссовой системе СГС.

С точки зрения системы МКСГ константа

$$k_{\text{к}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, \qquad \{k_{\text{к}}\} \approx \{c\}^2 \cdot 10^{-7}$$

[6]Мы специально не использовали величин, связанных с электромагнитными полями (кроме напряжения U). Все величины определяются через параметры цепи. В соответствии с электромеханической аналогией заряд q — обобщённая координата, ток I — обобщённая скорость, напряжение U — обобщённая сила, сопротивление R — коэффициент вязкого трения, обратная ёмкость $\frac{1}{C}$ — жёсткость, индуктивность L — массовый коэффициент. Как и в системе $\text{СИ}_{\text{ст}}$, скорость света в уравнениях для электрических цепей не возникает.

(приблизительное равенство было точным до переопределения Ампера 20 мая 2019 г.) в законе Кулона (далее *постоянная Кулона*) нужна для перевода зарядов из СИ в МКСГ:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} = k_{\text{к}}\frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{q_{1\text{мксг}}\, q_{2\text{мксг}}}{r^2}, \qquad q_{\text{мксг}} = \sqrt{k_{\text{к}}}\, q_{\text{си}}.$$

Если мы хотим, чтобы в законе для силы, действующей на заряд в электрическом поле $\mathbf{E}$, не было коэффициентов, то должны выполняться равенства

$$\mathbf{F} = q_{\text{мксг}}\mathbf{E}_{\text{мксг}} = q_{\text{си}}\mathbf{E}_{\text{си}}, \qquad \mathbf{E}_{\text{мксг}} = \frac{\mathbf{E}_{\text{си}}}{\sqrt{k_{\text{к}}}}.$$

Для электрических зарядов, токов и поля $\mathbf{E}$ различия между системами ФТ и СИ$_{\text{ст}}$ нет.

В МКСГ, как и в СГС, поля $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$ имеют одинаковую размерность. Чтобы сохранить это свойство в ФТ-системе, мы возьмём коэффициенты пересчёта из МКСГ в ФТ для всех четырёх полей одинаковыми. Также возьмём одинаковые коэффициенты пересчёта для всех источников (зарядов, токов, электрических и магнитных мультипольных моментов).

Мы возьмём уравнения электродинамики в системе МКСГ (т.е. в гауссовой форме, точно такие же, как в системе СГС) и сделаем подстановки:

$$(q, \mathbf{j}, \dots)_{\text{мксг}} \to \sqrt{k_{\text{к}}} \cdot (q, \mathbf{j}, \dots)_{\text{фт}},$$

$$(\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H})_{\text{мксг}} \to \frac{1}{\sqrt{k_{\text{к}}}} \cdot (\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H})_{\text{фт}}.$$

Переводных коэффициентов из физико-технической системы в привычную всем теоретикам гауссову систему (точнее, в МКСГ) всего два: один для всех полей и другой для всех источников (зарядов, токов и моментов). При этом их произведение равно[7] 1.

Уравнения в ФТ-системе

В физико-технической системе уравнения электродинамики имеют вид[8]

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{B} &= 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\
\operatorname{div}\mathbf{D} &= 4\pi k_{\text{к}}\rho, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}k_{\text{к}}\mathbf{j}, \\
\mathbf{S} &= \frac{c}{4\pi k_{\text{к}}}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}], \quad W = \frac{(\mathbf{E},\mathbf{D}) + (\mathbf{B},\mathbf{H})}{8\pi k_{\text{к}}}, \\
\sigma_{\alpha\beta} &= \frac{E_\alpha D_\beta + B_\alpha H_\beta}{4\pi k_{\text{к}}} - \delta_{\alpha\beta} W, \\
\mathbf{F} &= q\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]\right), \qquad L = \frac{\Phi}{cI}, \\
\mathbf{D} &= \mathbf{E} + 4\pi k_{\text{к}}\mathbf{P}, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi k_{\text{к}}\mathbf{M}.
\end{aligned}$$

Здесь ρ и $\mathbf{j}$ — плотности заряда и тока, W — плотность энергии, $\mathbf{S}$ — вектор Умова–Пойнтинга, $\sigma_{\alpha\beta}$ — тензор напряжений Максвелла, индексы $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ нумеруют пространственные координаты, Φ — магнитный поток, $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$ — электрический и магнитный дипольные моменты на единицу объёма.

Если сделать замену $k_{\text{к}} \to 1$, то мы воспроизведём уравнения в гауссовой форме, за исключением индуктивности, которую в СГС иногда определяют как $L_{\text{сгс}} = \frac{\Phi}{I}$. Впрочем, это расхождение следует считать скорее преимуществом, чем недостатком, поскольку оно убирает скорость света из уравнений электрических цепей.

Если положить $k_{\text{к}} = \frac{\varkappa_q}{4\pi}$, то запись уравнений электродинамики приблизится к записи в *системе единиц Хевисайда–Лоренца* (ещё одна популярная у теоретиков разновидность системы СГС). Постоянную $\varkappa_q = \frac{1}{\varepsilon_0}$ можно назвать *постоянной Хевисайда*. Если сделать замену $\varkappa_q = 1$, $k_{\text{к}} = \frac{1}{4\pi}$, то мы воспроизведём уравнения в форме, принятой в *системе единиц Хевисайда–Лоренца*.

Как видно, переход от формул СГС к ФТ-системе (вставка в формулы постоянной Кулона) легко проводится из соображений размерности. Такой переход не намного сложнее, чем восстановление в формулах постоянной Больцмана, после того как она была положена равной 1.

[7] Обратите внимание на то, что указанные подстановки надо делать только в уравнениях для полей. В уравнениях для электрических цепей и определениях мультипольных моментов никаких подстановок делать не надо, они сохранят тот же вид, что и в гауссовой системе.

[8] Здесь и далее в данной главе компоненты тензора энергии импульса (W, $\mathbf{S}$, $\sigma_{\alpha\beta}$) записаны для случая линейной поляризуемости среды.

Поля в старой системе СИ$_{\text{ст}}$ и в физико-технической системе (ФТ) связаны соотношениями

$$\mathbf{E}_{\text{фт}} = \mathbf{E}_{\text{си}_{\text{ст}}}, \qquad \mathbf{D}_{\text{фт}} = \frac{\mathbf{D}_{\text{си}_{\text{ст}}}}{\varepsilon_0},$$

$$\mathbf{B}_{\text{фт}} = c\mathbf{B}_{\text{си}_{\text{ст}}}, \qquad \mathbf{H}_{\text{фт}} = \frac{\mathbf{H}_{\text{си}_{\text{ст}}}}{c\varepsilon_0} = c\mu_0\mathbf{H}_{\text{си}_{\text{ст}}},$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k_{\text{к}}}, \qquad \mu_0 = \frac{1}{c^2\varepsilon_0} = \frac{4\pi k_{\text{к}}}{c^2}.$$

Для соответствия со старой системой СИ$_{\text{ст}}$ полезно определить *«приведённое» магнитное поле*, совпадающее с полем старой системы СИ$_{\text{ст}}$:

$$\mathbf{B}_{\text{пр}} = \frac{\mathbf{B}_{\text{фт}}}{c} = \mathbf{B}_{\text{си}_{\text{ст}}}.$$

Именно в единицах приведённого поля калиброваны современные измерительные приборы, однако использование его в формулах нежелательно[9].

3.15.4.5 Система СИ в электродинамике

Приведём для сравнения вид тех же ключевых уравнений электродинамики в системе СИ:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{B} &= 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\\
\operatorname{div}\mathbf{D} &= \rho, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j},\\
\mathbf{S} &= [\mathbf{E}\times\mathbf{H}], \quad W = \frac{1}{2}(\mathbf{E},\mathbf{D}) + \frac{1}{2}(\mathbf{B},\mathbf{H}),\\
\sigma_{\alpha\beta} &= (E_\alpha D_\beta + B_\alpha H_\beta) - \delta_{\alpha\beta}W,\\
\mathbf{F} &= q\left(\mathbf{E} + [\mathbf{v}\times\mathbf{B}]\right), \qquad L = \frac{\Phi}{I},
\end{aligned}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}, \qquad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}.$$

Может показаться, что уравнения в системе СИ проще, чем в СГС или в ФТ-системе. Чтобы развеять эту иллюзию и объяснить причину предпочтения теоретиков, запишем уравнения СИ в вакууме (исключив поля $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$):

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{B} &= 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\\
\operatorname{div}\mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0}\rho, \quad \operatorname{rot}\mathbf{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0\mathbf{j} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\mathbf{j},\\
\mathbf{S} &= \frac{1}{\mu_0}[\mathbf{E}\times\mathbf{B}] = \varepsilon_0 c^2[\mathbf{E}\times\mathbf{B}],\\
W &= \frac{\varepsilon_0}{2}\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2 = \frac{\varepsilon_0}{2}(\mathbf{E}^2 + c^2\mathbf{B}^2),\\
\sigma_{\alpha\beta} &= \varepsilon_0\left(E_\alpha E_\beta + c^2 B_\alpha B_\beta\right) - \delta_{\alpha\beta}W.
\end{aligned}$$

3.15.4.6 Смысл постоянной Кулона

Традиция гауссовой системы единиц предполагает, что постоянная Кулона не имеет физического смысла, поскольку представляет собой всего лишь квадрат отношения двух единиц заряда:

$$\{k_{\text{к}}\} = \left(\frac{q_{\text{мксг}}}{1\text{Кл}}\right)^2, \quad q_{\text{мксг}} = \sqrt{\text{Дж}\cdot\text{м}} = \text{кг}^{1/2}\cdot\text{м}^{3/2}\cdot\text{с}^{-1} = 10^{4,5} \text{ ед. заряда СГС}$$

— единица заряда в гауссовой системе МКСГ.

В старой версии системы СИ (до 20 мая 2019 г.), в которой ампер, а вместе с ним и кулон определяются через силу, действующую между двумя параллельными проводниками с током, это мнение о нефизичности $k_{\text{к}}$ абсолютно справедливо.

[9] Запомнить это несложно исходя из того, что формула для силы Лоренца, записанная через приведённое поле, не содержит скорость света.

В 2018 году XXVI Генеральная конференция по мерам и весам приняла резолюцию «О пересмотре Международной системы единиц, СИ» [12]. В этой резолюции определение килограмма дано через задание точного значения постоянной Планка:

$$h = 2\pi\hbar = 6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с},$$

а ампер определён через элементарный заряд, которому приписано точное значение:

$$e = 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл}.$$

Ещё в 1983 году был переопределён метр путём задания точного значения скорости света в вакууме, для которой с тех пор *по определению* принято фиксированное *точное* значение:

$$c = 299\,792\,458\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Итак, в определении постоянной тонкой структуры[10]

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} = \frac{k_\text{к} e^2}{\hbar c}$$

оказываются *точно заданы по определению* все величины, кроме постоянной Кулона. Таким образом,

$$k_\text{к} = \frac{\hbar c}{e^2} \cdot \alpha = C_\alpha \cdot \alpha.$$

Мы видим, что численное значение $k_\text{к}$ в реформированной системе СИ — это постоянная тонкой структуры, умноженная на некоторый фиксированный численный множитель, который выбран так, чтобы переопределённые единицы массы и тока воспроизводили принятые на сегодняшний день с точностью, доступной современным (на момент реформы СИ) измерительным приборам.

Дальнейшее улучшение точности измерений неизбежно приведёт к тому, что различие единиц измерения прежней системы СИ и реформированной системы станет доступно измерению. С этого момента постоянная Кулона станет действительно фундаментальной константой — постоянной тонкой структуры, умноженной на исторически фиксированный коэффициент C_α.

Таким образом, постоянная Кулона приобретает физический смысл благодаря тому, что для электрического заряда существует естественная единица (элементарный заряд), которая не кратна планковскому заряду.

Спор между гауссовой системой и реформированной системой СИ в части определения единицы электрического разряда сводится к тому, определить ли эту единицу через элементарный заряд (новая СИ) или через планковский заряд (СГС и старая СИ). Поскольку планковский заряд в природе не реализуется, выбор представляется очевидным.

3.15.4.7 Понятие о системе систем единиц измерения

Есть системы единиц, в которых проводят измерения и делают вычисления с экспериментально измеренными физическими величинами, а есть системы единиц, в которых удобно делать теоретические выкладки, но единицы измерения которых неудобны для реальных измерений.

Удобно, когда переход к «теоретическим» единицам осуществляется просто путём задания некоторых входящих в формулы констант равными единице. Например, часто теоретики в своих выкладках полагают единицей постоянную Больцмана. Это очень удобно для теоретика, но непригодно для экспериментатора. Однако, получив результат, теоретик легко восстанавливает в конечных формулах постоянную Больцмана из соображений размерности. Аналогично в специальной теории относительности могут полагать единицей скорость света, а в общей — ещё и гравитационную постоянную. В квантовой механике полагают единицей постоянную Планка, а в атомной физике — массу электрона. Во всех этих случаях обратный переход к экспериментальным единицам легко осуществляется из соображений размерности.

Мы имеем вполне естественную *систему систем* «теоретических» единиц, в основании которой лежит гауссова система СГС. Из СГС получаются системы единиц, удобные для различных разделов физики, в которых единицами полагаются те или иные размерные константы. И так вплоть до полностью безразмерных систем единиц наподобие планковской.

Однако из-за разных подходов к записи уравнений электродинамики система систем единиц измерения, основанная на СГС, оказывается оторванной от экспериментальной системы единиц СИ: правила перехода между ними слишком неудобны и не сводятся к приравниванию констант единице.

Физико-техническая система единиц естественным образом становится в основание системы систем единиц измерения перед гауссовой системой, связывая тем самым систему систем с экспериментом.

[10] Постоянная тонкой структуры представляет собой квадрат отношения элементарного заряда к планковскому: $\alpha = \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)_\text{СГС} = \left(\frac{e}{q_\text{пл}}\right)^2 \approx \frac{1}{137{,}035\,999}$.

Литература

[1] Иванов М. Г. Физико-техническая система единиц для электродинамики // Инженерная физика. — 2015. — №1. – С. 4–12; Ivanov M. G. Physics and technology system of units for electrodynamics // (опубликована online). — 2015. – 12 с. Расширенная английская версия статьи: arXiv:1512.05394

[2] Иванов М. Г., Дудченко В. А. О единицах измерения в электродинамике // Современная электродинамика — 2025. — Т.3, №2 (16). — С. 30–40. https://cyberleninka.ru/article/n/o-edinitsah-izmereniya-v-elektrodinamike

[3] Иванов М.Г., Размерность и подобие. 2-е изд., МФТИ, Москва, 2019 , 152 с. https://old.mipt.ru/students/organization/mezhpr/biblio/razmernost.php

[4] Федеральный информационный фонд по обеспечению единства измерений. https://fgis.gost.ru/fundmetrology/registry

[5] Гладун А. Д. Педагогические раздумья физика. М. : МФТИ, 2005.

[6] Трунов Г. М. Уравнения электромагнитизма и системы единиц электрических и магнитных величин. М. : ФОРУМ, 2011.

[7] Тамм И. Е. Основы теории электричества. М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.

[8] The International System of Units (SI), 9th edition. — Sèvres: BIPM, 2019 (V2.01, December 2022). https://www.bipm.org/documents/20126/41483022/SI-Brochure-9.pdf, https://old.mipt.ru/upload/medialibrary/043/si_brochure_9_en.pdf.

[9] The International System of Units (SI), 8th edition. — Sèvres: BIPM, 2006. https://www.bipm.org/documents/20126/41483022/si_brochure_8.pdf, https://old.mipt.ru/upload/medialibrary/e7a/si_brochure_8_en.pdf.

[10] The International System of Units (SI), 7th edition. — Sèvres: BIPM, 1998. https://www.bipm.org/documents/20126/41483022/si_brochure_7.pdf https://old.mipt.ru/upload/medialibrary/fb7/si_brochure_7_en.pdf

[11] On the possible future revision of the International System of Units, the SI. Resolution 1 of the 24th meeting of CGPM (2011); https://www.bipm.org/en/committees/cg/cgpm/24-2011/resolution-1

[12] On the revision of the International System of Units (SI). Resolution 1 of the 26th meeting of CGPM (2018) https://www.bipm.org/en/committees/cg/cgpm/26-2018/resolution-1

[13] Сивухин Д. В. // УФН — 1979. — Т. 129 – С. 335. https://ufn.ru/ru/articles/1979/10/h/ [Sivukhin D. V. // Sov. Phys. Usp. — 1979. — V. 22 – P. 834.]

[14] Сивухин Д. В. Общий курс физики. Т. III. Электричество. — М. : Физматлит; МФТИ, 2004. § 85 «Международная система единиц (СИ)»

[15] Булыгин В. С. *частное сообщение.*

[16] Трунов Г. М. Приведение единиц электрических и магнитных величин системы СИ в соответствие с современным представлением об электромагнитном поле // Физическое образование в вузах. — 2001. — Т. 7. № 4. – С. 12–21.

[17] Трунов Г. М. Коррекция математической формы записи уравнений электромагнетизма и создание на их основе новой системы электромагнитных единиц // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки. — 2006. № 2. – С. 66–75. https://pstu.ru/files/file/FPMM/el.pdf

[18] Трунов Г. М. Уравнения электромагнетизма и системы электромагнитных единиц — прошлое, настоящее, будущее // Законодательная и прикладная метрология. — 2006. — № 2. – С. 46–52. https://pstu.ru/files/file/FPMM/2006_2.doc

Часть IV

Элементы теории колебаний и электродинамика (2-й семестр, дополнительный материал)

Глава 4.1

Уравнение Гамильтона–Якоби и канонические преобразования (с. 293)

4.1.1 Решение задачи 38

38. Уравнение Гамильтона–Якоби Для нерелятивистской частицы решите уравнение Гамильтона–Якоби, постройте общее решение уравнений движения, обсудите физический смысл найденных законов сохранения.

Условия отдельных пунктов и решения

а) Свободная частица на плоскости в декартовых координатах.

Функция Гамильтона имеет вид

$$H(x,y,z,p_x,p_y,p_z)=\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2m},$$

а соответствующее уравнение Гамильтона–Якоби записывается в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right)=0.$$

Ищем решение методом разделения переменных, полагая

$$S(t,x,y,z)=S_t(t)+S_x(x)+S_y(y)+S_z(z).$$

Получаем уравнение, в котором переменные легко разделяются, и мы находим 4 интеграла движения:

$$\underbrace{\frac{dS_t}{dt}}_{a_t}+\frac{1}{2m}\left(\left(\underbrace{\frac{dS_x}{dx}}_{a_x}\right)^2+\left(\underbrace{\frac{dS_y}{dy}}_{a_y}\right)^2+\left(\underbrace{\frac{dS_z}{dz}}_{a_z}\right)^2\right)=0.$$

Наши интегралы движения — энергия и компоненты импульса:

$$a_t=-\mathcal{E},\quad a_x=p_x,\quad a_y=p_y,\quad a_z=p_z;$$

$$S(t,x,y,z)=\underbrace{a_t\cdot t}_{S_t(t)}+\underbrace{a_x\cdot x}_{S_x(x)}+\underbrace{a_y\cdot y}_{S_y(y)}+\underbrace{a_z\cdot z}_{S_z(z)}.$$

Это пока не полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби, потому что параметров a больше, чем степеней свободы. Однако между параметрами есть соотношение

$$a_t+\frac{a_x^2+a_y^2+a_z^2}{2m}=0.$$

Выразив из него a_t, находим полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби:

$$S(t,x,y,z;a_x,a_y,a_z)=-\frac{a_x^2+a_y^2+a_z^2}{2m}\cdot t+a_x\cdot x+a_y\cdot y+a_z\cdot z.$$

Дифференцируя $S(t,x,a)$ по параметрам a, находим ещё три сохраняющиеся величины:

$$\begin{aligned} b_x &= \frac{\partial S}{\partial a_x} = -\frac{a_x}{m}\cdot t + x = -\frac{p_x}{m}\cdot t + x = x(0), \\ b_y &= \frac{\partial S}{\partial a_y} = -\frac{a_y}{m}\cdot t + y = -\frac{p_y}{m}\cdot t + y = y(0), \\ b_z &= \frac{\partial S}{\partial a_z} = -\frac{a_z}{m}\cdot t + z = -\frac{p_z}{m}\cdot t + z = z(0). \end{aligned}$$

Величины b — это динамические инварианты, которые задают координаты частицы в нулевой момент времени. Из них мы легко выражаем траекторию частицы.

б) Свободная частица на плоскости в полярных координатах.

Функция Гамильтона имеет вид

$$H(r,\phi,p_r,p_\phi) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2}\right),$$

а соответствующее уравнение Гамильтона–Якоби записывается в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2\right) = 0.$$

Ищем решение методом разделения переменных, полагая

$$S(t,r,\phi) = S_t(t) + S_r(r) + S_\phi(\phi).$$

Получаем уравнение, в котором переменные легко разделяются, и мы находим 2 интеграла движения:

$$\underbrace{\frac{dS}{dt}}_{a_t} + \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\underbrace{\frac{dS_\phi}{d\phi}}_{a_\phi}\right)^2\right) = 0.$$

Наши интегралы движения — энергия и момент импульса:

$$a_t = -\mathcal{E}, \quad a_\phi = p_\phi = L_z = mr^2\dot{\phi};$$

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{dt} &= a_t \quad \Rightarrow \quad S_t(t) = a_t\cdot t, \\ \frac{dS_\phi}{d\phi} &= a_\phi \quad \Rightarrow \quad S_\phi(\phi) = a_\phi\cdot\phi, \\ \frac{dS_r}{dr} &= \sqrt{-2ma_t - \frac{a_\phi^2}{r^2}} \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad S_r(r) = \int\sqrt{-2ma_t - \frac{a_\phi^2}{r^2}}\,dr = \sqrt{-2ma_tr^2 - a_\phi^2} + a_\phi\ \mathrm{arctg}\,\frac{a_\phi}{\sqrt{-2ma_tr^2 - a_\phi^2}}. \end{aligned}$$

Полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби имеет вид:

$$S(t,r,\phi;a_t,a_\phi) = a_t\cdot t + a_\phi\cdot\phi + \sqrt{-2ma_tr^2 - a_\phi^2} + a_\phi\ \mathrm{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{-2m\frac{a_t}{a_\phi^2}r^2 - 1}}.$$

Дифференцируя $S(t,x;a)$ по параметрам a, находим ещё две сохраняющиеся величины:

$$\begin{aligned} b_t &= \frac{\partial S}{\partial a_t} = t + \frac{1}{2a_t}\sqrt{-2ma_tr^2 - a_\phi^2}, \\ b_\phi &= \frac{\partial S}{\partial a_\phi} = \phi + \mathrm{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{-2m\frac{a_t}{a_\phi^2}r^2 - 1}}. \end{aligned}$$

Величина b_t — это динамический инвариант, который связывает t и r, а b_ϕ задаёт закон сохранения, который связывает r и ϕ (задаёт уравнение прямой в полярных координатах). Из b_t и b_ϕ мы можем выразить траекторию частицы.

в) Частица на плоскости в центральном потенциале $U(r)$ в полярных координатах.

Функция Гамильтона имеет вид

$$H(r,\phi,p_r,p_\phi)=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\phi^2}{r^2}\right)+U(r),$$

а соответствующее уравнение Гамильтона–Якоби записывается в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2\right)+U(r)=0.$$

Ищем решение методом разделения переменных, полагая

$$S(t,r,\phi)=S_t(t)+S_r(r)+S_\phi(\phi).$$

Получаем уравнение, в котором переменные легко разделяются, и мы находим 2 интеграла движения:

$$\underbrace{\frac{dS_t}{dt}}_{a_t}+\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\underbrace{\frac{dS_\phi}{d\phi}}_{a_\phi}\right)^2\right)+U(r)=0.$$

Наши интегралы движения — энергия и момент импульса:

$$a_t=-\mathcal{E},\quad a_\phi=p_\phi=L_z=mr^2\dot\phi;$$

$$\begin{aligned}
\frac{dS_t}{dt} &= a_t \quad\Rightarrow\quad S_t(t)=a_t\cdot t,\\
\frac{dS_\phi}{d\phi} &= a_\phi \quad\Rightarrow\quad S_\phi(\phi)=a_\phi\cdot\phi,\\
\frac{dS_r}{dr} &= \sqrt{-2m\Big(a_t+U(r)\Big)-\frac{a_\phi^2}{r^2}} \quad\Rightarrow\quad S_r(r)=\int\sqrt{-2m\Big(a_t+U(r)\Big)-\frac{a_\phi^2}{r^2}}\,dr.
\end{aligned}$$

Полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби имеет вид

$$S(t,r,\phi;a_t,a_\phi)=a_t\cdot t+a_\phi\cdot\phi+\int\sqrt{-2m\Big(a_t+U(r)\Big)-\frac{a_\phi^2}{r^2}}\,dr.$$

Дифференцируя $S(t,x;a)$ по параметрам a, находим ещё две сохраняющиеся величины:

$$\begin{aligned}
b_t &= \frac{\partial S}{\partial a_t}=t-\int\frac{m}{\sqrt{-2m\Big(a_t+U(r)\Big)-\frac{a_\phi^2}{r^2}}}\,dr,\\
b_\phi &= \frac{\partial S}{\partial a_\phi}=\phi-\int\frac{a_\phi}{\sqrt{-2m\Big(a_t+U(r)\Big)-\frac{a_\phi^2}{r^2}}}\,\frac{dr}{r^2}.
\end{aligned}$$

Величина b_t — это динамический инвариант, который связывает t и r, а b_ϕ задаёт закон сохранения, который связывает r и ϕ (задаёт уравнение траектории как непараметризованной кривой в полярных координатах). Из b_t и b_ϕ мы можем выразить траекторию частицы.

Для неизвестного потенциала $U(r)$ мы не можем взять интегралы аналитически, но задача решена в квадратурах (ответ выражен через определённые интегралы).

г) Частица в пространстве в центральном потенциале $U(r)$ в сферических координатах.

Движение в центральном поле всегда происходит в плоскости, поэтому, на первый взгляд, переход из плоскости в пространство ничего существенного не добавляет, однако отличие от нуля скобок Пуассона

разных компонент момента импульса приводит к интересным нюансам, которые станут важными при переходе к квантовой механике.

Функция Гамильтона имеет вид

$$H(r,\theta,\phi,p_r,p_\theta,p_\phi)=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{1}{r^2}\left[p_\theta^2+\frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}\right]\right)+U(r),$$

а соответствующее уравнение Гамильтона–Якоби записывается в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^2\right]\right)+U(r)=0.$$

Ищем решение методом разделения переменных, полагая

$$S(t,r,\phi)=S_t(t)+S_r(r)+S_\theta(\theta)+S_\phi(\phi).$$

Получаем уравнение, в котором две переменные легко отделяются, и мы находим 2 интеграла движения:

$$\underbrace{\frac{dS_t}{dt}}_{a_t}+\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\theta}\underbrace{\left(\frac{dS_\phi}{d\phi}\right)^2}_{a_\phi}\right]\right)+U(r)=0.$$

Наши интегралы движения — энергия и момент импульса по оси z:

$$a_t=-\mathcal{E},\quad a_\phi=p_\phi=L_z=mr^2\dot\phi.$$

После отделения двух переменных уравнение Гамильтона-Якоби приобретает вид, который позволяет завершить разделение переменных:

$$a_t+\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2+\frac{1}{r^2}\underbrace{\left[\left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2+\frac{a_\phi^2}{\sin^2\theta}\right]}_{a_\theta}\right)+U(r)=0.$$

Смысл нового интеграла движения не столь очевиден, но может быть установлен как произведение квадрата радиуса на скалярный квадрат проекции импульса на плоскость, перпендикулярную радиус-вектору, что соответствует скалярному квадрату момента импульса:

$$a_\theta=r^2\cdot\frac{1}{r^2}\left[p_\theta^2+\frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}\right]=\mathbf{L}^2.$$

Смысл a_θ как квадрата момента импульса также следует из того, что при переходе от плоскости к пространству a_θ становится при разделении переменных на место a_ϕ^2.

(!) При решении уравнения Гамильтона-Якоби константы соответствуют наблюдаемым (включая гамильтониан), для которых попарные скобки Пуассона равны нулю. По этой причине такими константами могут быть L_z и $\mathbf{L}^2$, но не могут оказаться одновременно разные (ненулевые) компоненты псевдовектора $\mathbf{L}$. Аналогичная ситуация наблюдается в квантовой механике при решении стационарного уравнения Шрёдингера: в стационарном состоянии могут быть одновременно определены L_z и $\mathbf{L}^2$, но не разные (ненулевые) компоненты псевдовектора $\mathbf{L}$. В квантовой механике такая невозможность связана также с соотношениями неопределённостей на компоненты момента импульса.

Мы получаем

$$\begin{aligned}
\frac{dS_t}{dt} &= a_t \quad\Rightarrow\quad S_t(t)=a_t\cdot t,\\
\frac{dS_\phi}{d\phi} &= a_\phi \quad\Rightarrow\quad S_\phi(\phi)=a_\phi\cdot\phi,\\
\frac{dS_\theta}{d\theta} &= \sqrt{a_\theta-\frac{a_\phi^2}{\sin^2\theta}} \quad\Rightarrow\quad S_\theta(\theta)=\int\sqrt{a_\theta-\frac{a_\phi^2}{\sin^2\theta}}\,d\theta,\\
\frac{dS_r}{dr} &= \sqrt{-2m\Big(a_t+U(r)\Big)-\frac{a_\theta}{r^2}} \quad\Rightarrow\quad S_r(r)=\int\sqrt{-2m\Big(a_t+U(r)\Big)-\frac{a_\theta}{r^2}}\,dr.
\end{aligned}$$

Полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби имеет вид

$$S(t,r,\phi;a_t,a_\phi) = a_t\cdot t + a_\phi\cdot\phi + \int\sqrt{a_\theta - \frac{a_\phi^2}{\sin^2\theta}}\,d\theta + \int\sqrt{-2m\Big(a_t+U(r)\Big) - \frac{a_\theta}{r^2}}\,dr.$$

Дифференцируя $S(t,x;a)$ по параметрам a, находим ещё три сохраняющиеся величины:

$$\begin{aligned}
b_t &= \frac{\partial S}{\partial a_t} = t - \int\frac{m}{\sqrt{-2m\Big(a_t+U(r)\Big) - \frac{a_\theta}{r^2}}}\,dr,\\
b_\theta &= \frac{\partial S}{\partial a_\theta} = \theta + \int\frac{d\theta}{2\sqrt{a_\theta - \frac{a_\phi^2}{\sin^2\theta}}} - \int\frac{\frac{dr}{2r^2}}{\sqrt{-2m\Big(a_t+U(r)\Big) - \frac{a_\theta}{r^2}}},\\
b_\phi &= \frac{\partial S}{\partial a_\phi} = \phi - \int\frac{\frac{a_\phi}{\sin^2\theta}}{\sqrt{a_\theta - \frac{a_\phi^2}{\sin^2\theta}}}\,d\theta.
\end{aligned}$$

Величина b_t — это динамический инвариант, который связывает t и r, а b_ϕ задаёт закон сохранения, который связывает θ и ϕ (задаёт проекцию траектории на единичную сферу), b_θ связывает r и θ. Из b_t, b_θ и b_ϕ мы можем выразить траекторию частицы.

Для неизвестного потенциала $U(r)$ мы не можем взять интегралы аналитически, но задача решена в квадратурах (ответ выражен через определённые интегралы).

4.1.2 Производящие функции канонических преобразований

4.1.2.1 Действие порождает каноническое преобразование

В основной части курса при выводе уравнения Гамильтона–Якоби мы рассмотрели функцию действия как функцию конечной точки траектории при фиксированной начальной точке. Теперь рассмотрим функцию действия

$$S(t_0,x_0^\alpha;t_1,x_1^\alpha) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L_0(x^\alpha,\dot{x}^\alpha,t)\,dt$$

как функцию от начальной и конечной точек траектории

$$x^\alpha(t_0) = x_0^\alpha,\quad x^\alpha(t_1) = x_1^\alpha$$

при условии, что вдоль траектории выполняются уравнения движения

$$\left.\frac{\delta S}{\delta x^\alpha(t)}\right|_{t\in(t_0,t_1)} = 0.$$

Мы обозначили функцию Лагранжа L_0, а соответствующую функцию Гамильтона — H_0, потому что далее будут рассматриваться динамические системы с другими функциями Лагранжа и Гамильтона.

Мы также можем записать функцию действия через функцию Гамильтона в виде

$$S(t_0,x_0^\alpha;t_1,x_1^\alpha) = \int\limits_{t_0}^{t_1}\left(p_\alpha\dot{x}^\alpha - H_0(x^\alpha,p_\alpha,t)\right)\,dt,$$

как функцию от начальной и конечной точек траектории

$$x^\alpha(t_0) = x_0^\alpha,\quad x^\alpha(t_1) = x_1^\alpha,$$

при условии, что вдоль траектории выполняются уравнения Гамильтона

$$\dot{x}^\alpha = \frac{\partial H_0}{\partial p_\alpha}\qquad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H_0}{\partial x^\alpha}.$$

При выводе уравнения Гамильтона–Якоби нас интересовали только аргументы t_1, x_1^α, задающие конечную точку траектории. Для производных по этим аргументам мы получили уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}S(t_0,x_0^\alpha;t_1,x_1^\alpha) = p_\alpha(t_1),\qquad \frac{\partial}{\partial t_1}S(t_0,x_0^\alpha;t_1,x_1^\alpha) = -\mathcal{E}(t_1).$$

Аналогично, дифференцируя по начальной точке траектории, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_0^\alpha} S(t_0, x_0^\alpha; t_1, x_1^\alpha) = -p_\alpha(t_0), \qquad \frac{\partial}{\partial t_0} S(t_0, x_0^\alpha; t_1, x_1^\alpha) = \mathcal{E}(t_0).$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x_0} S(t_0, x_0; t_1, x_1) = -p_0, \tag{4.1.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} S(t_0, x_0; t_1, x_1) = p_1. \tag{4.1.2}$$

Здесь мы опустили индексы α, нумерующие обобщённые координаты и импульсы, и обозначили $p_0 = p(t_0)$, $p_1 = p(t_1)$.

Если уравнение (4.1.1) разрешить относительно переменных x_1, то мы выразим конечные (в момент времени t_1) координаты и импульсы через начальные (в момент времени t_0):

$$\begin{aligned} x_1 &= X(x_0, p_0; t_0, t_1), \\ p_1 &= \left.\frac{\partial}{\partial x_1} S(t_0, x_0; t_1, x_1)\right|_{x_1 = X(x_0, p_0; t_0, t_1)} = P(x_0, p_0; t_0, t_1). \end{aligned}$$

Таким образом, функция действия $S(t_0, x_0; t_1, x_1)$ содержит информацию о каноническом преобразовании $x_0, p_0 \to x_1, p_1$, порождаемом динамикой с генератором (гамильтонианом) H_0 (см. также § 2.9.3 «Канонические преобразования, зависящие от времени», с. 255).

(!!!) Уравнение (4.1.1) может оказаться неразрешимым относительно x_1. Таким образом, не всякое каноническое преобразование может быть выражено через производящую функцию с данным набором аргументов $S(t_0, x_0; t_1, x_1)$. В частности, мы не можем выразить таким способом тождественное преобразование $x_1 = x_0$, $p_1 = p_0$.

(!) Мы можем описывать с помощью функции действия $S(t_0, x_0; t_1, x_1)$ не только динамику, но и зависящее от времени каноническое преобразование. В этом случае функция действия называется *производящей функцией канонического преобразования*. Наличие физического смысла у гамильтониана H_0 и соответствующей динамики при этом не обязательно.

4.1.2.2 Зависимость производящих функций от времени

Зависимость/независимость от времени

Если производящая функция $S(x_0^\alpha; x_1^\alpha)$ **не** зависит от времени (или если моменты времени фиксированы), то мы имеем каноническое преобразование, **не** зависящее от времени:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1^\alpha} S(x_0^\alpha; x_1^\alpha) &= p_{1\alpha}, \\ \frac{\partial}{\partial x_0^\alpha} S(x_0^\alpha; x_1^\alpha) &= -p_{0\alpha}. \end{aligned}$$

При не зависящем от времени каноническом преобразовании функция Гамильтона, как мы установили ранее, ведёт себя как скаляр (инвариант).

Если производящая функция $S(t_0, x_0^\alpha; t_1, x_1^\alpha)$ **зависит** от времени, то мы имеем каноническое преобразование, **зависящее** от времени:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1^\alpha} S(x_0^\alpha; x_1^\alpha) &= p_{1\alpha}, \\ \frac{\partial}{\partial t_1} S(t_0, x_0^\alpha; t_1, x_1^\alpha) &= -\mathcal{E}_1, \\ \frac{\partial}{\partial x_0^\alpha} S(x_0^\alpha; x_1^\alpha) &= -p_{0\alpha}, \\ \frac{\partial}{\partial t_0} S(t_0, x_0^\alpha; t_1, x_1^\alpha) &= \mathcal{E}_0. \end{aligned}$$

Как мы установили ранее, при зависящем от времени каноническом преобразовании расширенная функция Гамильтона $\mathcal{H} = p_t + H$ ведёт себя как скаляр (инвариант), в то время как функция Гамильтона H преобразуется по закону (2.9.4) (см. с. 256):

$$H' = H - H_0,$$

где H_0 — генератор данного зависящего от времени канонического преобразования. В случае канонического преобразования, описанного с помощью производящей функции $S(t_0, x_0^\alpha; t_1, x_1^\alpha)$, имеем

$$H_0 = -\frac{\partial}{\partial t_1} S(t_0, x_0^\alpha; t_1, x_1^\alpha).$$

(!) «Энергия», получающаяся дифференцированием производящей функции по временны́м переменным, — это не энергия системы, а генератор H_0 для данного зависящего от времени канонического преобразования.

(!) Возникает вопрос, почему исходно равноправные моменты времени t_0 и t_1 вошли в преобразование функции Гамильтона несимметричным образом. Дело в том, что мы предположили, что координаты x_0 не зависят от времени, а координаты x_1 зависят, поэтому поправка к функции Гамильтона содержит производную только по t_1.

(!) Мы будем иногда опускать у производящей функции аргумент t_0.

Мгновенное каноническое преобразование

Исходя из того, что производящая функция была введена как функция действия, представляется естественным потребовать выполнения условия равенства нулю действия на траектории, у которой совпадают конечная и начальная точки:

$$S(t_0, x_0; t_0, x_0) = 0.$$

Однако, оказывается, введение такого условия излишне, оно только усложняет формализм, заставляя рассматривать особые случаи, которые без этого условия рассматривались бы единообразно.

Правильнее считать, что если

$$S(t_0, x_0; t_0, x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} S(t_0 - \varepsilon, x_0; t_0 + \varepsilon, x_0) \neq 0,$$

то не зависящее от времени каноническое преобразование с производящей функцией $S(t_0, x_0; t_0, x_0)$ порождается функцией Гамильтона, принимающей бесконечное значение в момент времени t_0. При этом если время калибровочного преобразования стремится к нулю как ε, то функция Гамильтона стремится к бесконечности как ε^{-1}.

Далее мы проиллюстрируем это на конкретных примерах.

4.1.2.3 Производящие функции от разных наборов аргументов

С точки зрения гамильтоновой механики обобщённые координаты и обобщённые импульсы равноправны. В частности, замена $x^\alpha \to p_\alpha$, $p_\alpha \to -x^\alpha$ является канонической, её генератором является функция Гамильтона гармонического осциллятора

$$H_\omega(x, p) = \frac{\omega}{2}(p^2 + x^2),$$

если

$$\omega(t_1 - t_0) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi N (N \in \mathbb{N}).$$

Поэтому при определении функции действия мы можем «включить» на одном или двух концах на $3/4$ или $1/4$ периода динамику осциллятора с очень большой частотой $\omega \to \infty$, поменяв местами в начальной/конечной точке координаты и импульсы.

(!) Как мы увидим далее, перестановка координат и импульсов даёт вклад в действие! Поэтому производящие функции разных типов для одной и той же траектории не совпадают друг с другом.

Это позволяет нам сконструировать четыре вида производящих функций:

$$S_1(t_0, x_0; t_1, x_1),$$
$$S_2(t_0, p_0; t_1, x_1),$$
$$S_3(t_0, x_0; t_1, p_1),$$
$$S_4(t_0, p_0; t_1, p_1).$$

Для систем с несколькими степенями свободы для каждой степени свободы тип производящей функции можно выбирать независимо. Так, для системы с n степенями свободы (размерность фазового пространства — $2n$) будет 4^n разновидностей производящих функций.

Для первого типа производящей функции мы уже писали каноническое преобразование

$$\frac{\partial}{\partial x_1} S_1(t_0, x_0; t_1, x_1) = p_1, \qquad \frac{\partial}{\partial x_0} S_1(t_0, x_0; t_1, x_1) = -p_0.$$

Для остальных типов производящих функций каноническое преобразование может быть получено из первого случая с помощью замен вида $x^\alpha \to p_\alpha$, $p_\alpha \to -x^\alpha$ для начальной и/или конечной точки:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} S_2(t_0, p_0; t_1, x_1) = p_1, \qquad \frac{\partial}{\partial p_0} S_2(t_0, p_0; t_1, x_1) = x_0;$$

$$\frac{\partial}{\partial p_1} S_3(t_0, x_0; t_1, p_1) = -x_1, \qquad \frac{\partial}{\partial x_0} S_3(t_0, x_0; t_1, p_1) = -p_0;$$

$$\frac{\partial}{\partial p_1} S_4(t_0, p_0; t_1, p_1) = -x_1, \qquad \frac{\partial}{\partial p_0} S_4(t_0, p_0; t_1, p_1) = x_0.$$

Перестановка координат и импульсов

Перестановка координат и импульсов $x^\alpha \to p_\alpha$, $p_\alpha \to -x^\alpha$ задаётся производящей функцией

$$S_1(x_0; x_1) = (x_0, x_1) = \sum_\alpha x_0^\alpha x_1^\alpha, \tag{4.1.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha} S_1(x_0; x_1) = p_{1\alpha} = x_0^\alpha, \qquad \frac{\partial}{\partial x_0^\alpha} S_1(x_0; x_1) = -p_{0\alpha} = x_1^\alpha.$$

Такое преобразование помогает связать между собой производящие функции разных типов.

Преобразование типов производящих функций

Преобразование типов производящих функций может быть выполнено путём их сложения с производящей функцией вида (4.1.3), задающей перестановку координат и импульсов. При этом мы пользуемся аддитивностью действия при объединении фазовых траекторий.

Чтобы преобразовать производящую функцию $S_2(t_0, p_0; t_1, x_1)$ к типу S_1, комбинируем перестановку координат и импульсов с преобразованием, порождаемым S_2, которое при этом рассматривается как преобразование типа S_1 (начальный импульс рассматривается как координата!), т. е. делаем каноническое преобразование $t_0, x_0, p_0 \to t_1, x_1, p_1$ в два шага: $t_0, x_0, p_0 \to t_0, x' = -p_0, p' = x_0 \to t_1, x_1, p_1$,

$$S_1(t_0, x_0; t_1, x_1) = (x_0, x') + S_2(t_0, -x'; t_1, x_1).$$

Исключаем промежуточные координаты x':

$$x' = -p_0,$$

$$S_1(t_0, x_0; t_1, x_1) = -(x_0, p_0) + S_2(t_0, p_0; t_1, x_1).$$

Остаётся исключить p_0. Переменные x_0 и p_0 связаны уравнением

$$x_0 = \frac{\partial S_2}{\partial p_0},$$

разрешив которое получаем

$$p_0 = P_0(t_0, x_0; t_1, x_1).$$

Окончательно получаем, что S_1 связано с S_2 преобразованием Лежандра по переменным p_0:

$$S_1(t_0, x_0; t_1, x_1) = S_2(t_0, P_0(t_0, x_0; t_1, x_1); t_1, x_1) - P_0(t_0, x_0; t_1, x_1) \frac{\partial}{\partial p_0} S_2(t_0, p_0; t_1, x_1)\Big|_{p_0 = P_0(t_0, x_0; t_1, x_1)}.$$

Поскольку преобразование, обратное преобразованию Лежандра, — это тоже преобразование Лежандра, обратный переход $S_1 \to S_2$ выполняется с помощью преобразования Лежандра по x_0:

$$S_2 = S_1 + (x_0, p_0), \qquad p_0 = -\frac{\partial S_1}{\partial x_0}.$$

Разрешив это уравнение, получаем

$$x_0 = X_0(t_0, p_0; t_1, x_1),$$

$$S_2(t_0, p_0; t_1, x_1) = S_1(t_0, X_0(t_0, p_0; t_1, x_1); t_1, x_1) - X_0(t_0, p_0; t_1, x_1) \frac{\partial}{\partial p_0} S_1(t_0, x_0; t_1, x_1)\Big|_{x_0 = X_0(t_0, p_0; t_1, x_1)}.$$

Чтобы преобразовать производящую функцию $S_3(t_0, x_0; t_1, p_1)$ к типу S_1, комбинируем преобразование, порождаемое S_3, которое при этом рассматривается как преобразование типа S_1 (конечный импульс

рассматривается как координата!), с перестановкой координат и импульсов, т. е. делаем каноническое преобразование $t_0, x_0, p_0 \to t_1, x_1, p_1$ в два шага: $t_0, x_0, p_0 \to t_1, x'' = p_1, p'' = -x_1 \to t_1, x_1, p_1$,

$$S_1(t_0, x_0; t_1, x_1) = S_3(t_0, x_0; t_1, x'') + (x'', x_1).$$

Исключаем промежуточные координаты x'':

$$x'' = p_1, \qquad S_1(t_0, x_0; t_1, x_1) = S_2(t_0, p_0; t_1, p_1) + (p_1, x_1).$$

Остаётся исключить p_1. Переменные x_1 и p_1 связаны уравнением

$$x_1 = -\frac{\partial S_3}{\partial p_1},$$

разрешив которое получаем

$$p_1 = P_1(t_0, x_0; t_1, x_1).$$

Окончательно получаем, что S_1 связано с S_3 преобразованием Лежандра по переменным p_1:

$$S_1(t_0, x_0; t_1, x_1) = S_3(t_0, x_0; t_1, P_1(t_0, x_0; t_1, x_1)) - P_1(t_0, x_0; t_1, x_1)\, \frac{\partial}{\partial p_0} S_3(t_0, x_0; t_1, p_1)\Big|_{p_1 = P_1(t_0, x_0; t_1, x_1)}.$$

Функция $S_4(t_0, p_0; t_1, p_1)$ связана с S_1 преобразованием Лежандра одновременно по p_0 и p_1, что соответствует выполнению канонического преобразования в три шага:

$$t_0, x_0, p_0 \to t_1, x' = -p_0, p' = x_0 \to t_1, x'' = p_1, p'' = -x_1 \to t_1, x_1, p_1,$$

$$S_1(t_0, x_0; t_1, x_1) = (x_0, x') + S_4(t_0, -x'; t_1, x'') + (x'', x_1) = -(x_0, p_0) + S_4(t_0, p_0; t_1, p_1) + (p_1, x_1).$$

$$x_0 = \frac{\partial S_4}{\partial p_0}, \qquad x_1 = -\frac{\partial S_4}{\partial p_1}.$$

4.1.2.4 Важные примеры

Точечное преобразование

Точечными преобразованиями называют замену координат на конфигурационном пространстве[1]

$$x_1 = X(t_0, x_0; t_1),$$

при которой обобщённые импульсы преобразуются как компоненты ковариантного вектора:

$$p_{0\alpha} = p_{1\beta}\, \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\alpha}.$$

С такими преобразованиями (не зависящими от времени) мы познакомились при замене обобщённых координат в лагранжевом формализме.

Соответствующая производящая функция имеет вид

$$S_3(t_0, x_0; t_1, p_1) = -X^\alpha(t_0, x_0; t_1)\, p_{1\alpha},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_{1\alpha}} S_3(t_0, x_0; t_1, p_1) &= -x_1^\alpha = -X^\alpha(t_0, x_0; t_1), \\ \frac{\partial}{\partial x_0^\alpha} S_3(t_0, x_0; t_1, p_1) &= -p_{0\alpha} = -p_{1\beta}\, \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\alpha}; \end{aligned}$$

$$H' = H - \frac{\partial S_3}{\partial t_1} = H + p_{1\alpha}\, \frac{\partial X^\alpha}{\partial t_1}.$$

В частности, мы можем описать таким образом тождественное преобразование $x_0, p_0 \to x_0, p_0$:

$$S_{3\text{тожд.}}(x_0, p_1) = -x_0^\alpha p_{1\alpha}.$$

[1] Второй временной аргумент t_0 мы ввели для единообразия в представлении производящих функций.

Свободная частица

Для свободной нерелятивистской частицы $H(x,p)=\frac{p^2}{2m}$ при условии выполнения уравнений движения имеем

$$p_1=p_0=m\frac{x_1-x_0}{t_1-t_0},$$

$$S_1(t_0,x_0;t_1,x_1)=\frac{m}{2}\frac{(x_1-x_0)^2}{t_1-t_0};$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1}S_1(t_0,x_0;t_1,x_1) &= p_1=m\frac{x_1-x_0}{t_1-t_0},\\ \frac{\partial}{\partial x_0}S_1(t_0,x_0;t_1,x_1) &= -p_0=-m\frac{x_1-x_0}{t_1-t_0},\\ \frac{\partial}{\partial t_1}S_1(t_0,x_0;t_1,x_1) &= -\frac{m}{2}\frac{(x_1-x_0)^2}{(t_1-t_0)^2}=-\mathcal{E}.\end{aligned}$$

Соответствующее каноническое преобразование имеет вид

$$\begin{aligned}p_1 &= p_0,\\ x_1 &= x_0+\frac{p_0}{m}(t_1-t_0).\end{aligned}$$

Время входит в производящую функцию только в комбинации $\frac{t_1-t_0}{m}$, причём $H\sim\frac{1}{m}$. Если $t_1-t_0\to 0$ при $\frac{t_1-t_0}{m}=\mathrm{const}$, то производящая функция оказывается конечной и задаёт мгновенное каноническое преобразование.

При $t_1-t_0=0$ производящая функция S_1 не определена, поскольку этому случаю соответствует тождественное преобразование координат, которое не может быть описано производящей функцией типа S_1.

Производящая функция S_2 уже не содержит особых точек:

$$S_2(t_0,p_0;t_1,x_1)=x_0p_0+S_1=\left(x_1-\frac{p_0}{m}(t_1-t_0)\right)p_0+\frac{p_0^2}{2m}(t_1-t_0)=p_0x_1-\frac{p_0^2}{2m}(t_1-t_0).$$

Гармонический осциллятор

Выберем такие единицы измерения для координаты и импульса, что

$$H(x,p)=\frac{\omega}{2}(x^2+p^2),\qquad L(x,\dot{x})=\frac{\dot{x}^2}{2\omega}-\frac{\omega x^2}{2}.$$

Решение уравнений движения

$$\begin{aligned}x &= x_0\,\cos(\omega t)+p_0\,\sin(\omega t),\\ p &= -x_0\,\sin(\omega t)+p_0\,\cos(\omega t)\end{aligned}$$

задаёт каноническое преобразование, которое сводится к вращению фазовой плоскости.

$$S=\frac{1}{4}\left((p_0^2-x_0^2)\,\sin(2\omega t)+2p_0x_0\,(\cos(2\omega t)-1)\right).$$

Выразим импульсы через координаты:

$$\begin{aligned}p_0 &= \frac{x-x_0\,\cos(\omega t)}{\sin(\omega t)},\\ p &= \frac{-x_0+x\,\cos(\omega t)}{\sin(\omega t)}.\end{aligned}$$

Получаем производящую функцию

$$S_1(x_0;t,x)=\frac{(x^2+x_0^2)\,\cos(\omega t)-2xx_0}{2\,\sin(\omega t)}=\frac{(x-x_0)^2}{2}\,\mathrm{ctg}(\omega t)-xx_0\,\mathrm{tg}\left(\tfrac{\omega t}{2}\right).$$

Время входит в производящую функцию только в комбинации ωt, причём $H\sim\omega$ (при малых ωt). Если $t\to 0$ при $\omega t=\phi=\mathrm{const}$, то производящая функция оказывается конечной и задаёт мгновенный поворот фазовой плоскости на угол ϕ.

При $\omega t = -\frac{\pi}{2}$ производящая функция переставляет координату и импульс, как в вышеразобранном примере, $p = x_0$, $x = -p_0$:

$$S_1(x_0; -\tfrac{\pi}{2\omega}, x) = x x_0.$$

При $\omega t = \pi N$ ($N \in \mathbb{N}$) каноническое преобразование имеет вид $x \to (-1)^N x$, $p \to (-1)^N p$ и не может быть описано производящей функцией вида S_1, которая в такие моменты времени оказывается не определена. Мы можем воспользоваться производящей функцией другого типа:

$$S_2(p_0; t, x) = \frac{2p_0 x - (p_0^2 + x^2)\,\sin(\omega t)}{2\cos(\omega t)}.$$

При $\omega t = \frac{\pi}{2} + \pi N$ ($N \in \mathbb{N}$) каноническое преобразование имеет вид $x \to -(-1)^N p$, $p \to (-1)^N x$ и не может быть описано производящей функцией вида S_2, которая в такие моменты времени оказывается не определена.

4.1.3 Канонические замены координат как калибровочные преобразования в связи с производящими функциями

Этот параграф можно рассматривать как продолжение § 1.11.7 (с. 123).

Каноническая пуассонова структура на фазовом пространстве задаётся антисимметричным тензором $J^{KL} = \{X^K, X^L\}$. Для невырожденной пуассоновой структуры матрица J^{KL} невырожденна и её можно обратить:

$$J^{KL}\,\omega_{LM} = \delta^K_M.$$

Обратная матрица ω_{LM} (*симплектическая структура*) также является антисимметричным тензором, но уже с нижними индексами.

В канонических координатах компоненты J^{KL} и ω_{LM} постоянны, следовательно, внешняя производная от ω равна нулю:

$$(d\omega)_{KLM} = \partial_K \omega_{LM} + \partial_M \omega_{KL} + \partial_L \omega_{MK} = 0.$$

Это позволяет локально задать ω как внешнюю производную от некоторого ковекторного поля (ковекторного потенциала) A:

$$\omega_{KL} = (dA)_{KL} = \partial_K A_L - \partial_L A_K.$$

В канонических координатах $X^K = (x^\alpha, p_\alpha)$ пуассонова и симплектическая структуры для фазового пространства с размерностью $2n$ имеют вид

$$J^{KL} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{1} \\ -\hat{1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \omega_{KL} = \begin{pmatrix} 0 & -\hat{1} \\ \hat{1} & 0 \end{pmatrix},$$

где $\hat{1}$ — единичная матрица $n \times n$.

(**) Симплектическая структура удобно выражается через дифференциальные формы:

$$\omega = dp_\alpha \wedge dx^\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \omega_{KL} = \partial_K p_\alpha\, \partial_L x^\alpha - \partial_L p_\alpha\, \partial_K x^\alpha.$$

В роли ковекторного потенциала можно взять

$$A = p_\alpha\, dx^\alpha \quad \Leftrightarrow \quad A_K = p_\alpha\, \partial_K x^\alpha \quad \Leftrightarrow \quad A_K = (p_1, \ldots, p_n, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n}).$$

Такой ковекторный потенциал можно сопоставить каждой канонической системе координат. При этом для всех канонических координат симлектическая форма одинакова, т.е.

$$dA = dA' = \omega \quad \Leftrightarrow \quad A' - A = f, \qquad df = 0.$$

Локально ковекторное поле f должно представляться градиентом некоторой функции, таким образом, преобразование ковекторных потенциалов A может быть описано как *калибровочное* (*градиентное*) *преобразование* по аналогии с калибровочным преобразованием ковекторного потенциала в электродинамике[2]:

$$f = dS \quad \Leftrightarrow \quad f_K = \partial_K S,$$

$$dS = p'_\alpha\, dx'^\alpha - p_\alpha\, dx^\alpha.$$

[2]Мы уже показывали (см. § 2.11.1 «Электромагнитное поле и симплектическая структура», с. 268), что симплектическую структуру и электромагнитное поле можно объединить в один тензор на фазовом пространстве.

Если все $2n$ градиентов из набора dx^α, dx'^α линейно независимы (в рассматриваемой области фазового пространства), то можно выбрать x^α и x'^α в качестве аргументов функции S, тогда частные производные дадут импульсы:

$$S = S(x, x'), \qquad \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} = -p_\alpha, \quad \frac{\partial S}{\partial x'^\alpha} = p'_\alpha.$$

Мы получили производящую функцию типа S_1.

Если использовать ковекторный потенциал другого вида

$$\tilde{A} = -x^\alpha\, dp_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{A}_K = -x^\alpha\, \partial_K p_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{A}_K = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, -x^1, \ldots, -x^n),$$

$$A - \tilde{A} = d(x^\alpha p_\alpha),$$

то можно получить производящие функции типов S_2, S_3, S_4.

Выбор между слагаемыми вида pdx и $-xdp$ для старых и новых координат позволяет получить 4^n варианта производящих функций.

4.1.4 Дальнейшее чтение

В качестве дополнений к главе «Уравнение Гамильтона–Якоби» можно также рассматривать главы 5.4 «Уравнение Гамильтона–Якоби как описание ансамбля невзаимодействующих систем» и 5.5 «Квантовый аналог уравнения Гамильтона–Якоби» в части «Механика классическая и квантовая как классическая теория поля».

Глава 4.2

Адиабатические инварианты (с. 300)

4.2.1 Решения и обсуждение задач 40–42

40. Адиабатический инвариант в слабопеременном магнитном поле. Релятивистская частица с массой m и зарядом q движется в магнитном поле. Магнитное поле медленно меняется со временем так, что изменение поля за период движения мало по сравнению с самим полем.
а) Определите изменение энергии частицы за один оборот.
б) Докажите, что величина $p_\perp^2/B$ остаётся постоянной (т.е. является адиабатическим инвариантом).
в) Вычислите изменение радиуса орбиты и энергии частицы, если поле изменилось от значения B_1 до B_2.
г) Покажите, что адиабатический инвариант для нерелятивистской заряженной частицы в магнитном поле сводится к случаю *гармонического осциллятора* (при подходящей параметризации магнитного поля векторным потенциалом).

Решение (общая часть)

В данной задаче мы можем рассматривать как релятивистскую, так и нерелятивистскую частицу. Потерями энергии на излучение (движущаяся с ускорением заряженная частица должна излучать) мы пренебрегаем.

Записав второй закон Ньютона для частицы с импульсом $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v} = \frac{\mathcal{E}}{c^2}\,\mathbf{v}$, получаем, что импульс вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = -\frac{q}{cm\gamma}\mathbf{B}$:

$$\dot{\mathbf{p}} = \tfrac{q}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}] = [\underbrace{-\tfrac{q}{cm\gamma}\mathbf{B}}_{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{p}].$$

Таким образом, частица движется по винтовой линии с радиусом R:

$$R = \frac{v_\perp}{\omega} = \frac{p_\perp}{m\gamma\omega} = \frac{c\,p_\perp}{|q|\,B}.$$

Решение 1

В плоскости, перпендикулярной однородному постоянному магнитному полю (пусть поле направлено по оси z), заряженная частица совершает периодическое движение (по кругу), так что мы можем найти адиабатический инвариант, применив соответствующую формулу:

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{z=\text{const}} \mathbf{P}\,d\mathbf{r}.$$

Здесь

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})$$

— обобщённый импульс частицы, а $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$ — её кинематический импульс. Имеем

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{z=\text{const}} \mathbf{p}\,d\mathbf{r} + \frac{1}{2\pi}\frac{q}{c}\oint\limits_{z=\text{const}} \mathbf{A}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}.$$

В первом слагаемом воспользуемся тем, что $\mathbf{p}\,d\mathbf{r} = p_\perp d\ell$, где $d\ell$ — элемент длины траектории при движении по кругу $p_\perp = \text{const}$, так что первый интеграл легко берётся. Второй интеграл по теореме Стокса переписывается как поток ротора векторного потенциала $\mathbf{A}$ (т.е. поток магнитного поля) через поверхность, натянутую на проекции траектории на плоскость $z = \text{const}$. Ориентация нормали к поверхности выбирается по правилу правого винта, так что с учётом правила Ленца (см. знак минус в формуле для угловой скорости $\boldsymbol{\omega} = -\frac{q}{cm\gamma}\mathbf{B}$) для положительного заряда поток оказывается отрицательным, а для отрицательного — положительным:

$$I = \frac{1}{2\pi} p_\perp \, 2\pi R + \frac{1}{2\pi}\frac{q}{c} \iint \underbrace{\operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r})}_{\mathbf{B}} \, d\mathbf{s} = p_\perp R - \frac{1}{2\pi}\frac{q}{c} \operatorname{sgn}(q)\, B\, \pi R^2.$$

Подставив выражение для радиуса орбиты, получаем окончательное выражение для адиабатического инварианта:

$$I = p_\perp R - \frac{1}{2}\frac{|q|}{c} B R^2 = p_\perp \frac{c\,p_\perp}{|q|\,B} - \frac{1}{2}\frac{|q|}{c} B \left(\frac{c\,p_\perp}{|q|\,B}\right)^2 = \frac{c}{2|q|}\frac{p_\perp^2}{B}.$$

Решение 2

Приведённое выше решение быстро приводит к ответу, но не объясняет механизма сохранения величины адиабатического инварианта, поэтому может быть полезно получить тот же ответ менее универсальным, но более наглядным способом.

Рассмотрим приращение энергии частицы за один оборот. Работу над частицей совершает только вихревое электрическое поле (порождаемое переменным магнитным), т.к. $[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]\perp\mathbf{v}$:

$$\delta\mathcal{E} = \int\limits_{t=t_0}^{t=t_0+T} \mathbf{F}(t)\, d\mathbf{r} = q \int\limits_{t=t_0}^{t=t_0+T} \mathbf{E}(\mathbf{r}(t), t)\, d\mathbf{r}.$$

В силу того, что магнитное поле меняется медленно, предположим, что за время одного оборота электрическое поле почти не изменяется, т.е. $\mathbf{E}(\mathbf{r}(t), t) \approx \mathbf{E}(\mathbf{r}(t), t_0)$. Кроме того, заменим траекторию частицы в переменном магнитном поле (виток спирали, близкий к окружности) на окружность (орбиту для случая постоянного магнитного поля). Теперь можно применить уравнение Максвелла (в интегральной форме) для циркуляции электрического поля:

$$\delta\mathcal{E} \approx q \oint \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_0)\, d\mathbf{r} = q\,\frac{-1}{c}\frac{d\Phi}{dt}.$$

Здесь $\Phi = -\operatorname{sgn}(q)\, B\, \pi R^2(t_0)$ — поток магнитного поля через невозмущённую (круговую) орбиту частицы (радиус фиксирован!). Имеем

$$\delta\mathcal{E} \approx \frac{|q|}{c}\,\pi R^2 \frac{dB}{dt} = \frac{|q|}{c}\,\pi \left(\frac{c\,p_\perp}{|q|\,B}\right)^2 \frac{dB}{dt} = \frac{\pi c}{|q|}\frac{p_\perp^2}{B^2}\frac{dB}{dt}.$$

С другой стороны (также в силу медленности изменения магнитного поля),

$$\delta\mathcal{E} \approx T\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2\pi R}{p_\perp \frac{c^2}{\mathcal{E}}}\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{\pi}{|q|cB}\frac{d\mathcal{E}^2}{dt}.$$

Приравняв эти два выражения, получаем

$$\frac{\pi}{|q|cB}\frac{d\mathcal{E}^2}{dt} = \frac{\pi c}{|q|}\frac{p_\perp^2}{B^2}\frac{dB}{dt} \quad\Rightarrow\quad \frac{d\mathcal{E}^2}{dt} = \frac{c^2 p_\perp^2}{B}\frac{dB}{dt} \quad\Rightarrow\quad \frac{d\mathcal{E}^2}{c^2 p_\perp^2} = \frac{dB}{B}.$$

С учётом того, что энергия изменяется только за счёт поперечного импульса, получаем

$$\mathcal{E}^2 = m^2c^4 + c^2p^2 = \underbrace{m^2c^4}_{\text{const}} + \underbrace{c^2p_\parallel^2}_{\text{const}} + c^2p_\perp^2 \quad\Rightarrow\quad d\mathcal{E}^2 = d(c^2p_\perp^2).$$

Интегрирование получившегося дифференциального уравнения даёт искомый адиабатический инвариант:

$$\frac{dp_\perp^2}{p_\perp^2} = \frac{dB}{B} \quad\Rightarrow\quad d\ln p_\perp^2 = d\ln B \quad\Rightarrow\quad \frac{p_\perp^2}{B} = \text{const}.$$

Решение 3

Однородное магнитное поле, направленное по оси z, можно параметризовать следующим векторным потенциалом:

$$\mathbf{A} = (0, Bx, 0).$$

Для нерелятивистской заряженной частицы в таком потенциале гамильтониан имеет вид

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{P}) = \frac{(\mathbf{P} - \frac{q}{c}\mathbf{A})^2}{2m} = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{(P_y - \frac{q}{c}Bx)^2}{2m} + \frac{P_z^2}{2m}.$$

Гамильтониан не зависит от координат y, z, так что компоненты импульса P_y, P_z являются интегралами движения. Если заменить их на константы, мы получим гамильтониан одномерного гармонического осциллятора массой m с жёсткостью

$$k = \left(\frac{qB}{mc}\right)^2.$$

Известный нам адиабатический инвариант гармонического осциллятора даёт искомый ответ:

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{осц.}}}{\omega} = \frac{p_\perp^2}{2m}\left|\frac{mc}{qB}\right| = \frac{cp_\perp^2}{2|q|B}.$$

41. Слабонеоднородное магнитное поле. Магнитное поле считается слабонеоднородным, если оно мало меняется на расстояниях порядка радиуса орбиты.

Условия отдельных пунктов и решения

а) Получите формулу $\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}$ для силы, действующей на магнитный диполь в слабонеоднородном поле.

Рассмотрим частицу, совершающую движение в некоторой области слабонеоднородного магнитного поля. Поле считаем слабонеоднородным при условии, что в области, где движется частица, поле меняется слабо. Найдём *среднюю по времени* силу, действующую на частицу со стороны магнитного поля (на частицу также могут действовать другие внешние силы). Радиус-вектор частицы, отложенный от некоторой точки внутри области движения частицы, обозначим $\boldsymbol{\rho}$. Имеем

$$\langle \mathbf{F} \rangle_t = \tfrac{q}{c}\langle [\dot{\boldsymbol{\rho}} \times \mathbf{B}(\boldsymbol{\rho})] \rangle_t.$$

Для слабонеоднородного поля разложим магнитное поле $\mathbf{B}(\boldsymbol{\rho})$ до первого порядка по $\boldsymbol{\rho}$. Возможность такого разложения, по существу, является критерием слабой неоднородности:

$$B_\alpha(\boldsymbol{\rho}) = B_\alpha(0) + \rho_\beta \nabla_\beta B_\alpha(0) + o(\rho);$$

$$\begin{aligned}
\langle F_\mu \rangle_t &= \tfrac{q}{c}\langle \varepsilon_{\mu\nu\alpha}\dot{\rho}_\nu B_\alpha(\boldsymbol{\rho}) \rangle_t = \\
&= \tfrac{q}{c}\varepsilon_{\mu\nu\alpha}\langle \dot{\rho}_\nu \Big(B_\alpha(0) + \rho_\beta \nabla_\beta B_\alpha(0) + o(\rho) \Big) \rangle_t = \\
&= \tfrac{q}{c}\varepsilon_{\mu\nu\alpha}\Big(\langle \dot{\rho}_\nu \rangle_t B_\alpha(0) + \langle \dot{\rho}_\nu \rho_\beta \rangle_t \nabla_\beta B_\alpha(0) \Big) + o(\rho^2).
\end{aligned}$$

Среднее от скорости по времени выражается через разность радиус-векторов:

$$\langle \dot{\rho}_\nu \rangle_t = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \dot{\rho}_\nu \, dt = \frac{\rho_\nu(T) - \rho_\nu(0)}{T}.$$

Если движение периодическое и T — период, то $\rho_\nu(0) = \rho_\nu(T)$ и средняя скорость за период обращается в нуль. Если движение не обязательно периодическое, но финитное, то величина $\rho_\nu(T) - \rho_\nu(0)$ ограничена и средняя скорость за бесконечное время стремится к нулю:

$$\frac{\rho_\nu(T) - \rho_\nu(0)}{T} \to 0 \quad \text{при } T \to \infty.$$

Мы получаем для средней силы выражение

$$\langle F_\mu\rangle_t \quad = \quad \tfrac{q}{c}\varepsilon_{\mu\nu\alpha}\langle\dot\rho_\nu\rho_\beta\rangle_t\nabla_\beta B_\alpha(0)+o(\rho^2).$$

Вычислим входящее в полученную формулу среднее:

$$\langle\dot\rho_\nu\rho_\beta\rangle_t=\tfrac12\langle\dot\rho_\nu\rho_\beta+\dot\rho_\nu\rho_\beta\rangle_t=\tfrac12\langle\dot\rho_\nu\rho_\beta+\tfrac{d}{dt}(\rho_\nu\rho_\beta)-\rho_\nu\dot\rho_\beta\rangle_t.$$

Полная производная от ограниченной (или даже периодической) функции исчезает при усреднении по времени (аналогично среднему от скорости) $\langle\frac{d}{dt}(\rho_\nu\rho_\beta)\rangle_t=0$, так что мы получаем выражение, в котором узнаём векторное произведение, записанное в виде антисимметричной матрицы:

$$\tfrac12\langle\dot\rho_\nu\rho_\beta-\rho_\nu\dot\rho_\beta\rangle_t=\tfrac12\langle\dot\rho_\lambda\rho_\gamma\rangle_t(\delta_{\lambda\nu}\delta_{\gamma\beta}-\delta_{\lambda\beta}\delta_{\gamma\nu})=\tfrac12\langle\dot\rho_\lambda\rho_\gamma\rangle_t\,\varepsilon_{\lambda\gamma\sigma}\varepsilon_{\nu\beta\sigma}=\tfrac12\langle[\dot{\boldsymbol\rho}\times\boldsymbol\rho]_\sigma\rangle_t\,\varepsilon_{\nu\beta\sigma}=\varepsilon_{\nu\sigma\beta}\tfrac12\langle[\boldsymbol\rho\times\dot{\boldsymbol\rho}]_\sigma\rangle_t.$$

Подставим получившееся выражение в формулу для силы:

$$\langle F_\mu\rangle_t=-\tfrac{q}{c}\varepsilon_{\nu\mu\alpha}\varepsilon_{\nu\sigma\beta}\tfrac12\langle[\boldsymbol\rho\times\dot{\boldsymbol\rho}]_\sigma\rangle_t\,\nabla_\beta B_\alpha(0)+o(\rho^2)=-(\delta_{\mu\sigma}\delta_{\alpha\beta}-\delta_{\mu\beta}\delta_{\alpha\sigma})\tfrac{q}{2c}\langle[\boldsymbol\rho\times\dot{\boldsymbol\rho}]_\sigma\rangle_t\,\nabla_\beta B_\alpha(0)+o(\rho^2).$$

Поскольку $\delta_{\alpha\beta}\nabla_\beta B_\alpha=\operatorname{div}\mathbf{B}=0$, при открывании скобок остаётся только второе слагаемое:

$$\langle F_\mu\rangle_t=\delta_{\mu\beta}\delta_{\alpha\sigma}\tfrac{q}{2c}\langle[\boldsymbol\rho\times\dot{\boldsymbol\rho}]_\sigma\rangle_t\,\nabla_\beta B_\alpha(0)+o(\rho^2)=\tfrac{q}{2c}\langle[\boldsymbol\rho\times\dot{\boldsymbol\rho}]_\alpha\rangle_t\,\nabla_\mu B_\alpha(0)+o(\rho^2).$$

В последнем выражении узнаём среднее значение магнитного момента частицы:

$$\langle\mu_\alpha\rangle_t=\tfrac{q}{2c}\langle[\boldsymbol\rho\times\dot{\boldsymbol\rho}]_\alpha\rangle_t.$$

Это позволяет выписать среднюю силу, действующую на магнитный диполь (если диполь состоит из нескольких заряженных частиц, то силы и магнитные моменты суммируются):

$$\langle F_\mu\rangle_t=\langle\mu_\alpha\rangle_t\,\nabla_\mu B_\alpha\quad\Leftrightarrow\quad\langle\mathbf{F}\rangle_t=\boldsymbol\nabla(\langle\boldsymbol\mu\rangle_t,\mathbf{B}).$$

Полученное выражение для силы (даже с точностью до усреднений по времени[1]) не соответствует тому, что надо получить по условию задачи, т. е. соотношению $\mathbf{F}=(\boldsymbol\mu,\boldsymbol\nabla)\mathbf{B}$. Изучим, при каких условиях эти выражения совпадают:

$$0=\underbrace{\boldsymbol\nabla(\boldsymbol\mu,\mathbf{B})-(\boldsymbol\mu,\boldsymbol\nabla)\mathbf{B}}_{\mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b})}=\underbrace{[\boldsymbol\mu\times[\boldsymbol\nabla\times\mathbf{B}]]}_{[\mathbf{a}\times[\mathbf{b}\times\mathbf{c}]]}=[\boldsymbol\mu\times\operatorname{rot}\mathbf{B}]=[\boldsymbol\mu\times(\tfrac1c\tfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\tfrac{4\pi}{c}\mathbf{j})].$$

(!) Поскольку $\mathbf{B}$ — *внешнее* магнитное поле, в выражение $\frac1c\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$ входят *внешние* (по отношению к магнитному диполю) поля и токи, которые по условию задачи отсутствуют.

б) Найдите в нерелятивистском случае уравнение движения *ведущего центра* орбиты заряженной частицы.

В слабонеоднородном магнитном поле, на малых временах, частица ведёт себя почти как в однородном поле — движется по винтовой линии. Только теперь винтовая линия оказывается искривлена: у неё могут от оборота к обороту постепенно меняться диаметр витков, шаг винта, направление оси винта. Такое движение можно представить как комбинацию кругового движения по окружности с медленно меняющимся радиусом в плоскости, перпендикулярной полю, с движением этой плоскости.

Усреднённое по времени движение заряженной частицы по окружности «размазывает» частицу по всей окружности и превращает её в виток с током (т.е. магнитный диполь, несущий также заряд, связанный с частицей). Заменив частицу таким диполем, мы можем написать уравнение для усреднённого (по быстрому вращательному движению) движения частицы $\mathbf{R}(t)$ (уравнение движения ведущего центра орбиты)[2]:

$$m\ddot{\mathbf{R}}=\tfrac{q}{c}[\dot{\mathbf{R}}\times\mathbf{B}]+(\boldsymbol\mu,\boldsymbol\nabla)\mathbf{B}.\tag{4.2.1}$$

[1] Далее мы опускаем знак усреднения по времени. В случае, когда магнитный диполь — виток (или катушка) с током, усреднение по времени не требуется.

[2] Формализуем наши рассуждения. Уравнение движения частицы имеет вид:

$$m\ddot{\mathbf{r}}=\tfrac{q}{c}[\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{B}(\mathbf{r})].$$

В слабонеоднородном поле на небольших временах движение частицы поперёк поля почти периодическое (более того, почти равномерное круговое вокруг *ведущего центра* $\mathbf{R}$). Пусть

$$\mathbf{R}=\langle\mathbf{r}\rangle,\qquad\mathbf{r}=\mathbf{R}+\boldsymbol\rho.$$

Усреднение подразумевается по одному или нескольким оборотам частицы.

Оба слагаемых в этом выражении связаны с силой Лоренца, только первое слагаемое — сила Лоренца для медленного (усреднённого) движения частицы, а второе слагаемое — усреднённая по времени (по одному или нескольким оборотам) сила Лоренца для быстрого движения.

Магнитное поле представим в виде

$$\mathbf{B} = B\mathbf{h}, \qquad |\mathbf{h}| = 1, \quad B > 0.$$

Магнитный момент направлен против магнитного поля. Зная радиус окружности, получаем $\rho = \frac{c\,p_\perp}{|q|\,B} = \frac{mc\,v_\perp}{|q|\,B}$,

$$\boldsymbol{\mu} = -\mu\mathbf{h} = -\frac{|q|}{2c}\rho v_\perp\,\mathbf{h} = -\frac{|q|}{2c}\frac{mc\,v_\perp}{|q|\,B}v_\perp\,\mathbf{h} = -\frac{m\,v_\perp^2}{2B}\,\mathbf{h}. \tag{4.2.2}$$

Мы видим, что с точностью до постоянного множителя магнитный момент по модулю совпадает с адиабатическим инвариантом из предыдущей задачи. Здесь он тоже остаётся постоянным:

$$m\ddot{\mathbf{R}} = \tfrac{q}{c}[\dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{B}] - \frac{m\,v_\perp^2}{2B}(\mathbf{h}, \boldsymbol{\nabla})(B\mathbf{h}).$$

Поскольку $\mathbf{h}$ — единичный вектор, направленный вдоль магнитного поля, т.е. единичная касательная к силовой линии магнитного поля, производная вдоль этого вектора — это производная по длине силовой линии:

$$(\mathbf{h}, \boldsymbol{\nabla}) = \frac{\partial}{\partial \ell}.$$

Производная от единичной касательной к кривой по длине этой кривой даёт вектор кривизны (нормаль $\mathbf{n}$, делённую на радиус кривизны линии η):

$$(\mathbf{h}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{h} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \ell} = \frac{\mathbf{n}}{\eta},$$

$$m\ddot{\mathbf{R}} = \tfrac{q}{c}[\dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{B}] - \frac{\mathbf{n}}{\eta}\frac{m\,v_\perp^2}{2} - \mathbf{h}\frac{m\,v_\perp^2}{2B}\frac{\partial B}{\partial \ell}. \tag{4.2.3}$$

Для дальнейшего исследования рассмотрим продольную и поперечную части полученного уравнения по отношению к магнитному полю, для чего умножим его на единичный вектор $\mathbf{h}$ сначала скалярно, а потом векторно:

$$m(\mathbf{h}, \ddot{\mathbf{R}}) = \tfrac{q}{c}(\mathbf{h}, [\dot{\mathbf{R}} \times B\mathbf{h}]) - \frac{(\mathbf{h}, \mathbf{n})}{\eta}\frac{m\,v_\perp^2}{2} - (\mathbf{h}, \mathbf{h})\frac{m\,v_\perp^2}{2B}\frac{\partial B}{\partial \ell} = -\frac{m\,v_\perp^2}{2B}\frac{\partial B}{\partial \ell}.$$

В первом приближении скорость дрейфа параллельна магнитному полю: $\dot{\mathbf{R}} \approx \mathbf{v}_\parallel \parallel \mathbf{h}$ (это очевидно для однородного поля, а мы рассматриваем почти однородное) и

$$(\mathbf{h}, \ddot{\mathbf{R}}) \approx \frac{dv_\parallel}{dt}.$$

Вдоль силовой линии действует одна сила, которая стремится вытолкнуть частицу из областей сильного магнитного поля:

$$m\frac{dv_\parallel}{dt} = -\frac{m\,v_\perp^2}{2B}\frac{\partial B}{\partial \ell}.$$

Когда магнитное поле усиливается, силовые линии сближаются. В результате направление силовых линий вдоль траектории частицы не совпадает с направлением силовой линии, по которой движется ведущий центр орбиты. Сила, действующая на частицу (ортогональная скорости и силовой линии в данной точке), получает компоненту в направлении против поля в центре орбиты, которая не исчезает при усреднении по периоду (очень маленькая стрелка на рисунке, направленная налево под надписью $\langle\mathbf{F}\rangle_{\mathbf{t}}$).

Усреднив также по одному или нескольким оборотам исходное уравнение движения, получаем

$$m\langle\ddot{\mathbf{R}} + \ddot{\boldsymbol{\rho}}\rangle = m\ddot{\mathbf{R}} = \tfrac{q}{c}\langle[(\dot{\mathbf{R}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}) \times \mathbf{B}(\mathbf{R} + \boldsymbol{\rho})]\rangle.$$

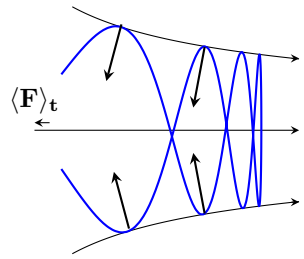
Как и в п. а), разлагаем магнитное поле до линейного по $\boldsymbol{\rho}$ порядка: $B_\alpha(\mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}) = B_\alpha(\mathbf{R}) + \underbrace{\rho_\beta \nabla_\beta}_{(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\nabla})} B_\alpha(\mathbf{R}) + o(\rho)$,

$$m\ddot{\mathbf{R}} = \tfrac{q}{c}\langle[\dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{B}(\mathbf{R})] + [\dot{\boldsymbol{\rho}} \times \mathbf{B}(\mathbf{R})] + [\dot{\mathbf{R}} \times (\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}(\mathbf{R})] + [\dot{\boldsymbol{\rho}} \times (\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}(\mathbf{R})]\rangle.$$

Все величины, зависящие только от $\mathbf{R}$, можно выносить из-под усреднения, т.к. на малых временах они постоянны:

$$m\ddot{\mathbf{R}} = \tfrac{q}{c}\Big([\dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{B}(\mathbf{R})] + [\underbrace{\langle\dot{\boldsymbol{\rho}}\rangle}_{\approx 0} \times \mathbf{B}(\mathbf{R})] + [\dot{\mathbf{R}} \times (\underbrace{\langle\boldsymbol{\rho}\rangle}_{\approx 0}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}(\mathbf{R})] + \langle[\dot{\boldsymbol{\rho}} \times (\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}(\mathbf{R})]\rangle\Big).$$

Имеем $\langle\boldsymbol{\rho}\rangle \approx 0$ и $\langle\dot{\boldsymbol{\rho}}\rangle \approx 0$, т.к. $\boldsymbol{\rho}$ близко к равномерному движению по окружности с центром в точке 0. Усреднение последнего слагаемого мы уже производили в пункте **а**. В результате мы получаем формулу (4.2.1).



На рисунке изображён эффект *магнитного зеркала* — отражение частицы от области сильного поля

Домножив это уравнение на $v_\parallel = \frac{d\ell}{dt}$, получаем (с учётом того, что $v^2 = v_\parallel^2 + v_\perp^2 = \text{const}$) сохранение адиабатического инварианта:

$$-\frac{d}{dt}\frac{mv_\perp^2}{2} = \frac{d}{dt}\frac{mv_\parallel^2}{2} = mv_\parallel \frac{dv_\parallel}{dt} = -\frac{m\,v_\perp^2}{2B}\frac{\partial B}{\partial \ell}\frac{d\ell}{dt} = -\frac{m\,v_\perp^2}{2B}\frac{dB}{dt} \quad \Rightarrow \quad d\ln v_\perp^2 = d\ln B \quad \Rightarrow \quad \frac{v_\perp^2}{B} = \text{const}.$$

Если переписать уравнение для продольной скорости в следующем виде:

$$m\frac{dv_\parallel}{dt} = m\,\frac{d^2\ell}{dt^2} = -\underbrace{\frac{m\,v_\perp^2}{2B}}_{\text{const}}\frac{\partial B}{\partial \ell} = -\frac{\partial}{\partial \ell}\frac{m\,v_\perp^2}{2},$$

то становится ясно, что для движения вдоль силовой линии кинетическая энергия кругового движения частицы выступает в роли потенциала.

Домножим теперь уравнение (4.2.3) на $\mathbf{h}$ векторно:

$$m[\mathbf{h}\times\ddot{\mathbf{R}}] = \tfrac{q}{c}[\mathbf{h}\times[\dot{\mathbf{R}}\times B\mathbf{h}]] - \frac{[\mathbf{h}\times\mathbf{n}]}{\eta}\frac{m\,v_\perp^2}{2} - [\mathbf{h}\times\mathbf{h}]\frac{m\,v_\perp^2}{2B}\frac{\partial B}{\partial \ell}.$$

Вектор $\mathbf{b} = [\mathbf{h}\times\mathbf{n}]$ называется *бинормалью*, это единичный вектор, достраивающий пару ортогональных единичных векторов $\mathbf{h}$, $\mathbf{n}$ до правого ортонормированного базиса. Двойное векторное произведение даёт поперечную по отношению к магнитному полю часть скорости ведущего центра:

$$[\mathbf{h}\times[\dot{\mathbf{R}}\times\mathbf{h}]] = \dot{\mathbf{R}}\underbrace{(\mathbf{h},\mathbf{h})}_{1} - \underbrace{\mathbf{h}(\mathbf{h},\dot{\mathbf{R}})}_{\dot{\mathbf{R}}_\parallel} = \dot{\mathbf{R}}_\perp.$$

Вклад в левую часть уравнения даёт поперечная часть ускорения ведущего центра, которая может быть расписана (с учётом того, что движение происходит почти вдоль силовой линии) как центростремительное ускорение:

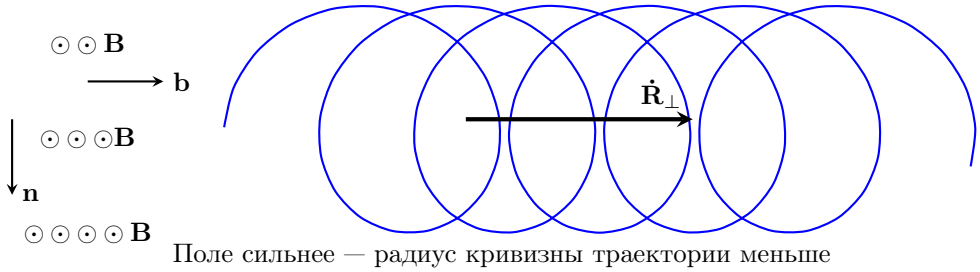
$$\ddot{\mathbf{R}}_\perp = \ddot{\mathbf{R}} - \mathbf{h}(\mathbf{h},\ddot{\mathbf{R}}) \approx \frac{v_\parallel^2}{\eta}\,\mathbf{n},$$

$$[\mathbf{h}\times\ddot{\mathbf{R}}] = [\mathbf{h}\times\ddot{\mathbf{R}}_\perp] = \frac{v_\parallel^2}{\eta}[\mathbf{h}\times\mathbf{n}] = \frac{v_\parallel^2}{\eta}\,\mathbf{b}.$$

Окончательно получаем (с учётом равенства $\omega = \frac{|q|B}{mc}$), что поперечная часть скорости ведущего центра (*скорость дрейфа*) направлена по бинормали:

$$\frac{mv_\parallel^2}{\eta}\,\mathbf{b} = \frac{q}{c}B\,\dot{\mathbf{R}}_\perp - \frac{mv_\perp^2}{2\eta}\,\mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{R}}_\perp = \frac{mc}{qB}\frac{v_\parallel^2 + \frac{1}{2}v_\perp^2}{\eta}\,\mathbf{b} = \operatorname{sgn}(q)\frac{v_\parallel^2 + \frac{1}{2}v_\perp^2}{\eta\omega}\,\mathbf{b}.$$

Поле слабее — радиус кривизны траектории больше



Поле сильнее — радиус кривизны траектории меньше

Частица на рисунке движется в плоскости, перпендикулярной полю. Заряд частицы положительный. Поле $\mathbf{B}$ протыкает плоскость рисунка снизу вверх. В направлении нормали $\mathbf{n}$ поле увеличивается. За счёт этого радиус кривизны вдоль нормали уменьшается, почти круговая орбита не замыкается и частица с каждым оборотом смещается вдоль бинормали $\mathbf{b}$ (перпендикулярно нормали и полю)

42. * Радиационные пояса Земли.

На больших расстояниях поле Земли представляет собой поле диполя с магнитным моментом $\mathfrak{m} = 8,1 \cdot 10^{25}$ гаусс·см^3.

а) Найдите в полярных координатах уравнение силовой линии магнитного диполя. Определите, как меняется поле вдоль силовой линии.

б) Предполагая, что скорость частицы на экваторе составляет угол α с плоскостью экватора, определите максимальную широту (полярный угол), достигаемую частицей.

в) Найдите угол α, при котором частица достигнет поверхности Земли, если расстояние от Земли, на котором частица находилась в экваториальной плоскости, значительно больше радиуса Земли.

в) Используя результат задачи 41, найдите период дрейфа вокруг Земли протона с энергией 10 МэВ, движущегося в экваториальной плоскости на расстоянии 30 000 км от Земли.

Обсуждение

Данная задача иллюстрирует задачу о движении заряженной частицы в слабонеоднородном магнитном поле.

Основным источником заряженных частиц в околоземном пространстве служит *солнечный ветер* — поток заряженных частиц, идущий от Солнца.

На малых временах частица совершает винтовое движение с осью винта, направленной по магнитному полю Земли в данной области пространства. Поток магнитного поля через орбиту частицы является адиабатическим инвариантом и остаётся примерно постоянным. Поскольку поток соответствует числу силовых линий, орбита сжимается или растягивается по мере схождения или расхождения силовых линий. (Если ведущий центр движется по оси симметрии поля, то частица навивается на некоторый пучок силовых линий.)

При приближении к полюсу пучок силовых линий сжимается (поле усиливается) и в силу сохранения адиабатического инварианта $\frac{p_\perp^2}{B}$ увеличивается поперечная часть импульса частицы. Но магнитное поле не меняет модуля скорости и энергии частицы, так что скорость частицы вдоль поля уменьшается. Когда продольный импульс частицы обнулится, $p = p_\perp$, частица отразится (*эффект магнитного зеркала*).

Поле диполя при движении вдоль силовой линии к полюсу неограниченно нарастает, но в случае Земли диполь не точечный, кроме того, точка разворота может оказаться в атмосфере (тогда при вхождении заряженной частицы в атмосферу мы увидим полярное сияние) или под поверхностью Земли (тогда частица потеряет энергию за счёт взаимодействия с веществом, в котором много электрических зарядов).

Если точка разворота частицы находится достаточно высоко, то частица может долго «гулять» от магнитного зеркала у одного полюса к магнитному зеркалу у другого полюса и обратно. Такие частицы образуют *радиационные пояса* Земли.

Дрейф заряженной частицы в направлении бинормали к силовой линии в случае магнитного поля Земли будет дрейфом по долготе. В результате частица не движется вдоль какой-то одной силовой линии, а постепенно переходит от одной линии к другой.

Разумеется, данная задача даёт лишь первое знакомство с радиационными поясами Земли и других планет, имеющих магнитное поле. Например, мы не учли влияние частиц на магнитное поле. Магнитное поле прикладывает силу к частицам, но и частицы прикладывают силу к магнитному полю, растягивая силовые линии[3]. В результате силовые линии магнитного поля Земли вытягиваются от Солнца подобно хвосту кометы.

Мы также не рассмотрели захват заряженной частицы магнитным полем Земли, для чего частица должна потерять часть своей энергии, и эффекты генерации в радиационных поясах электромагнитного излучения.

Магнитное поле Земли и радиационные пояса оказывают влияние на жизнь и хозяйственную деятельность человека. Магнитное поле Земли отклоняет поток солнечного ветра, обеспечивая дополнительную радиационную защиту поверхности Земли и низким орбитам (на которых летают обитаемые космические станции). При сильных солнечных вспышках, когда солнечный ветер прорывается к поверхности Земли, наблюдаются сложности с радиосвязью и электрическими сетями.

В период с 1958 по 1962 год СССР и США проводили космические ядерные взрывы, которые сопровождались созданием искусственных (короткоживущих по сравнению с естественными) радиационных поясов.[4] СССР провёл до 5 космических взрывов в рамках «Операции К», а США провели до 10 косми-

[3]При более тесном знакомстве с электромагнитным полем мы увидим, что оно может иметь энергию, импульс, давление, натяжение и другие «механические» характеристики. Законы сохранения энергии и импульса предполагают, что поле не просто совершает над частицей работу или передаёт ей импульс. Поле *обменивается* с частицей энергией и импульсом.

[4]После этого в 1963 году был принят договор, по которому запрещены «ядерные испытания в трёх средах», т.е. в атмосфере, под водой и в космосе. До этого проводились ядерные испытания во всех «трёх средах» плюс подземные, а после этого проводились только подземные ядерные испытания.

ческих взрывов[5], информация о которых ищется по ключевым словам «high-altitude nuclear explosions».

[5]Точные числа зависят от того, какую высоту считать границей космоса.

Глава 4.3

Одномерные малые колебания и линейные дифференциальные уравнения (с. 307)

4.3.1 Решения задач 45, 46

45. Резонанс при ударных воздействиях.
На гармонический осциллятор с затуханием действует периодическая ударная сила с периодом T, сообщающая импульс p_0. Исследуйте зависимость установившейся амплитуды от параметров задачи.

Решение

Ударную силу удобно представить в виде дельта-функции, т.е. сила имеет вид

$$F(t) = p_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT).$$

Силу разложим в ряд Фурье. Обозначим $\Omega = \frac{2\pi}{T}$. В силу чётности достаточно разлагать функцию по косинусам:

$$F(t) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \cos(l\Omega t), \quad c_0 = \frac{p_0}{T}, \quad c_l = \frac{2}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} F(t) \cos(l\Omega t)\, dt = \frac{2}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} p_0\, \delta(t)\, \cos(l\Omega t)\, dt = \frac{2p_0}{T}, \quad l > 0;$$

$$F(t) = \frac{p_0}{T} + \frac{2p_0}{T} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(l\Omega t).$$

Каждая гармоника вынуждающей силы даёт вынужденное гармоническое колебание, и мы получаем

$$x(t) = \underbrace{\frac{p_0}{Tm\omega_0^2}}_{x_0} + \sum_{l=1}^{\infty} x_l(t), \qquad x_l(t) = \operatorname{Re} A_l\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\Omega t}, \qquad A_l = \frac{\frac{2p_0}{mT}}{(\omega_0^2 - l^2\Omega^2) - \mathrm{i}2l\Omega\gamma}.$$

Здесь $x_0 = \frac{p_0}{Tm\omega_0^2}$ — постоянное смещение положения равновесия, вызываемое усреднённой по времени силой $\frac{p_0}{T}$.

Вопрос о том, что назвать амплитудой колебания, которое не является строго гармоническим, неоднозначен. Ответ на него зависит от задачи.

Можно представить колебание в виде

$$x(t) = A(t)\, \cos(\omega t + \alpha)$$

и назвать амплитудой функцию $A(t)$. Такое определение хорошо для задач о модуляции гармонического колебания, например, при рассмотрении передачи информации с помощью радиосигнала. Но в данной задаче нам нужно определить амплитуду установившихся колебаний не как функцию от времени, а как постоянную величину.

Мы могли бы определить амплитуду как наибольшее отклонение от смещённого на x_0 положения равновесия. При заданной жёсткости k такую амплитуду $a_э$ можно оценить через энергию:

$$\mathcal{E} = \frac{ka_э^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2}.$$

С учётом того, что энергия осциллятора немного меняется со временем (в установившемся режиме каждый удар сообщает порцию энергии, которая тратится на работу против вязкого трения ко времени следующего удара), естественно взять энергию, усреднённую по времени, тогда

$$a_э = \sqrt{\frac{2\langle\mathcal{E}\rangle_T}{k} - x_0^2} = \sqrt{\sum_{l=1}^{\infty} |A_l|^2 \frac{k + m\Omega^2 l^2}{2k}} = \sqrt{\sum_{l=1}^{\infty} |A_l|^2 \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\Omega^2 l^2}{\omega_0^2}\right)}.$$

Будем считать, что затухание мало, т.е. $\gamma \ll \omega_0$, причём от удара до удара колебания затухают незначительно: $\gamma T \ll 1$. Поскольку ширина резонансного пика $|A|(\Omega)$ порядка γ, из серии частот $l\Omega$ вблизи резонанса находится не более чем одна гармоника. Условие резонанса можно выразить как

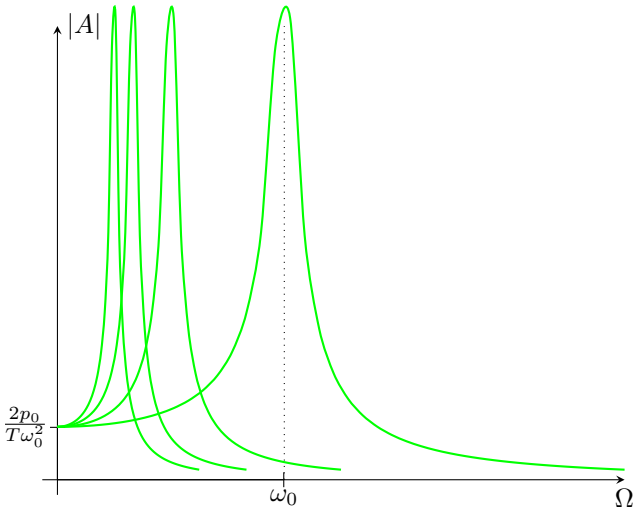
$$\Omega l \approx \omega_0 \pm \gamma.$$

Именно амплитуда гармоники в резонансе даёт доминирующий вклад в $a_э$, поэтому при наличии резонанса имеем

$$a_э \approx a_{\max} = \max_{l=1,2,3,\ldots} |A_l|.$$

Поскольку нас интересуют как раз окрестности резонанса, вместо амплитуды $a_э$ мы будем использовать $a_{\max}$, т.е. выберем гармонику с наибольшей амплитудой и назовём эту амплитуду амплитудой колебания (для нужд данной задачи!).

Подмена $a_э$ на $a_{\max}$ разумна, если все остальные амплитуды малы по сравнению с выбранной, т.е. вблизи резонанса, где доминирует одна гармоника и колебание близко к гармоническому. Более того, если нас интересует получение гармонического колебания, а все дополнительные гармоники рассматриваются нами как искажения, которые надо будет потом отфильтровать, то амплитуда $a_{\max}$ будет удобнее, чем амплитуда $a_э$.



Модуль комплексной амплитуды при $\frac{\gamma}{\omega_0} = 0{,}05$ гармоник с $l = 1; 2; 3; 4$

На рисунке приведена зависимость $|A|_{l\Omega}(\Omega)$ для первых четырёх гармоник в случае сравнительно большого затухания $\frac{\gamma}{\omega_0} = 0{,}05$. Поскольку мы определили амплитуду колебаний как амплитуду наибольшей гармоники, график такой амплитуды — максимум такой серии графиков.

Разумеется, наше определение амплитуды плохо работает рядом с точками пересечения двух резонансных кривых с l, различающимся на единицу. В окрестностях этих точек две гармоники имеют сравнимые амплитуды и колебания сильно отличаются от гармонических. Такой режим неудобен в качестве первого этапа получения гармонического колебания.

46. Параметрический резонанс.

У гармонического осциллятора с частотой ω_0 частота с периодом T на короткое время $\tau \ll T, \omega_0^{-1}, \Omega^{-1}$ возрастает до $\Omega \gg \omega_0$. Найдите условия параметрического резонанса.

Решение

Короткий ($\tau \ll T, \omega_0^{-1}, \Omega^{-1}$) всплеск удобно представить в виде дельта-функции, т.е. жёсткость представим в виде

$$m\omega^2(t) = m\omega_0^2 + m\Omega^2\tau \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT).$$

Найдём решения, удовлетворяющие условию

$$X_{1,2}(t+T) = \mu_{1,2} X_{1,2}(t). \tag{4.3.1}$$

Условие $|\mu| \neq 1$ будет условием резонанса.

Пусть $t \in (-T, 0)$, тогда решение для свободного осциллятора (а в промежутках между всплесками жёсткости осциллятор свободен) имеет вид

$$X(t) = a\,\cos(\omega_0 t) + b\,\sin(\omega_0 t), \quad \dot{X}(t) = -\omega_0 a\,\sin(\omega_0 t) + \omega_0 b\,\cos(\omega_0 t).$$

С помощью уравнения (4.3.1) получаем

$$X(t+T) = \mu a\,\cos(\omega_0 t) + \mu b\,\sin(\omega_0 t).$$

Таким образом, при $t \in (0, T)$ получаем

$$X(t) = \mu a\,\cos(\omega_0[t-T]) + \mu b\,\sin(\omega_0[t-T]), \quad \dot{X}(t) = -\mu\omega_0 a\,\sin(\omega_0[t-T]) + \mu\omega_0 b\,\cos(\omega_0[t-T]).$$

Сила, действующая на грузик, имеет вид $-m\omega^2(t)\,X$, т.е. всплески жёсткости создают следующую дополнительную силу:

$$\delta F(t) = -m\Omega^2\tau \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)\,X(t).$$

Таким образом, в момент времени nT частице передаётся импульс $-m\Omega^2\tau\,X(nT)$. В частности, в момент времени $t = 0$ частице передан импульс $-m\Omega^2\tau\,X(0)$, т.е. сообщена дополнительная скорость $\delta v = -\Omega^2\tau\,X(0) = -\kappa\,X(0)$ (мы обозначили $\kappa = \Omega^2\tau$).

Как мы уже видели, сила в виде дельта-функции от времени сообщает частице импульс, но не успевает её сдвинуть. Это позволяет нам написать следующие условия сшивки:

$$X(-0) = X(+0), \qquad \dot{X}(-0) + \delta v = \dot{X}(+0).$$

Подставляя в эти соотношения пределы $X(\pm 0)$, $\dot{X}(\pm 0)$, находим

$$\begin{aligned} &X(0) = a = \mu a\,\cos(\omega_0 T) - \mu b\,\sin(\omega_0 T), \\ &\omega_0 b - \kappa \underbrace{X(0)}_{a} = \mu\omega_0 a\,\sin(\omega_0 T) + \mu\omega_0 b\,\cos(\omega_0 T). \end{aligned}$$

Перепишем эту систему в следующем виде:

$$\begin{aligned} &[1 - \mu\cos(\omega_0 T)]a + [\mu\,\sin(\omega_0 T)]b = 0, \\ &-[\tfrac{\kappa}{\omega_0} + \mu\,\sin(\omega_0 T)]a + [1 - \mu\cos(\omega_0 T)]b = 0. \end{aligned}$$

Мы получили систему из двух линейных однородных уравнений с двумя неизвестными a и b. Если уравнения линейно независимы, то существует единственное тривиальное решение $a = b = 0$. Нетривиальное решение возможно, только если уравнения линейно зависимы, т.е. определитель соответствующей матрицы должен обращаться в нуль:

$$[1 - \mu\cos(\omega_0 T)]^2 + [\mu\,\sin(\omega_0 T)][\tfrac{\kappa}{\omega_0} + \mu\,\sin(\omega_0 T)] = 0.$$

Раскрывая скобки, получаем условие существования решения как квадратное уравнение на μ:

$$\mu^2 - 2[\cos(\omega_0 T) - \tfrac{\kappa}{2\omega_0}\sin(\omega_0 T)]\,\mu + 1 = 0.$$

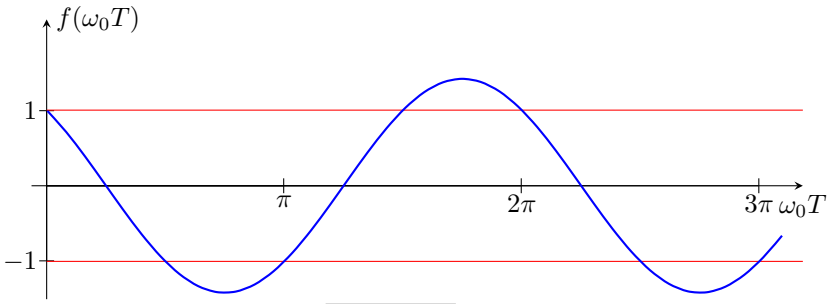
Полученное квадратное уравнение соответствует уравнению (3.3.4), которое мы получили в общем случае. Корни уравнения имеют вид

$$\mu_{1,2} = \cos(\omega_0 T) - \tfrac{\kappa}{2\omega_0}\sin(\omega_0 T) \pm \sqrt{[\cos(\omega_0 T) - \tfrac{\kappa}{2\omega_0}\sin(\omega_0 T)]^2 - 1}.$$

Условие параметрического резонанса (тогда одно из двух решений $|\mu| > 1$) принимает вид

$$|\mu| \neq 1 \quad \Leftrightarrow \quad |\cos(\omega_0 T) - \tfrac{\kappa}{2\omega_0}\sin(\omega_0 T)| > 1.$$

Получающаяся при проверке этого условия система неравенств может быть решена графически.



$$f(\omega_0 T) = \cos(\omega_0 T) - \tfrac{\kappa}{2\omega_0}\sin(\omega_0 T) = \sqrt{1+\left(\tfrac{\kappa}{2\omega_0}\right)^2}\,\cos\left(\omega_0 T + \operatorname{arctg}\tfrac{\kappa}{2\omega_0}\right) \text{ при } \tfrac{\kappa}{2\omega_0} = \text{const} = 1$$

Резонансам соответствует выход кривой за коридор $f \in [-1,+1]$. Легко видеть, что области резонанса (при фиксированном безразмерном параметре $\frac{\kappa}{2\omega_0}$) примыкают слева к каждой точке минимума или максимума косинуса $\omega_0 T \in (\pi n - 2\operatorname{arctg}\frac{\kappa}{2\omega_0}, \pi n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

4.3.2 Линейные дифференциальные уравнения** (л)

Сведём воедино некоторые математические методы, которые мы применили для исследования осциллятора.

4.3.2.1 Как решать линейные однородные дифференциальные уравнения* (л)

Уравнение движения осциллятора — это *линейное однородное уравнение* вида $\hat{L}x = 0$, где $\hat{L} = P_2(\frac{d}{dt})$ — дифференциальный оператор[1], представляющий собой квадратичный полином $P_2(\cdot)$ от оператора производной по времени $\frac{d}{dt}$.

Степень n оператора $\frac{d}{dt}$ — это оператор, который соответствует n-кратному действию оператора $\frac{d}{dt}$:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n = \frac{d^n}{dt^n}.$$

Уравнение линейное однородное, следовательно, линейная комбинация решений (с комплексными коэффициентами) снова является решением:

$$\hat{L}x_{1,2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{L}(\alpha x_1 + \beta x_2) = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Число линейно независимых решений соответствует степени уравнения (степени старшей производной), т.е. в нашем случае есть два линейно независимых решения.

Подставив в уравнение $P_n(\frac{d}{dt})x = 0$ функцию $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$, получаем алгебраическое уравнение

$$P_n(\tfrac{d}{dt})\mathrm{e}^{\lambda t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P_n(\lambda) = 0.$$

В тот же полином вместо оператора производной подставлен показатель экспоненты λ. Получившееся уравнение называется *характеристическим уравнением*. Оно позволяет разложить дифференциальный оператор в произведение операторов первого порядка:

$$P_n(\tfrac{d}{dt}) = \prod_{l=1}^{n}\left(\tfrac{d}{dt} - \lambda_l\right).$$

Если у уравнения нет кратных корней, то n разным корням уравнения соответствуют n линейно независимых решений.

Если у уравнения есть k-кратный корень λ, то ему соответствуют k линейно независимых решений вида

$$\mathrm{e}^{\lambda t},\ t\mathrm{e}^{\lambda t}, \ldots,\ t^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda t}.$$

Это легко проверить. Оператор $P_n(\frac{d}{dt})$ содержит в этом случае множитель $(\frac{d}{dt} - \lambda)^k$, который обнуляет все эти функции, поскольку

$$(\tfrac{d}{dt} - \lambda)t^p\mathrm{e}^{\lambda t} = pt^{p-1}\mathrm{e}^{\lambda t}.$$

[1] Физики любят обозначать операторы буквами в шляпках, особенно в квантовой механике.

Решения характеристического уравнения могут быть как вещественными, так и комплексными, с точки зрения теории колебаний комплексные нам даже интереснее.

Если коэффициенты полинома $P_n(\cdot)$ вещественны, то комплексные корни могут встречаться только парами, комплексно-сопряжёнными друг другу, $\lambda_2 = \lambda_1^*$:

$$P_n(\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad P_n(\lambda^*) = 0.$$

В этом случае вещественная и мнимая части комплексного решения $x(t)$ также являются решениями:

$$P_n(\tfrac{d}{dt})x = 0 \quad \Rightarrow \quad P_n(\tfrac{d}{dt})x^* = 0, \quad P_n(\tfrac{d}{dt})\tfrac{x+x^*}{2} = P_n(\tfrac{d}{dt})\operatorname{Re} x = 0, \quad P_n(\tfrac{d}{dt})\tfrac{x-x^*}{2i} = P_n(\tfrac{d}{dt})\operatorname{Im} x = 0.$$

4.3.2.2 Как решать линейные неоднородные уравнения (л)

Пусть имеется *линейное неоднородное уравнение* вида $\hat{L}x = f(t)$, где $\hat{L}$ — линейный дифференциальный оператор.

Если у нас имеется два разных решения неоднородного уравнения с одинаковой правой частью, то мы можем вычесть одно из другого:

$$\begin{array}{rcl} \hat{L}x_1 & = & f(t) \\ -\hat{L}x_2 & = & f(t) \\ \hline \hat{L}(x_1 - x_2) & = & 0. \end{array}$$

Разность $x_1 - x_2$ оказалась решением однородного уравнения с тем же оператором $\hat{L}$. Это значит, что из любого решения неоднородного уравнения мы можем найти все остальные, прибавляя к нему решения однородного уравнения.

Мы установили, что общее решение неоднородного уравнения может быть представлено как сумма частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения:

$$x_{\text{о.н.}} = x_{\text{ч.н.}} + x_{\text{о.о.}}, \quad \text{где} \quad \hat{L}x_{\text{о.н.}} = \hat{L}x_{\text{ч.н.}} = f(t), \quad \hat{L}x_{\text{о.о.}} = 0.$$

Не обязательно решать неоднородное уравнение для всех возможных правых частей. Если мы берём линейную комбинацию решений с разными правыми частями, то получается решение для аналогичной линейной комбинации правых частей:

$$\begin{array}{rcl} \hat{L}x_1 & = & f_1(t) \\ +c\hat{L}x_2 & = & cf_2(t) \\ \hline \hat{L}(x_1 + cx_2) & = & f_1(t) + cf_2(t). \end{array} \cdot$$

Так что для решения неоднородного уравнения с правой частью общего вида нам достаточно найти решения для базисного набора правых частей, т. е. для такого набора правых частей, что любую другую правую часть (в интересующем нас классе) можно по ним разложить[2].

4.3.2.3 Функциональное пространство L_2* (л)

Мы можем смотреть на функцию $f(t)$ как на вектор. Функции тоже можно складывать и умножать на число, так что они образуют линейное пространство, а с элементами линейного пространства можно поступать как с векторами.

Переменная t играет роль индекса, который нумерует компоненты вектора, а значения функции в точке $f(t)$ — компоненты вектора.

Удобно, когда на линейном пространстве есть скалярное произведение, поэтому мы обычно будем пользоваться функциональными пространствами $L_2(\mathbb{R})$ или $L_2([a,b])$. Это пространства функций $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ или $[a,b] \to \mathbb{C}$, на которых определено скалярное произведение

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int \phi^*(t)\psi(t)\,dt = \langle \psi | \phi \rangle^*,$$

где интеграл[3] берётся по всей области определения $\mathbb{R}$ или $[a,b]$.

С помощью скалярного произведения можно определить *норму* (длину) вектора $\|\cdot\|$ и расстояние $d(\cdot,\cdot)$:

$$\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}, \qquad d(\psi, \phi) = \|\psi - \phi\|.$$

[2] Для гармонического осциллятора с затуханием под действием вынуждающей силы мы раскладывали правую часть по гармоническим колебаниям или по ударам (δ-функциям).

[3] **(*)** Интеграл по Лебегу. Как обойтись без интеграла по Лебегу, говорится в примечании ниже.

Если для каких-то функций ϕ и ϕ' расстояние равно нулю, $d(\phi,\phi')=0$, то такие функции отличаются на маленьком множестве точек[4] и в пространстве L_2 мы их не различаем.

В пространство L_2 включаются только функции, для которых норма конечна (*квадратично-интегрируемые функции*)[5].

Пространство L_2 является примером *сепарабельного гильбертова пространства*: полного (в смысле метрики $d(\phi,\phi')$) пространства, в котором существует всюду плотное счётное подмноженство.

4.3.2.4 Обобщённые функции* (л)

При всём удобстве пространства $L_2(\mathbb{R})$ в него не попадают некоторые хорошие функции, которые не являются квадратично-интегрируемыми, например $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$.

Но функция $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ «почти» попадает в $L_2(\mathbb{R})$: хотя $\|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\|=\infty$, скалярное произведение $\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}|\psi_0\rangle$ определено для «очень многих» функций $\psi_0\in L_2(\mathbb{R})$. Насколько многих? Такие функции ψ_0 образуют *всюду плотное множество* в $L_2(\mathbb{R})$, т.е. для любой функции $\psi\in L_2(\mathbb{R})$ и для любого $\varepsilon>0$ найдётся такая функция ψ_0, что $d(\psi_0,\psi)<\varepsilon$ и скалярное произведение $\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}|\psi_0\rangle$ определено (соответствующий интеграл сходится).

Выберем некоторое всюду плотное линейное подпространство Φ пространства $L_2(\mathbb{R})$ (*пространство основных функций*). В качестве Φ мы возьмём *пространство быстро убывающих функций* $\mathcal{S}$ (бесконечно дифференцируемых функций, которые со всеми производными стремятся к нулю быстрее любой степени t):

$$\mathcal{S}=\{f|f\in C^\infty,\ \forall k,n\ \lim_{t\to\infty} t^n f^{(k)}(t)=0\}.$$

Далее рассмотрим сопряжённое пространство Φ' — пространство линейных непрерывных[6] функционалов $\chi:\Phi\to\mathbb{C}$, которые сопоставляют каждой функции $\phi\in\Phi$ комплексное число $\chi[\phi]\in\mathbb{C}$, так что $\chi[\phi_1+c\phi_2]=\chi[\phi_1]+c\chi[\phi_2]$.

Тройка $\Phi\subset L_2\subset\Phi'$ называется *оснащённым гильбертовым пространством*.

Пространство $\mathcal{S}'$, сопряжённое к пространству быстро убывающих функций $\mathcal{S}$, называется пространством *обобщённых функций медленного роста*. Смысл этого термина мы объясним ниже.

Такой линейный функционал может иметь вид скалярного произведения ϕ на некоторую функцию из $L_2(\mathbb{R})$ или даже на некоторую функцию, которая не попадает в $L_2(R)$ (например, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$):

$$\chi[\phi]=\langle\chi|\phi\rangle=\int\chi^*(t)\phi(t)\,dt.$$

В некоторых случаях такое интегральное представление будет невозможным, например, для функционала

$$\delta[\phi]=\phi(0).$$

Тем не менее даже такие «нехорошие» функционалы могут быть сколь угодно точно приближены «хорошими» интегральными функционалами:

$$\forall\chi\in\Phi'\quad\exists\chi_n\in L_2(\mathbb{R})\quad\forall\phi\in\Phi\quad\lim_{n\to\infty}\int\chi_n^*(t)\phi(t)\,dt=\chi[\phi].$$

Такую сходимость называют *слабым пределом* и обозначают как

$$\operatorname*{wlim}_{n\to\infty}\chi_n=\chi.$$

Используя слабый предел, можно определить над функционалами из Φ' многие операции, как если бы они были функциями. Как раз поэтому для таких функционалов используется термин *обобщённые функции*.

Обозначения

$$\chi[\phi]=\langle\chi|\phi\rangle=\int\chi^*(t)\phi(t)\,dt$$

мы будем использовать для всех обобщённых функций, включая те, которые нельзя представить как обычные функции. Интеграл тут имеет символический смысл, но мы будем писать для него интегрирование по частям, замены переменных и другие операции, подразумевая, что им можно придать смысл с помощью слабого предела.

[4] **(*)** На множестве точек лебеговой меры нуль.

[5] Можно обойтись и без интегрирования по Лебегу. Сначала рассматриваются бесконечно дифференцируемые функции, квадратично-интегрируемые по Риману. На таких функциях вводится расстояние и определяются фундаментальные последовательности. Всем фундаментальным последовательностям приписываются предельные точки (как при переходе от рациональных чисел к вещественным, если из двух фундаментальных последовательностей $x_1,x_2,\dots$ и $y_1,y_2,\dots$ построить одну последовательность $x_1,y_1,x_2,y_2,\dots$ и она тоже оказывается фундаментальной, то предельные точки последовательностей $x_1,x_2,\dots$ и $y_1,y_2,\dots$ отождествляются). Множество предельных точек всех фундаментальных последовательностей — это пространство L_2.

[6] На пространстве Φ определено расстояние, так что можно ввести и непрерывность.

(!) Важно помнить, что любая обобщённая функция рано или поздно попадает под интеграл.

В частности, мы часто будем использовать δ-функцию Дирака, которая является слабым пределом узких пиков с единичным интегралом, когда ширина пика стремится к нулю:

$$\delta[\phi] = \langle\delta|\phi\rangle = \int \delta^*(t)\phi(t)\,dt = \int \delta(t)\phi(t)\,dt = \phi(0).$$

(ф) Физический смысл δ-функции — плотность, локализованная в точке (массы, заряда или вероятности), импульсная сила, передающая за бесконечно малое время единичный импульс, и т. п.:

$$\delta(t) = \operatorname*{wlim}_{a\to 0} \begin{cases} \frac{1}{2a}, & |t| \leqslant a, \\ 0, & |t| > a \end{cases} = \operatorname*{wlim}_{a\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{a^2}}}{a\sqrt{\pi}}.$$

(!) Как мы видим из этого примера, при существующем слабом пределе поточечный предел может быть определён не везде, кроме того, предел может зависеть от того, какими функциями χ_n мы приближаем обобщённую функцию χ. Мы можем писать значение обобщённой функции в точке $\chi(t)$, но не для всякой точки это имеет смысл. Это имеет смысл в *регулярных точках*. Например, мы можем написать

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases},$$

но эта запись не определяет δ-функцию. Для слабого предела мало, что в нуле предел равен $+\infty$, важно, как именно этот предел достигается.

(!) Дельта-функции — линейные функционалы. Их умножение в общем случае не определено. Мы можем умножить $\delta(t)$ на $\delta(t+1)$ (и получить нуль), но не можем возвести $\delta(t)$ в квадрат.

(!) Мы можем умножать обобщённые функции разных аргументов, например, $\delta(x)\delta(y)\delta(z) = \delta^3(\mathbf{r})$ и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \delta^3(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})\,d^3\mathbf{r} = \phi(\vec{0}).$$

Сдвиг переменной для δ-функции позволяет разложить любую функцию по базису вида $\delta(\cdot - t_0)$ (где $\delta(t - t_0)$ — компонента номер t базисного вектора номер t_0):

$$\int \delta(t - t_0)\,\phi(t)\,dt = \int \delta(t)\,\phi(t + t_0)\,dt = \phi(t_0).$$

Растяжение переменной для δ-функции имеет вид

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(ct)\phi(t)\,dt = \int\limits_{-c\infty}^{+c\infty} \delta(t)\,\phi\left(\tfrac{t}{c}\right)\,\frac{dt}{c} = \frac{1}{|c|}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\phi\left(\tfrac{t}{c}\right)\,dt = \frac{\phi(0)}{|c|} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(t)}{|c|}\phi(t)\,dt.$$

От δ-функции можно брать производные с помощью интегрирования по частям:

$$\delta'[\phi] = \langle\delta'|\phi\rangle = \int \delta'(t)\,\phi(t)\,dt = -\int \delta(t)\,\phi'(t)\,dt = -\phi'(0).$$

(*) Приведённые выше формулы для замены переменных в δ-функции и для производной — это на самом деле определения соответствующих операций, т. к. δ-функция функцией не является, а интегралы с ней — это не интегралы, а специальная запись действия линейного функционала. Впрочем, эти интегралы можно понимать как пределы обыкновенных интегралов от обыкновенных функций, стремящихся (в смысле слабого предела) к δ-функции.

(ф) Физический смысл обобщённой функции δ': $\delta(x)\delta(y)\delta'(z)$ — плотность заряда точечного диполя, $\delta'(z)$ — плотность заряда двойного слоя. Импульсная сила $\delta'(t)$ сообщает частице импульс и тут же забирает его обратно, так что частица мгновенно смещается на конечное расстояние (при $m = 1$):

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= \delta'(t), \qquad \dot{x}(t<0) = v_0, \\ \dot{x}(t) &= v_0 + \delta(t), \\ x(t) &= v_0 + \int\limits_{-\infty}^{t} \delta(t_1)\,dt_1 = v_0 + \theta(t). \end{aligned}$$

Здесь $\theta(t)$ — *θ-функция Хевисайда* (ступенька, интеграл от δ-функции):

$$\int\limits_{-\infty}^{t} \delta(t_1)\,dt_1 = \theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}.$$

4.3.2.5 Преобразование Фурье (л)

Преобразование Фурье — замена базиса в функциональном пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

Существует также дискретное преобразование Фурье, которое проще, потому что действует в конечномерном пространстве. С дискретным преобразованием Фурье и переходом от него к преобразованию Фурье на прямой можно познакомиться в § 4.4.2 «Преобразование Фурье на решётке, отрезке, прямой» (с. 441).

Исходная функция $\phi(t_0)$ — это коэффициент разложения функции ϕ по базисным функциям e_{t_0}:

$$e_{t_0}(t) = \langle e_t | e_{t_0} \rangle = \delta(t - t_0),$$

$$\phi(t_0) = \langle e_{t_0} | \phi \rangle = \int \delta(t - t_0)\, \phi(t)\, dt.$$

Преобразование Фурье $\tilde{\phi}(\omega)$ — коэффициенты разложения функции ϕ по базисным функциям E_ω (*фурье-гармоникам*):

$$E_\omega(t) = \langle e_t | E_\omega \rangle = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\sqrt{2\pi}} = \langle E_\omega | e_t \rangle^* = \tilde{e}_t^*(\omega),$$

$$\tilde{\phi}(\omega) = \langle E_\omega | \phi \rangle = \int E_\omega^*(t)\, \phi(t)\, dt = \int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\sqrt{2\pi}}\, \phi(t)\, dt.$$

Обратное преобразование Фурье — разложение функции $\phi(t)$ по базисным функциям[7] $E_\omega(t)$. От прямого преобразования оно отличается перестановкой переменных $\omega \leftrightarrow t$ и знаком в показателе экспоненты:

$$\phi(t) = \left(\int E_\omega \tilde{\phi}(\omega)\, d\omega \right)(t) = \int E_\omega(t)\, \tilde{\phi}(\omega)\, d\omega = \int \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\sqrt{2\pi}}\, \tilde{\phi}(\omega)\, d\omega = \langle \tilde{e}_t | \tilde{\phi} \rangle.$$

(*/) Мы описали, как мы будем делать преобразование Фурье для функций времени. Для функций пространственных координат мы будем использовать преобразование Фурье с другими (более традиционными) знаками в показателях экспонент:

$$E_k(x) = \langle e_x | E_k \rangle = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\sqrt{2\pi}} = \langle E_k | e_x \rangle^* = \tilde{e}_x^*(k),$$

$$\tilde{\phi}(k) = \langle E_k | \phi \rangle = \int E_k^*(x)\, \phi(x)\, dx = \int \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{\sqrt{2\pi}}\, \phi(x)\, dx,$$

$$\phi(x) = \left(\int E_k \tilde{\phi}(k)\, dk \right)(x) = \int E_k(x)\, \tilde{\phi}(k)\, dk = \int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\sqrt{2\pi}}\, \tilde{\phi}(k)\, dk = \langle \tilde{e}_x | \tilde{\phi} \rangle.$$

Сделано это для того, чтобы при перемножении временно́й гармоники с пространственными получалась бегущая в направлении вектора $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ волна:

$$E_\omega(t)\, E_{k_x}(x)\, E_{k_y}(y)\, E_{k_z}(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}}{(2\pi)^2} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{kr} - \omega t)}}{(2\pi)^2},$$

при этом в показателе экспоненты возникает скалярное произведение (в метрике Минковского) 4-мерного радиус-вектора $x^i = (t, x, y, z)$ и 4-мерного волнового вектора $k^i = (\omega/c, k_x, k_y, k_z)$. Для пространства-времени метрика Минковского является естественной, что и приводит к разным знакам в показателе экспоненты для пространственных и временны́х координат.(/*)

Поскольку обратное преобразование Фурье отличается от прямого перестановкой аргументов $t \leftrightarrow \omega$ и изменением знака перед произведением $t\omega$, двойное преобразование Фурье даёт инверсию (изменение знака) аргумента:

$$\tilde{\tilde{\phi}}(t) = \phi(-t).$$

Если записать преобразование Фурье как оператор $\hat{F}$, то можно получить следующие соотношения:

$$\hat{F}\phi = \tilde{\phi}, \quad \hat{F}^{-1}\tilde{\phi} = \phi;$$

$$\hat{F}^2 = \hat{I}, \quad \hat{I}\phi(t) = \phi(-t), \quad \hat{F}^3 = \hat{F}^{-1}, \quad \hat{F}^4 = \hat{1}.$$

[7] В конечномерной линейной алгебре аналоги прямого и обратного преобразования выглядят так: $v_\alpha = (\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{v})$, $\mathbf{v} = \sum_\alpha v_\alpha \mathbf{e}_\alpha$. В преобразовании Фурье вместо суммы — интеграл.

Базис E_ω ортонормирован в следующем смысле:

$$\langle E_\omega | E_{\omega'} \rangle = \int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega')t}}{2\pi}\, dt = \delta(\omega-\omega') = \tilde{E}_{\omega'}(\omega).$$

В том же смысле ортонормирован базис из δ-функций:

$$\langle e_{t_0} | e_{t_1} \rangle = \int \delta(t-t_0)\,\delta(t-t_1)\, dt = \delta(t_0-t_1),$$

$$E_\omega(t_0) = \langle e_{t_0} | E_\omega \rangle = \int \delta(t-t_0)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}}{\sqrt{2\pi}} = \langle E_\omega | e_{t_0} \rangle^* = \tilde{e}^*_{t_0}(\omega).$$

В силу ортонормированности фурье-базиса скалярные произведения для исходных функций и их преобразований Фурье одинаковы:

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int \phi^*(t)\psi(t)\, dt = \int \tilde{\phi}^*(\omega)\,\tilde{\psi}(\omega)\, d\omega = \langle \tilde{\phi} | \tilde{\psi} \rangle.$$

При преобразовании Фурье δ-функции переходят в фурье-гармоники и наоборот.

4.3.2.6 Решение неоднородных уравнений с фурье-гармоникой* (л)

Для нахождения частного решения уравнения вида

$$\hat{L}x = f(t)$$

мы можем сделать преобразование Фурье правой части и найти решение для одной гармоники:

$$\hat{L}x_\omega = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}.$$

Коэффициенты разложения функции $f(t)$ по фурье-гармоникам и функции $x(t)$ по $\frac{x_\omega(t)}{\sqrt{2\pi}}$ совпадают:

$$\begin{aligned} f(t) &= \int \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\sqrt{2\pi}}\tilde{f}(\omega)\, d\omega, \\ x(t) &= \int \frac{x_\omega(t)}{\sqrt{2\pi}}\tilde{f}(\omega)\, d\omega. \end{aligned}$$

Для дифференциального оператора вида $\hat{L} = P_n(\frac{d}{dt})$ задача решается в общем виде.

Если $-\mathrm{i}\omega$ не совпадает с корнями характеристического уравнения $P_n(\lambda) = 0$, то мы можем искать x_ω в следующем виде:

$$x_\omega(t) = A\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}.$$

Поскольку $\frac{d}{dt}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = -\mathrm{i}\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$, мы получаем

$$P_n(\tfrac{d}{dt})x_\omega(t) = P_n(-\mathrm{i}\omega)\,A\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}.$$

Отсюда находим

$$A = \frac{1}{P_n(-\mathrm{i}\omega)}, \qquad x_\omega(t) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{P_n(-\mathrm{i}\omega)}.$$

Если $-\mathrm{i}\omega$ совпадает с k-кратным корнем характеристического уравнения $P_n(\lambda) = 0$ (*резонанс*), то

$$(\tfrac{d}{dt} + \mathrm{i}\omega)^k t^{k-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = (k-1)!\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}.$$

Ищем решение в виде

$$x_\omega(t) = A\,t^{k-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}.$$

Определим полином

$$R_{n-k}(\lambda) = \frac{P_n(\lambda)}{(\lambda+\mathrm{i}\omega)^k},$$

$$P_n(\tfrac{d}{dt})x_\omega(t) = R_{n-k}(\tfrac{d}{dt})\,(\tfrac{d}{dt}+\mathrm{i}\omega)^k A\,t^{k-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = R_{n-k}(-\mathrm{i}\omega)A\,(k-1)!\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},$$

$$A = \frac{1}{R_{n-k}(-\mathrm{i}\omega)\,(k-1)!}, \qquad x_\omega(t) = \frac{t^{k-1}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{R_{n-k}(-\mathrm{i}\omega)\,(k-1)!}.$$

4.3.2.7 Функции Грина* (л)

Для нахождения частного решения уравнения вида

$$\hat{L}x = f(t)$$

мы можем разложить правую часть по δ-функциям и найти решение следующего уравнения:

$$\hat{L}g(t, t_0) = \delta(t - t_0).$$

Оно называется *функцией Грина*. Коэффициенты разложения функции $f(t)$ по δ-функции и функции $x(t)$ по функции Грина совпадают:

$$\begin{aligned} f(t) &= \int \delta(t - t_0)\, f(t_0)\, dt_0, \\ x(t) &= \int g(t, t_0)\, f(t_0)\, dt_0. \end{aligned}$$

Функция Грина, как и любое решение неоднородного уравнения, определена неоднозначно (с точностью до решения однородного уравнения). Если дифференциальный оператор $\hat{L}$ не зависит явно от t, бывает удобно выбрать функцию Грина так, что $g(t, t_0) = g(t - t_0)$, тогда достаточно рассмотреть ситуацию, когда δ-пик сидит в нуле:

$$\hat{L}g(t) = \delta(t).$$

Это условие не всегда до конца фиксирует выбор функции Грина.

Часто накладывают условие

$$g(t)|_{t<0} = 0 \quad \text{или} \quad g(t)|_{t>0} = 0.$$

Такие функции Грина называются *запаздывающей функцией Грина* и *опережающей функцией Грина* соответственно, но эти условия могут быть наложены не всегда.

Поскольку δ-функция равна нулю всюду, кроме точки $t = 0$, на положительной полуоси и на отрицательной полуоси функция Грина — решение однородного уравнения. В точке $t = 0$ должно быть некоторое нарушение непрерывности самой функции $g(t)$ и/или её производных. Это даёт один из способов поиска функции Грина: решить однородное уравнение вне точки $t = 0$ и сшить решения в нуле так, чтобы выполнялось уравнение на функцию Грина.

Для дифференциального оператора вида $\hat{L} = P_n(\frac{d}{dt})$ задача нахождения функции Грина решается в общем виде методом из предыдущего пункта:

$$\tilde{\delta}(\omega) = \int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\sqrt{2\pi}}\, \delta(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad g(t) = \int \frac{x_\omega(t)}{\sqrt{2\pi}}\, \tilde{\delta}(\omega)\, d\omega = \int \frac{x_\omega(t)}{2\pi}\, d\omega.$$

Если у характеристического полинома есть чисто мнимые корни, то на траектории интегрирования будут особенности (полюсы) вида $\frac{1}{(\lambda+\mathrm{i}\omega)^k}$. За счёт этого интеграл будет определён неоднозначно, в частности, может появиться возможность выбирать между запаздывающей и опережающей функциями Грина.

Глава 4.4

Сложные линейные колебания и преобразования Фурье (с. 316)

4.4.1 Решение задачи 47

47. Собственные колебания. Запишите вековое уравнение и найдите собственные колебания (частоты и амплитуды) для следующих систем.

Условия отдельных пунктов и решения

в) Цепочка из N грузиков массой m, соединённых пружинками жёсткостью k, замкнута кольцом и нанизана на обруч.

Пусть ϕ^α — отклонение грузика с номером α от положения равновесия (вдоль дуги обруча).

Будем считать, что ϕ^α и $\dot\phi^\alpha$ зависят от α периодически с периодом N, и будем брать сумму по одному периоду. Будем считать, что номера грузиков являются элементами кольца[1] остатков деления на N (математики называют его *кольцом вычетов по модулю* N): $\alpha \in \mathbb{Z}(N) = \{0, 1, 2, \ldots, N-1\}$, сумма в $\mathbb{Z}(N)$ определена по модулю N, т.е. после последнего остатка $N-1$ снова идёт 0,

$$(N-1)+1 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ N), \qquad \alpha + N \equiv \alpha \,(\mathrm{mod}\ N).$$

Кинетическая и потенциальная энергии имеют вид

$$\mathcal{E}_{\text{кин.}} = \frac{m}{2} \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}(N)} (\dot\phi^\alpha)^2, \qquad U = \frac{k}{2} \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}(N)} (\phi^\alpha - \phi^{\alpha-1})^2.$$

Функция Лагранжа имеет вид

$$L(\phi^\alpha, \dot\phi^\alpha) = \mathcal{E}_{\text{кин.}} - U = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}(N)} \left(\frac{m}{2}(\dot\phi^\alpha)^2 - \frac{k}{2}(\phi^\alpha - \phi^{\alpha-1})^2 \right).$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа записываются в виде

$$m\ddot\phi^\alpha = k\left[(\phi^{\alpha+1} - \phi^\alpha) - (\phi^\alpha - \phi^{\alpha-1})\right] = k\left[\phi^{\alpha+1} - 2\phi^\alpha + \phi^{\alpha-1}\right].$$

Импульсы равны

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot\phi^\alpha} = m\dot\phi^\alpha.$$

[1] В алгебре *кольцо* — множество с определёнными на нём коммутативной операцией сложения, относительно которой множество образует группу, и ассоциативной операцией умножения $a(bc) = (ab)c$, дистрибутивной относительно сложения: $a(b+c) = ab + ac$, $(b+c)a = ba + ca$. При этом наличие единицы и деления на ненулевые элементы не обязательно.

Кольцо вычетов получается из множества целых чисел $\mathbb{Z}$ с обычными операциями сложения, вычитания и умножения путём отождествления всех чисел вида $\alpha + N \cdot k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Кольцо вычетов $\mathbb{Z}(N)$ — коммутативное кольцо с единицей, но деление (как операция, обратная к умножению) на ненулевые элементы определено, только если N — простое число.

Мы можем вместо обруча рассмотреть бесконечную одномерную цепочку одинаковых грузиков массой m, связанных одинаковыми пружинками с жёсткостью k, наложив на цепочку периодические условия

$$\phi^\alpha \equiv \phi^{\alpha+N}.$$

Тогда лагранжиан (в пересчёте на один период по α) окажется прежним.

Собственные колебания будем искать в виде собственных векторов матрицы циклического сдвига на один шаг решётки:

$$\hat{T}\phi^\alpha = \phi^{\alpha+1}, \qquad \hat{T}^N = \hat{1}.$$

Матрица $\hat{T}$ описывает симметрию системы: она циклически перенумеровывает грузики со сдвигом номера на единицу. Очевидно, что это симметрия системы (лагранжиан переходит в себя), а значит, собственное колебание под действием $\hat{T}$ должно переходить в собственное колебание с той же частотой (но, возможно, с изменением фазы).

Такое собственное колебание имеет вид бегущей монохроматической волны[2], для которой при изменении α на N набегает целое число длин волн:

$$\phi_\kappa^\alpha(t) = \exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi\kappa\alpha}{N} - \mathrm{i}\omega_\kappa t\right), \qquad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Здесь параметр κ нумерует собственные колебания[3].

Поскольку $\phi_\kappa = \phi_{\kappa+N}$, т.е. зависимость ϕ_κ от целого параметра κ периодическая с периодом N, можно считать, что $\kappa \in \mathbb{Z}(N)$. Таким образом, существует N разных линейно независимых бегущих волн такого вида. Легко проверить их взаимную ортогональность.

Подставим ϕ_κ в уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$m(-\omega_\kappa^2)\phi_\kappa^\alpha - k[\exp(\mathrm{i}\tfrac{2\pi\kappa}{N}) - 2 + \exp(-\mathrm{i}\tfrac{2\pi\kappa}{N})]\phi_\kappa^\alpha = 0,$$

$$m\omega_\kappa^2 + 2k[\cos(\tfrac{2\pi\kappa}{N}) - 1] = 0.$$

Получаем

$$\omega_\kappa = \sqrt{\frac{k}{m}2\left(1 - \cos(\tfrac{2\pi\kappa}{N})\right)}. \tag{4.4.1}$$

Мы исследовали систему с N степенями свободы и нашли N линейно независимых колебательных мод, значит, мы ничего не упустили. Это оправдывает угадывание формы собственного колебания.

Если равновесное расстояние от грузика до грузика равно a, то равновесная координата грузика номер α равна $x_\alpha = a\alpha$. Рассматриваемой волне можно приписать волновое число $K = \frac{2\pi\kappa}{aN}$:

$$\phi^\alpha(t) = \exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi\kappa\alpha}{N} - \mathrm{i}\omega_\kappa t\right) = \exp\left(\mathrm{i}Kx_\alpha - \mathrm{i}\omega(K)\,t\right),$$

[2]Подробнее матрицу циклического сдвига $\hat{T}$ в связи с преобразованиями Фурье на решётке мы обсудим ниже в § 4.4.2 «Преобразование Фурье на конечной решётке» (см. с. 441).

Пока можно считать, что мы вытаскиваем бегущую монохроматическую волну из шляпы. Оправдывает нас то, что нам действительно удаётся найти N линейно независимых решений исходной системы уравнений. Для того чтобы перекинуть мостик через разрыв, можно сослаться на аналогию со звуковыми волнами.

[3]Легко видеть, что

$$\hat{T}\phi_\kappa^\alpha = \phi_\kappa^{\alpha+1} = \exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi\kappa}{N}\right)\phi_\kappa^\alpha,$$

т.е. это собственный вектор матрицы $\hat{T}$ с собственным числом $\mu_\kappa = \exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi\kappa}{N}\right)$.

Матрица жёсткости $\hat{K}$ выражается через матрицу циклического сдвига, обратную матрицу циклического сдвига (циклический сдвиг в обратную сторону) и единичную матрицу:

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{T}^T = \hat{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{K} = k(\hat{T} + \hat{T}^{-1} - 2\hat{1}).$$

Мы для примера написали матрицы $\hat{T}$ и $\hat{T}^{-1}$ для $N = 6$, но для выражения матрицы K это не важно.

Если $\hat{T}\phi_\kappa = \mu_\kappa\phi_\kappa$, то $\hat{T}^{-1}\phi_\kappa = \mu_\kappa^{-1}\phi_\kappa$, тогда

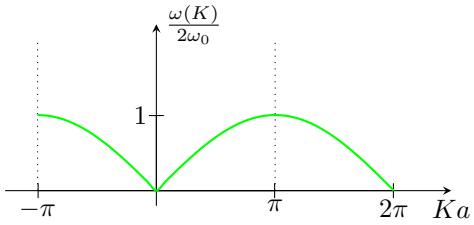
$$\hat{K}\phi_\kappa = k(2 - \mu_\kappa - \mu_\kappa^{-1})\phi_\kappa.$$

Отсюда находим собственные числа матрицы жёсткости и собственные частоты:

$$k_\kappa = k(2 - \mu_\kappa - \mu_\kappa^{-1}) = 2k\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi\kappa}{N}\right)\right] = 4k\sin^2\left(\frac{\pi\kappa}{N}\right), \quad \omega_\kappa = \sqrt{\frac{k_\kappa}{m}} = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\left|\sin\left(\frac{\pi\kappa}{N}\right)\right|.$$

$$\omega(K) = \omega_\kappa = \sqrt{\frac{k}{m} 2\left(1 - \cos(\tfrac{2\pi\kappa}{N})\right)} = \sqrt{\frac{k}{m} 2\left(1 - \cos(Ka)\right)} = 2\omega_0 \left|\sin \tfrac{Ka}{2}\right|,$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ — характерная частота.



Функция $\omega(K)$ — *дисперсионное соотношение*. Здесь Ka — это фаза колебаний (в радианах), набегающая при переходе от грузика номер α к грузику номер $\alpha + 1$. Частота меняется в зависимости от Ka с периодом 2π, поэтому в качестве области изменения Ka годится любой полуинтервал длины π, но наиболее естественно выбрать $[0, 2\pi)$ или $[-\pi, \pi)$. Удобно считать, что график обёрнут на цилиндр так, что ось Ka наматывается на окружность длины 2π (пунктиные линии — линии склейки)

Фазовая скорость волны равна

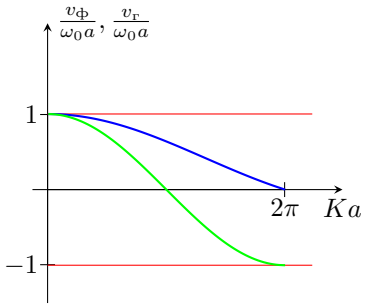
$$v_\text{ф} = \frac{\omega(K)}{K} = \frac{2\omega_0 \sin \frac{Ka}{2}}{K} = \omega_0 a \frac{\sin \frac{Ka}{2}}{\frac{Ka}{2}}.$$

Групповая скорость равна

$$v_\text{г} = \frac{\partial \omega(K)}{\partial K} = \omega_0 a \cos \tfrac{Ka}{2}.$$

Мы видим, что в пределе непрерывной среды при $a \to 0$ обе скорости стремятся к одному пределу:

$$v_\text{ф}, v_\text{г} \to \omega_0 a.$$



Фазовая и групповая скорости как функции фазы Ka. Групповая скорость (как производная периодической функции) является периодической функцией с периодом 2π

г*) Цепочка из $2n$ грузиков, массы которых m_1 и m_2 чередуются, соединённых пружинками жёсткостью k, замкнута в кольцо и нанизана на обруч. Выделите акустическую и оптическую ветви спектра, для каждой определите фазовую и групповую скорости. Рассмотрите предельный переход к случаю $m_1 = m_2 = m$ и сравните с пунктом **в**.

Пусть ϕ^α — отклонение грузика с номером α от положения равновесия (вдоль дуги обруча).

Будем считать, что ϕ^α и $\dot\phi^\alpha$ зависят от α периодически с периодом $N = 2n$, и будем брать сумму по одному периоду. Будем считать, что номера грузиков являются элементами кольца остатков деления на N: $\alpha \in \mathbb{Z}(N) = \{0, 1, 2, \ldots, N-1\}$, сумма в $\mathbb{Z}(N)$ определена по модулю N, т. е.

$$(N-1) + 1 \equiv 0 \,(\text{mod } N), \qquad \alpha + N \equiv \alpha \,(\text{mod } N).$$

Уравнение движения грузика с номером α имеет вид

$$m_\alpha \ddot\phi^\alpha = k(\phi^{\alpha+1} - \phi^\alpha) - k(\phi^\alpha - \phi^{\alpha-1}) = k\,(\phi^{\alpha+1} - 2\phi^\alpha + \phi^{\alpha+1}).$$

Сумма по индексу α не производится;

$$m_\alpha = \begin{cases} m_1, & \alpha \text{ нечётное}, \\ m_2, & \alpha \text{ чётное}. \end{cases}$$

Собственные колебания будем искать в виде собственных векторов матрицы циклического сдвига на два шага решётки (сдвиг на один шаг больше не является симметрией, поскольку массы чётных и нечётных грузиков различаются):

$$\hat{T}\phi^\alpha = \phi^{\alpha+2}, \qquad \hat{T}^n = \hat{1}.$$

Такое решение имеет вид бегущей монохроматической волны, для которой различаются амплитуды для чётных и нечётных грузиков:

$$\phi^\alpha_{\kappa\sigma}(t) = A^\alpha_{\kappa\sigma}\,\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi\kappa\alpha}{n} - \mathrm{i}\omega_{\kappa\sigma}\right) = A^\alpha_{\kappa\sigma}\,\exp\left(\mathrm{i}Kx_\alpha - \mathrm{i}\omega_{\kappa\sigma}\right), \quad x_\alpha = a\cdot\alpha, \quad K = \frac{2\pi\kappa}{na},$$

где $\kappa \in \mathbb{Z}(n)$ — безразмерное волновое число, $\sigma \in \{1,2\}$ — номер поляризации волны,

$$A^\alpha_{\kappa\sigma} = \begin{cases} A^1_{\kappa\sigma}, & \alpha \text{ нечётное,} \\ A^2_{\kappa\sigma}, & \alpha \text{ чётное.} \end{cases}$$

Подставляя бегущую волну в уравнения движения, получаем (мы опустили большинство индексов и учли, что $A^{\alpha-1} = A^{\alpha+1}$)

$$-\omega^2 m_\alpha A^\alpha = k[(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi\kappa}{n}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi\kappa}{n}})A^{\alpha+1} - 2A^\alpha] = 2k[\cos(\tfrac{2\pi\kappa}{n})A^{\alpha+1} - A^\alpha].$$

Это даёт нам систему из двух уравнений, которые соответствуют нечётным и чётным α:

$$\begin{aligned} -\frac{\omega^2 m_1}{2k}A^1 &= \cos(\tfrac{2\pi\kappa}{n})A^2 - A^1, \\ -\frac{\omega^2 m_2}{2k}A^2 &= \cos(\tfrac{2\pi\kappa}{n})A^1 - A^2. \end{aligned}$$

Приводим систему к стандартному виду:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega^2 m_1}{2k} - 1\right)A^1 + \cos(\tfrac{2\pi\kappa}{n})A^2 &= 0, \\ \cos(\tfrac{2\pi\kappa}{n})A^1 + \left(\frac{\omega^2 m_2}{2k} - 1\right)A^2 &= 0. \end{aligned}$$

Условие существование ненулевых амплитуд A^1, A^2 — вырожденность системы. Получаем условие

$$\left(\frac{\omega^2 m_1}{2k} - 1\right)\left(\frac{\omega^2 m_2}{2k} - 1\right) - \cos^2(\tfrac{2\pi\kappa}{n}) = 0,$$

которое может быть записано как квадратное уравнение относительно ω^2:

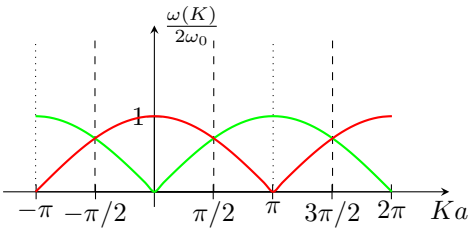
$$\frac{m_1 m_2}{4k^2}\,\omega^4 - \frac{m_1 + m_2}{2k}\,\omega^2 + \sin^2(\tfrac{2\pi\kappa}{n}) = 0.$$

Решения этого уравнения (нижний индекс у ω нумерует поляризации и соответствует σ) имеют вид

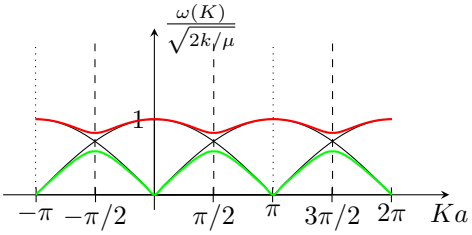
$$\begin{aligned} \omega^2_{1,2} &= \frac{k}{\mu}\left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}\sin^2(\tfrac{2\pi\kappa}{n})}\right] = \\ &= \frac{k}{\mu}\left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}\sin^2(Ka)}\right], \qquad \mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}. \end{aligned}$$

В случае $m_1 = m_2 = m$ мы снова получаем цепочку одинаковых грузиков, как в п. в). В этом случае наши формулы соответствуют формуле (4.4.1). Частота ω_1 соответствует формуле (4.4.1) в диапазоне $\kappa \in \{0,\ldots,n-1\}$, частота ω_2 соответствует формуле (4.4.1) в диапазоне $\kappa \in \{n,\ldots,2n-1\}$ (после сдвига $\kappa \to \kappa + n$),

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= 2\frac{k}{m}(1 - \cos(\tfrac{2\pi\kappa}{n})) = 2\frac{k}{m}(1 - \cos(Ka)), \\ \omega_2^2 &= 2\frac{k}{m}(1 + \cos(\tfrac{2\pi\kappa}{n})) = 2\frac{k}{m}(1 + \cos(Ka + \pi)). \end{aligned}$$

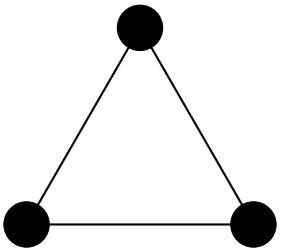


При $m_1 = m_2 = m$ воспроизводится результат п. в). График прежней функции $\omega(K)$ теперь наматывается на цилиндр в два раза меньшего радиуса. Одна ветвь (нижняя) даёт $\omega_1(K)$, другая (верхняя) — $\omega_2(K)$. Штриховыми линиями обозначены новые линии склейки плоскости на цилиндр



При $m_2 = 2m_1$ графики функций $\omega_1(K)$ (*акустическая ветвь*, нижняя) и $\omega_2(K)$ (*оптическая ветвь*, верхняя) оказываются разделены щелью. Тонкие чёрные линии — случай $m_1 = m_2$

е)** Молекула из трёх одинаковых атомов массой m имеет форму равностороннего треугольника. Жёсткость ребра равна k. (Вековое уравнение можно не писать.)



Система в 3-мерном пространстве имеет 9 степеней свободы. Из них 3 степени свободы приходятся на движение центра масс, ещё 3 — на вращение треугольника как целого, остаются 3 колебательные степени свободы.

Можно считать, что система находится в фиксированной плоскости (вращение плоскости треугольника не связано с колебательными степенями свободы), тогда всего имеется 6 степеней свободы: 2 степени свободы приходятся на движение центра масс, 1 степень свободы — вращение вокруг центра масс, остаются 3 колебательные степени свободы.

В качестве обобщённых координат возьмём смещения каждого из трёх атомов относительно положения равновесия по двум осям координат: $\mathbf{X} = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$. В таких координатах кинетическая энергия имеет вид

$$\mathcal{E}_{\text{кин.}} = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{3}(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2).$$

Соответствующая матрица масс пропорциональна единичной матрице 6×6:

$$M_{\alpha\beta} = m\,\delta_{\alpha\beta}.$$

Здесь α, β — мультииндексы, состоящие из двух индексов: номера атома $(1, 2, 3)$ и имени координаты (x, y).

Матрицу жёсткости мы выписывать не будем, а угадаем её собственные векторы из соображений симметрии и вычислим собственные числа.

Векторы амплитуд у нас также будут 6-мерными, каждый такой вектор можно представить как тройку трёхмерных векторов, описывающих двумерные амплитуды колебаний отдельных атомов:

$$\mathbf{E} = (\underbrace{E^{1x}, E^{1y}}_{\mathbf{e}_1}, \underbrace{E^{2x}, E^{2y}}_{\mathbf{e}_2}, \underbrace{E^{3x}, E^{3y}}_{\mathbf{e}_3}).$$

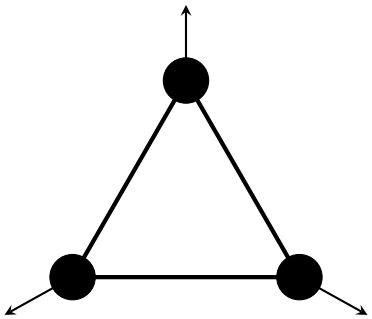
Метрика в конфигурационном пространстве, как обычно в классической механике, задаётся матрицей масс. Скалярное произведение задаётся суммой скалярных произведений соответствующих двумерных векторов:

$$(\mathbf{E},\mathbf{H}) = \sum_{\alpha,\beta} M_{\alpha\beta} E^{\alpha} H^{\beta} = m \sum_{i=1}^{3} \sum_{a=x,y} E^{ia} H^{ia} = m\Big((\mathbf{e}_1,\mathbf{h}_1) + (\mathbf{e}_2,\mathbf{h}_2) + (\mathbf{e}_3,\mathbf{h}_3)\Big).$$

Именно в этом смысле будет пониматься ортогональность амплитуд для разных мод колебаний.

Одно собственное колебание угадываем: оно максимально сохраняет симметрию, т. е. треугольник пульсирует, оставаясь равносторонним. Векторы амплитуды для верхнего, правого и левого грузиков (s — симметричная мода):

$$\mathbf{e}_1^s = (0,1), \quad \mathbf{e}_2^s = (\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -0{,}5), \quad \mathbf{e}_3^s = (-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -0{,}5).$$



Мода колебаний, сохраняющая треугольник равносторонним. Векторы задают направления смещений грузиков при возбуждении данной моды колебаний

Если возбуждена только симметричная мода т. е. если

$$\mathbf{X} = x_s \cdot \mathbf{E}_s = x_s \cdot (\mathbf{e}_1^s, \mathbf{e}_2^s, \mathbf{e}_3^s),$$

то кинетическая и потенциальная энергии имеют вид

$$\mathcal{E}_{\text{кин. } s} = 3\frac{m\dot{x}_s^2}{2}, \qquad U_s = 3\frac{k(\sqrt{3}x_s)^2}{2} = 9\frac{kx_s^2}{2}.$$

(Удлинение каждой пружины соответствует разности проекций векторов амплитуды на направление пружин, что даёт $\sqrt{3}x_s$.)

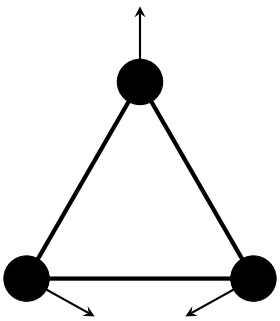
Соответствующие эффективная масса и жёсткость составляют

$$m_s = 3m, \qquad k_s = 9k.$$

Частота симметричной моды равна

$$\omega_s = \sqrt{\frac{k_s}{m_s}} = \sqrt{\frac{9k}{3m}} = \sqrt{3}\,\omega_0.$$

Ищем собственное колебание, превращающее треугольник из равностороннего в равнобедренный.



Мода колебаний, сохраняющая треугольник равнобедренным. Векторы задают направление смещений грузиков при возбуждении данной моды колебаний.

Векторы амплитуды для верхнего, правого и левого грузиков (v — «вертикальная» мода):

$$\mathbf{e}_1^v = (0,1),\ \mathbf{e}_2^v = (-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -0{,}5),\ \mathbf{e}_3^v = (\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -0{,}5).$$

Векторы амплитуды для «вертикальной» моды определяются из следующих условий:

- симметричность по отношению к отражению относительно вертикальной оси,
- $\mathbf{e}_1^v + \mathbf{e}_2^v + \mathbf{e}_3^v = 0$ — неподвижность центра масс (ортогональность по отношению к поступательным модам),
- $(\mathbf{e}_1^s, \mathbf{e}_1^v) + (\mathbf{e}_2^s, \mathbf{e}_2^v) + (\mathbf{e}_3^s, \mathbf{e}_3^v) = 0$ — ортогональность по отношению к симметричной моде.

Если возбуждена только вертикальная мода, т. е., если $\mathbf{X} = x_v \cdot \mathbf{E}_v = x_v \cdot (\mathbf{e}_1^v, \mathbf{e}_2^v, \mathbf{e}_3^v)$, то кинетическая и потенциальная энергии имеют вид

$$\mathcal{E}_{\text{к } v} = 3\frac{m\dot{x}_v^2}{2}, \qquad U_v = \frac{k(\sqrt{3}x_v)^2}{2} + 2\frac{k(\frac{\sqrt{3}}{2}x_v)^2}{2} = \frac{9}{2}\frac{kx_v^2}{2}.$$

(Удлинение каждой пружины соответствует разности проекций векторов амплитуды на направление пружин, что даёт по $\frac{\sqrt{3}}{2}x_v$ для левой и правой пружин и $-\sqrt{3}x_v$ для нижней пружины.)

Соответствующие эффективные масса и жёсткость составляют

$$m_v = 3m, \qquad k_v = \tfrac{9}{2}k.$$

Частота вертикальной моды равна

$$\omega_v = \sqrt{\frac{k_v}{m_v}} = \sqrt{\frac{\frac{9}{2}k}{3m}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\omega_0.$$

Ещё две моды, «правую» и «левую», можно получить, поворачивая «вертикальную» моду на 120 градусов по часовой стрелке и против часовой стрелки. Очевидно, что «левая», «правая» и «вертикальная» моды имеют одинаковые частоты. Может показаться, что мы нашли слишком много колебательных мод, но легко видеть, что сумма амплитуд для «левой», «правой» и «вертикальной» мод равна нулю, а значит, только две моды из этих трёх являются линейно независимыми.

4.4.2 Преобразование Фурье на решётке, отрезке, прямой

В данном параграфе используется материал выпускной квалификационной работы, которую бакалавр кафедры инновационной педагогики МФТИ Дмитрий Сергеевич Корж выполнил под моим научным руководством в 2020 г.

В этом параграфе мы сосредоточимся на дискретном преобразовании Фурье и (нестрогом) предельном переходе к преобразованию Фурье на отрезке и прямой. Более аккуратное рассмотрение преобразования Фурье на прямой с точки зрения функционального пространства $L_2(\mathbb{R})$ можно посмотреть в п. 4.3.2.5 «Преобразование Фурье (л)» (с. 432).

4.4.2.1 Унитарное пространство

Рассмотрим унитарное N-мерное пространство $\mathcal{H}$. Будем считать, что оно задано как пространство N-компонентных комплексных столбцов $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N$ со скалярным произведением

$$\langle\phi|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \phi^*(n)\psi(n) = \langle\psi|\phi\rangle^*. \tag{4.4.2}$$

Здесь и далее компонента вектора ϕ с номером n обозначается как $\phi(n)$. Такие обозначения будут удобны далее, при рассмотрении аналогии с преобразованием Фурье.

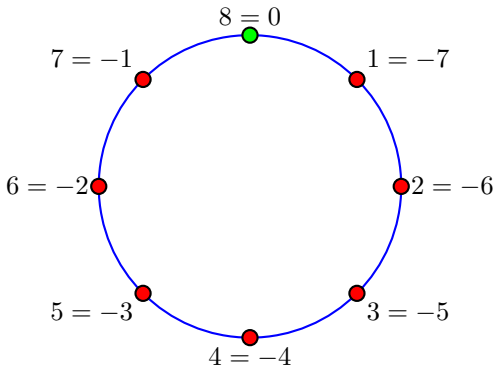
Скалярное произведение мы обозначили и определили в соответствие с квантовомеханической традицией, в которой принято комплексно сопрягать первый множитель.

Пусть номера компонент вектора принадлежат кольцу остатков деления на N, которое обозначается $\mathbb{Z}(N)$ и называется *кольцом вычетов по модулю* N. На $\mathbb{Z}(N)$ определены сложение и умножение (деление определено только для простых N).

$\mathbb{Z}(N)$ — множество классов эквивалентности целых чисел, определяемых факторизацией (склейкой) вида

$$x = x + nN \quad \forall x, n \in \mathbb{Z}.$$

На $\mathbb{Z}(N)$ можно писать $N = 0$, поскольку остаток от деления N на N равен нулю.



Элементы кольца вычетов $\mathbb{Z}(N)$ удобно представить себе расположенными по кольцу. На данном рисунке изображено кольцо $\mathbb{Z}(8)$

Элементы e_n, $n \in \mathbb{Z}(N)$, пространства $\mathcal{H}$ с компонентами

$$e_n(m) = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m, \end{cases} \tag{4.4.3}$$

образуют ортонормированный в смысле скалярного произведения (4.4.2) базис:

$$\langle e_n | e_m \rangle = \delta_{nm}. \tag{4.4.4}$$

Компоненты вектора ψ могут быть получены как скалярные произведения базисных векторов e_n на вектор ψ:

$$\psi(n) = \langle e_n | \psi \rangle. \tag{4.4.5}$$

4.4.2.2 Собственные числа и векторы циклического сдвига

Отображение циклического сдвига $\hat{T}$ (в соответствии с квантовомеханическими традициями линейный оператор, в конечномерном случае — матрица, обозначается буквой со шляпкой) состоит в отображении $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$, при котором

$$\psi \to \phi = \hat{T}\psi, \qquad \phi(n) = \psi(n+1).$$

Здесь $n+1$ используется в смысле $\mathbb{Z}(N)$, т.е. $0 \to 1$; $1 \to 2$; $2 \to 3$; $\ldots N-2 \to N-1$; $N-1 \to N = 0$. Таким образом, под действием $\hat{T}$ строки вектора из $\mathbb{C}^N$ циклически сдвигаются на одну позицию (последняя строка с номером $N-1$ становится первой строкой с номером 0).

Отображение $\hat{T}$, очевидно, является обратимым (обратное отображение — циклический сдвиг в обратную сторону: $\psi(n) = \phi(n-1)$), более того, оно сохраняет скалярное произведение:

$$\langle \hat{T}\phi | \hat{T}\psi \rangle = \langle \phi | \psi \rangle.$$

Следовательно, $\hat{T}$ — унитарное отображение.

Как мы знаем, для унитарных отображений может быть решена задача на собственные числа и собственные векторы, причём все собственные числа лежат в комплексной плоскости на единичной окружности $\lambda_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_k}$ ($\alpha_k \in \mathbb{R}$), а собственные векторы E_k можно подобрать так, чтобы они образовали ортонормированный базис:

$$\langle E_k | E_l \rangle = \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}.$$

Матрица циклического сдвига похожа на единичную, но со сдвигом всех единиц циклически вправо (тогда последняя строка начинается с единицы).

Например, для $N = 6$ имеем

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{T}^{-1} = \hat{T}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Переход к базису из собственных векторов матрицы циклического сдвига — *преобразование Фурье на решетке.*

N-кратное повторение циклического сдвига $\hat{T}$ отображает вектор на себя, т.е. $\hat{T}^N = \hat{1}$, где $\hat{1}$ — единичная матрица.

Сначала найдем собственные числа:

$$\begin{gathered}\hat{T}E = \lambda E,\\ (\hat{T}E)(n) = E(n+1) = \lambda E(n),\\ \lambda^N E(n) = (\hat{T}^N E)(n) = E(n).\end{gathered} \tag{4.4.6}$$

Отсюда видно, что

$$\lambda^N = 1.$$

Это же уравнение может быть получено как вековое уравнение для матрицы $\hat{T}$:

$$\det(\hat{T} - \lambda\hat{1}) = 0.$$

Собственные числа — корни степени N из единицы:

$$\lambda_k = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} k}{N}}, \quad k \in \mathbb{Z}(N).$$

В комплексной плоскости они располагаются в вершинах правильного N-угольника, вписанного в единичную окружность с центром в нуле, одна из вершин (для которой k делится на N) — единица.

Используя свойство (4.4.6), получаем компоненты собственного вектора номер k:

$$E_k(n) = \lambda_k^n \cdot E_k(0) = E_k(0)\,\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} k n}{N}}, \tag{4.4.7}$$

где $E_k(0)$ — некоторая константа. Таким образом, мы имеем N собственных векторов, вид которых очень похож на фурье-гармоники (из-за множителя $\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} k n}{N}} = \lambda_k^n$).

Сделаем нормировку на 1:

$$\langle E_k | E_k \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}(N)} |E_k(n)|^2 = 1. \tag{4.4.8}$$

Так как $\lambda \cdot \lambda^* = 1$, получаем, что $E_k(0) = \frac{1}{\sqrt{N}}$ с точностью до произвольного фазового множителя $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, который положим равным единице. Имеем

$$E_k(n) = \langle e_n | E_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\,\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} k n}{N}}, \qquad k, n \in \mathbb{Z}(N). \tag{4.4.9}$$

Это коэффициенты разложения базисных векторов E_k по базисным векторам e_n.

Мы получили ортонормированный базис:

$$\langle E_{k_1} | E_{k_2} \rangle = \delta_{k_1 k_2}. \tag{4.4.10}$$

Коэффициенты разложения базисных векторов e_n по базисным векторам E_k легко получить комплексным сопряжением:

$$\tilde{e}_n(k) = \langle E_k | e_n \rangle = \langle e_n | E_k \rangle^* = \frac{1}{\sqrt{N}}\,\mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i} k n}{N}}, \qquad k, n \in \mathbb{Z}(N). \tag{4.4.11}$$

Собственные векторы циклического сдвига одновременно являются собственными векторами матриц *первых конечных разностей*[4]:

$$\begin{gathered}\hat{D}_{\text{п}} = \hat{T} - \hat{1}, \qquad \hat{D}_{\text{л}} = \hat{1} - \hat{T}^{-1} = \hat{T}^{-1}\hat{D}_{\text{п}};\\ (\hat{D}_{\text{п}}\psi)(n) = \psi(n+1) - \psi(n), \qquad (\hat{D}_{\text{л}}\psi)(n) = \psi(n) - \psi(n-1);\\ \hat{D}_{\text{п}}\,E_k = (\lambda_k - 1)E_k, \quad \hat{D}_{\text{л}}\,E_k = (1 - \lambda_k^{-1})E_k.\end{gathered}$$

Этот тривиальный факт станет интересным, когда мы будем рассматривать предельный переход от функций на решётке (конечномерных векторов) к функциям на отрезке или прямой.

Часто вместо комплексных экспонент предпочитают строить базис из синусов и косинусов:

$$\forall k, \quad 0 < k < N/2, \quad c_k = \frac{E_k + E_{-k}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{N}}\,\cos\left(\frac{2\pi k n}{N}\right), \quad s_k = \frac{E_k - E_{-k}}{\mathrm{i}\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{N}}\,\sin\left(\frac{2\pi k n}{N}\right),$$

$$\forall\ k_0 \in \{0, N/2\} \quad c_{k_0} = E_{k_0} = \frac{1}{\sqrt{N}}\,\cos\left(\frac{2\pi k_0 n}{N}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}}, & k_0 = 0,\\ \frac{(-1)^n}{\sqrt{N}}, & k_0 = N/2. \end{cases}$$

[4]Конечные разности (разностные производные) — аналоги производных на решётке. В частности, $\hat{D}_{\text{п}}$ и $\hat{D}_{\text{л}}$ — аналоги первой производной.

Здесь волновые числа k и k_0 принадлежат кольцу $\mathbb{Z}(N)$, поэтому если $0 < k < N/2$, то $k \neq -k$ (т.е. $k \not\equiv -k \pmod N$) и мы заменяем два разных вектора $E_{\pm k}$ на два новых вектора c_k и s_k. Если $k_0 = 0$ или $k_0 = N/2$ (последнее возможно только для чётных N), то $k_0 = -k_0$ (т.е. $k = -k \pmod N$) и $E_{k_0} = E_{-k_0} = c_{k_0}$.

Обозначим

$$C_{+k} = c_k, \qquad C_{-k} = s_k. \tag{4.4.12}$$

Новые векторы c_k и s_k (при $k \neq -k$) уже не будут собственными векторами первых конечных разностей, но они будут собственными векторами матриц *вторых конечных разностей*[5]:

$$\hat{D}_2 = \hat{D}_\text{п}\hat{D}_\text{л} = \hat{T}^{-1}\hat{D}_\text{п}^2 = \hat{T}\hat{D}_\text{л}^2 = \hat{T} - 2\hat{1} + \hat{T}^{-1}.$$

Вторая разность показывает (с точностью до постоянного множителя, равного 2), на сколько среднее значение решёточной функции ψ в соседних узлах отличается от значения в заданном узле[6]:

$$(\hat{D}_2\psi)(n) = \psi(n+1) - 2\psi(n) + \psi(n-1) = 2\left[\frac{\psi(n+1)+\psi(n-1)}{2} - \psi(n)\right],$$

$$\hat{D}_2 C_{\pm k} = (\lambda_k - 2 + \lambda_k^{-1})c_k = 2\left[\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) - 1\right] C_{\pm k} = -4\sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right) C_{\pm k}.$$

Для многих задач нам достаточно найти собственные векторы второй (разностной) производной. Такие векторы и соответствующие собственные числа вещественны, и часто именно они имеют непосредственный физический смысл. Например, в задаче про цепочку осцилляторов матрица жёсткости с точностью до постоянного множителя совпадает с матрицей $\hat{D}_2$.

4.4.2.3 Преобразование Фурье на решётке

Преобразование Фурье на решётке — переход к базису собственных векторов циклического сдвига. При нумерации компонент и базисных векторов элементами кольца $\mathbb{Z}(N)$ прямое и обратное преобразования Фурье имеют вид

$$(\hat{F}\psi)(k) = \tilde{\psi}(k) = \langle E_k|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n\in\mathbb{Z}(N)} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}\,kn}{N}}\,\psi(n), \qquad k \in \mathbb{Z}(N); \tag{4.4.13}$$

$$(\hat{F}^{-1}\tilde{\psi})(n) = \psi(n) = \langle \tilde{e}_n|\tilde{\psi}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}(N)} \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}\,kn}{N}}\,\tilde{\psi}(k), \qquad n \in \mathbb{Z}(N). \tag{4.4.14}$$

Мы видим, что прямое и обратное преобразования Фурье отличаются друг от друга только комплексным сопряжением гармоники $\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}\,kn}{N}}$. Выбор того, какой знак в показателе экспоненты выбрать для прямого преобразования Фурье, а какой для обратного — вопрос договорённости, так что исходный вектор ψ и его преобразование Фурье $\tilde{\psi} = \hat{F}\psi$ равноправны.

Дискретное преобразование Фурье, как и любая замена базиса, может быть описано как матрица:

$$F_{kn} = \langle E_k|e_n\rangle, \qquad k,n \in \mathbb{Z}(N).$$

Если нумеровать базисные векторы от нуля, т.е. если считать, что $k,n \in \{0,1,2,\ldots,N-1\}$, то матрица имеет следующий вид:

$$\hat{F} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}} & \mathrm{e}^{-\frac{4\pi\mathrm{i}}{N}} & \mathrm{e}^{-\frac{6\pi\mathrm{i}}{N}} & \ldots & \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}(N-1)} \\ 1 & \mathrm{e}^{-\frac{4\pi\mathrm{i}}{N}} & \mathrm{e}^{-\frac{8\pi\mathrm{i}}{N}} & \mathrm{e}^{-\frac{12\pi\mathrm{i}}{N}} & \ldots & \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}2(N-1)} \\ 1 & \mathrm{e}^{-\frac{6\pi\mathrm{i}}{N}} & \mathrm{e}^{-\frac{12\pi\mathrm{i}}{N}} & \mathrm{e}^{-\frac{18\pi\mathrm{i}}{N}} & \ldots & \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}(N-1)} & \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}2(N-1)} & \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}3(N-1)} & \ldots & \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}(N-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Матрица обратного преобразования Фурье, как и обратная матрица любой ортонормированной замены базиса в унитарном пространстве, получается с помощью эрмитова сопряжения (комбинации транспонирования и комплексного сопряжения):

$$F_{nk}^{-1} = \langle e_n|E_k\rangle = \langle E_k|e_n\rangle^* = F_{kn}^*, \qquad k,n \in \mathbb{Z}(N), \quad \hat{F}^{-1} = \hat{F}^{T*} = \hat{F}^\dagger.$$

[5] Вторая конечная разность (вторая разностная производная) — аналог второй производной. Из трёх вариантов $\hat{D}_\text{п}^2$, $\hat{D}_\text{л}^2$ и $\hat{D}_\text{п}\hat{D}_\text{л}$ мы выбрали последний, так как только для него все собственные числа вещественны.

[6] На этом основаны разнообразные обобщения преобразования Фурье на решётках с разной топологией.

4.4.2.4 Прямая и обратная решётки

Выше мы ввели дискретное Фурье для функции, заданной на замкнутой на кольцо конечной решётке с шагом единица. Узлы такой решётки удобно нумеровать элементами кольца $\mathbb{Z}(N)$. Преобразование Фурье исходной функции мы также записывали как функцию на $\mathbb{Z}(N)$. Однако такая нумерация не всегда удобна: в скалярных произведениях векторов из двух рассматриваемых базисов явно присутствует параметр N, также неудобно рассматривать переход от функции на решётке к функции на отрезке или прямой ($N \to \infty$).

Будем считать, что узлы на исходной решетке нумеруются числами $x = \Delta x \cdot n$, где $n \in \mathbb{Z}(N)$, а $\Delta x = \mathrm{const} \in \mathbb{R}$ — шаг прямой решётки. Назовем это множество *прямой решеткой*, *координатной решёткой* или просто решёткой. Длиной прямой решётки будем называть величину $\ell = N \cdot \Delta x$. Прямую решётку будем обозначать $\Delta x \cdot \mathbb{Z}(N)$. Решётка по-прежнему закольцована, так что $x + \ell = x$.

Компоненты собственного вектора матрицы сдвига (4.4.7) приобретают вид

$$E_k(n) = E_k(0)\,\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} k n}{N}} = E_k(0)\,\exp\Big(2\pi\mathrm{i}\,\underbrace{\frac{k}{N\,\Delta x}}_{K}\,x\Big) = E_k(0)\,\exp\Big(2\pi\mathrm{i}\,\underbrace{\frac{k}{\ell}}_{K}\,x\Big) = E_k(0)\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,Kx}.$$

Для нумерации собственных векторов и собственных чисел удобно использовать вместо целого параметра $k \in \mathbb{Z}(N)$ параметр $K = \frac{k}{N\,\Delta x} = \frac{k}{\ell} = k \cdot \Delta K$. Здесь $\Delta K = \frac{1}{N\,\Delta x} = \frac{1}{\ell}$ — шаг обратной решётки. Множество значений параметра K будем называть *обратной решёткой*, *импульсной решёткой* (термин из квантовой теории) или *решёткой волновых чисел*. Длиной обратной решётки будем называть величину $P = N \cdot \Delta K$. Обратную решётку будем обозначать $\Delta K \cdot \mathbb{Z}(N)$.

Легко видеть, что шаг обратной решётки связан с длиной прямой решётки и наоборот:

$$\Delta K = \frac{1}{\ell}, \qquad \Delta x = \frac{1}{P}, \qquad \frac{P}{\Delta K} = \frac{\ell}{\Delta x} = N.$$

Теперь компоненты собственного вектора (4.4.7) и собственное число можно переписать как

$$E_K(x) = E_K(0)\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,K\,x}, \qquad \lambda_k = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,\frac{k}{N}} = \lambda_K = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,K\,\Delta x}.$$

Мы видим, что параметр N «спрятался». Он присутствует только в нормировочном коэффициенте $E_K(0) = \frac{1}{\sqrt{N}}$.

С введением шага решётки Δx удобно переопределить матрицы разностных производных:

$$\hat{D}_{\mathrm{п},\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}(\hat{T} - \hat{1}), \qquad \hat{D}_{\mathrm{л},\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}(\hat{1} - \hat{T}^{-1}) = \hat{T}^{-1}\hat{D}_{\mathrm{п},\Delta x};$$

$$(\hat{D}_{\mathrm{п},\Delta x}\psi)(n) = \frac{\psi(n+1) - \psi(n)}{\Delta x}, \qquad (\hat{D}_{\mathrm{л},\Delta x}\psi)(n) = \frac{\psi(n) - \psi(n-1)}{\Delta x};$$

$$\hat{D}_{\mathrm{п},\Delta x}\,E_K = \frac{\lambda_K - 1}{\Delta x}E_K, \quad \hat{D}_{\mathrm{л},\Delta x}\,E_K = \frac{1 - \lambda_K^{-1}}{\Delta x}E_K.$$

Теперь стало видно, что при $\Delta x \to 0$ разностные производные $\hat{D}_{\mathrm{п},\Delta x}$ и $\hat{D}_{\mathrm{л},\Delta x}$ переходят в оператор дифференцирования $\frac{d}{dx}$.

Вторая разностная производная приобретает вид

$$\hat{D}_{2,\Delta x} = \hat{D}_{\mathrm{п},\Delta x}\hat{D}_{\mathrm{л},\Delta x} = \frac{\hat{T} - 2\hat{1} + \hat{T}^{-1}}{\Delta x^2},$$

$$(\hat{D}_{2,\Delta x}\psi(n) = \frac{\psi(n+1) - 2\psi(n) + \psi(n+1)}{\Delta x^2},$$

$$\hat{D}_{2,\Delta x}\,E_K = \frac{\lambda_K - 2 + \lambda_K^{-1}}{\Delta x^2}\,E_K = \frac{\cos(2\pi K\,\Delta x) - 1}{\Delta x^2}\,E_K = -\left(\frac{2\sin(\pi K\,\Delta x)}{\Delta x}\right)^2\,E_K.$$

При $\Delta x \to 0$ разностная производная $\hat{D}_{2,\Delta x}$ переходит в оператор дифференцирования $\frac{d^2}{dx^2}$.

4.4.2.5 Переопределение скалярного произведения на координатной решётке

При предельном переходе от решётки к отрезку или прямой размерность пространства функций стремится к бесконечности. Если при этом функции являются непрерывными, то скалярные квадраты в

смысле (4.4.2) почти всех функций[7] стремятся к бесконечности. Поэтому, прежде чем перейти к пределу $\Delta x \to 0$, полезно переопределить скалярное произведение:

$$\langle\phi|\psi\rangle_{\Delta x} = \Delta x \cdot \langle\phi|\psi\rangle = \Delta x \cdot \sum_{x\in\Delta x\cdot\mathbb{Z}(N)} \phi^*(x)\,\psi(x). \tag{4.4.15}$$

Удобно доопределить решёточные функции между узлов решётки, считая, что

$$\psi(x) = \psi(x_{\text{л}}), \qquad x_{\text{л}} = (\text{ближайший узел слева от } x).$$

При таком доопределении новое скалярное произведение переписывается через интеграл от кусочно-постоянной функции:

$$\langle\phi|\psi\rangle_{\Delta x} = \Delta x \cdot \sum_{x\in\Delta x\cdot\mathbb{Z}(N)} \phi^*(x)\,\psi(x) = \int\limits_a^{a+\ell} \phi^*(x)\,\psi(x)\,dx \qquad \forall a \in \mathbb{R}. \tag{4.4.16}$$

Компоненты вектора $\psi(n)$ могут быть получены как скалярные произведения базисных векторов e_n на вектор ψ (см. формулу (4.4.5)):

$$\psi(n) = \langle e_n|\psi\rangle.$$

Чтобы получить те же компоненты $\psi(x)$ как скалярные произведения:

$$\psi(x) = \langle e_x|\psi\rangle_{\Delta x},$$

базисные векторы надо перенормировать (смысл новой нормировки мы обсудим ниже). Новые базисные векторы имеют вид

$$e_x(x') = \langle e_{x'}|e_x\rangle_{\Delta x} = \frac{\delta_{xx'}}{\Delta x}. \tag{4.4.17}$$

В формуле (4.4.17) легко узнать решёточное приближение δ-функции: $e_x(x')$ — узкий (шириной Δx, у́же не бывает) прямоугольный импульс единичной площади.

Поскольку скалярное произведение переопределено, базисные векторы E_k теперь тоже надо перенормировать:

$$\langle E_{K'}|E_K\rangle_{\Delta x} = \delta_{K'K};$$

$$E_K(x) = \langle e_x|E_K\rangle_{\Delta x} = \frac{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,Kx}}{\sqrt{N\cdot\Delta x}} = \frac{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,Kx}}{\sqrt{\ell}}, \qquad x \in \Delta x\cdot\mathbb{Z}(N), \quad K \in \Delta K\cdot\mathbb{Z}(N).$$

Теперь прямое и обратное преобразования Фурье имеют вид

$$(\hat{F}\psi)(K) = \tilde{\psi}(K) = \langle E_K|\psi\rangle_{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\sqrt{\ell}} \sum_{x\in\Delta x\cdot\mathbb{Z}(N)} \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\,Kx}\,\psi(x), \qquad K \in \Delta K\cdot\mathbb{Z}(N); \tag{4.4.18}$$

$$(\hat{F}^{-1}\tilde{\psi})(x) = \langle e_x|\psi\rangle_{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \sum_{K\in\Delta K\cdot\mathbb{Z}(N)} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,Kx}\,\tilde{\psi}(K), \qquad x \in \Delta x\cdot\mathbb{Z}(N). \tag{4.4.19}$$

По сравнению с предыдущими формулами (4.4.13) и (4.4.14) прямое преобразование Фурье умножилось на фактор $\sqrt{\Delta x}$, а обратное преобразование на тот же фактор разделилось.

Мы переопределили скалярное произведение на координатной решётке, но не на обратной. Это представление будет удобно для предельного перехода к рядам Фурье для периодических функций. (Или для преобразования Фурье функции на бесконечной решётке — не забываем, что функция и её преобразование Фурье равноправны.)

4.4.2.6 Предельный переход к рядам Фурье

Подготовительную работу для предельного перехода к рядам Фурье мы сделали в п. 4.4.2.5 «Переопределение скалярного произведения на координатной решётке». Осталось только устремить к нулю шаг решётки.

Пусть

$$N\cdot\Delta x = \ell = \text{const}, \quad \Delta x \to 0, \quad N \to \infty.$$

В пределе $\Delta x \to 0$ при конечном ℓ прямая решётка превращается в отрезок $[a, a+\ell)$ с периодическими граничными условиями, а обратная решётка остаётся решёткой $\Delta K\cdot\mathbb{Z}$ с конечным шагом $\Delta K = \frac{1}{\ell}$, но уже с бесконечным числом узлов.

[7] «Почти всех» означает всех, кроме множества меры нуль.

Можно ввести множество $\mathbb{R}(\ell)$ — вещественные числа, определённые по модулю ℓ, т.е. провести отождествление

$$\ell \sim 0, \qquad x + \ell \sim x.$$

Можно, например, считать, что $\mathbb{R}(\ell) = [a, \ell + a)$, где a — произвольное вещественное число, причём полуинтервал замкнут на окружность.

Скалярное произведение (4.4.15) в пределе $\Delta x \to 0$ для непрерывных ϕ и ψ будет давать[8] интеграл (функции уже не обязательно кусочно-постоянные):

$$\langle E|\psi\rangle_0 = \int\limits_{\mathbb{R}(\ell)} E^*(x)\,\psi(x)\,dx = \int\limits_{a}^{a+\ell} E^*(x)\,\psi(x)\,dx \qquad \forall a \in \mathbb{R}. \tag{4.4.20}$$

При $\Delta x \to 0$ перенормированные базисные векторы выражаются через δ-функцию:

$$e_x(x') = \langle e_{x'}|e_x\rangle_0 = \delta(x - x');$$

$$E_K(x) = \langle e_x|E_K\rangle_0 = \frac{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,Kx}}{\sqrt{\ell}}, \qquad x \in \mathbb{R}(\ell), \quad K \in \Delta K \cdot \mathbb{Z}(N).$$

Фурье-гармоники по-прежнему нормированы на δ-символ:

$$\langle E_{K'}|E_K\rangle_0 = \delta_{KK'}.$$

В пределе $\Delta x \to 0$ получаем прямое преобразование Фурье в виде интеграла:

$$(\hat{F}\psi)(K) = \tilde{\psi}(K) = \langle E_K|\psi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \int\limits_{a}^{a+\ell} \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\,Kx}\,\psi(x)\,dx, \qquad K \in \Delta K \cdot \mathbb{Z}(N). \tag{4.4.21}$$

При конечном фиксированном ℓ шаг обратной решётки $\Delta K = \frac{1}{\ell}$ остаётся конечным и фиксированным и обратное преобразование Фурье от периодической функции остаётся суммой (но уже бесконечной):

$$(\hat{F}^{-1}\tilde{\psi})(x) = \langle \tilde{e}_x|\tilde{\psi}\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \sum_{K \in \Delta K \cdot \mathbb{Z}} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,Kx}\,\tilde{\psi}(K), \qquad x \in \mathbb{R}(\ell). \tag{4.4.22}$$

При $\Delta x \to 0$ матрица циклического сдвига $\hat{T}_{\Delta x}$ превратилась в единичный оператор $\hat{1}$, что неинтересно, так как любая функция является собственной для единичного оператора. Но матрицы первых разностных производных $\hat{D}_{\text{п},\Delta x}$ и $\hat{D}_{\text{л},\Delta x}$ превращаются в оператор первой производной, для которого функции $E_K(x)$ являются собственными:

$$\frac{d}{dx} E_K = 2\pi\mathrm{i}\,K\,E_K.$$

Именно из этого свойства естественно исходить, чтобы получить фурье-гармоники сразу на $\mathbb{R}(\ell)$, без предельного перехода с решётки.

Матрица второй разностной производной $\hat{D}_{2,\Delta x}$ превращается в оператор второй производной:

$$\frac{d^2}{dx^2} E_K = -(2\pi\,K)^2\,E_K.$$

А из этого свойства удобно исходить, если мы захотим вместо комплексных экспонент использовать вещественные функции синус и косинус:

$$c_0(x) = E_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell}},$$

$$c_K(x) = \frac{E_K + E_{-K}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\,\cos(2\pi K x), \qquad s_K(x) = \frac{E_K - E_{-K}}{\mathrm{i}\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\,\sin(2\pi K x), \qquad K > 0, \quad K \in \Delta K \cdot \mathbb{Z}.$$

[8] Разумеется, если такой предел существует.

4.4.2.7 Переопределение скалярного произведения на обратной решётке

Подобно тому как мы изменили скалярное произведение в исходном базисе, что повлекло изменение нормировки с (4.4.4) на (4.4.17), мы можем переопределить скалярное произведение в фурье-базисе с соответствующим изменением нормировки

$$\langle\tilde\phi|\tilde\psi\rangle_{\Delta K} = \Delta K\cdot\langle\tilde\phi|\tilde\psi\rangle = \Delta K\cdot\sum_{K\in\Delta K\mathbb{Z}(N)}\tilde\phi^*(K)\,\tilde\psi(K).$$

Удобно доопределить решёточные функции между узлов решётки, считая, что

$$\tilde\psi(K) = \tilde\psi(K_{\text{л}}),\qquad K_{\text{л}} = (\text{ближайший узел слева от } K).$$

При таком доопределении новое скалярное произведение переписывается через интеграл от кусочно-постоянной функции:

$$\langle\tilde\phi|\tilde\psi\rangle_{\Delta K} = \Delta K\cdot\sum_{K\in\Delta K\cdot\mathbb{Z}(N)}\tilde\phi^*(K)\,\tilde\psi(K) = \int\limits_a^{a+P}\tilde\phi^*(K)\,\tilde\psi(K)\,dK\qquad\forall a\in\mathbb{R}. \tag{4.4.23}$$

Новая нормировка для фурье-базиса имеет вид

$$\langle E_{K'}|E_K\rangle_{\Delta x} = \frac{\delta_{K'K}}{\Delta K}, \tag{4.4.24}$$

$$E_K(x) = \langle e_x|E_K\rangle_{\Delta x} = \frac{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,Kx}}{\sqrt{\ell\cdot\Delta K}} = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,Kx},\qquad x\in\Delta x\cdot\mathbb{Z}(N),\quad K\in\Delta K\cdot\mathbb{Z}(N).$$

Теперь прямое и обратное преобразования Фурье имеют вид

$$(\hat F\psi)(K) = \tilde\psi(K) = \langle E_K|\psi\rangle_{\Delta x} = \Delta x\cdot\sum_{x\in\Delta x\cdot\mathbb{Z}(N)}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\,Kx}\,\psi(x),\qquad K\in\Delta K\cdot\mathbb{Z}(N); \tag{4.4.25}$$

$$(\hat F^{-1}\tilde\psi)(x) = \psi(x) = \langle\tilde e_x|\tilde\psi\rangle_{\Delta x} = \Delta K\cdot\sum_{K\in\Delta K\cdot\mathbb{Z}(N)}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,Kx}\,\tilde\psi(K),\qquad x\in\Delta x\cdot\mathbb{Z}(N). \tag{4.4.26}$$

По сравнению с формулами (4.4.18) и (4.4.19) прямое преобразование Фурье умножилось на фактор $\sqrt{\ell} = \frac{1}{\sqrt{\Delta K}}$, а обратное преобразование на тот же фактор разделилось.

Теперь мы переопределили скалярное произведение как на координатной решётке, так и на обратной. Это представление будет удобно для предельного перехода к интегралам Фурье для функций на прямой.

4.4.2.8 Предельный переход к преобразованию Фурье

Подготовительную работу для предельного перехода к рядам Фурье мы сделали в п. 4.4.2.7 «Переопределение скалярного произведения на обратной решётке». Осталось только устремить к нулю шаг как прямой решётки, так и обратной (или, что то же самое, устремить к бесконечности длину как прямой решётки, так и обратной).

Чтобы совершить предельный переход $\Delta x\to 0$, $\ell\to\infty$, надо будет рассматривать прямую и обратную решётку единообразно, как мы и сделали выше. Надо учесть, что в интеграл должна превращаться не только сумма по прямой решётке, но и сумма по обратной решётке.

Скалярное произведение в пределе $\Delta x\to 0$ для непрерывных ϕ и ψ будет давать[9] интеграл (функции уже не обязательно кусочно-постоянные):

$$\langle E|\psi\rangle_0 = \int\limits_{\mathbb{R}} E^*(x)\,\psi(x)\,dx. \tag{4.4.27}$$

При $\Delta x\to 0$ перенормированные базисные векторы выражаются через δ-функцию:

$$e_x(x') = \langle e_{x'}|e_x\rangle_0 = \delta(x-x');$$

$$E_K(x) = \langle e_x|E_K\rangle_0 = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,Kx},\qquad x\in\mathbb{R},\quad K\in\mathbb{R}.$$

Нормировка фурье-гармоник (4.4.24) теперь тоже перешла в нормировку на δ-функцию:

$$\langle E_{K'}|E_K\rangle_0 = \delta(K-K').$$

[9] Разумеется, если такой предел существует.

Прямое и обратное преобразования Фурье приняли вид

$$(\hat{F}\psi)(K) = \tilde{\psi}(K) = \langle E_K|\psi\rangle_0 = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\, Kx}\, \psi(x)\, dx, \qquad K \in \mathbb{R}; \tag{4.4.28}$$

$$(\hat{F}^{-1}\tilde{\psi})(x) = \psi(x) = \langle \tilde{e}_x|\tilde{\psi}\rangle_0 = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\, Kx}\, \tilde{\psi}(K)\, dK, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{4.4.29}$$

4.4.2.9 Коэффициенты в преобразованиях Фурье

Мы определили волновое число так, что фурье-гармоника имеет вид $\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} Kx}$ и нормирована на δ-функцию $\delta(K'-K)$. Часто используют запись, где вместо 2π используется другой множитель, обозначим его $\frac{1}{\hbar}$. Новое волновое число[10] обозначим p, оно имеет вид

$$p = 2\pi\hbar\, K.$$

Перенормируем фурье-гармоники на δ-функцию от нового параметра:

$$\langle E_{p'}|E_p\rangle = \delta(p'-p) = \delta(2\pi\hbar[K'-K]) = \frac{\delta(K'-K)}{2\pi\hbar}. \tag{4.4.30}$$

Теперь можно взять

$$E_p(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{px}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}}. \tag{4.4.31}$$

Прямое и обратное преобразования Фурье приняли вид

$$(\hat{F}\psi)(p) = \tilde{\psi}(p) = \langle E_p|\psi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{px}{\hbar}}\, \psi(x)\, dx, \qquad p \in \mathbb{R}; \tag{4.4.32}$$

$$(\hat{F}^{-1}\tilde{\psi})(x) = \psi(x) = \langle \tilde{e}_x|\tilde{\psi}\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{px}{\hbar}}\, \tilde{\psi}(p)\, dp, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{4.4.33}$$

В полученные формулы (4.4.32), (4.4.33) коэффициенты $\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$ входят симметричным образом. Иногда эти формулы модифицируют так, чтобы собрать все коэффициенты в обратном преобразовании Фурье:

$$(\hat{F}\psi)(p) = \tilde{\psi}(p) = \langle E_p|\psi\rangle_0 = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{px}{\hbar}}\, \psi(x)\, dx, \qquad p \in \mathbb{R}; \tag{4.4.34}$$

$$(\hat{F}^{-1}\tilde{\psi})(x) = \psi(x) = \langle \tilde{e}_x|\tilde{\psi}\rangle_\hbar = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{px}{\hbar}}\, \tilde{\psi}(p)\, \frac{dp}{2\pi\hbar}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{4.4.35}$$

Это соответствует тому, что мы переопределили скалярное произведение для функций от волновых чисел, но оставили прежнее скалярное произведение функций от координат:

$$\langle \phi|\psi\rangle_0 = \int\limits_{\mathbb{R}} \phi^*(x)\, \psi(x)\, dx = \langle \tilde{\phi}|\tilde{\psi}\rangle_\hbar = \int\limits_{\mathbb{R}} \tilde{\phi}^*(p)\, \tilde{\psi}(p)\, \frac{dp}{2\pi\hbar}.$$

При этом фурье-гармоники приобретают вид

$$E_p(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{px}{\hbar}}, \qquad \langle E_{p'}|E_p\rangle_0 = 2\pi\hbar\, \delta(p'-p) = \delta(K'-K).$$

[10] Введённые обозначения выбраны так, чтобы соответствовать традициям квантовой механики. В соответствии с догадкой де Бройля, взяв в качестве $\hbar$ взять приведённую постоянную Планка $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, мы получаем, что если x — координата, то волновое число p — это импульс, а если вместо x взять время, то на вместе p окажется энергия.

4.4.3 Комплексные координаты и амплитуды

Для гармонического осциллятора мы можем написать два дифференциальных уравнения.

Вещественное уравнение второго порядка:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = \mathrm{Re}\Big((A + \mathrm{i}B)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\Big), \tag{4.4.36}$$

и комплексное уравнение первого порядка:

$$\dot{z} = -\mathrm{i}\omega z \quad \Rightarrow \quad z = C\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \quad C = A + \mathrm{i}B, \quad x = \mathrm{Re}(z). \tag{4.4.37}$$

Вещественное уравнение (4.4.36) может быть получено как уравнение Эйлера-Лагранжа для лагранжиана $L(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2\omega} - \frac{\omega x^2}{2}$.

Если параметризовать комплексную переменную в уравнении (4.4.37) через вещественную и мнимую части, $z = x + \mathrm{i}y$, то комплексное уравнение сведётся к системе двух вещественных уравнений

$$\dot{x} = \omega y, \quad \dot{y} = -\omega x. \tag{4.4.38}$$

Эта система соответствует уравнениям Гамильтона для функции Гамильтона $H(x, p) = \frac{\omega p^2}{2} + \frac{\omega x^2}{2}$, если положить $p = y$.

Таким образом, вещественная часть комплексной переменной z соответствует координате, а мнимая — импульсу. Комплексная амплитуда — начальное значение (при $t = 0$) комплексной переменной z.

(!) Выбор t_0 в качестве нового нулевого момента времени приводит к умножению комплексной амплитуды на фазовый множитель $C \to C\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}$. В некоторых задачах мы не можем отследить фазу колебаний, в этом случае комплексная амплитуда оказывается определена с точностью до фазового множителя. Это бывает, когда период колебаний слишком мал по сравнению с временно́й разрешающей способностью наших приборов (так часто бывает в оптике) или когда фаза колебаний в принципе не может быть определена, как для *волновой функции* в квантовой механике.

Комплексная амплитуда может быть и вектором, когда колебания осуществляются по нескольким координатам. Если все колебания происходят на одной частоте, то в этом случае в уравнениях (4.4.38) надо x и y сделать векторами. Например, в оптике амплитуда плоской монохроматической волны — комплексный вектор $\mathbf{E}_0$, ортогональный волновому вектору волны $\mathbf{k}$. Тогда электрическое поле колеблется по закону

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}\Big(\mathbf{E}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}\Big) = (\mathrm{Re}\mathbf{E}_0)\cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t) + (\mathrm{Im}\mathbf{E}_0)\sin(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t).$$

Если $\mathrm{Re}\mathbf{E}_0 \nparallel \mathrm{Im}\mathbf{E}_0$, то (в отличие от одномерного случая) никакой фазовый множитель не сделает комплексную амплитуду $\mathbf{E}_0$ вещественной.

Если колебания происходят на разных частотах, то в уравнениях (4.4.38) надо не только x и y сделать векторами, но и ω и $-\omega$ — матрицами, и мы получим *уравнение Шрёдингера*, о чём см. ниже.

4.4.4 Уравнение Шрёдингера как описание системы гармонических осцилляторов →

Глава 5.6 «Уравнение Шрёдингера как описание системы гармонических осцилляторов» (с. 534) включена в часть «Механика классическая и квантовая как классическая теория поля», но её можно читать сразу после § 4.4.3 «Комплексные координаты и амплитуды».

Глава 4.5

Нелинейные колебания (с. 321)

4.5.1 Решения задач 48, 49

48. ** Обобщённый осциллятор[1] (М.Г. Иванов).
Нерелятивистская частица с массой m совершает одномерные колебания в гладком потенциале $U(x)$, при этом период колебаний T не зависит от энергии частицы E. Найдите общий вид потенциала $U(x)$.

Решение

1. Потенциал не должен иметь «полочек» (интервалов, на которых $\frac{dU}{dx} = 0$), т.к. при попадании частицы на такую полочку она (в зависимости от энергии) может находиться там сколь угодно долго, что противоречит условию постоянства T.

2. Потенциал должен представлять собой потенциальную яму с бесконечно высокими стенками, чтобы при любой энергии движение было периодическим.

3. Потенциал не может иметь локальных максимумов в области движения частицы, так как для частицы с энергией, равной высоте локального максимума, период неограниченно нарастает.

4. Потенциал (в области, доступной для частицы) имеет один минимум и разбивается на два участка: «левая стенка» (левее минимума) и «правая стенка» (правее минимума). Опишем потенциал с помощью двух функций: $x_1(U)$ — положение левой стенки как функция потенциальной энергии и $x_2(U)$ — положение правой стенки. Не теряя общности, предположим (мы всегда можем сдвинуть начало отсчёта по x и U), что $x_1(0) = x_2(0) = 0$ (минимальная потенциальная энергия равна 0 и достигается при нулевой координате). Введём также функцию $\ell(U) = x_2(U) - x_1(U)$ — ширину ямы на энергии U.

5. В соответствии с формулой (3.5.5) (с. 323) период колебания равен

$$T = 2(T_1 + T_2) = 2\int\limits_0^{p_0} \left(\frac{dx_2}{dU} - \frac{dx_1}{dU}\right) dp = 2\int\limits_0^{p_0} \frac{d\ell}{dU}\, dp.$$

Мы видим, что период колебаний задаётся функцией ширины ямы $\ell(U)$.

6. Одно из решений полученного функционального уравнения на $\ell(U)$ мы знаем, оно соответствует гармоническому осциллятору:

$$\ell(U) = 2\sqrt{2U/k}.$$

7. Осталось проверить его единственность:

$$T = 2\int\limits_0^{p_0} \frac{d\ell}{dU}\, dp = \sqrt{2m}\int\limits_0^{\mathcal{E}} \frac{d\ell}{dU}\frac{dU}{\sqrt{\mathcal{E}-U}} = \sqrt{2m}\int\limits_0^1 \mathcal{E}^{-1/2}\frac{\partial \ell(\mathcal{E}u)}{\partial u}\frac{du}{\sqrt{1-u}} = \sqrt{2m}\int\limits_0^1 \sqrt{\mathcal{E}}\ell'(\mathcal{E}u)\frac{du}{\sqrt{1-u}},$$

$$\frac{dT}{d\mathcal{E}} = \sqrt{2m}\int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}}\left(\sqrt{\mathcal{E}}\ell'(\mathcal{E}u)\right)\frac{du}{\sqrt{1-u}} = \sqrt{2m}\int\limits_0^1 g(\mathcal{E}u)\underbrace{\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{1-u}}}_{f>0}\, du = 0,$$

$$g(U) = \frac{\ell''U + \ell'/2}{\sqrt{U}}.$$

[1] Задача давалась на олимпиаде МФТИ по теоретической физике 2019 г.

При $\mathcal{E} \to 0$ получаем, что $g(0) = 0$. При увеличении $\mathcal{E}$ интегрирование с положительным весом f охватывает всё большие и большие диапазоны по $U = \mathcal{E}u$, так что $g(U) \equiv 0$, откуда находим, что $\ell(U) \sim \sqrt{U}$, как и было для гармонического осциллятора.

49. Нелинейный осциллятор.
а) Для осциллятора с кубической нелинейностью $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2 - \varepsilon m\frac{1}{3}x^3$ найдите поправку к частоте в зависимости от амплитуды (можно использовать теорию возмущений).
б) Что изменится, если взять $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2 - \varepsilon m\frac{1}{3}|x^3|$?

Решение

В соответствии с формулой (3.5.5) (с. 323) период колебаний равен:

$$T = 2(T_1 + T_2) = 2\int\limits_0^{p_0}\left(\frac{dx_2}{dU} - \frac{dx_1}{dU}\right)dp = 2\int\limits_0^{p_0}\frac{d\ell}{dU}\,dp.$$

Мы видим, что период колебаний задаётся функцией ширины ямы $\ell(U)$.

Энергия выражается через амплитуды *гармонического осциллятора* по импульсу и координате следующим образом:

$$\mathcal{E} = \frac{p_0^2}{2m} = \frac{m\omega_0^2a^2}{2}.$$

Начнём решать задачу с пункта **б**, поскольку данным методом этот пункт решается проще.
б) Положение стенки как функция от U определяется уравнением

$$U = \frac{m\omega_0^2x_{1,2}^2}{2} + \frac{m\varepsilon|x_{1,2}|^3}{3}.$$

В силу чётности потенциала $-x_1 = x_2 = \ell/2$, следовательно,

$$\frac{dU}{d\varepsilon} = \frac{\partial U}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial U}{\partial x_2}\frac{dx_2}{d\varepsilon} = 0.$$

Отсюда имеем

$$\frac{dx_2}{d\varepsilon} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial\varepsilon}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} = -\frac{x_2^2/3}{\omega_0^2 + \varepsilon x_2^2}.$$

Теперь находим поправку к $\ell(U)$ в линейном порядке по ε:

$$\delta\ell(U) = -\frac{2}{3}\left.\frac{x_2^2(U)}{\omega_0^2}\right|_{\varepsilon=0}\cdot\varepsilon = -\frac{2}{3}\frac{\left(\frac{2U}{m\omega_0^2}\right)}{\omega_0^2}\cdot\varepsilon = -\frac{4}{3}\frac{U\varepsilon}{m\omega_0^4}$$

Поправка к подынтегральному выражению имеет вид

$$\frac{d(\delta\ell)}{dU} = -\frac{4}{3}\frac{\varepsilon}{m\omega_0^4}.$$

Находим поправку к периоду:

$$\delta T = 2\int\limits_0^{p_0}\frac{d(\delta\ell)}{dU}\,dp = -\frac{8}{3}\frac{\varepsilon}{m\omega_0^4}\int\limits_0^{p_0}dp = -\frac{8}{3}\frac{\varepsilon\,p_0}{m\omega_0^4} = -\frac{8}{3}\frac{\varepsilon\,(m\omega_0 a)}{m\omega_0^4} = -\frac{8}{3}\frac{\varepsilon\,a}{\omega_0^3}; \tag{4.5.1}$$

$$\omega = \omega_0 + \delta\omega = \frac{2\pi}{T_0 + \delta T} \approx \omega_0\left(1 - \frac{\delta T}{T_0}\right) = \omega_0 - \omega_0^2\frac{\delta T}{2\pi},$$

$$\delta\omega = -\omega_0^2\frac{\delta T}{2\pi} = \frac{4}{3\pi}\frac{\varepsilon\,a}{\omega}.$$

а) Положение стенки как функция от U определяется уравнением

$$U = \frac{m\omega_0^2x_{1,2}^2}{2} + \frac{m\varepsilon x_{1,2}^3}{3}.$$

В силу нечётности кубического члена имеем

$$\left.\frac{dx_1}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \left.\frac{dx_2}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{d\ell}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Таким образом, в линейном порядке по ε частота колебаний не зависит от амплитуды.

Этот результат можно получить и из пункта **б**: член $\frac{m\varepsilon x_{1,2}^3}{3}$ при $x > 0$ совпадает с $\frac{m\varepsilon|x_{1,2}|^3}{3}$, а при $x < 0$ совпадает с $-\frac{m\varepsilon|x_{1,2}|^3}{3}$. Таким образом,

$$\delta T_{\text{пункт } \mathbf{а}}(\varepsilon) = \frac{\delta T_{\text{пункт } \mathbf{б}}(\varepsilon) + \delta T_{\text{пункт } \mathbf{б}}(-\varepsilon)}{2} = 0 + o(\varepsilon).$$

Итак, ненулевая поправка к частоте может имеет порядок по ε не ниже второго:

$$\frac{dU}{d\varepsilon} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial U}{\partial x_{1,2}}\frac{dx_{1,2}}{d\varepsilon} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\left.\frac{dx_{1,2}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = -\frac{x_{1,2}^2}{3\omega_0^2},$$

$$\frac{d^2U}{d\varepsilon^2} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_{1,2}\partial\varepsilon} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_{1,2}^2}\frac{dx_{1,2}}{d\varepsilon}\right)\frac{dx_{1,2}}{d\varepsilon} +$$

$$+\frac{\partial U}{\partial x_{1,2}}\frac{d^2x_{1,2}}{d\varepsilon^2} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial\varepsilon^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial\varepsilon\partial x_{1,2}}\frac{dx_{1,2}}{d\varepsilon}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 U}{\partial x_{1,2}^2}\left(\frac{dx_{1,2}}{d\varepsilon}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial x_{1,2}\partial\varepsilon}\frac{dx_{1,2}}{d\varepsilon} + \frac{\partial U}{\partial x_{1,2}}\frac{d^2x_{1,2}}{d\varepsilon^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 U}{\partial\varepsilon^2}}_{0} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x_{1,2}}\right|_{\varepsilon=0} = m\omega_0^2 x_{1,2}, \quad \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x_{1,2}^2}\right|_{\varepsilon=0} = m\omega_0^2, \quad \left.\frac{\partial^2 U}{\partial\varepsilon\partial x_{1,2}}\right|_{\varepsilon=0} = mx_{1,2}^2.$$

Получаем

$$\left.\frac{d^2x_{1,2}}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x_{1,2}}\right)_{\varepsilon=0}^{-1}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x_{1,2}^2}\left(\frac{dx_{1,2}}{d\varepsilon}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial x_{1,2}\partial\varepsilon}\frac{dx_{1,2}}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0},$$

$$\left.\frac{d^2x_{1,2}}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0} = -\left(m\omega_0^2 x_{1,2}\right)^{-1}\left[m\omega_0^2\left(-\frac{x_{1,2}^2}{3\omega_0^2}\right)^2 + 2mx_{1,2}^2\left(-\frac{x_{1,2}^2}{3\omega_0^2}\right)\right],$$

$$\left.\frac{d^2x_{1,2}}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0} = \frac{x_{1,2}^3}{\omega_0^4}\left[-\frac{1}{9} + \frac{2}{3}\right] = \frac{5}{9}\frac{x_{1,2}^3}{\omega_0^4},$$

$$\delta x_{1,2} = \frac{\varepsilon^2}{2}\left.\frac{d^2x_{1,2}}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0}.$$

С учётом равенства

$$U = \left.\frac{m\omega_0^2 x_2^2}{2}\right|_{\varepsilon=0},$$

находим

$$\delta\ell = \delta x_2 - \delta x_1 = \frac{5}{9}\frac{\varepsilon^2 x_2^3}{\omega_0^4} = \frac{5}{9}\frac{\varepsilon^2}{\omega_0^4}\left(\frac{2U}{m\omega_0^2}\right)^{3/2} = \frac{10\sqrt{2}}{9}\frac{\varepsilon^2 U^{3/2}}{\omega_0^7 m^{3/2}},$$

$$\frac{d(\delta\ell)}{dU} = \frac{5\sqrt{2}}{3}\frac{\varepsilon^2\sqrt{U}}{\omega_0^7 m^{3/2}} = \frac{5\sqrt{2}}{3}\frac{\varepsilon^2}{\omega_0^7 m^{3/2}}\underbrace{\sqrt{\frac{p_0^2 - p^2}{2m}}}_{\sqrt{U}} = \frac{5}{3}\frac{\varepsilon^2}{\omega_0^7 m^2}\sqrt{p_0^2 - p^2}.$$

Из формулы (3.5.5) (см. с. 323) следует, что

$$\delta T = 2\int_0^{p_0}\frac{d(\delta\ell)}{dU}\,dp = \frac{10}{3}\frac{\varepsilon^2}{\omega_0^7 m^2}\frac{\pi p_0^2}{4} = \frac{5\pi}{3}\frac{\varepsilon^2}{\omega_0^7 m}\mathcal{E} = \frac{5\pi}{6}\frac{\varepsilon^2 a^2}{\omega_0^5},$$

$$\delta\omega = -\frac{\omega_0^2}{2\pi}\,\delta T = -\frac{5}{12}\frac{\varepsilon^2 a^2}{\omega_0^3}.$$

Решение задачи с использованием теории возмущений можно найти в §28 «Механики» Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица.

Глава 4.6

Поле как механическая система (с. 329)

4.6.1 Теорема Нётер в теории поля

Мы обобщим теорему Нётер для симметрий, порождающих добавку к лагранжиану в виде полной производной по времени (см. § 2.13.2 «Обобщение теоремы Нётер» с. 278), с механики с конечным числом степеней свободы на теорию поля.

Если при однопараметрическом преобразовании с параметром s лагранжиан получает приращение, равное полной производной по времени:

$$\frac{d}{ds}L(X(x,s),\dot{X}(x,s),t)=\frac{dA_s}{dt}, \tag{4.6.1}$$

то имеет место следующий закон сохранения:

$$\frac{dP_s}{dt}=0, \qquad P_s:=\left(p_\alpha\frac{\partial X^\alpha}{\partial s}-A_s\right)\Big|_{s=0}. \tag{4.6.2}$$

Исходя из аналогии, разобранной в п. 3.6.3.2 «Пространство-время как “многомерное время”» (с. 332), мы сначала угадаем форму закона сохранения, а потом покажем, что соответствующая теорема выполняется.

Теперь мы имеем полевое действие в виде пространственно-временного интеграла:

$$S[\varphi^a(x^i)]=\int\limits_U \mathcal{L}(\varphi^a,\partial_i\varphi^a,x)\,d^4x.$$

Симметрия — некоторое преобразование полей вида

$$\varphi^a\to\Phi^a[\phi](x).$$

Преобразование полей может быть нелокальным (поэтому мы использовали квадратные скобки), например, сдвиг по координате x^j можно рассматривать как нелокальное преобразование полей:

$$\varphi^a(x^i)\to\varphi^a(x^i+s\delta^i_j).$$

Мы рассматриваем однопараметрические симметрии, т.е. $s=0$ даёт тождественное преобразование, а последовательное выполнение преобразований с параметрами s_1,s_2 даёт преобразование того же класса с параметром s_1+s_2.

Условие (4.6.1) того, что преобразование задаёт симметрию, принимает вид

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}(\Phi[\varphi](s),\partial_i\Phi[\varphi](s),x)=\frac{\partial A^i_s}{\partial x^i}.$$

При такой симметрии действие получает добавку, связанную с изменением величины A^i_s на границе области интегрирования:

$$S[\varphi(x)]=\int\limits_U\mathcal{L}\,d^4x \quad\to\quad S'[\varphi(x)]=S[\varphi(x)]+\int\limits_{\partial U}A^i_s\,da_i.$$

Получается, что функция Лагранжа не сохраняется, но сохраняется действие для пространственно-временной области U, если $A^i_s|_{\partial U} = 0$. Можно сказать, что действие при такой симметрии сохраняется, но вклад в него перераспределяется по пространству-времени.

Закон сохранения, аналогичный (4.6.2), теперь имеет вид (по сравнению с законом (4.6.2) мы поменяли знак в соответствии с принятой традицией)

$$\frac{\partial j^i_s}{\partial x^i} = 0, \qquad j^i_s := \left(A^i_s - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)} \frac{\partial \varphi^a}{\partial s} \right)\Big|_{s=0}.$$

Теперь это закон сохранения в дифференциальной форме (уравнение непрерывности). Величину j^i_s (по аналогии с законом сохранения заряда) называют *нётеровским током*.

Легко провести проверку:

$$\partial_i j^i_s = \underbrace{\partial_i A^i_s}_{\frac{d\mathcal{L}}{ds}|_{s=0}} - \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi^a)} \frac{\partial \varphi^a}{\partial s} \right)_{s=0} = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^a} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi^a)} \right] \frac{\partial \varphi^a}{\partial s} = 0.$$

Выражение в квадратных скобках равно нулю в силу уравнений поля.

Если рассмотреть сдвиг по координате x^j, то

$$\phi^a(x^i) \to \phi^a(x^i + s\delta^i_j),$$

$$\frac{\partial \varphi^a}{\partial s} = \partial_j s, \qquad \frac{d\mathcal{L}}{ds}\bigg|_{s=0} = \partial_j \mathcal{L} = \partial_i(\mathcal{L}\delta^i_j).$$

Соответствующий нётеровский ток задаётся компонентами тензора энергии-импульса с нижним индексом j:

$$T^i{}_j = \mathcal{L}\delta^i_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi^a)} \partial_j \varphi^a. \tag{4.6.3}$$

4.6.2 Альтернативное определение тензора энергии-импульса

Пусть имеется полевое действие, которое инвариантно по отношению к произвольным невырожденным заменам пространственно-временных координат.

$$S[\varphi^a(x)] = \int \mathcal{L}(\varphi^a, \partial_i \varphi^a, g_{ij}, \partial_k g_{ij})\, d^4x.$$

Лагранжиан $\mathcal{L}$ зависит от динамических полей φ^a (скалярных и тензорных, тензорные индексы у полей φ^a мы будем опускать), а также от метрического тензора g_{ij} и его первых производных $\partial_k g_{ij}$.

Рассмотрим изменение такого действия при бесконечномалой замене координат, задаваемой векторным полем ξ^i:

$$x^i = x'^i + \varepsilon \xi^i, \quad \varepsilon = \text{const} \in \mathbb{R}.$$

При такой замене точки с фиксированными координатами скользят по пространству-времени вдоль векторного поля ξ^i и в линейном по ε порядке приращения полей $\delta\varphi^a$ и g_{ij} задаются производными Ли вдоль поля ξ^i:

$$\delta_\xi \varphi^a = \varepsilon\, L_\xi \varphi^a, \quad \delta_\xi g_{ij} = \varepsilon\, L_\xi g_{ij} = \varepsilon\, (\nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i).$$

Здесь мы выразили производную Ли от метрического тензора через ковариантные производные по формуле (2.3.18).

Изменение действия при этом (в силу инвариантности по отношению к заменам координат) равно нулю:

$$\begin{aligned} 0 = \delta_\xi S &= \varepsilon \int \left[\sum_a \frac{\delta S}{\delta \varphi^a} \delta_\xi \varphi^a + \frac{\delta S}{\delta g_{ij}} \delta_\xi g_{ij} \right] d^4x = \\ &= \varepsilon \int \left[\sum_a \frac{\delta S}{\delta \varphi^a} L_\xi \varphi^a + \frac{\delta S}{\delta g_{ij}} (\nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i) \right] d^4x. \end{aligned}$$

Уравнения Эйлера–Лагранжа для полей φ^a имеют вид $\frac{\delta S}{\delta \varphi^a} = 0$. Вариационную производную по метрике обозначим следующим образом:

$$\frac{\delta S}{\delta g_{ij}} = \frac{\delta S}{\delta g_{ji}} = \frac{\sqrt{-g}}{2c} T^{ij}. \tag{4.6.4}$$

С учётом симметрии T^{ij} получаем

$$\delta_\xi S = \frac{\varepsilon}{c}\int T^{ij}\,\nabla_i\xi_j\,\sqrt{-g}\,d^4x = 0.$$

Здесь вариация действия — скаляр, а $\sqrt{-g}\,d^4x$ — инвариантный элемент объёма, так что свёртка $T^{ij}\,\nabla_i\xi_j$ также оказывается скаляром. В силу произвольности векторного поля ξ в данной точке матрица $\nabla_i\xi_j$ может иметь произвольные компоненты, а значит по признаку тензора T^{ij} — тензор.

Выделим в подынтегральном выражении полную дивергенцию:

$$\delta_\xi S = \frac{\varepsilon}{c}\int \left[\nabla_i(T^{ij}\xi_j) - \xi_j\,\nabla_i T^{ij}\right]\,\sqrt{-g}\,d^4x = 0.$$

Ковариантная дивергенция, умноженная на $\sqrt{-g}$, даёт обычную дивергенцию:

$$\sqrt{-g}\nabla_i(T^{ij}\xi_j) = \partial_i(\sqrt{-g}\,T^{ij}\xi_j),$$

так что по теореме Гаусса–Остроградского интеграл от неё сводится к поверхностному интегралу по границе области интегрирования. Мы можем выбрать поле ξ^i так, что на границе области интегрирования оно обращается в нуль, тогда поверхностный интеграл обнуляется и мы получаем

$$\delta_\xi S = -\frac{\varepsilon}{c}\int \xi_j\,\nabla_i T^{ij}\,\sqrt{-g}\,d^4x = 0.$$

В силу произвольности поля ξ мы получаем ковариантное уравнение непрерывности для тензора T^{ij}:

$$\nabla_i T^{ij} = 0.$$

Это позволяет назвать T^{ij} *тензором энергии-импульса.* Определение тензора энергии-импульса через вариационную производную от действия полей материи по метрическому тензору (4.6.4) принято в общей теории относительности. В следующем параграфе мы убедимся, что для скалярных полей оба определения тензора энергии-импульса (4.6.3) и (4.6.4) дают одно и то же.

Для электромагнитного поля именно определение (4.6.4) оказывается предпочтительным, так как, в отличие от (4.6.3), оно сразу даёт симметричное калибровочно-инвариантное выражение.

4.6.3 Согласованность определений тензора энергии-импульса для скалярных полей

Пусть имеется набор скалярных полей ϕ^a и имеется инвариантный лагранжиан

$$\mathsf{L}(\phi^a, \partial_i\phi^a, \underline{x}).$$

По отношению к общекоординатным преобразованиям тензор энергии-импульса будет определяться через инвариантный лагранжиан:

$$\frac{1}{c}T^i{}_j = \mathsf{L}\,\delta^i_j - \frac{\partial\mathsf{L}}{\partial\partial_i\phi^a}\,\partial_j\phi^a.$$

Градиенты полей $\partial_i\phi^a$ могут входить в скаляр L только в виде скалярных произведений:

$$\mathcal{G}^{ab} = g^{ij}(\partial_i\phi^a)(\partial_j\phi^b),$$

$$\mathsf{L}(\phi^a, \partial_i\phi^a, \underline{x}) = \mathsf{L}(\phi^a, \mathcal{G}^{ab}, \underline{x}).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial\mathsf{L}}{\partial\partial_i\phi^a} = \frac{\partial\mathsf{L}}{\partial\mathcal{G}^{bc}}\frac{\partial\mathcal{G}^{bc}}{\partial\partial_i\phi^a} = 2\frac{\partial\mathsf{L}}{\partial\mathcal{G}^{ab}}\partial^i\phi^b,$$

$$\frac{\partial\mathsf{L}}{\partial g^{ij}} = \frac{\partial\mathsf{L}}{\partial\mathcal{G}^{ab}}\frac{\partial\mathcal{G}^{ab}}{\partial g^{ij}} = \frac{\partial\mathsf{L}}{\partial\mathcal{G}^{ab}}(\partial_i\phi^a)(\partial_j\phi^b) = \frac{1}{2}g_{ik}\frac{\partial\mathsf{L}}{\partial\partial_k\phi^b}\partial_j\phi^b.$$

Тензор энергии-импульса с нижними индексами приобретает вид

$$\frac{1}{c}T_{ij} = \mathsf{L}\,g_{ij} - g_{ik}\frac{\partial\mathsf{L}}{\partial\partial_k\phi^a}\,\partial_j\phi^a = \mathsf{L}\,g_{ij} - 2\frac{\partial\mathsf{L}}{\partial g^{ij}}.$$

Другой вариант — продифференцировать $\mathcal{L} = \sqrt{-g}\mathrm{L}$ по метрике с нижними индексами:

$$g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k \quad \Rightarrow \quad (\delta g^{ij})g_{jk} + g^{ij}\delta g_{jk} = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta g^{kl} = -g^{ki}g^{lj}\delta g_{ij}; \tag{4.6.5}$$

$$\delta g = \delta\frac{1}{4!}\varepsilon^{i_1i_2i_3i_4}\varepsilon^{j_1j_2j_3j_4}g_{i_1j_1}g_{i_2j_2}g_{i_3j_3}g_{i_4j_4} = \underbrace{\frac{1}{3!}\varepsilon^{i_1i_2i_3i_4}\varepsilon^{j_1j_2j_3j_4}g_{i_1j_1}g_{i_2j_2}g_{i_3j_3}}_{gg^{i_4j_4}}\delta g_{i_4j_4} = gg^{ij}\,\delta g_{ij};$$

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{\delta g}{2\sqrt{-g}} = -\delta g_{ij}\frac{g^{ij}g}{2\sqrt{-g}} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{ij}\,\delta g_{ij}; \tag{4.6.6}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{ij}} = \frac{\partial\sqrt{-g}\mathrm{L}}{\partial g_{ij}} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{ij}\,\mathrm{L} + \sqrt{-g}\frac{\partial\mathrm{L}}{\partial g^{kl}}\frac{\partial g^{kl}}{\partial g_{ij}} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{ij}\,\mathrm{L} - \sqrt{-g}\frac{\partial\mathrm{L}}{\partial g^{kl}}g^{ki}g^{lj}.$$

Таким образом, мы имеем два выражения для тензора энергии-импульса скалярных полей:

$$T^{ij} = \frac{2c}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{ij}} = \frac{2c}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g_{ij}}, \qquad T_{ij} = c\mathrm{L}\,g_{ij} - 2c\frac{\partial\mathrm{L}}{\partial g^{ij}}.$$

(!) Мы получили выражение для тензора энергии-импульса через вариацию полевого действия для случая скалярных полей. Однако такое выражение можно использовать и в общем случае. Для тензорных полей это удобно тем, что получившийся тензор энергии-импульса автоматически оказывается симметричным.

(**) Более того, именно тензор энергии-импульса через вариацию метрики возникает в общей теории относительности (ОТО), что связано с тем, что в ОТО метрический тензор тоже становится динамическим полем.

Глава 4.7

Свойства уравнений Максвелла (с. 338)

4.7.1 Совместность уравнений Максвелла

Среди уравнений Максвелла два содержат производные по времени от полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. Временны́е производные могут быть выражены через поля и токи в заданный момент времени:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}, \tag{4.7.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \mathbf{B} - 4\pi k_{\text{к}} \mathbf{j}. \tag{4.7.2}$$

Если мы знаем, по какому закону зависит от времени плотность тока $\mathbf{j}$, и знаем поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ в начальный момент времени, то эти два уравнения (4.7.1), (4.7.2) задают временну́ю эволюцию полей, и получается, что оставшиеся два уравнения Максвелла, содержащие дивергенции полей, нам не нужны.

Оставшиеся два уравнения Максвелла не содержат производных по времени:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \tag{4.7.3}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi k_{\text{к}} \rho. \tag{4.7.4}$$

Они задают условия на поля в фиксированный момент времени. В частности, уравнения (4.7.3), (4.7.4) задают условия, которые должны быть выполнены в начальный момент времени $t = 0$.

Однако после того, как мы задали начальные условия на поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, дальнейшая эволюция полей определяется только уравнениями, содержащими временны́е производные (4.7.1), (4.7.2). Может ли оказаться, что уравнения (4.7.3), (4.7.4) выполнялись в момент времени $t = 0$, а потом перестали выполняться?

Чтобы ответить на этот вопрос, продифференцируем уравнения (4.7.3), (4.7.4) по времени, переставим $\frac{\partial}{\partial t}$ и div и воспользуемся уравнениями (4.7.1), (4.7.2):

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{B} = \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \underbrace{\operatorname{div} \operatorname{rot}}_{0} \mathbf{E} = 0, \tag{4.7.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c \underbrace{\operatorname{div} \operatorname{rot}}_{0} \mathbf{B} - 4\pi k_{\text{к}} \operatorname{div} \mathbf{j} = 4\pi k_{\text{к}} \frac{\partial}{\partial t} \rho. \tag{4.7.6}$$

Первое уравнение (4.7.5) дало тождество $0 = 0$. Таким образом, достаточно, чтобы уравнение (4.7.3) выполнялось в начальный момент времени, дальше оно будет выполняться автоматически.

Уравнение (4.7.6) дало уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

Таким образом, достаточно, чтобы уравнение (4.7.3) выполнялось в начальный момент времени, дальше оно будет выполняться автоматически *при условии, что выполняется уравнение непрерывности.* Уравнение непрерывности здесь возникает как *условие совместности* (непротиворечивости) второй пары уравнений Максвелла (4.7.2), (4.7.4).

В основном тексте мы получили условия совместности из 4-мерной формы второй пары уравнений Максвелла:

$$\partial_j F^{ij} = \frac{4\pi k_{\text{к}}}{c} j^i \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\partial_i \partial_j F^{ij}}_{0} = \frac{4\pi k_{\text{к}}}{c} \partial_i j^i \quad \Rightarrow \quad \partial_i j^i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

4.7.2 Уравнения Максвелла с магнитными зарядами

Мы уже обращали внимание на сходство между первой и второй парами уравнений Максвелла. В 4-мерной форме это сходство проявляется с помощью ходжевской дуальности:

$$\partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} + \partial_k F_{ij} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_j \tilde{F}^{ij} = 0,$$

$$\partial_j F^{ij} = \frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\, j^i \quad \Leftrightarrow \quad \partial_i \tilde{F}_{jk} + \partial_j \tilde{F}_{ki} + \partial_k \tilde{F}_{ij} = \frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\, (\tilde{j})_{ijk} = \frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\, \varepsilon_{mijk} j^m.$$

В первой паре «не хватает» правой части (*источника*) — аналога j^i. Допишем недостающий источник $-j^i_{\text{м}}$ в первую пару уравнений Максвелла:

$$\partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} + \partial_k F_{ij} = -\frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\, (\tilde{j}_{\text{м}})_{ijk} \quad \Leftrightarrow \quad \partial_j \tilde{F}^{ij} = -\frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\, j^i_{\text{м}}.$$

Знак минус мы вставили в перед источником «для красоты», чтобы в уравнении на $\operatorname{div}\mathbf{B}$ правая часть была с плюсом:

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = \frac{4\pi k_{\text{к}}}{c} j^0_{\text{м}} = 4\pi k_{\text{к}} \rho_{\text{м}}.$$

По аналогии с уравнением на $\operatorname{div}\mathbf{E}$ мы можем отождествить $\rho_{\text{м}} = \frac{1}{c}\, j^0_{\text{м}}$ *с плотностью магнитных зарядов* (*магнитных монополей*).

Аналогично 4-мерной плотности электрического тока $j^i_{\text{м}}$ — *4-мерная плотность тока магнитных зарядов*, которая имеет компоненты, задающие *плотность магнитных зарядов* и *плотность тока магнитных зарядов*:

$$j^i_{\text{м}} = (c\rho_{\text{м}}; \mathbf{j}_{\text{м}}).$$

В 3-мерном виде первая пара уравнений Максвелла теперь имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{B} &= 4\pi k_{\text{к}} \rho_{\text{м}}, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\, \mathbf{j}_{\text{м}}. \end{aligned}$$

Теперь и для первой пары уравнений Максвелла появляется нетривиальное условие совместности:

$$\partial_j \tilde{F}^{ij} = -\frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\, j^i_{\text{м}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\partial_i \partial_j \tilde{F}^{ij}}_{0} = -\frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\, \partial_i j^i_{\text{м}} \quad \Rightarrow \quad \partial_i j^i_{\text{м}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \rho_{\text{м}}}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j}_{\text{м}} = 0.$$

Это условие совместности оказывается уравнением непрерывности уже для магнитных зарядов.

(!) Магнитные заряды (монополи) до сих пор не обнаружены на эксперименте. Однако они настолько хорошо вписываются в теорию (как классическую, так и квантовую), что многие физики мечтают об их обнаружении.

(**) В квантовой теории, как правило, с той или иной вероятностью происходит всё, что не запрещено законами сохранения. То, что до сих пор в экспериментах на ускорителях элементарных частиц или в космических лучах не было зарегистрировано рождение пары монополь-антимонополь, по всей видимости, означает, что либо самая лёгкая частица с ненулевым магнитным зарядом имеет очень большую массу, либо магнитных монополей не существует.

4.7.3 Уравнения Максвелла в комплексной форме

Перепишем уравнения Максвелла в присутствии электрических и магнитных зарядов.

Первая пара теперь содержит источники:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{B} &= 4\pi k_{\text{к}} \rho_{\text{м}}, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\, \mathbf{j}_{\text{м}}. \end{aligned}$$

Во второй паре мы пометили электрические заряды и токи буквой «э»:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{E} &= 4\pi k_{\text{к}} \rho_{\text{э}}, \\ \operatorname{rot}\mathbf{B} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\, \mathbf{j}_{\text{э}}. \end{aligned}$$

Умножим первое уравнение первой пары на мнимую единицу и сложим с соответствующим уравнением второй пары:

$$\operatorname{div}(\mathbf{E} + \mathrm{i}\mathbf{B}) = 4\pi k_{\text{к}} (\rho_{\text{э}} + \mathrm{i}\rho_{\text{м}}),$$

Умножим второе уравнение второй пары на мнимую единицу и сложим с соответствующим уравнением первой пары:

$$\mathrm{rot}(\mathbf{E}+\mathrm{i}\mathbf{B}) = \mathrm{i}\frac{1}{c}\frac{\partial(\mathbf{E}+\mathrm{i}\mathbf{B})}{\partial t} + \mathrm{i}\frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\,(\mathbf{j}_{\text{э}} + \mathrm{i}\mathbf{j}_{\text{м}}).$$

Оба уравнения хорошо записываются через *комплексную напряжённость электромагнитного поля*:

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + \mathrm{i}\mathbf{B}$$

и *комплексные плотности электромагнитных зарядов и токов*:

$$\rho = \rho_{\text{э}} + \mathrm{i}\rho_{\text{м}}, \qquad \mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{э}} + \mathrm{i}\mathbf{j}_{\text{м}}.$$

В комплексных величинах получаем

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\,\mathbf{F} &= 4\pi k_{\text{к}}\rho, \\ \mathrm{rot}\,\mathbf{F} &= \mathrm{i}\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t} + \mathrm{i}\frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\,\mathbf{j}. \end{aligned}$$

При этом электрические и магнитные величины выступают как вещественные и мнимые части одних и тех же объектов.

(!) Мы можем пользоваться такой комплексной записью и в отсутствие магнитных зарядов. Плотности зарядов и токов при этом будут вещественными.

4.7.3.1 Зарядовое вращение

Комплексная запись позволяет увидеть у классической электродинамики ещё одну симметрию — *зарядовое вращение*. Мы можем умножить все введённые выше комплексные величины на фазовый множитель $\mathrm{e}^{i\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &\to \mathrm{e}^{i\alpha}\mathbf{F}, \\ \rho &\to \mathrm{e}^{i\alpha}\rho, \\ \mathbf{j} &\to \mathrm{e}^{i\alpha}\mathbf{j}. \end{aligned} \tag{4.7.7}$$

Для вещественных величин это преобразование имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &\to \mathbf{E}\cos\alpha - \mathbf{B}\sin\alpha, \\ \mathbf{B} &\to \mathbf{E}\sin\alpha + \mathbf{B}\cos\alpha, \\ \rho_{\text{э}} &\to \rho_{\text{э}}\cos\alpha - \rho_{\text{м}}\sin\alpha, \\ \rho_{\text{м}} &\to \rho_{\text{э}}\sin\alpha + \rho_{\text{м}}\cos\alpha, \\ \mathbf{j}_{\text{э}} &\to \mathbf{j}_{\text{э}}\cos\alpha - \mathbf{j}_{\text{м}}\sin\alpha, \\ \mathbf{j}_{\text{м}} &\to \mathbf{j}_{\text{э}}\sin\alpha + \mathbf{j}_{\text{м}}\cos\alpha. \end{aligned} \tag{4.7.8}$$

Такая симметрия интересна и в отсутствие магнитных зарядов, например, с её помощью мы можем взаимопревращать электрические и магнитные мультиполи.

Для плоской бегущей электромагнитной волны $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ в каждой точке равны по модулю и перпендикулярны, так что зарядовое вращение поворачивает все плоскости поляризации на угол α в направлении от $\mathbf{E}$ к $\mathbf{B}$.

Зарядовое вращение на угол $\frac{\pi}{2}$ в точности соответствует замене тензора электромагнитного поля на ходжевски дуальный.

4.7.4 Кинематика и динамика меняются местами

Для электромагнитного поля в присутствии источника $j^i(\underline{x})$ мы ввели действие

$$S[A_i(\underline{x})] = \int\limits_U \left(\frac{-F^{ij}F_{ij}}{16\pi k_{\text{к}}c} + \frac{1}{c^2}j^i(\underline{x})A_i(\underline{x})\right) d^4\underline{x}, \qquad F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i. \tag{4.7.9}$$

При этом первая пара уравнений Максвелла выступает в роли *кинематических тождеств*, следующих из параметризации электромагнитного поля F_{ij} через потенциалы A_i, а вторая пара — в роли уравнений динамики электромагнитного поля, получающихся из вариации действия.

Несмотря на это, первая и вторая пара уравнений Максвелла очень похожи друг на друга. В 4-мерном виде для проявления этого сходства можно воспользоваться ходжевской дуальностью:

$$\partial_i F_{ij} + \partial_j F_{ki} + \partial_k F_{ij} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_j \tilde{F}^{ij} = 0,$$

$$\partial_j F^{ij} = \frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\, j^i \quad \Leftrightarrow \quad \partial_i \tilde{F}_{ij} + \partial_j \tilde{F}_{ki} + \partial_k \tilde{F}_{ij} = \frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\, (\tilde{j})_{ijk} = \frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\, \underbrace{\varepsilon_{mijk} j^m}_{\tilde{j}_{ijk}}.$$

(?) Относится ли разница между кинематическими тождествами и уравнениями динамики к свойствам физической системы или к свойствам её описания с помощью конкретной параметризации и конкретного функционала действия?

Покажем, что для электромагнитного поля в присутствии источника $j^i(\underline{x})$ можно ввести другую параметризацию и другой функционал действия таким образом, что первая пара уравнений Максвелла станет уравнениями динамики, а вторая — кинематическим тождеством. Иными словами, покажем, что «кинематика и динамика могут поменяться местами».

4.7.4.1 Альтернативная параметризация электромагнитного поля

4-мерная плотность тока $j^i(\underline{x})$ должна удовлетворять уравнению непрерывности, что, как мы установили (см. соотношение (3.7.4)), следует из второй пары уравнений Максвелла:

$$\partial_i \partial_j F^{ij} = 0 = \frac{4\pi k_{\text{к}}}{c} \partial_i j^i \qquad \Rightarrow \qquad \partial_i j^i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

Уравнение непрерывности можно переписать через дуальный тензор плотности тока $\tilde{j}_{ijk} = \varepsilon_{mijk} j^m$:

$$(d\tilde{j})_{ijkl} = \partial_i \tilde{j}_{jkl} - \partial_j \tilde{j}_{ikl} + \partial_k \tilde{j}_{ijl} - \partial_l \tilde{j}_{ijk} = 0.$$

Эквивалентность такой записи легко проверить. Антисимметричный тензор с 4 индексами $d\tilde{j}$ в 4-мерном пространстве имеет только одну независимую компоненту, в качестве которой можно взять

$$(d\tilde{j})_{0123} = \partial_0 \underbrace{\tilde{j}_{123}}_{j^0} + \partial_1 \underbrace{(-\tilde{j}_{023})}_{j^1} + \partial_2 \underbrace{\tilde{j}_{013}}_{j^2} + \partial_3 \underbrace{(-\tilde{j}_{012})}_{j^3} = \partial_i j^i = 0.$$

Поскольку $d\tilde{j} = 0$, мы можем параметризовать $\tilde{j}$ (в 4-мерной области без дырок) через внешнюю производную от некоторого антисимметричного тензора I (*потенциала тока*):

$$\tilde{j} = dI \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{j}_{ijk} = (dI)_{ijk} = \partial_i I_{jk} + \partial_j I_{ki} + \partial_k I_{ij}.$$

Параметризуем дуальный тензор электромагнитного поля $\tilde{F}_{ij}$ через I_{ij} и *4-мерный ковекторный потенциал* C_i:

$$\tilde{F} = dC + \frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\, I \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{F}_{ij} = \partial_i C_j - \partial_j C_i + \frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\, I_{ij}. \tag{4.7.10}$$

Если взять от этого выражения внешнюю производную, мы получаем

$$d\tilde{F} = \underbrace{dd}_{0} C + \frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\, \underbrace{dI}_{\tilde{j}}.$$

Таким образом, первая пара уравнений Максвелла возникает как следствие параметризации (4.7.10), т.е. как кинематическое тождество:

$$d\tilde{F} = \frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\, \tilde{j} \quad \Leftrightarrow \quad \partial_i \tilde{F}_{jk} + \partial_j \tilde{F}_{ki} + \partial_k \tilde{F}_{ij} = \frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\, \tilde{j}_{ijk}.$$

4.7.4.2 Дуальное действие

Напомним, что

$$F_{ij} = (dA)_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{F}_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{klij} F^{kl} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & E_z & -E_y \\ -B_y & -E_z & 0 & E_x \\ -B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда легко видеть, что

$$\tilde{F}^{ij}\tilde{F}_{ij} = 2(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) = -F^{ij}F_{ij}.$$

Действие для свободного электромагнитного поля (4.7.9) может быть переписано через $\tilde{F}$:

$$S = -\int\limits_U \frac{F^{ij}F_{ij}}{16\pi k_{\text{к}} c}\, d^4\underline{x} = \int\limits_U \frac{\tilde{F}^{ij}\tilde{F}_{ij}}{16\pi k_{\text{к}} c}\, d^4\underline{x}.$$

Это позволяет предположить следующее *дуальное действие для электромагнитного поля*:

$$S[C_i(\underline{x})] = \int\limits_U \frac{\tilde{F}^{ij}\tilde{F}_{ij}}{16\pi k_{\text{к}} c}\, d^4\underline{x}, \qquad \tilde{F}_{ij} = \partial_i C_j - \partial_j C_i + \frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\, I_{ij}. \tag{4.7.11}$$

Мы не используем обычный ковекторный потенциал A_i и, соответственно, не можем написать стандартный член для взаимодействия поля с источником $\int j^i A_i\, d^4x$, но нам это и не нужно: теперь информация о токе содержится в параметризации (4.7.10) тензора $\tilde{F}$ через потенциалы.

Проварьируем это действие по потенциалу C_i:

$$\delta S = \int\limits_U \frac{\tilde{F}^{ij}\delta\tilde{F}_{ij}}{8\pi k_{\text{к}} c}\, d^4\underline{x},$$

$$\delta\tilde{F}_{ij} = \partial_i \delta C_j - \partial_j \delta C_i,$$

$$\tilde{F}^{ij}\delta\tilde{F}_{ij} = \tilde{F}^{ij}(\partial_i\delta C_j - \partial_j\delta C_i) = -2\tilde{F}^{ij}\partial_j\delta C_i;$$

$$\delta S = -\int\limits_U \frac{\tilde{F}^{ij}\partial_j\delta C_i}{4\pi k_{\text{к}} c}\, d^4\underline{x} = \int\limits_U \left(-\frac{\partial_j(\tilde{F}^{ij}\delta C_i)}{4\pi k_{\text{к}} c} + \frac{\partial_j\tilde{F}^{ij}}{4\pi k_{\text{к}} c}\,\delta C_i\right) d^4\underline{x} = \underbrace{-\int\limits_{\partial U} \frac{\tilde{F}^{ij}\delta C_i}{4\pi k_{\text{к}} c}\, d^3 f_j}_{0} + \int\limits_U \frac{\partial_j\tilde{F}^{ij}}{4\pi k_{\text{к}} c}\,\delta C_i\, d^4\underline{x}.$$

Интеграл по границе ∂U обнуляется, т.к. мы, как обычно, положили вариацию потенциалов равной нулю на границе: $\delta C|_{\partial U} = 0$.

В результате вариационная производная даёт нам первую пару уравнений Максвелла, которая теперь выступает не как кинематическое тождество, а как уравнения динамики:

$$\frac{\delta S}{\delta C_i(\underline{x})} = \frac{\partial_j\tilde{F}^{ij}}{4\pi k_{\text{к}} c} = 0.$$

В оба действия для электромагнитного поля с источником (4.7.9) и (4.7.11) метрический тензор g_{ij} входит одинаковым образом[1], и тензор энергии-импульса, который, как упоминалось, может быть получен вариацией действия по метрике, в обоих случаях одинаков.

4.7.4.3 Дуальные калибровочные преобразования

Калибровочные преобразования для дуального действия (4.7.11) (*дуальные калибровочные преобразования*) оказываются даже более богатыми, чем для исходного.

Понятно, что мы можем добавить к потенциалу C произвольный градиент:

$$C \to C + df \quad \Leftrightarrow \quad C_i \to C_i + \partial_i f$$

и (поскольку $ddf = 0$) дуальный тензор электромагнитного поля не изменится:

$$\tilde{F} = dC + \frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\, I \to \tilde{F}.$$

Однако мы можем обобщить дуальные калибровочные преобразования за счёт вовлечения в них тензора I_{ij}:

$$\begin{aligned}
I \to I - \frac{c}{4\pi k_{\text{к}}}\, dK \quad &\Leftrightarrow \quad I_{ij} \to I_{ij} - \frac{c}{4\pi k_{\text{к}}}(\partial_i K_j - \partial_j K_i),\\
C \to C + K \quad &\Leftrightarrow \quad C_i \to C_i + K_i,\\
\tilde{j} = dI \to \tilde{j} \quad &\Leftrightarrow \quad \tilde{j}_{ijk} = \partial_i I_{jk} + \partial_j I_{ki} + \partial_k I_{ij} \to \tilde{j}_{ijk},\\
\tilde{F} = dC + \frac{4\pi k_{\text{к}}}{c} I \to \tilde{F} \quad &\Leftrightarrow \quad \tilde{F}_{ij} = \partial_i C_j - \partial_j C_i + \frac{4\pi k_{\text{к}}}{c}\, I_{ij} \to \tilde{F}_{ij}.
\end{aligned}$$

[1] Напоминаем, что в стандартное действие взаимодействия $\int j^i A_i\, d^4\underline{x}$ метрика не входит.

Здесь $K_i(\underline{x})$ — произвольное гладкое ковекторное поле.

Прежнее калибровочное преобразование $C \to C + df$, $I \to I$ получается, если $K = df$ ($K_i = \partial_i f$).

Легко видеть, что для обобщённого дуального калибровочного преобразования мы можем взять $K_i = -C_i$ и обнулить потенциал C_i во всём пространстве-времени.

Глава 4.8

Запаздывающая функция Грина для волнового уравнения (с. 348)

Запаздывающую и опережающую функции Грина для волнового уравнения мы взяли без вывода, поэтому полезно сделать проверку и убедиться в их правильности хотя бы на физическом уровне строгости.

Запишем сначала лапласиан, а потом волновой оператор в сферических координатах (r, θ, ϕ). Элемент длины и метрический тензор в евклидовом пространстве имеют вид

$$d\ell^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\phi^2, \qquad g_{\alpha\beta} = \operatorname{diag}(1, r^2, r^2\sin^2\theta), \qquad g^{\alpha\beta} = \operatorname{diag}(1, r^{-2}, r^{-2}\sin^{-2}\theta),$$
$$\sqrt{g} = \sqrt{\det(g_{\alpha\beta})} = r^2\sin\theta,$$

$$\triangle = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\alpha\sqrt{g}g^{\alpha\beta}\partial_\beta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right].$$

Мы рассматриваем сферически-симметричные функции, поэтому угловая часть лапласиана нам не понадобится. Поскольку амплитуда сферической волны должна убывать как $\frac{1}{r}$, будем искать функцию Грина в виде $k_к\frac{f(r,t)}{r}$. Производную по времени обозначим точкой, производную по r — штрихом. Имеем

$$\Box\frac{f(r,t)}{r} = \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{f(r,t)}{r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(f'r - f) - \frac{\ddot f}{c^2 r} = \frac{f'' - \ddot f/c^2}{r}.$$

При $r > 0$ получаем одномерное волновое уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)f = 0.$$

Одномерный волновой оператор удобно расписать в координатах $\xi = r + ct$, $\eta = r - ct$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)}_{2\frac{\partial}{\partial\eta}}\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)}_{2\frac{\partial}{\partial\xi}} = 4\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}.$$

Таким образом, при $r > 0$ нам подходит любая функция вида

$$f = f_A(\xi) + f_R(\eta).$$

Рассматриваемые нами функции Грина имеют как раз такой вид. Осталось убедиться, что уравнение на функцию Грина выполняется также в нуле.

В силу сферической симметрии с учётом того, что $\Box\frac{f}{r} = 0$ при $r > 0$, мы можем сразу написать

$$\Box\frac{f}{r} = -4\pi\delta^3(\mathbf{r})\cdot k(t).$$

Осталось проверить, что $k(t) = \delta(ct)$.

Подставим $\frac{f}{r}$ в уравнение для функции Грина и проинтегрируем по cdt:

$$\int\left(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{f}{r}\,cdt = -4\pi\int\delta^3(\mathbf{r})\,\delta(ct)\,cdt = -4\pi\delta^3(\mathbf{r}),$$

$$\triangle \frac{\int f\,cdt}{r} - \frac{\dot{f}|_{t=-\infty}^{t=+\infty}}{cr} = -4\pi\delta^3(\mathbf{r}).$$

Для функции f с ограниченным носителем второй член обнуляется, и с учётом того, что $\triangle\frac{1}{r} = -4\pi\delta^3(\mathbf{r})$, получаем, что

$$\int f\,cdt = 1.$$

При этом носитель функции $k(t)$ должен совпадать с носителем функции f при $r = 0$, т.е. с точкой $t = 0$. Мы получили, что носитель функции f при $r = 0$ состоит из одной точки, причём интеграл от f по cdt равен 1. Значит, в этой точке должна сидеть δ-функция.

Это фиксирует функцию f почти однозначно:

$$f = p \cdot \delta(r - ct) + (1 - p) \cdot \delta(r + ct) + \cdots$$

Члены, обозначенные точками, могут содержать любые комбинации производных от δ-функций $\delta^{(n)}(r \pm ct)$.

Производные от δ-функций второго порядка и выше не могут появиться, так как волновое уравнение — уравнение второго порядка. Производные первого порядка не могут появиться, так как при замене $t \to -t$ они поменяют знак.

Мы получили функцию Грина в виде взвешенной комбинации запаздывающей и опережающей функций Грина:

$$G(\mathbf{r}, t) = p\,\underbrace{k_к \frac{\delta(r - ct)}{r}}_{G_R} + (1 - p)\,\underbrace{k_к \frac{\delta(r + ct)}{r}}_{G_A}.$$

Глава 4.9

Электро- и магнитостатика (с. 355)

4.9.1 Решения задач 53, 54

53. Квадрупольный момент эллипсоида.

Условия отдельных пунктов и решения

а) Найдите тензор квадрупольного момента равномерно заряженного эллипсоида относительно его центра.

Для непрерывного распределения заряда запишем квадрупольный момент в виде интеграла по заряду:

$$Q_{\alpha\beta} = \int (3r_\alpha r_\beta - r^2\,\delta_{\alpha\beta})\,dq,$$

где $dq = \rho\,dV$.

Мы можем напрямую воспользоваться данной формулой, однако было бы интереснее сократить выкладки за счёт использования симметрии.

Квадрупольный момент $Q_{\alpha\beta}$ является тензором по отношению к вращениям (преобразованиям, сохраняющим расстояния и оставляющим на месте начало координат).

Однако если отбросить под интегралом $r^2\,\delta_{\alpha\beta}$, то оставшееся выражение будет тензором относительно произвольных линейных однородных (сохраняющих начало координат) преобразований:

$$\tilde{Q}^{\alpha\beta} = \int 3r^\alpha r^\beta\,dq.$$

Теперь мы уже обязаны различать верхние и нижние индексы. Элемент заряда $dq = \rho\,dV$ является скаляром, тогда как ρ и dV по отдельности скалярами не являются (относительно преобразований, не сохраняющих объём).

Для шара в силу симметрии все векторы являются собственными, т.е. матрица $\tilde{Q}$ пропорциональна единичной матрице:

$$\tilde{Q}^{\alpha\beta}_{\text{ш}} = C\delta^{\alpha\beta} = \frac{1}{3}\operatorname{tr}\tilde{Q}\,\delta^{\alpha\beta} = \left(\int r^2\,dq\right)\delta^{\alpha\beta} = \underbrace{\frac{3q}{4\pi R^3}}_{\rho}\int_0^R r^2\,\underbrace{4\pi r^2\,dr}_{dV}\,\delta^{\alpha\beta} = \frac{3qR^2}{5}\,\delta^{\alpha\beta}.$$

Растянем теперь шар до эллипсоида с полуосями a, b, c с помощью следующего преобразования:

$$\begin{aligned} x &\to \tfrac{a}{R}\,x,\\ y &\to \tfrac{b}{R}\,y,\\ z &\to \tfrac{c}{R}\,z. \end{aligned}$$

При этом преобразовании компонента $\tilde{Q}^{\alpha\beta}$ умножается на произведения коэффициентов растяжения координат x^α и x^β:

$$\tilde{Q}^{\alpha\beta}_{\text{ш}} = \frac{q}{5}\begin{pmatrix} 3R^2 & 0 & 0\\ 0 & 3R^2 & 0\\ 0 & 0 & 3R^2 \end{pmatrix} \to \tilde{Q}^{\alpha\beta}_{\text{э}} = \frac{q}{5}\begin{pmatrix} 3a^2 & 0 & 0\\ 0 & 3b^2 & 0\\ 0 & 0 & 3c^2 \end{pmatrix}.$$

По тензору $\tilde{Q}_э^{\alpha\beta}$ можно легко восстановить квадрупольный момент эллипсоида:

$$Q_э^{\alpha\beta} = \tilde{Q}_э^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\operatorname{tr}\tilde{Q}_э\,\delta^{\alpha\beta} = \frac{q}{5}\begin{pmatrix} 2a^2-b^2-c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2b^2-a^2-c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2c^2-a^2-b^2 \end{pmatrix}.$$

б) Найдите электрическое поле на больших расстояниях.

Плотность заряда для равномерно заряженного эллипсоида является чётной функцией координат (если начало координат помещено в центр эллипсоида). В силу этого все мультипольные моменты с нечётным числом индексов равны нулю. Контекст задачи предполагает, что поле эллипсоида разлагается до квадрупольного члена включительно, т.е. мы учитываем монопольный и квадрупольный члены (дипольный пропускаем, так как он равен нулю):

$$\varphi(\mathbf{R}) = k_к\frac{q}{R} + k_к\frac{Q_{\alpha\beta}R_\alpha R_\beta}{2R^5},$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = -\boldsymbol{\nabla}\varphi(\mathbf{R}) = k_к\frac{q\mathbf{N}}{R^2} + k_к\frac{5\mathbf{N}(\mathbf{N},Q\mathbf{N}) - 2(Q\mathbf{N})}{R^4}.$$

Здесь $N = \frac{\mathbf{R}}{R}$, $(Q\mathbf{N})_\alpha = Q_{\alpha\beta}N_\beta$, $(\mathbf{N},Q\mathbf{N}) = (\mathbf{N}^TQ\mathbf{N}) = N_\mu Q_{\mu\nu}N_\nu$.

Квадрупольный член в электрическом поле мы записали в векторно-матричном виде. Его можно записать и в чисто векторных обозначениях, если использовать собственные векторы и собственные числа квадрупольного момента:

$$Q_{\alpha\beta} = \sum_{a=1}^{3}\lambda_a e_{a\alpha}e_{a\beta}, \qquad (\mathbf{e}_a,\mathbf{e}_b) = \delta_{ab}, \quad Q_{\alpha\beta}e_{a\beta} = \lambda_a e_{a\alpha};$$

$$(\mathbf{N}^TQ\mathbf{N}) = \sum_{a=1}^{3}\lambda_a(\mathbf{e}_a,\mathbf{N})^2, \qquad (Q\mathbf{N}) = \sum_{a=1}^{3}\lambda_a(\mathbf{e}_a,\mathbf{N})\mathbf{e}_a.$$

В рассматриваемом случае собственные векторы совпадают с базисными векторами по осям x, y, z соответственно, а собственные числа — диагональные элементы матрицы квадрупольного момента. Однако если два тензора равны в одной системе координат, то они равны и в любой другой.

в) Найдите энергию взаимодействия диполя с эллипсоидом.

$$\mathcal{E}_d = -(\mathbf{d},\mathbf{E}) = k_к\frac{q(\mathbf{N},\mathbf{d})}{R^2} + k_к\frac{5(\mathbf{N},\mathbf{d})(\mathbf{N},Q\mathbf{N}) - 2(\mathbf{d},Q\mathbf{N})}{R^4}.$$

54. Разложение потенциала по мультипольным членам. Потенциал $\varphi(R,\theta)$ аксиально-симметричной системы зарядов на оси z ($\theta = 0$) имеет вид

$$\varphi(R,0) = V_0\left(1 - \frac{R^2-a^2}{R\sqrt{R^2+a^2}}\right), \quad r > a\,.$$

Найдите два ведущих члена разложения $\varphi(R,\theta)$ в области $r \gg a$.

Решение

Запишем первые члены мультипольного разложения для электростатического потенциала:

$$\varphi(\mathbf{R}) = k_к\frac{q}{R} + k_к\frac{(\mathbf{N},\mathbf{d})}{R^2} + k_к\frac{N_\alpha N_\beta Q_{\alpha\beta}}{2R^3} + k_к\frac{N_\alpha N_\beta N_\gamma O_{\alpha\beta\gamma}}{6R^4} + \cdots, \tag{4.9.1}$$

где $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{R}}{R}$.

Если точка лежит на положительной полуоси оси z, то $\mathbf{R} = (0;0;R)$, $\mathbf{N} = (0;0;1)$. Потенциал имеет вид

$$\varphi(R,0) = k_к\frac{q}{R} + k_к\frac{d_z}{R^2} + k_к\frac{Q_{zz}}{2R^3} + k_к\frac{O_{zzz}}{6R^4} + \cdots$$

Разложим по степеням $\frac{1}{R}$ потенциал из условия задачи:

$$\begin{aligned}
\varphi(R,0) &= V_0\left(1-\frac{R^2-a^2}{R\sqrt{R^2+a^2}}\right) = \\
&= V_0\left(1-\left[1-\frac{a^2}{R^2}\right]\left[1+\frac{a^2}{R^2}\right]^{-\frac{1}{2}}\right) = \\
&= V_0\left(1-\left[1-\frac{a^2}{R^2}\right]\left[1-\frac{1}{2}\frac{a^2}{R^2}+\frac{3}{8}\frac{a^4}{R^4}+\cdots\right]\right) = \\
&= V_0\left(\frac{3}{2}\frac{a^2}{R^2}-\frac{7}{8}\frac{a^4}{R^4}+\cdots\right).
\end{aligned}$$

Теперь мы знаем следующие компоненты мультипольных моментов:

$$q=0,\quad d_z=\frac{3}{2k_{\text{к}}}V_0a^2,\quad Q_{zz}=0,\quad O_{zzz}=-\frac{21}{4k_{\text{к}}}V_0a^4,\quad \ldots$$

По условию задачи распределение зарядов аксиально-симметрично по отношению к оси z, т.е. переходит в себя при любом повороте вокруг оси z. Это позволяет восстановить и остальные компоненты указанных мультипольных моментов.

Дипольный момент — вектор. Вектор, переходящий в себя при любом повороте вокруг оси z, параллелен оси z, так что $\mathbf{d}=(0;0;d_z)$.

Для квадрупольного момента ось симметрии обязательно является собственной осью, также собственной осью оказывается любая ось, перпендикулярная оси симметрии. Поскольку все направления в плоскости $x-y$ равноправны, а след квадрупольного момента равен нулю, получаем $Q_{\alpha\beta}=Q_{zz}\ \mathrm{diag}(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)$. Но $Q_{zz}=0$, так что $Q_{\alpha\beta}=0$.

Определим компоненты *октупольного момента* исходя из аксиальной симметрии, симметрии по отношению к перестановкам индексов и равенства нулю свёртки по любой паре индексов.

При повороте на угол π вокруг оси z получаем

$$\begin{aligned}
x &\to -x,\\
y &\to -y,\\
z &\to z.
\end{aligned}$$

Компонента октупольного момента $O_{\alpha\beta\gamma}$ преобразуется по тому же закону, что и произведение $x^\alpha x^\beta x^\gamma$, значит, следующие компоненты октупольного момента (а также компоненты, получающиеся из них перестановкой индексов) при таком повороте меняют знак, следовательно (поскольку распределение зарядов переходит в себя), они равняются нулю:

$$O_{zzx}=O_{zzy}=O_{xxx}=O_{yyy}=O_{xyy}=O_{yxx}=0.$$

При повороте на угол $\frac{\pi}{2}$ вокруг оси z получаем

$$\begin{aligned}
x &\to y,\\
y &\to -x,\\
z &\to z.
\end{aligned}$$

При таком повороте меняет знак, а значит, равняется нулю компонента

$$O_{xyz}=0,$$

а также компоненты, получающиеся из неё перестановкой индексов. Этот же поворот показывает равенство компонент

$$O_{zxx}=O_{zyy}.$$

Свёртка октупольного момента по любой паре индексов даёт нуль:

$$O_{z\alpha\alpha}=O_{zxx}+O_{zyy}+O_{zzz}=0.$$

Таким образом, мы находим все оставшиеся ненулевые компоненты октупольного момента:

$$O_{zxx}=O_{zyy}=O_{xzx}=O_{yzy}=O_{xxz}=O_{yyz}=-\frac{O_{zzz}}{2}.$$

Теперь согласно формуле (4.9.1), взяв произвольный единичный вектор $\mathbf{N} = (\sin\theta\,\cos\phi; \sin\theta\,\sin\phi; \cos\theta)$, получаем

$$\begin{aligned}\varphi(R,\theta) &= k_{\text{к}} q \frac{1}{R} + k_{\text{к}} d_z \frac{\cos\theta}{R^2} + k_{\text{к}} Q_{zz} \frac{\cos^2\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta}{2R^3} + k_{\text{к}} O_{zzz} \frac{\cos^3\theta - \frac{3}{2}\cos\theta\,\sin^2\theta}{6R^4} + \dots = \\ &= \frac{3}{2} V_0 a^2 \frac{\cos\theta}{R^2} - \frac{21}{4} V_0 a^4 \frac{\frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)}{6R^4}.\end{aligned}$$

Угловые зависимости в числителях — это аксиально-симметричные сферические функции — *полиномы Лежандра* от $\cos\theta$ (см. § 4.9.6 «Сферические функции и полиномы Лежандра», с. 473).

4.9.2 Энергия магнитостатического поля

Энергия магнитостатического поля имеет вид

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_B &= \int\limits_U W_B\, d^3\mathbf{r} = \int\limits_U \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi k_{\text{к}}}\, d^3\mathbf{r} = \int\limits_U \frac{B_\alpha\, \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \nabla_\beta A_\gamma}{8\pi k_{\text{к}}}\, d^3\mathbf{r} = \int\limits_U \left(\nabla_\beta \frac{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} B_\alpha A_\gamma}{8\pi k_{\text{к}}} - \frac{A_\gamma\, \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \nabla_\beta B_\alpha}{8\pi k_{\text{к}}} \right) d^3\mathbf{r} = \\ &= \int\limits_{\partial U} \frac{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} B_\alpha A_\gamma}{8\pi k_{\text{к}}}\, ds_\beta + \int\limits_U \frac{(\mathbf{A}, \operatorname{rot}\mathbf{B})}{8\pi k_{\text{к}}}\, d^3\mathbf{r} = \frac{1}{2c} \int\limits_U (\mathbf{A}, \mathbf{j})\, d^3\mathbf{r}.\end{aligned}$$

Как и в электростатике, мы предположили, что на границе области U магнитное поле обнуляется (например, $U = \mathbb{R}^3$), и получили очень похожую на электростатическую энергию формулу с заменой $\varphi \to \mathbf{A}$ и $\rho \to \frac{1}{c}\mathbf{j}$:

$$\mathcal{E}_B = \frac{1}{2c} \int\limits_U (\mathbf{A}, \mathbf{j})\, d^3\mathbf{r}.$$

Аналогично множитель $\frac{1}{2}$ связан с устранением двойного счёта и отсутствует в формуле для взаимодействия системы токов с внешним векторным потенциалом:

$$\mathcal{E}_{B1+2} = \frac{1}{c} \int\limits_U (\mathbf{A}_1, \mathbf{j}_2)\, d^3\mathbf{r} = \frac{1}{c} \int\limits_U (\mathbf{A}_2, \mathbf{j}_1)\, d^3\mathbf{r}. \tag{4.9.2}$$

Как и для точечного заряда, для бесконечно тонкого проводника с током *энергия самодействия* оказывается бесконечной.

Если имеется несколько систем токов, для каждой из которых надо исключить энергию самодействия, то получаем

$$\mathcal{E}_{\text{взаим.}} = \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \frac{1}{c} \int\limits_U (\mathbf{A}_a, \mathbf{j}_b)\, d^3\mathbf{r} = \sum_{a<b} \frac{1}{c} \int\limits_U (\mathbf{A}_a, \mathbf{j}_b)\, d^3\mathbf{r}. \tag{4.9.3}$$

(!) В отличие от похожей электростатической формулы (3.9.1) (стр. 356), формула (4.9.3) для магнитостатического поля не может рассматриваться как потенциальная энергия системы электрических токов. В частности, дифференцируя эту энергию по координатам и углам, мы не получим силы и моменты сил, действующие на отдельные токи. Чтобы проиллюстрировать это, сравним притяжение двух разноимённых зарядов и притяжение двух витков с током (пусть два одинаковых витка одинаково ориентированы параллельно плоскости $x - y$, а их центры движутся по оси z). По мере того как заряды сближаются, поле на больших расстояниях от них становится полем диполя и обнуляется, когда положение зарядов совмещается, так что энергия поля по мере сближения зарядов уменьшается, как и должно быть, если это потенциальная энергия, описывающая притяжение двух объектов. В случае притяжения двух витков с током, когда витки совмещаются, их поля складываются (удваиваются по сравнению с одним витком), а поскольку энергия квадратична по полю, она учетверяется. Мы видим, что энергия (4.9.3) по мере притяжения друг к другу двух витков с током не уменьшается (как должна уменьшаться потенциальная энергия притягивающихся объектов), а увеличивается. Тем не менее для магнитных мультиполей мы можем ввести потенциальную энергию взаимодействия по аналогии с энергией взаимодействия электрических мульиполей.

Величина (4.9.2) — это не только энергия взаимодействия системы токов $\mathbf{j}_1$ с внешним векторным потенциалом $\mathbf{A}_2$, это ещё и член взаимодействия в соответствующей функции Лагранжа:

$$L_{12} = \frac{1}{c} \int\limits_U (\mathbf{A}_2, \mathbf{j}_1)\, d^3\mathbf{r} = \frac{1}{c} \int\limits_U (\mathbf{A}_2, \mathbf{v}_1)\, \underbrace{\rho_1\, d^3\mathbf{r}}_{dq_1} = \frac{1}{c} \sum_a q_a (\mathbf{A}_2, \mathbf{v}_a). \tag{4.9.4}$$

В магнитостатике мы можем представить движение зарядов как комбинацию быстрого движения (связанного с текущими токами) и медленного движения (связанного с изменением токов во времени). Если усреднить выражение (4.9.4) по быстрому движению, считая медленное движение замороженным, то L_{12} окажется функцией только от обобщённых координат быстрого движения. Добавка в функции Лагранжа, зависящая только от координат, — это добавка к потенциальной энергии со знаком минус. Так что мы можем приписать системе электрических токов потенциальную энергию взаимодействия, отличающуюся от добавки к энергии магнитного поля знаком:

$$U_{\text{магн.стат.}} = -\mathcal{E}_{\text{взаим.}}. \tag{4.9.5}$$

Дифференцируя эту энергию по координатам и углам, мы можем найти силы и моменты сил, действующих на заряды и токи.

Какая из двух энергий $\pm\mathcal{E}_{\text{взаим.}}$ является настоящей (полной) энергией системы токов? Полной энергией является $U_{\text{магн.стат.}}$. Энергия магнитного поля не учитывает энергию, приходящуюся на быстрые степени свободы заряженных частиц. Например, в задаче 41 при движении заряженной частицы в слабонеоднородном магнитном поле её магнитный момент относительно ведущего центра имеет вид (см. формулу (4.2.2))

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{m\,v_\perp^2}{2B}\,\mathbf{h}, \qquad \mathbf{h} = \frac{\mathbf{B}}{B}.$$

Потенциальная энергия этого дипольного момента совпадает с кинетической энергией движения относительно ведущего центра (быстрого движения):

$$U_\mu = -(\mathbf{B},\boldsymbol{\mu}) = -\left(B\mathbf{h}, -\frac{m\,v_\perp^2}{2B}\,\mathbf{h}\right) = \frac{mv_\perp^2}{2} = \mathcal{E}_{\text{кин.быстр.}}.$$

Другой фундаментальный пример применения формулы (4.9.5) — энергия взаимодействия спинового магнитного момента с магнитным полем в *уравнении Паули* (которое выводится из более фундаментального *уравнения Дирака*). В том, что энергия взаимодействия спина с магнитным полем в уравнении Паули правильно проинтерпретирована как $-(\mathbf{B},\boldsymbol{\mu})$, мы можем убедиться на примере *парамагнетизма Паули* — эффекта выстраивания магнитных моментов спинов вдоль внешнего магнитного поля.

4.9.3 Поля диполей в нуле

Для диполей, как мы уже установили (см. с. 361), справедливы соотношения

$$E_\alpha = d_\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta \frac{k_{\text{к}}}{R}, \qquad B_\alpha = -\mu_\alpha \nabla_\beta \nabla_\beta \frac{k_{\text{к}}}{R} + \mu_\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta \frac{k_{\text{к}}}{R}.$$

Вычисляя поле магнитного диполя, мы отбросили член $-\boldsymbol{\mu}\triangle\frac{k_{\text{к}}}{R} = 4\pi k_{\text{к}}\boldsymbol{\mu}\delta^3(\mathbf{R})$. Этот член имеет носитель в одной точке, и мы пренебрегли им, поскольку мультипольное разложение было нами получено для точек, удалённых от источника: $R \gg r$.

Тем не менее мы можем поставить вопрос о поле точечных диполей, и тогда подобные сингулярные члены надо будет учесть.

(*) Такого рода члены обычно не играют роли в классической механике, но оказываются важными в квантовом случае.

Чтобы вычислить поля диполей с учётом сингулярных членов, нам придётся пересчитать выражение $\nabla_\alpha\nabla_\beta\frac{1}{R}$, которое мы вычисляли ранее для $R > 0$:

$$\nabla_\alpha\nabla_\alpha\frac{1}{R} = \triangle\frac{1}{R} = -4\pi\delta^3(\mathbf{R}),$$

так что $\nabla_\alpha\nabla_\beta\frac{1}{R}$ должно содержать поправку, пропорциональную δ-функции и несущую два индекса. В силу того что искомое выражение сферически-симметрично, поправка должна быть пропорциональна $\delta_{\alpha\beta}$. Этого достаточно, чтобы записать уточнённую формулу:

$$\nabla_\alpha\nabla_\beta\frac{1}{R} = \frac{3R_\alpha R_\beta - R^2\delta_{\alpha\beta}}{R^5} - \frac{4\pi}{3}\delta_{\alpha\beta}\delta^3(\mathbf{R}).$$

Теперь электрическое поле электрического диполя имеет вид

$$\mathbf{E} = k_{\text{к}}\frac{3\mathbf{R}(\mathbf{d},\mathbf{R}) - R^2\mathbf{d}}{R^5} - \frac{4\pi k_{\text{к}}}{3}\mathbf{d}\delta^3(\mathbf{R}). \tag{4.9.6}$$

Магнитное поле магнитного диполя имеет вид

$$\mathbf{B} = k_{\text{к}} \frac{3\mathbf{R}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{R}) - R^2 \boldsymbol{\mu}}{R^5} + \frac{8\pi k_{\text{к}}}{3} \boldsymbol{\mu} \delta^3(\mathbf{R}). \tag{4.9.7}$$

Для наглядного объяснения различного поведения полей диполей в нуле рассмотрим, какие заряды и токи индуцируются на поверхности сверхпроводящей сферы при внесении её в однородное электрическое поле и в однородное магнитное поле.

4.9.3.1 Сверхпроводящая сфера в однородном электрическом поле

Электрическое поле в толще сверхпроводника равно нулю, так что если внести в однородное электрическое поле $\mathbf{E}_0$ сверхпроводящую сферу радиусом R, то на её поверхности появятся наведённые заряды, которые создадут внутри однородное электрическое поле $-\mathbf{E}_0$, полностью компенсирующее внешнее поле.

Величину поля $-\mathbf{E}_0$ удобнее всего рассчитать для центра сферы, проинтегрировав вклад каждого элемента заряда $\delta\mathbf{E} = k_{\text{к}} \frac{-\mathbf{r}\, dq}{R^3}$:

$$-\mathbf{E}_0 = k_{\text{к}} \int \frac{-\mathbf{r}\, dq}{R^3} = -k_{\text{к}} \frac{\int \mathbf{r}\, dq}{R^3} = -k_{\text{к}} \frac{\mathbf{d}}{R^3} = -\frac{4\pi k_{\text{к}}}{3V_R}\, \mathbf{d}.$$

Легко показать, что для индуцированного на поверхности сферы распределения зарядов все мультипольные моменты, кроме диполя, равны нулю, а поле вне сферы совпадает с полем точечного диполя. При этом однородное поле внутри сферы, если устремить радиус сферы к нулю, даёт дельта-функцию, как в формуле (4.9.6).

4.9.3.2 Сверхпроводящая сфера в однородном магнитном поле

Магнитное поле в толще сверхпроводника равно нулю, так что если внести в однородное магнитное поле $\mathbf{B}_0$ сверхпроводящую сферу, то на её поверхности появятся наведённые токи, которые создадут внутри однородное магнитное поле $-\mathbf{B}_0$, полностью компенсирующее внешнее поле.

Величину поля $-\mathbf{B}_0$ удобнее всего рассчитать для центра сферы, проинтегрировав вклад каждого элемента тока по *закону Био-Савара-Лапласа*

$$\delta\mathbf{B} = k_{\text{к}} \frac{[\mathbf{v} \times (-\mathbf{r})]\, dq}{cR^3}$$

(см. формулу (4.12.2)):

$$-\mathbf{B}_0 = k_{\text{к}} \int \frac{[\mathbf{v} \times (-\mathbf{r})]\, dq}{cR^3} = 2k_{\text{к}} \frac{\int \frac{1}{2c}[\mathbf{r} \times \mathbf{v}]\, dq}{R^3} = k_{\text{к}} \frac{2\boldsymbol{\mu}}{R^3} = \frac{8\pi k_{\text{к}}}{3V_R}\, \boldsymbol{\mu}.$$

Легко показать, что для индуцированного на поверхности сферы распределения токов все мультипольные моменты, кроме магнитного диполя, равны нулю, а поле вне сферы совпадает с полем точечного магнитного диполя. При этом однородное поле внутри сферы, если устремить радиус сферы к нулю, даёт дельта-функцию, как в формуле (4.9.7).

4.9.4 Точечные электрические мультиполи

4.9.4.1 Плотность заряда в точечном мультиполе

Плотность единичного заряда, расположенного в точке $\mathbf{r}$, задаётся дельта-функцией $\delta^3(\mathbf{R})$, для которой можно записать формальный ряд Тейлора:

$$\begin{aligned}\delta^3(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \;=\; & \delta^3(\mathbf{R}) - r_\alpha \nabla_\alpha \delta^3(\mathbf{R}) + \frac{1}{2} r_\alpha r_\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta \delta^3(\mathbf{R}) - \frac{1}{6} r_\alpha r_\beta r_\gamma \nabla_\alpha \nabla_\beta \nabla_\gamma \delta^3(\mathbf{R}) + \cdots + \\ & + \frac{(-1)^l}{l!} r_{\alpha_1} \ldots r_{\alpha_l} \nabla_{\alpha_1} \ldots \nabla_{\alpha_l} \delta^3(\mathbf{R}) + \cdots\end{aligned}$$

Это выражение выглядит парадоксально, так как носитель левой части равенства — точка $\mathbf{r}$, а носитель всех слагаемых в правой части равенства — точка 0.

Теперь мы можем написать формальное разложение по дельта-функции и её производным для плотности заряда $\rho(\mathbf{R})$:

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{R}) &= \int \delta^3(\mathbf{R}-\mathbf{r})\,\rho(\mathbf{r})\,d^3\mathbf{r} = \left(\int \rho(\mathbf{r})\,d^3\mathbf{r}\right)\delta^3(\mathbf{R}) - \left(\int r_\alpha\,\rho(\mathbf{r})\,d^3\mathbf{r}\right)\nabla_\alpha\delta^3(\mathbf{R}) + \\ &+\frac{1}{2}\left(\int r_\alpha r_\beta\,\rho(\mathbf{r})\,d^3\mathbf{r}\right)\nabla_\alpha\nabla_\beta\delta^3(\mathbf{R}) - \frac{1}{6}\left(\int r_\alpha r_\beta r_\gamma\,\rho(\mathbf{r})\,d^3\mathbf{r}\right)\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla_\gamma\delta^3(\mathbf{R}) + \\ &+\cdots+\frac{(-1)^l}{l!}\left(\int r_{\alpha_1}\ldots r_{\alpha_l}\,\rho(\mathbf{r})\,d^3\mathbf{r}\right)\nabla_{\alpha_1}\ldots\nabla_{\alpha_l}\delta^3(\mathbf{R})+\cdots\end{aligned}$$

Такое разложение имеет смысл, если плотность заряда существенно отлична от нуля только в малой окрестности начала координат.

Исследуем мультипольные моменты.

Как мы уже установили,

$$M_{\alpha_1\cdots\alpha_l} = \int((2l-1)!!\,r_{\alpha_1}\cdots r_{\alpha_l}+\cdots)\,\rho(\mathbf{r})\,d^3\mathbf{r}, \tag{4.9.8}$$

где заменённые многоточием члены обеспечивают равенство нулю свёртки по любой паре индексов. Можно ввести вспомогательный тензор

$$\tilde{M}_{\alpha_1\cdots\alpha_l} = \int(2l-1)!!\,r_{\alpha_1}\cdots r_{\alpha_l}\,\rho(\mathbf{r})\,d^3\mathbf{r}, \tag{4.9.9}$$

$$M_{\alpha_1\cdots\alpha_l} = \tilde{M}_{\alpha_1\cdots\alpha_l} + \underbrace{C_{l1}\delta_{\alpha_1\alpha_2}\tilde{M}_{\gamma\gamma\ldots\alpha_l}+\cdots}_{\text{один }\delta\text{-символ, одна свёртка (при } l\geqslant 2)} + \underbrace{C_{l2}\delta_{\alpha_1\alpha_2}\delta_{\alpha_3\alpha_4}\tilde{M}_{\gamma_1\gamma_1\gamma_2\gamma_2\ldots\alpha_l}+\cdots}_{\text{два }\delta\text{-символа, две свёртки (при } l\geqslant 4)}+\cdots$$

Таким образом, мы получили разложение на члены вида

$$\tilde{\rho}_l(\mathbf{R}) = (-1)^l\frac{\tilde{M}_{\beta_1\ldots\beta_l}}{l!\,(2l-1)!!}\,\nabla_{\beta_1}\ldots\nabla_{\beta_l}\delta^3(\mathbf{R}),$$

которые представляют собой *точечные мультиполи* с номером l.

Легко видеть, что распределение зарядов с носителем в нуле, имеющее только один отличный от нуля мультипольный момент с заданными компонентами $M_{\alpha_1\ldots\alpha_l}$, может быть выражено не через вспомогательный тензор $\tilde{M}$, а непосредственно через мультипольный момент:

$$\rho_l(\mathbf{R}) = (-1)^l\frac{M_{\alpha_1\ldots\alpha_l}}{l!\,(2l-1)!!}\,\nabla_{\alpha_1}\ldots\nabla_{\alpha_l}\delta^3(\mathbf{R}).$$

Плотности зарядов $\tilde{\rho}_l$ и ρ_l различаются, но создают одинаковые электростатические потенциалы.

Соответствующий электростатический потенциал имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi_l(\mathbf{R}) &= \int\frac{k_\text{к}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}\,(-1)^l\frac{M_{\alpha_1\ldots\alpha_l}}{l!\,(2l-1)!!}\,\nabla^{\mathbf{r}}_{\alpha_1}\ldots\nabla^{\mathbf{r}}_{\alpha_l}\delta^3(\mathbf{r})\,d^r\mathbf{r} = \\ &= \int\delta^3(\mathbf{r})\,\frac{M_{\alpha_1\ldots\alpha_l}}{l!\,(2l-1)!!}\,\nabla^{\mathbf{r}}_{\alpha_1}\ldots\nabla^{\mathbf{r}}_{\alpha_l}\frac{k_\text{к}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}\,d^r\mathbf{r} = \\ &= \int\delta^3(\mathbf{r})\,(-1)^l\frac{M_{\alpha_1\ldots\alpha_l}}{l!\,(2l-1)!!}\,\nabla^{\mathbf{R}}_{\alpha_1}\ldots\nabla^{\mathbf{R}}_{\alpha_l}\frac{k_\text{к}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}\,d^r\mathbf{r} = \\ &= (-1)^l\frac{M_{\alpha_1\ldots\alpha_l}}{l!\,(2l-1)!!}\,\nabla^{\mathbf{R}}_{\alpha_1}\ldots\nabla^{\mathbf{R}}_{\alpha_l}\frac{k_\text{к}}{R}.\end{aligned}$$

Здесь индексы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{R}$ у оператора ∇ указывают, по компонентам какого из радиус-векторов дифференцирует данный оператор. Получаем электрическое поле мультиполя

$$E_\alpha(\mathbf{R}) = -\nabla_\alpha\varphi_l(\mathbf{R}) = (-1)^{l+1}\frac{M_{\alpha_1\ldots\alpha_l}}{l!\,(2l-1)!!}\,\nabla^{\mathbf{R}}_{\alpha}\nabla^{\mathbf{R}}_{\alpha_1}\ldots\nabla^{\mathbf{R}}_{\alpha_l}\frac{k_\text{к}}{R}. \tag{4.9.10}$$

4.9.4.2 Ток в точечном мультиполе

Пусть мультипольный момент зависит от времени. Тогда соответствующая плотность заряда имеет вид

$$\rho(\mathbf{r},t) = (-1)^l\frac{\tilde{M}_{\alpha_1\ldots\alpha_l}(t)}{l!\,(2l-1)!!}\,\nabla_{\alpha_1}\ldots\nabla_{\alpha_l}\delta^3(\mathbf{r}).$$

Для зарядов и токов должно выполняться уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_\alpha j_\alpha = 0.$$

Легко подобрать плотность тока $\mathbf{j}$, которая удовлетворяет уравнению непрерывности с заданной плотностью заряда:

$$j_\alpha(\mathbf{r},t) = (-1)^{l+1} \frac{\dot{\tilde{M}}_{\alpha\alpha_2\ldots\alpha_l}(t)}{l!\,(2l-1)!!}\,\nabla_{\alpha_2}\ldots\nabla_{\alpha_l}\delta^3(\mathbf{r}). \tag{4.9.11}$$

Можно подобрать и другие токи, удовлетворяющие уравнению непрерывности, но мы выбрали ток, который локализован в одной точке (пропорционален производной от дельта-функции) и выражается через функцию $\tilde{M}_{\alpha_1\ldots\alpha_l}(t)$.

4.9.5 Точечные магнитные мультиполи

Плотность тока в *точечном магнитном мультиполе* мы подберём так, чтобы его магнитное поле вне начала координат имело такой же вид, как электрическое поле электрического мультиполя (4.9.10) с тем же номером l.

Пусть

$$B_\mu(\mathbf{R}) = (-1)^{l+1} \frac{M^{\text{м}}_{\alpha_1\ldots\alpha_l}}{l!\,(2l-1)!!}\nabla_\mu\nabla_{\alpha_1}\ldots\nabla_{\alpha_l}\frac{k_{\text{к}}}{R} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha}\nabla_\nu A_\alpha.$$

С учётом того, что $\triangle\frac{1}{|\mathbf{R}|} = 0$ при $\mathbf{R}\neq 0$, подбираем

$$A_\alpha(\mathbf{R}) = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,(-1)^{l+1}\frac{M^{\text{м}}_{\gamma\alpha_2\ldots\alpha_l}}{l!\,(2l-1)!!}\,\nabla_\beta\nabla_{\alpha_2}\ldots\nabla_{\alpha_l}\frac{k_{\text{к}}}{R} = \frac{1}{c}\int\frac{k_{\text{к}}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}\,j_\alpha(\mathbf{r})\,d^3\mathbf{r}.$$

Теперь подбираем плотность тока:

$$j_\alpha(\mathbf{r}) = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,(-1)^{l+1}\frac{cM^{\text{м}}_{\gamma\alpha_2\ldots\alpha_l}}{l!\,(2l-1)!!}\,\nabla_\beta\nabla_{\alpha_2}\ldots\nabla_{\alpha_l}\delta^3(\mathbf{r}). \tag{4.9.12}$$

Ток точечного магнитного 2^l-поля (4.9.12) содержит производную порядка l от $\delta^3(\mathbf{r})$, как и ток в зависящем от времени электрическом 2^{l+1}-поле (4.9.11). Однако сравнение этих выражений показывает, что в этих токах участвуют разные комбинации производных, в результате чего ток, текущий в переменных точечных электрических мультиполях, вклада в магнитные мультиполи не даёт.

Магнитный мультипольный момент номер l выражается через плотность тока следующим образом:

$$\tilde{M}^{\text{м}}_{\gamma\alpha_2\ldots\alpha_l} = \frac{(2l-1)!!}{2c}\int r_{(\alpha_2}\ldots r_{\alpha_l}\varepsilon_{\gamma)\alpha_1\mu}r_{\alpha_1}\,j_\mu(\mathbf{r},t)\,d^3\mathbf{r},$$

$$M^{\text{м}}_{\alpha_1\cdots\alpha_l} = \tilde{M}^{\text{м}}_{\alpha_1\cdots\alpha_l} + \underbrace{C_{l1}\delta_{\alpha_1\alpha_2}\tilde{M}^{\text{м}}_{\gamma\gamma\ldots\alpha_l}+\cdots}_{\text{один }\delta\text{-символ, одна свёртка (при } l\geqslant 2)} + \underbrace{C_{l2}\delta_{\alpha_1\alpha_2}\delta_{\alpha_3\alpha_4}\tilde{M}^{\text{м}}_{\gamma_1\gamma_1\gamma_2\gamma_2\ldots\alpha_l}+\cdots}_{\text{два }\delta\text{-символа, две свёртки (при } l\geqslant 4)}+\cdots$$

4.9.6 Сферические функции и полиномы Лежандра

Перепишем l-й член разложения $\frac{1}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}$ (3.9.4) в следующем виде:

$$\frac{1}{R^{l+1}}r_{\alpha_1}\cdots r_{\alpha_l}\underbrace{\frac{(2l-1)!!R_{\alpha_1}\cdots R_{\alpha_l}+\cdots}{l!R^l}}_{P_{l\ \alpha_1\cdots\alpha_l}(\mathbf{N})} = \frac{1}{R^{l+1}}r_{\alpha_1}\cdots r_{\alpha_l}P_{l\ \alpha_1\cdots\alpha_l}(\mathbf{N}),\qquad \mathbf{N}=\frac{\mathbf{R}}{R}.$$

Выражение $P_{l\ \alpha_1\cdots\alpha_n}(\mathbf{N})$ — *сферическая функция*. Это функция от единичного вектора $\mathbf{N}$, т.е. от направления. Её удобно представлять как функцию на поверхности сферы.

Среди 3^l функций $P_{l\ \alpha_1\cdots\alpha_n}(\mathbf{N})$ много линейно зависимых за счёт симметричности по всем индексам и равенства нулю свёрток по всем парам индексов. Число независимых функций при данном l равно

$$C^2_{l+2} - C^2_l = \frac{(l+2)(l+1)}{2} + \frac{l(l-1)}{2} = 2l+1. \tag{4.9.13}$$

Здесь C^2_{l+2} — число способов выбрать l индексов из набора $\{1,2,3\}$ без учёта порядка,[1] а C^2_l — число способов выбрать пару индексов для свёртки[2].

Если все индексы сферической функции взяты по оси z, то её можно записать как функцию от $N_z = \cos\theta$:

$$P_l(\cos\theta) = P_l(N_z) = P_{l\ z\cdots z}(\mathbf{N}), \qquad P_l(1) = 1.$$

Функции $P_l(\cos\theta)$ называются *многочленами* (*полиномами*) *Лежандра*.

Чтобы убедиться, что $P_l(1) = 1$, достаточно записать одномерный ряд

$$\frac{1}{Z - z} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{Z^{l+1}}$$

и сравнить его с рядом для $\frac{1}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}$.

Мы можем переписать ряд (3.9.4),(3.9.5) через полиномы Лежандра:

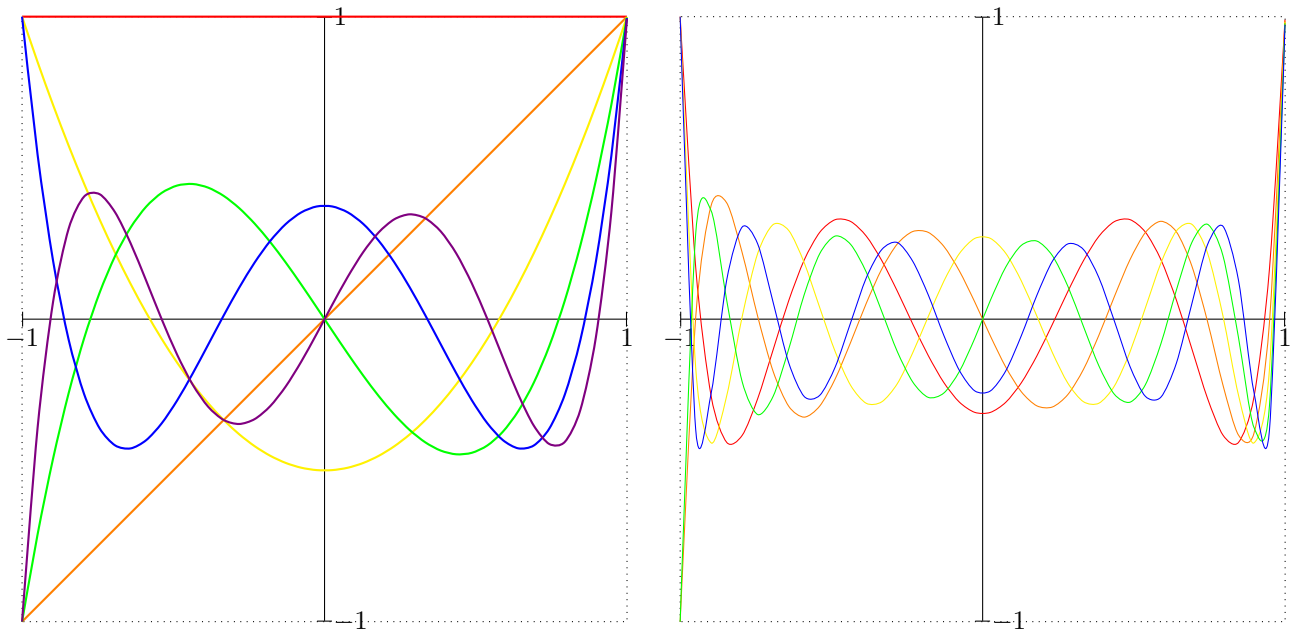
$$\frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{R^{l+1}} P_l(\cos\angle(\mathbf{R}, \mathbf{r})). \tag{4.9.14}$$

Выпишем явные *формулы* для нескольких первых *полиномов Лежандра*:

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1,\\
P_1(x) &= x,\\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1),\\
P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),\\
P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),\\
P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x),\\
P_6(x) &= \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5),\\
P_7(x) &= \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x),\\
P_8(x) &= \frac{1}{128}(6\,435x^8 - 12\,012x^6 + 6\,930x^4 - 1\,260x^2 + 35),\\
P_9(x) &= \frac{1}{128}(12\,155x^9 - 25\,740x^7 + 18\,018x^5 - 4\,620x^3 + 315x),\\
P_{10}(x) &= \frac{1}{256}(46\,189x^{10} - 109\,395x^8 + 90\,090x^6 - 30\,030x^4 + 3\,465x^2 - 63).
\end{aligned}$$

[1]Положите в ряд $l+2$ камешка, отметьте из них два. Число способов это сделать равно C^2_{l+2}. Будем считать, что число единиц среди индексов равно числу камешков до первого помеченного, число двоек равно числу камешков между двумя помеченными, число троек равно числу камешков после второго помеченного.

[2]Точнее, число способов зафиксировать индексы, по которым мы сворачивать не будем.



Графики полиномов Лежандра $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ (слева) и $P_6, P_7, P_9, P_9, P_{10}$ (справа) на отрезке $[0, 1]$. Число корней соответствует степени полинома

Глава 4.10

Поляризация и квантовая механика (с. 363)

От рассмотрения поляризации плоской монохроматической электромагнитной волны в рамках классической электродинамики один шаг до квантовой механики, и мы сделаем этот шаг в данной главе. Для этого достаточно рассмотреть случай, когда волна содержит один фотон, и переинтерпретировать результаты с языка энергий на язык вероятностей. Дальнейший переход к более общему случаю квантовой механики влечёт главным образом увеличение размерности векторов состояний, а также некоторые технические сложности, возникающие для бесконечномерных векторов состояний.

Чтобы облегчить дальнейшее изучение квантовой механики, мы уже для классической поляризации будем использовать стандартные квантовомеханические обозначения и термины (бра- и кет-векторы, операторы, проекторы и т.д.). Фрагменты, которые не нужны для рассмотрения поляризации, а были введены исключительно из соображений соответствия с квантовой механикой, помечены звёздочками.

4.10.1 Вектор поляризации

Рассмотрим плоскую монохроматическую волну, распространяющуюся вдоль оси z:

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}\left(\mathbf{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\right) = (\mathrm{Re}\mathbf{E}_0)\cos(\omega t - kz) + (\mathrm{Im}\mathbf{E}_0)\sin(\omega t - kz).$$

Амплитуда $\mathbf{E}_0$ перпендикулярна оси z, поэтому её можно рассматривать как двумерный комплексный *вектор (поляризационного) состояния*.

Для *комплексных векторов* удобно ввести специальное *скалярное произведение* $\langle\cdot|\cdot\rangle$ (*брекет*):

$$\langle\mathbf{B}|\mathbf{A}\rangle = \langle\mathbf{A}|\mathbf{B}\rangle^* = (\mathbf{B}^*, \mathbf{A}) = B_x^* A_x + B_y^* A_y.$$

Удобно считать, что такое произведение (брекет) является произведением строки (*бра-вектор*) $\langle\mathbf{B}|$ на столбец (*кет-вектор*)[1] $|\mathbf{A}\rangle$:

$$\langle\mathbf{B}| = \left(B_x^*, B_y^*\right), \qquad |\mathbf{A}\rangle = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}, \qquad \langle\mathbf{B}|\mathbf{A}\rangle = \langle\mathbf{B}||\mathbf{A}\rangle = \left(B_x^*, B_y^*\right)\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}.$$

Бра-векторы и кет-векторы могут превращаться друг в друга с помощью *эрмитова сопряжения* (обозначается значком †) — комбинации транспонирования и комплексного сопряжения:

$$(|\mathbf{A}\rangle)^\dagger = (|\mathbf{A}\rangle)^{T*} = \left(A_x^*, A_y^*\right) = \langle\mathbf{A}|, \qquad (\langle\mathbf{B}|)^\dagger = (\langle\mathbf{B}|)^{T*} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} = |\mathbf{B}\rangle.$$

Принято считать, что по умолчанию вектор состояния — это именно кет-вектор, таким образом,

$$\langle\mathbf{B}| = \mathbf{B}^\dagger, \quad |\mathbf{A}\rangle = \mathbf{A}, \quad \mathbf{B}^\dagger\mathbf{A} = \langle\mathbf{B}|\mathbf{A}\rangle.$$

Средняя плотность энергии волны пропорциональна скалярному квадрату (квадрату *нормы*) амплитуды:

$$\bar{W} \sim \|\mathbf{E}_0\|^2 = (\mathrm{Re}\mathbf{E}_0)^2 + (\mathrm{Im}\mathbf{E}_0)^2 = \langle\mathbf{E}_0|\mathbf{E}_0\rangle.$$

[1] Бра (bra) и кет (cket) вместе образуют брекет (bracket). Эту шутку, ставшую частью терминологии квантовой теории, придумал П.А.М. Дирак.

Поскольку при рассмотрении поляризации волны энергия нас обычно не интересует, вектор поляризационного состояния обычно нормируют на единицу:

$$|\mathbf{e}\rangle = \frac{|\mathbf{E}_0\rangle}{\sqrt{\langle\mathbf{E}_0|\mathbf{E}_0\rangle}} \quad \Rightarrow \quad \langle\mathbf{e}|\mathbf{e}\rangle = 1.$$

Вектор $\mathbf{e}$ называется *нормированным вектором поляризационного состояния* или *нормированным вектором поляризации*.

Если нас не интересует фаза колебаний (или если фазу колебаний невозможно измерить), то нормированный вектор поляризации оказывается определён с точностью до фазового множителя:

$$|\mathbf{e}\rangle \sim \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}|\mathbf{e}\rangle \qquad \forall\alpha \in \mathbb{R}.$$

В этом случае (с учётом того, что нам не интересна интенсивность волны) *ненормированный вектор поляризации* оказывается определён с точностью до произвольного ненулевого комплексного множителя:

$$|\mathbf{E}_0\rangle \sim C\,|\mathbf{E}_0\rangle \qquad \forall C \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

(*) Компоненты вектора поляризационного состояния $|\mathbf{A}\rangle$ по заданному базису задаются некоторой функцией от номера компоненты:

$$A_\alpha = A(\alpha) = \begin{cases} A_x, & \alpha = 1, \\ A_y, & \alpha = 2. \end{cases}$$

Эта функция называется *волновой функцией* поляризации. Естественно, волновая функция зависит от того, по какому базису раскладывается вектор состояния. Часто термины *волновая функция* и *вектор состояния* употребляются как синонимы, обычно такое словоупотребление — это не столько ошибка, сколько небрежность.

4.10.1.1 Унитарная эволюция

Если волна в процессе распространения в среде подвергается некоторым обратимым преобразованиям, то её энергия остаётся неизменной, следовательно, остаётся постоянным скалярный квадрат её амплитуды (вектора поляризационного состояния):

$$\langle\mathbf{E}_0|\mathbf{E}_0\rangle = \langle\mathbf{E}_1|\mathbf{E}_1\rangle.$$

В силу линейности электродинамики зависимость конечной амплитуды от начальной должна быть линейной:

$$|\mathbf{E}_1\rangle = \hat{U}|\mathbf{E}_0\rangle,$$

где $\hat{U}$ — некоторая матрица, которую мы будем называть *оператором эволюции* поляризационного состояния.

В силу линейности мы можем выразить скалярное произведение через скалярный квадрат:

$$\langle\mathbf{B}|\mathbf{A}\rangle = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3}\mathrm{i}^n\langle\mathbf{A} + \mathrm{i}^n\mathbf{B}|\mathbf{A} + \mathrm{i}^n\mathbf{B}\rangle.$$

Поэтому если матрица $\hat{U}$ сохраняет скалярный квадрат, то она сохраняет также скалярное произведение:

$$\langle\hat{U}\mathbf{B}|\hat{U}\mathbf{A}\rangle = (\hat{U}\mathbf{B})^\dagger\hat{U}\mathbf{A} = \mathbf{B}^\dagger\hat{U}^\dagger\hat{U}\mathbf{A} = \langle\mathbf{B}|\underbrace{\hat{U}^\dagger\hat{U}}_{\hat{1}}|\mathbf{A}\rangle = \langle\mathbf{B}|\mathbf{A}\rangle.$$

В силу произвольности амплитуд $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ получаем

$$\hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{1}.$$

Такие матрицы называются *унитарными*[2].

Подобно тому как ортогональное преобразование (поворот) сохраняет вещественное скалярное произведение, унитарное преобразование сохраняет комплексное скалярное произведение. Унитарное преобразование — аналог поворота для комплексных векторов.

Для поляризационных состояний электромагнитной волны всевозможные унитарные преобразования можно реализовать, используя пластинки из оптически активных (вращающих плоскость поляризации) веществ и пластинки с двойным лучепреломлением. В *оптически активных средах* различается скорость света для двух круговых поляризаций, а в *средах с двойным лучепреломлением* — для двух линейных поляризаций.

[2]Лучше записать определение унитарности в виде $\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$, такое определение будет справедливо для *унитарного оператора* также в бесконечномерном случае.

4.10.1.2 Базисы и проекторы

Через скалярное произведение удобно записывать проекции амплитуд на направление единичного вектора $\mathbf{e}$:

$$A_{\mathbf{e}} = \langle \mathbf{e}|\mathbf{A}\rangle.$$

В частности,

$$A_x = \langle \mathbf{e}_x|\mathbf{A}\rangle, \quad \langle \mathbf{e}_x| = (1,0), \quad A_y = \langle \mathbf{e}_y|\mathbf{A}\rangle, \quad \langle \mathbf{e}_y| = (0,1),$$
$$|\mathbf{A}\rangle = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = |\mathbf{e}_x\rangle\langle \mathbf{e}_x|\mathbf{A}\rangle + |\mathbf{e}_y\rangle\langle \mathbf{e}_y|\mathbf{A}\rangle.$$

При прохождении классической электромагнитной волны с амплитудой $|\mathbf{A}\rangle$ через *поляризатор* происходит разложение волны на две части: $|\mathbf{A}_\parallel\rangle$ с поляризацией вдоль оси поляризатора $|\mathbf{e}_\parallel\rangle$ и $|\mathbf{A}_\perp\rangle$ с поляризацией $|\mathbf{e}_\perp\rangle$, перпендикулярной оси поляризатора. Первая проходит через поляризатор (почти) без ослабления, а вторая (почти) полностью поглощается поляризатором:

$$|\mathbf{A}\rangle = \underbrace{|\mathbf{e}_\parallel\rangle\langle \mathbf{e}_\parallel|\mathbf{A}\rangle}_{|\mathbf{A}_\parallel\rangle} + \underbrace{|\mathbf{e}_\perp\rangle\langle \mathbf{e}_\perp|\mathbf{A}\rangle}_{|\mathbf{A}_\perp\rangle} = \underbrace{\left(|\mathbf{e}_\parallel\rangle\langle \mathbf{e}_\parallel| + |\mathbf{e}_\perp\rangle\langle \mathbf{e}_\perp|\right)}_{\hat{1}} |\mathbf{A}\rangle.$$

Поскольку амплитуда $|\mathbf{A}\rangle$ произвольна, получаем разложение единичной матрицы на два слагаемых (*разложение единицы*):

$$\underbrace{|\mathbf{e}_\parallel\rangle\langle \mathbf{e}_\parallel|}_{\hat{P}_\parallel} + \underbrace{|\mathbf{e}_\perp\rangle\langle \mathbf{e}_\perp|}_{\hat{P}_\perp} = \hat{1}.$$

Матрицы $\hat{P}_\parallel$ и $\hat{P}_\perp$ — *проекторы* на направления соответствующих взаимно ортогональных векторов:

$$\hat{P}_\parallel^2 = \hat{P}_\parallel = \hat{P}_\parallel^\dagger, \qquad \hat{P}_\perp^2 = \hat{P}_\perp = \hat{P}_\perp^\dagger, \qquad \hat{P}_\parallel \hat{P}_\perp = \hat{P}_\perp \hat{P}_\parallel = 0.$$

В силу ортонормированности $|\mathbf{e}_\parallel\rangle$ и $|\mathbf{e}_\perp\rangle$ имеем

$$\langle \mathbf{A}|\mathbf{A}\rangle = \langle \mathbf{A}_\parallel|\mathbf{A}_\parallel\rangle + \langle \mathbf{A}_\perp|\mathbf{A}_\perp\rangle,$$

т. е. энергия исходной волны — сумма энергии прошедшей волны и энергии поглощенной волны:

$$\langle \mathbf{A}_\parallel|\mathbf{A}_\parallel\rangle = \langle \mathbf{A}|\hat{P}_\parallel|\mathbf{A}\rangle = \langle \mathbf{A}|\mathbf{e}_\parallel\rangle \underbrace{\langle \mathbf{e}_\parallel|\mathbf{e}_\parallel\rangle}_{1}\langle \mathbf{e}_\parallel|\mathbf{A}\rangle = \langle \mathbf{e}_\parallel|\mathbf{A}\rangle^*\langle \mathbf{e}_\parallel|\mathbf{A}\rangle = |\langle \mathbf{e}_\parallel|\mathbf{A}\rangle|^2,$$
$$\langle \mathbf{A}_\perp|\mathbf{A}_\perp\rangle = \langle \mathbf{A}|\hat{P}_\perp|\mathbf{A}\rangle = \langle \mathbf{A}|\mathbf{e}_\perp\rangle \underbrace{\langle \mathbf{e}_\perp|\mathbf{e}_\perp\rangle}_{1}\langle \mathbf{e}_\perp|\mathbf{A}\rangle = \langle \mathbf{e}_\perp|\mathbf{A}\rangle^*\langle \mathbf{e}_\perp|\mathbf{A}\rangle = |\langle \mathbf{e}_\perp|\mathbf{A}\rangle|^2.$$

Действие проектора на вектор поляризации необратимо, поскольку при этом теряется информация о проекции вектора на направление, ортогональное направлению вектора, на который идёт проектирование.

Произвольные необратимые процессы, включающие на промежуточных этапах выделение определённой поляризации, можно описать с помощью линейной комбинации матриц, каждая из которых — произведение унитарных преобразований и проекторов.

4.10.1.3 Поляризаторы с комплексными осями*

(?) Ось поляризатора всегда задаётся вещественным вектором $\mathbf{e}_\parallel$. Нужно ли вообще рассматривать комплексные единичные векторы и соответствующие им проекторы? Можно ли построить некий «обобщённый поляризатор», ось которого задаётся комплексным вектором?

Обычный поляризатор может быть построен на основе среды с двойным лучепреломлением, в которой две линейные поляризации имеют разный показатель преломления. Падающий на такую среду под углом к поверхности луч расщепляется на два луча с двумя ортогональными линейными поляризациями. «Лишний» луч поглощается, а оставшийся оказывается линейно поляризован в направлении, которое называется направлением оси поляризатора.

Аналогично можно построить круговой поляризатор.

Для *оптически активной среды* показатель преломления различается для двух круговых поляризаций. Падающий на такую среду под углом к поверхности луч расщепляется на два луча с двумя ортогональными круговыми поляризациями. «Лишний» луч поглощается, а оставшийся оказывается поляризован по кругу (в направлении комплексной оси поляризатора).

Стандартный способ выявления круговой поляризации предполагает использование обычного (с вещественной осью) поляризатора и пластинок $\lambda/4$. Пусть на входе имеется круговая поляризация

$$|\mathbf{e}_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Пластинка $\lambda/4$ делается из среды с двойным лучепреломлением. Поскольку показатель преломления для двух линейных поляризаций различается, различается и оптическая толщина пластинки (время прохождения светового импульса через пластинку, умноженное на скорость света). Толщина пластинки подбирается таким образом, чтобы разность оптических толщин для двух линейных поляризаций составляла четверть длины волны. Будем считать, что пластинка толще на $\lambda/4$ для поляризации по y, тогда поляризация после прохождения пластинки преобразуется с помощью унитарного оператора

$$\hat{U}_{\lambda/4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

На выходе из пластинки $\lambda/4$ мы имеем поляризацию

$$|\mathbf{e}_{\lambda/4}\rangle = \hat{U}_{\lambda/4}|\mathbf{e}_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp 1 \end{pmatrix},$$

т.е. одну из двух диагональных линейных поляризаций, направленных под углом $\pi/4$ к осям x и y:

$$|\mathbf{e}_+\rangle \to |\mathbf{e}_\searrow\rangle, \qquad |\mathbf{e}_-\rangle \to |\mathbf{e}_\nearrow\rangle.$$

Диагональную поляризацию можно выделить с помощью обычного линейного поляризатора, повёрнутого в соответствующем диагональном направлении. Пусть мы хотим выделить волну с левой круговой поляризацией (положительной спиральностью), тогда

$$\hat{P}_\searrow = |\mathbf{e}_\searrow\rangle\langle\mathbf{e}_\searrow| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix}, \quad \hat{P}_\searrow|\mathbf{e}_\searrow\rangle = |\mathbf{e}_\searrow\rangle, \quad \hat{P}_\searrow|\mathbf{e}_\nearrow\rangle = 0.$$

Осталось преобразовать диагональную поляризацию обратно в круговую. Для этого надо пропустить луч через пластинку, оптическая толщина которой для линейной поляризации по оси y будет *меньше* на $\lambda/4$, т.е. можно взять такую же пластинку $\lambda/4$, но повёрнутую на $\pi/2$. Действие такой пластинки описывается унитарным оператором

$$\hat{U}_{-\lambda/4} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\hat{U}_{-\lambda/4}|\mathbf{e}_\searrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = \mathrm{i}|\mathbf{e}_+\rangle,$$

$$\hat{U}_{-\lambda/4}|\mathbf{e}_\nearrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} = \mathrm{i}|\mathbf{e}_-\rangle.$$

На выходе мы получаем исходные поляризации (с точностью до фазового множителя i, на который мы не обращаем внимания).

Таким образом, мы получили два круговых поляризатора, которые пропускают только одну из двух круговых поляризаций и поглощают другую. Соответствующие комбинации операторов, преобразующих векторы поляризации, имеют вид

$$\hat{P}_+ = \underbrace{-\mathrm{i}\hat{U}_{-\lambda/4}}_{\hat{U}^\dagger_{\lambda/4}=\hat{U}^{-1}_{\lambda/4}} \hat{P}_\searrow \hat{U}_{\lambda/4} = \hat{U}^\dagger_{\lambda/4}\hat{P}_\searrow\hat{U}_{\lambda/4} = |\mathbf{e}_+\rangle\langle\mathbf{e}_+|,$$

$$\hat{P}_- = \underbrace{-\mathrm{i}\hat{U}_{-\lambda/4}}_{\hat{U}^\dagger_{\lambda/4}=\hat{U}^{-1}_{\lambda/4}} \hat{P}_\nearrow \hat{U}_{\lambda/4} = \hat{U}^\dagger_{\lambda/4}\hat{P}_\nearrow\hat{U}_{\lambda/4} = |\mathbf{e}_-\rangle\langle\mathbf{e}_-|.$$

В обоих случаях мы имеем «бутерброд» из двух скрещенных пластинок $\lambda/4$, между которыми помещён обычный (с вещественной осью) поляризатор. Возникает естественный вопрос: что будет, если повернуть поляризатор внутри «бутерброда»?

Пусть ось поляризатора направлена под углом α к оси x. Соответствующие вектор и тензор поляризации (проектор) имеют вид

$$|\mathbf{e}_\alpha\rangle = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \qquad \hat{P}_\alpha = |\mathbf{e}_\alpha\rangle\langle\mathbf{e}_\alpha| = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\,\sin\alpha \\ \cos\alpha\,\sin\alpha & \sin^\alpha \end{pmatrix}.$$

Для проектора $\hat{P}_\alpha$ есть два собственных числа 1 и 0, которым соответствуют собственные векторы $|\mathbf{e}_\alpha\rangle$ и $|\mathbf{e}_{\alpha+\pi/2}\rangle$:

$$\hat{P}_\alpha|\mathbf{e}_\alpha\rangle = |\mathbf{e}_\alpha\rangle, \qquad \hat{P}_\alpha|\mathbf{e}_{\alpha+\pi/2}\rangle = 0.$$

Для «бутерброда» имеем

$$\hat{P}_э = \hat{U}^\dagger_{\lambda/4}\hat{P}_\alpha\hat{U}_{\lambda/4} = \underbrace{\hat{U}^\dagger_{\lambda/4}|\mathbf{e}_\alpha\rangle}_{|\mathbf{e}_э\rangle}\underbrace{\langle\mathbf{e}_\alpha|\hat{U}_{\lambda/4}}_{\langle\mathbf{e}_э|} = |\mathbf{e}_э\rangle\langle\mathbf{e}_э|.$$

Собственными векторами с собственными числами 1 и 0 будут

$$|\mathbf{e}_э\rangle = U^\dagger_{\lambda/4}|\mathbf{e}_\alpha\rangle = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ -\mathrm{i}\sin\alpha \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad U^\dagger_{\lambda/4}|\mathbf{e}_{\alpha+\pi/2}\rangle = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ -\mathrm{i}\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

соответственно.

Вектор $|\mathbf{e}_э\rangle$ соответствует эллиптической поляризации, для которой полуоси эллипса ориентированы вдоль осей x и y. Отношение полуосей эллипса и направление обхода можно произвольно менять, изменяя угол α.

Если учесть возможность поворачивать весь «бутерброд» из скрещенных пластинок $\lambda/4$ и линейного поляризатора как целое в плоскости $x-y$, то мы получили универсальный поляризатор, выделяющий произвольную эллиптическую поляризацию, а также произвольную линейную поляризацию (получается из эллиптической при $\alpha = \frac{\pi}{2}\,n$, $n \in \mathbb{Z}$).

4.10.1.4 Тензор поляризации*

Более общее описание поляризации электромагнитной волны (включая случай, когда волна поляризована не полностью) использует *ненормированный тензор поляризации*

$$J_{\alpha\beta} = \overline{E_{0\alpha}E^*_{0\beta}},$$

где черта означает усреднение по «медленному времени» (большому по сравнению с временем когерентности).

Если волна распространяется вдоль оси z, то $\mathbf{E}_0 \perp z$ и индексы α и β можно считать двумерными.

На языке бра- и кет-векторов имеем

$$\hat{J} = \overline{|\mathbf{E}_0\rangle\langle\mathbf{E}_0|}.$$

(!) При умножении кет-вектора на произвольный фазовый множитель $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}|\mathbf{E}_0\rangle$ бра-вектор умножается на сопряжённый множитель $\langle\mathbf{E}_0|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$ и тензор поляризации $\hat{J}$ остаётся неизменным.

Если для частично поляризованной волны комплексная амплитуда случайно переключается между несколькими значениями $\mathbf{E}_n$, причём каждой амплитуде можно приписать вероятность p_n (в данном случае вероятность — доля времени, в течение которого волна имеет соответствующую амплитуду), то

$$J_{\alpha\beta} = \sum_n p_n\, E_{n\alpha}E^*_{n\beta}, \qquad \hat{J} = \sum_n p_n\, |\mathbf{E}_n\rangle\langle\mathbf{E}_n|.$$

Матрица $\hat{M}$ действует на кет-векторы слева. Если подвергнуть это преобразование эрмитову сопряжению, то на бра-вектор справа действует сопряжённая матрица $\hat{M}^\dagger$:

$$|\mathbf{A}\rangle \to \hat{M}|\mathbf{A}\rangle, \qquad \langle\mathbf{A}| = (|\mathbf{A}\rangle)^\dagger \to (\hat{M}|\mathbf{A}\rangle)^\dagger = \langle\mathbf{A}|\hat{M}^\dagger.$$

Для тензора поляризации получаем

$$J \to \hat{M}\hat{J}\hat{M}^\dagger.$$

В частности, унитарное преобразование и проектор действуют на тензор поляризации так:

$$J \to \hat{U}\hat{J}\hat{U}^\dagger, \qquad J \to \hat{P}\hat{J}\hat{P}.$$

Место скалярного квадрата вектора поляризации занимает след тензора поляризации:

$$\bar{W} \sim \operatorname{tr}\hat{J} = J_{\alpha\alpha} = \overline{\langle\mathbf{E}_0|\mathbf{E}_0\rangle} = \sum_n p_n\langle\mathbf{E}_n|\mathbf{E}_n\rangle.$$

Соответственно, средняя плотность энергии поля после поляризатора, задаваемого проектором $\hat{P}$, имеет вид

$$\bar{W}_{\hat{P}} \sim \operatorname{tr}(\hat{P}\hat{J}\hat{P}) = \operatorname{tr}(\hat{J}\hat{P}) = \overline{\langle\mathbf{E}_0|\hat{P}|\mathbf{E}_0\rangle} = \sum_n p_n\langle\mathbf{E}_n|\hat{P}|\mathbf{E}_n\rangle.$$

Если нас интересует поляризация волны, но не её интенсивность, то тензор поляризации определён с точностью до произвольного ненулевого вещественного множителя:

$$\hat{J} \sim C\hat{J}, \quad \forall C \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Тензор поляризации также можно нормировать на единицу:

$$\hat{\rho} = \frac{\hat{J}}{\operatorname{tr}\hat{J}} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tr}\hat{\rho} = 1.$$

Нормированный тензор поляризации $\hat{\rho}$ определён однозначно.

Для состояния, которое может быть описано нормированным вектором поляризации $|\mathbf{e}\rangle$, нормированный тензор поляризации — это проектор на направление вектора поляризации:

$$\hat{\rho} = |\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}| \quad \Leftrightarrow \quad \rho_{\alpha\beta} = e_\alpha e^*_\beta.$$

4.10.2 Поляризация отдельного фотона**

В квантовой теории электромагнитная волна (например, свет) — поток *фотонов*, каждый из которых имеет энергию $\hbar\omega$. При измерении фотон либо обнаруживается детектором, либо не обнаруживается: детектор не может обнаружить половину фотона. В силу этого отношение энергии двух волн — это отношение числа фотонов в этих волнах. При прохождении луча света через поляризатор отношение интенсивностей лучей после и до поляризатора соответствует вероятности прохождения фотона сквозь поляризатор. Неразличимость фотонов и отсутствие взаимодействия между ними автоматически предполагают, что процесс прохождения фотона сквозь поляризатор является случайным, а значит, однозначные предсказания классической теории относятся к средним величинам.

Оказывается, классическое описание поляризации светового луча переносится на случай одиночного фотона, что позволяет на простейшем случае ознакомиться с некоторыми важными квантовыми эффектами.

Рассмотрим очень слабый световой луч, который содержит один фотон[3].

Мы будем рассматривать двумерный вектор поляризации, который в однофотонном случае перейдёт в двумерный вектор состояния[4]. Однако тот же способ описания действует для других размерностей пространства состояния, включая бесконечномерный случай.

4.10.2.1 Чистые состояния

Комплексную амплитуду однофотонного луча (*вектор состояния=чистое состояние*) χ отнормируем на единицу:

$$\langle\chi|\chi\rangle = 1.$$

Тогда после прохождения поляризатора с осью, заданной единичным вектором $|\mathbf{e}\rangle$, амплитуда составит

$$|\chi_\mathbf{e}\rangle = \hat{P}|\chi\rangle, \qquad \hat{P} = |\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}|.$$

Величина

$$p_\mathbf{e} = \langle\chi_\mathbf{e}|\chi_\mathbf{e}\rangle = \langle\chi|\hat{P}|\chi\rangle = |\langle\mathbf{e}|\chi\rangle|^2$$

задаёт теперь среднюю энергию прошедшего через поляризатор пучка в единицах $\hbar\omega$, т.е. среднее число прошедших через поляризатор фотонов в штуках. Поскольку фотон либо проходит через поляризатор, либо не проходит, данная величина — вероятность прохождения фотона через поляризатор.

Комплексная величина $\langle\mathbf{e}|\chi\rangle$, квадрат модуля которой даёт вероятность прохождения, называется *амплитудой вероятности* прохождения.

---

[3] **(**)** Если ослабить обычный световой импульс, то получить однофотонное состояние не удастся, вместо этого получится луч, число фотонов в котором не определено. Состояние такого импульса описывается суперпозицией состояний с разным числом фотонов. Тем не менее однофотонные источники света удаётся сконструировать за счёт использования нелинейных кристаллов, которые превращают один фотон с частотой ω в два фотона с частотой $\omega/2$ (вылетающих из разных выходов). Для получения однофотонного источника на вход такого кристалла подают очень слабый импульс, который в среднем содержит намного меньше одного фотона. Такой импульс или вообще не содержит фотонов, или содержит ровно один фотон (возможностью того, что в импульсе больше одного фотона, можно пренебречь). На выходе из нелинейного кристалла мы имеем или ноль фотонов, или пару фотонов половинной частоты, один из которых вылетает из выхода 1, а другой — из выхода 2. Если теперь мы проверим наличие фотона на выходе 2, то мы сможем сказать, есть ли фотон на выходе 1. Если фотон на выходе 2 обнаружится, то на выходе 1 мы имеем однофотонный импульс. Если фотона на выходе 2 нет, значит, в этот раз наш однофотонный источник не сработал. Впрочем, для целей данного параграфа эти тонкости не важны. Важно лишь то, что однофотонный источник можно построить.

[4] Систему с двумерным вектором состояния часто называют *квантовым битом* или *кубитом*.

Вектор $|\chi_{\mathbf{e}}\rangle = \hat{P}|\chi\rangle$ задаёт среднюю амплитуду луча после поляризатора. Если фотон поглотился, то амплитуда после поляризатора равна нулю, а если фотон прошёл, то он прошёл полностью и амплитуда прошедшего луча должна быть единичным вектором:

$$|\chi_{\mathbf{e}}\rangle_{\text{норм.}} = \frac{\hat{P}|\chi\rangle}{\sqrt{\langle\chi|\hat{P}|\chi\rangle}}.$$

Поскольку проектор $\hat{P}$ проецирует вектор на одномерное подпространство, результат с точностью до множителя совпадает с $|\mathbf{e}\rangle$. Длина вектора задаёт вероятность, а общий фазовый множитель $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) не имеет физического смысла, поскольку для его определения необходимо измерить фазу отдельного фотона, что невозможно.[5]

Поэтому квантовый вектор состояния определяют с точностью до произвольного ненулевого множителя.

Поскольку конечное состояние фотона после поляризатора — $|\mathbf{e}\rangle$, прохождение фотона через поляризатор можно рассматривать как измерение, которое отвечает на вопрос: «Находится ли фотон в состоянии $|\mathbf{e}\rangle$?» Если фотон проходит через поляризатор, то он действительно оказывается в таком состоянии! Так что амплитуда вероятности задаётся скалярным произведением состояния до измерения χ и состояния при «благоприятном» исходе измерения.

Общее правило аналогично. Вероятность того, что система, находящаяся в состоянии χ, будет обнаружена в состоянии ϕ, имеет вид

$$P(\chi|\phi) = |\langle\phi|\chi\rangle|^2,$$

где

$$\langle\chi|\chi\rangle = \langle\phi|\phi\rangle = 1,$$

что соответствует тому, что если система находится в каком-то чистом состоянии и мы проводим измерение, призванное ответить на вопрос, находится ли она в нём, то с вероятностью 1 ответ будет положительным.

Обратимая эволюция (*унитарная эволюция*) вектора состояния, как и комплексного вектора поляризации в классическом случае, описывается некоторой унитарной матрицей, которую называют *оператором эволюции*:

$$|\chi(t)\rangle = \hat{U}_t|\chi(0)\rangle.$$

4.10.2.2 Смешанные состояния***

Тензор поляризации однофотонного луча (*матрица плотности=смешанное состояние*) $\hat{\rho}$ отнормируем на единицу:

$$\operatorname{tr}\hat{\rho} = 1, \qquad \hat{\rho} = \sum_n p_n|\chi_n\rangle\langle\chi_n|.$$

Тогда после прохождения поляризатора с осью, заданной единичным вектором $|\mathbf{e}\rangle$, тензор поляризации составит

$$\hat{\rho}_{\mathbf{e}} = \hat{P}\hat{\rho}\hat{P} = |\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}|\hat{\rho}|\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}|, \qquad \hat{P} = |\mathbf{e}\rangle\langle\mathbf{e}|.$$

Величина

$$p_{\mathbf{e}} = \operatorname{tr}\hat{\rho}_{\mathbf{e}} = \operatorname{tr}(\hat{P}\hat{\rho}\hat{P}) = \operatorname{tr}(\hat{\rho}\hat{P}) = \sum_n p_n\langle\chi_n|\hat{P}|\chi_n\rangle$$

задаёт теперь среднюю энергию прошедшего через поляризатор пучка в единицах $\hbar\omega$, т.е. среднее число прошедших через поляризатор фотонов в штуках. Поскольку фотон либо проходит через поляризатор, либо не проходит, данная величина — вероятность прохождения фотона через поляризатор.

Вероятность $p_{\mathbf{e}}$ получается как среднее взвешенное вероятностей $\langle\chi_n|\hat{P}|\chi_n\rangle$, соответствующих различным чистым состояниям.

Тензор $\hat{\rho}_{\mathbf{e}} = \hat{P}\hat{\rho}\hat{P}$ задаёт средний тензор поляризации луча после поляризатора. Если фотон поглотился, то тензор поляризации после поляризатора равен нулю, а если фотон прошёл, то он прошёл полностью и тензор поляризации должен иметь единичный след:

$$\hat{\rho}_{\mathbf{e}\ \text{норм.}} = \frac{\hat{\rho}_{\mathbf{e}}}{\operatorname{tr}(\hat{\rho}\hat{P})} = \hat{P}.$$

[5] **(**)** Есть соотношение неопределённостей энергия-время

$$\delta\mathcal{E}\cdot\delta t \geqslant \hbar/2.$$

Для однофотонного пучка $\delta\mathcal{E} = 0$, так как энергия пучка $\hbar\omega$ известна точно, значит, мы вообще не можем измерить время прохождения фотона и его фазу, которая (см. выше) связана с выбором начала отсчёта по времени.

Сформулируем необходимое и достаточное условие того, что состояние является чистым, т.е. имеет вид $|\chi\rangle\langle\chi|$:

$$\operatorname{tr}\hat{\rho}^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\chi \ : \ \langle\chi|\chi\rangle = 1, \ \ \rho = |\chi\rangle\langle\chi|.$$

Обратимая эволюция (*унитарная эволюция*) матрицы плотности, как и комплексного вектора поляризации в классическом случае, описывается некоторой унитарной матрицей, которую называют *оператором эволюции*:

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}_t\hat{\rho}(0)\hat{U}_t^\dagger.$$

Глава 4.11

Собственные колебания электромагнитного поля (с. 370)

4.11.1 Собственные функции оператора Лапласа и собственные колебания

Перепишем волновое уравнение для потенциалов свободного (без источников) электромагнитного поля с использованием оператора Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + (-c^2\triangle)\mathbf{A} = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla}\mathbf{A} = 0. \tag{4.11.1}$$

Как мы получили ранее (см. формулу (3.10.1) на с. 364), скалярный потенциал для свободного электромагнитного поля в калибровке Лоренца можно обнулить с помощью остаточного калибровочного преобразования, поэтому скалярный потенциал мы с самого начала считаем нулём.

Если заменить $\mathbf{A}(\mathbf{r}, \cdot)$ на вектор $\vec{x}(\cdot)$ (например, определив функцию на сетке), а оператор $(-c^2\triangle)$ — на матрицу $\hat{K}$, то мы получим уравнение для системы связанных гармонических осцилляторов:

$$\ddot{\vec{x}}(t) + \hat{K}\vec{x}(t) = 0.$$

Калибровочное условие Кулона $\boldsymbol{\nabla}\mathbf{A} = 0$ в этом случае выделяет линейное подпространство векторного пространства, которому должны принадлежать векторы $\mathbf{A}(\mathbf{r}, \cdot)$, причём собственные колебания можно выбрать так, чтобы они не выходили из этого подпространства. Наряду с калибровочными условиями подпространство может выделяться введением линейных однородных граничных условий.

На самом деле нет необходимости переходить к конечномерным векторным пространствам. Сами функции $\mathbf{A}(\mathbf{r}, \cdot)$ являются векторами: их можно складывать и умножать на числа. Можно также ввести скалярное произведение, как в пространстве[1] $L_2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^3$:

$$\langle \mathbf{A}_1 | \mathbf{A}_2 \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{A}_1^*(\mathbf{r}), \mathbf{A}_2(\mathbf{r}))\, d^3\mathbf{r}. \tag{4.11.2}$$

Таким образом, мы можем искать собственные колебания электромагнитного поля по аналогии с собственными колебаниями в механике.

Для этого нам надо найти собственные функции и собственные числа оператора $-c^2\triangle$ при заданных калибровочных и граничных условиях:

$$-c^2\triangle\chi_k = \lambda_k\chi_k, \qquad \omega_k = \sqrt{\lambda_k}.$$

Как правило, в такой спектральной задаче собственные числа оказываются вырожденными (им соответствует несколько или даже бесконечно много линейно независимых собственных функций). Соответственно, выбор базиса собственных функций оказывается неоднозначным. Выше мы уже получили два разных набора собственных функций для свободного электромагнитного поля в $\mathbb{R}^3$: плоские монохроматические бегущие волны и плоские монохроматические стоячие волны. В других задачах могут оказаться полезными другие базисы собственных функций, например сферические волны, угловая зависимость которых определяется сферическими функциями.

[1] Тензорное произведение пространств $L_2(\mathbb{R}^3)$ и $\mathbb{C}^3$. Компоненты вектора в таком пространстве нумеруются двумя наборами индексов: как в пространстве $L_2(\mathbb{R}^3)$ (вектором из $\mathbb{R}^3$) и как в пространстве $\mathbb{C}^3$ (индексом, пробегающим 3 значения).

Собственные функции подбираются так, чтобы обеспечить их ортонормированность в смысле скалярного произведения (4.11.2). Если нумерация собственных функций осуществляется дискретным параметром k (*дискретный спектр*), то условие ортонормированности выглядит стандартно:

$$\langle \chi_{k_1} | \chi_{k_2} \rangle = \delta_{k_1 k_2}.$$

Как и в конечномерном случае, условие ортонормированности нужно для того, чтобы полная энергия могла быть представлена как сумма энергий отдельных собственных колебаний. В конечномерном случае в определении ортонормированности в качестве метрического тензора использовалась матрица масс, а в нашем случае (4.11.1) в роли матрицы масс выступает единичный оператор, так что скалярное произведение определяется стандартным (для L_2) образом.

(*) Если нумерация собственных функций осуществляется непрерывным параметром k (*непрерывный спектр*), то в условии ортонормированности δ-символ заменяется на δ-функцию:

$$\langle \chi_{k_1} | \chi_{k_2} \rangle = \delta(k_1 - k_2).$$

Как и в конечномерном случае, условие ортонормированности нужно для того, чтобы полная энергия могла быть представлена как интеграл (вместо суммы) плотности энергий собственных колебаний.

Зависимость от пространственных координат для собственных функций оператора Лапласа в бесконечном трёхмерном пространстве легко записать через фурье-гармоники. Поскольку мы рассматриваем векторное поле, фурье-гармоники надо домножить на комплексный вектор поляризации $\mathbf{e}_a$ (a — номер поляризации), который в силу калибровочных условий должен быть ортогонален волновому вектору:

$$\boldsymbol{\chi}_{\mathbf{k},\mathbf{e}_a}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{e}_a e^{\mathrm{i}(\mathbf{k},\mathbf{r})}}{(2\pi)^{3/2}}, \quad a \in \{1,2\}, \quad \mathbf{e}_a, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 \qquad \sqrt{\lambda_{\mathbf{k},\mathbf{e}_a}} = \omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|, \qquad (\mathbf{k}, \mathbf{e}_a) = 0, \qquad (\mathbf{e}_a^*, \mathbf{e}_b) = \delta_{ab},$$
$$\langle \boldsymbol{\chi}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{e}_a} | \boldsymbol{\chi}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{e}_b} \rangle = \delta_{ab}\, \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2).$$

Ниже мы решим задачу поиска собственных колебаний другим способом, подчёркивая аналогии с механикой. Чтобы избежать случая непрерывного спектра, мы будем искать собственные функции оператора $-c^2\triangle$ в компактных областях (это гарантирует дискретность спектра), а потом, если надо, устремлять размер области к бесконечности.

4.11.2 Разложение поля в ящике на стоячие волны

Проведём построение собственных колебаний свободного электромагнитного поля, начиная с действия.

Рассмотрим свободное электромагнитное поле в ящике $V = \ell_x \times \ell_y \times \ell_z$ с периодическими граничными условиями по всем трём осям координат.

Действие запишем в калибровке $\varphi = 0$. Лагранжиан в такой калибровке имеет вид

$$-\frac{1}{16\pi k_{\text{к}}} F^{ij} F_{ij} = \frac{E^2 - B^2}{8\pi k_{\text{к}}} = \frac{\frac{1}{c^2}\dot{\mathbf{A}}^2 - (\operatorname{rot} \mathbf{A})^2}{8\pi k_{\text{к}}}.$$

Лагранжиан представляет собой разность плотностей энергий электрического и магнитного полей. После наложения калибровки $\varphi = 0$ энергия электрического поля выражается через квадрат временно́й производной, т.е. имеет вид кинетической энергии, а энергия магнитного поля включает только пространственные производные и аналогична потенциальной энергии.

Функционал Лагранжа приобретает вид

$$L[\mathbf{A}(\mathbf{r},t), \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t)] = \int\limits_V \frac{\frac{1}{c^2}\dot{\mathbf{A}}^2 - (\operatorname{rot} \mathbf{A})^2}{8\pi k_{\text{к}}}\, d^3\mathbf{r}.$$

Преобразуем вклад магнитного поля:

$$\int\limits_V (\operatorname{rot} \mathbf{A})^2\, d^3\mathbf{r} = \int\limits_V \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(\nabla_\beta A_\gamma)\varepsilon_{\alpha\mu\nu}(\nabla_\mu A_\nu)\, d^3\mathbf{r} = \int\limits_V (\delta_{\beta\mu}\delta_{\gamma\nu} - \delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\mu})(\nabla_\beta A_\gamma)(\nabla_\mu A_\nu)\, d^3\mathbf{r} =$$
$$= \int\limits_V \Big((\nabla_\mu A_\nu)(\nabla_\mu A_\nu) - (\nabla_\mu A_\nu)(\nabla_\nu A_\mu) \Big)\, d^3\mathbf{r} =$$
$$= \int\limits_V \Big((\nabla_\mu A_\nu)(\nabla_\mu A_\nu) - \nabla_\mu (A_\nu(\nabla_\nu A_\mu)) + A_\nu(\nabla_\nu \nabla_\mu A_\mu) \Big)\, d^3\mathbf{r}.$$

В силу периодических граничных условий можно считать область V трёхмерным тором T^3, у которого нет границы, поэтому имеющий вид дивергенции член $-\nabla_\mu(A_\nu(\nabla_\nu A_\mu))$ вклада не даёт. Последний член мы можем обнулить, если воспользуемся остаточной калибровочной свободой и наложим дополнительно условие $\boldsymbol{\nabla}\mathbf{A} = 0$ (мы уже проверяли, что для свободного электромагнитного поля оно совместимо с условием $\varphi = 0$):

$$L[\mathbf{A}(\mathbf{r},t),\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t)] = \int\limits_V \frac{\frac{1}{c^2}\dot{\mathbf{A}}^2 - (\nabla_\mu A_\nu)(\nabla_\mu A_\nu)}{8\pi k_{\text{к}}}\, d^3\mathbf{r} \qquad \text{при } \boldsymbol{\nabla}\mathbf{A} = 0.$$

Соответствующее действие имеет вид

$$S[\mathbf{A}(\mathbf{r},t), \boldsymbol{\nabla}\mathbf{A} = 0] = \frac{1}{8\pi k_{\text{к}} c^2} \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_V \Big(\dot{\mathbf{A}}^2 - c^2(\nabla_\mu A_\nu)(\nabla_\mu A_\nu)\Big)\, d^3\mathbf{r}\, dt.$$

Вариация действия по $\mathbf{A}$ даёт волновое уравнение.

Лагранжиан мы можем переписать через скалярное произведение в $L_2(V)$:

$$L[\mathbf{A}(\mathbf{r},t),\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t), \boldsymbol{\nabla}\mathbf{A} = 0] = \frac{1}{8\pi k_{\text{к}} c^2}\Big(\langle\dot{\mathbf{A}}|\dot{\mathbf{A}}\rangle - c^2\langle\nabla_\mu\mathbf{A}|\nabla_\mu\mathbf{A}\rangle\Big).$$

Получившееся действие — прямое обобщение действия для скалярного поля (3.6.1), которое мы получали предельным переходом из цепочки осцилляторов. Только теперь пространство 3-мерное, само поле тоже 3-мерное (по компонентам поля мы суммируем) и добавилось калибровочное условие.

На 3-мерном торе V поле разлагается не в интеграл Фурье, а в ряд Фурье по ортонормированному (в смысле $L_2(V)$) базису:

$$\chi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{V}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k},\mathbf{r})}, \qquad \mathbf{k} = (\tfrac{2\pi}{\ell_x}n_x, \tfrac{2\pi}{\ell_y}n_y, \tfrac{2\pi}{\ell_z}n_z), \qquad n_x, n_y n_z \in \mathbb{Z}, \qquad V = \ell_x\ell_y\ell_z;$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t)\,\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \qquad (\mathbf{A}_{\mathbf{k}},\mathbf{k}) = 0.$$

Калибровочное условие мы учли как ортогональность амплитуды Фурье волновому вектору.

Легко проверить, что в таком базисе скалярное произведение в $L_2(V)$ выражается уже не через интеграл, а через сумму:

$$\langle A|B\rangle = \int\limits_V A^*(\mathbf{r})\,B(\mathbf{r})\,d^3\mathbf{r} = \sum_{\mathbf{k}} A^*_{\mathbf{k}} B_{\mathbf{k}}.$$

Дифференцируя, получаем

$$\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}(t)\,\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \qquad \nabla_\mu A_\nu(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \mathrm{i}k_\mu A_{\mathbf{k}\nu}(t)\,\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}).$$

Теперь мы можем переписать функционал Лагранжа как сумму лагранжианов двумерных осцилляторов, кинетическая энергия которых — энергия электрического поля, а потенциальная — энергия магнитного поля:

$$L[\mathbf{A}_{\mathbf{k}},\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}},(\mathbf{A}_{\mathbf{k}},\mathbf{k}) = 0] = \frac{1}{8\pi k_{\text{к}} c^2}\sum_{\mathbf{k}}\Big((\dot{\mathbf{A}}^*_{\mathbf{k}},\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}) - \omega^2_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}^*_{\mathbf{k}},\mathbf{A}_{\mathbf{k}})\Big), \qquad \omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|.$$

При разложении по комплексным гармоникам вещественного поля коэффициенты разложения оказываются комплексными, но не являются независимыми. Из равенства $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$ получаем

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = \mathbf{A}^*_{-\mathbf{k}}, \qquad \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} = \dot{\mathbf{A}}^*_{-\mathbf{k}}.$$

Введём вещественные векторы поляризации:

$$(\mathbf{e}_a,\mathbf{k}) = 0, \qquad (\mathbf{e}_a,\mathbf{e}_b) = \delta_{ab}, \qquad a,b \in \{1,2\}.$$

Определим обобщённые координаты:

$$Q_{\mathbf{k}a} = \frac{1}{\sqrt{4\pi k_{\text{к}} c^2}}\Big(\mathbf{e}_a, (\mathrm{Re}\mathbf{A}_{\mathbf{k}} - \mathrm{Im}\mathbf{A}_{\mathbf{k}})\Big), \quad \text{тогда} \quad Q_{-\mathbf{k}a} = \frac{1}{\sqrt{4\pi k_{\text{к}} c^2}}\Big(\mathbf{e}_a, (\mathrm{Re}\mathbf{A}_{\mathbf{k}} + \mathrm{Im}\mathbf{A}_{\mathbf{k}})\Big).$$

В результате получаем лагранжиан системы невзаимодействующих осцилляторов, каждый из которых соответствует стоячей волне с определённой линейной поляризацией:

$$L[Q_{\mathbf{k}a}, \dot{Q}_{\mathbf{k}a}] = \sum_{\mathbf{k},a} \Big(\frac{1}{2}\dot{Q}^2_{\mathbf{k}a} - \frac{1}{2}\omega^2_{\mathbf{k}} Q^2_{\mathbf{k}a} \Big), \qquad \omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|.$$

Обобщённые импульсы совпадают с обобщёнными скоростями:

$$P_{\mathbf{k}a} = \frac{\partial L}{\partial Q_{\mathbf{k}a}} = \dot{Q}_{\mathbf{k}a}.$$

Соответствующая функция Гамильтона имеет вид

$$H[Q_{\mathbf{k}a}, P_{\mathbf{k}a}] = \sum_{\mathbf{k},a} \Big(\frac{1}{2}P^2_{\mathbf{k}a} + \frac{1}{2}\omega^2_{\mathbf{k}} Q^2_{\mathbf{k}a} \Big), \tag{4.11.3}$$

и

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{4\pi k_{\text{к}} c^2}{V}} \sum_{\mathbf{k},a} \mathbf{e}_a Q_{\mathbf{k}a} \frac{\cos(\mathbf{k},\mathbf{r}) + \sin(\mathbf{k},\mathbf{r})}{2} = \sqrt{\frac{2\pi k_{\text{к}} c^2}{V}} \sum_{\mathbf{k},a} \mathbf{e}_a Q_{\mathbf{k}a} \sin[(\mathbf{k},\mathbf{r}) + \tfrac{\pi}{4}]. \tag{4.11.4}$$

Мы описали электромагнитное поле в ящике как ансамбль гармонических осцилляторов.

(*) Это описание также полезно при квантовании электромагнитного поля. После квантования энергия каждого осциллятора изменяется порциями, кратными $\hbar\omega_{\mathbf{k}}$, что соответствует рождению или поглощению фотона.

(**) Часто бывает предпочтительно сопоставить осцилляторам не стоячие, а бегущие волны. Для этого над переменными $Q_{\mathbf{k}a}$, $P_{\mathbf{k}a}$ надо совершить каноническое преобразование, которое «перепутает» $Q_{\mathbf{k}a}$ и $P_{-\mathbf{k}a}$.

Глава 4.12

Излучение в мультипольном приближении (с. 374)

4.12.1 Решения задач 56, 58, 59

56. Дипольное излучение в ближней и волновой зонах.
Определите электрическое и магнитное поля гармонически колеблющегося диполя на расстояниях r, много бóльших размеров диполя a, но необязательно бóльших длины волны λ.

Решение

Как мы показали ранее, в § 4.9.4 «Точечные электрические мультиполи» (с. 471), для точечного диполя плотность заряда и плотность тока составляют

$$\rho(\mathbf{r},t) = -(\mathbf{d}(t),\boldsymbol{\nabla})\delta^3(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \dot{\mathbf{d}}(t)\,\delta^3(\mathbf{r}). \tag{4.12.1}$$

Запаздывающий векторный потенциал имеет вид, который мы уже получали ранее, пренебрегая размером источника (3.12.1) (см. с. 375):

$$\mathbf{A}(\mathbf{R},t) = k_{\text{к}}\int \frac{\dot{\mathbf{d}}(t-\frac{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}{c})\,\delta^3(\mathbf{r})}{c|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}\,d^3r = k_{\text{к}}\frac{\dot{\mathbf{d}}(t-\frac{R}{c})}{cR}.$$

Скалярный потенциал можно либо восстановить из калибровочного условия Лоренца: $\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{A} = 0 \Rightarrow \varphi = -c\int \operatorname{div}\mathbf{A}\,dt$, либо вычислить как запаздывающий потенциал:

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{R},t) &= k_{\text{к}}\int \frac{-(\mathbf{d}(t-\frac{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}{c}),\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}})\delta^3(\mathbf{r})}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}\,d^3r = k_{\text{к}}\int\left(\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}},\frac{\mathbf{d}(t-\frac{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}{c})}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}\right)\delta^3(\mathbf{r})\,d^3r = \\
&= -k_{\text{к}}\int\left(\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{R}},\frac{\mathbf{d}(t-\frac{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}{c})}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}\right)\delta^3(\mathbf{r})\,d^3r = k_{\text{к}}\left(\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{R}},\frac{\mathbf{d}(t-\frac{R}{c})}{R}\right) = \\
&= -k_{\text{к}}\left(\mathbf{R},\frac{\mathbf{d}(t-\frac{R}{c})}{R^3} + \frac{\dot{\mathbf{d}}(t-\frac{R}{c})}{cR^2}\right).
\end{aligned}$$

Магнитное поле вычисляется легко, поскольку векторный потенциал зависит от пространственных координат только через R:

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times k_{\text{к}}\frac{\dot{\mathbf{d}}(t-\frac{R}{c})}{cR} = (\boldsymbol{\nabla}R)\times\frac{\partial}{\partial R}k_{\text{к}}\frac{\dot{\mathbf{d}}(t-\frac{R}{c})}{cR} = \frac{\mathbf{R}}{R}\times k_{\text{к}}\left(-\frac{\ddot{\mathbf{d}}}{c^2R} - \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR^2}\right),$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{R},t) = \frac{[\ddot{\mathbf{d}}(t-\frac{R}{c})\times\mathbf{N}]}{c^2R} + \frac{[\dot{\mathbf{d}}(t-\frac{R}{c})\times\mathbf{N}]}{cR^2}, \qquad \mathbf{N} = \frac{\mathbf{R}}{R}.$$

Первое слагаемое доминирует в волновой зоне ($R \gg \lambda$), оно уже встречалось нам как первое слагаемое в формуле (3.12.2) на с. 376. Второе слагаемое доминирует в ближней зоне ($R \ll \lambda$). С учётом связи тока с производной дипольного момента (см. формулы (4.12.1)) $\dot{\mathbf{d}}$ — это элемент тока, и мы получаем на малых расстояниях *закон Био-Савара-Лапласа* для магнитостатического магнитного поля:

$$\mathbf{B}_{\text{ближн.}}(\mathbf{R},t) = \frac{[\dot{\mathbf{d}}(t-\frac{R}{c})\times\mathbf{N}]}{cR^2} = \int\frac{[\dot{\mathbf{d}}(t-\frac{R}{c})\,\delta^3(\mathbf{r})\times\mathbf{N}]}{cR^2}\,d^3r \approx \int\frac{[\mathbf{j}(t)\times\mathbf{N}]}{cR^2}\,d^3r. \tag{4.12.2}$$

Вычисление электрического поля более громоздко:

$$\begin{aligned} E_\alpha &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[k_{\text{к}}\frac{\dot d_\alpha(t-\frac{R}{c})}{cR}\right] - \partial_\alpha\left[-k_{\text{к}}R_\beta\left(\frac{d_\beta(t-\frac{R}{c})}{R^3}+\frac{\dot d_\beta(t-\frac{R}{c})}{cR^2}\right)\right] = \\ &= -k_{\text{к}}\frac{\ddot d_\alpha}{c^2R} + k_{\text{к}}\delta_{\alpha\beta}\left(\frac{d_\beta}{R^3}+\frac{\dot d_\beta}{cR^2}\right) + k_{\text{к}}R_\beta(\partial_\alpha R)\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{d_\beta(t-\frac{R}{c})}{R^3}+\frac{\dot d_\beta(t-\frac{R}{c})}{cR^2}\right) = \\ &= -k_{\text{к}}\frac{\ddot d_\alpha}{c^2R} + k_{\text{к}}\left(\frac{d_\alpha}{R^3}+\frac{\dot d_\alpha}{cR^2}\right) + k_{\text{к}}R_\beta\frac{R_\alpha}{R}\left(-\frac{3d_\beta}{R^4}-\frac{\dot d_\beta}{cR^3}-\frac{2\dot d_\beta}{cR^3}-\frac{\ddot d_\beta}{c^2R^2}\right), \end{aligned}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{R},t) = k_{\text{к}}\frac{-\ddot{\mathbf{d}}(t-\frac{R}{c})+\mathbf{N}(\ddot{\mathbf{d}}(t-\frac{R}{c}),\mathbf{N})}{c^2R} + k_{\text{к}}\frac{\tilde{\mathbf{d}}(t-\frac{R}{c})-3\mathbf{N}(\tilde{\mathbf{d}}(t-\frac{R}{c}),\mathbf{N})}{R^3}, \qquad \tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{d}+\tfrac{R}{c}\dot{\mathbf{d}}.$$

Первое слагаемое доминирует в волновой зоне ($R \gg \lambda$), оно уже встречалось нам как первое слагаемое в формуле (3.12.3) на с. 376. Второе слагаемое доминирует в ближней зоне ($R \ll \lambda$) на малых расстояниях $\tilde{\mathbf{d}} \approx \mathbf{d}$, и мы получаем электростатическое поле диполя.

58. Атом Резерфорда. Два разноимённых заряда (q_1, m_1) и (q_2, m_2) обращаются один вокруг другого под действием кулоновского притяжения по круговой орбите радиусом R.
а) Определите энергию, теряемую на излучение за один оборот.
б) Найдите зависимость расстояния между зарядами от времени.
в) Определите время, за которое один заряд упадёт на другой.

Решение

Предположим, что частицы движутся с нерелятивистскими скоростями. В качестве начала отсчёта выберем центр масс системы. Пусть радиус-вектор $\mathbf{R}$ соединяет первую частицу и вторую.

Радиус-векторы частиц имеют вид

$$\mathbf{r}_1 = -\mathbf{R}\,\frac{m_2}{m_1+m_2}, \qquad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R}\,\frac{m_1}{m_1+m_2}.$$

Дипольный момент системы равен

$$\mathbf{d} = \mathbf{R}\,\underbrace{\frac{m_1q_2-q_2m_1}{m_1+m_2}}_{q} = q\mathbf{R}.$$

Интенсивность дипольного излучения выражается через относительное ускорение $\ddot{\mathbf{R}}$:

$$I_d = \frac{2k_{\text{к}}}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2 = \frac{2k_{\text{к}}q^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{R}}^2.$$

Пренебрегая силой радиационного трения, выражаем относительное ускорение, как в задаче двух тел (см. § 1.5.1):

$$\ddot{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{F}}{\mu} = -\frac{k_{\text{к}}\mathbf{R}q_1q_2}{\mu R^3}, \qquad \mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2};$$

$$I_d = \frac{2k_{\text{к}}q^2}{3c^3}\frac{(k_{\text{к}}q_1q_2)^2}{\mu^2R^4}.$$

Считая, что орбита остаётся круговой, и используя теорему вириала (см. задачу 18), записываем полную энергию системы:

$$\mathcal{E} = \tfrac{1}{2}U(R) = \frac{k_{\text{к}}q_1q_2}{2R}.$$

Уравнение баланса энергии имеет вид

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -I_d \quad\Rightarrow\quad \frac{k_{\text{к}}q_1q_2}{2R^2}\frac{dR}{dt} = \frac{2k_{\text{к}}q^2}{3c^3}\frac{(k_{\text{к}}q_1q_2)^2}{\mu^2R^4} \quad\Rightarrow\quad 3R^2\,dR = \frac{4k_{\text{к}}^2q^2q_1q_2}{\mu^2c^3}\,dt.$$

Получаем закон, по которому заряды падают друг на друга:

$$R^3 = R_0^3 + \underbrace{\frac{4k_{\text{к}}^2q^2q_1q_2}{\mu^2c^3}}_{<0}\,t.$$

Мы видим, что за конечное время заряды должны упасть друг на друга, излучив бесконечную энергию. В какой-то момент скорости зарядов станут релятивистскими, но это (как мы узнаем далее) только увеличит интенсивность излучения. Ясно, что в какой-то момент процесс должен прерваться.

Для падения электрона на ядро наше приближение перестанет работать тогда, когда начнут сказываться квантовые свойства частиц. В этом случае падение закончится, когда электрон сядет на основной (самый низкий) уровень энергии атома. Поскольку это состояние соответствует минимальной энергии системы, ниже падать просто некуда.

Падение классического электрона на ядро заставило Джозефа Джона Томсона[1] отказаться от *планетарной модели атома* в пользу «*модели пудинга с изюмом*», в которой отрицательно заряженные электроны движутся внутри положительно заряженного шара, заряд которого равномерно распределён по объёму. Модель пудинга с изюмом в рамках классической физики имеет очевидные преимущества:

- в состоянии равновесия электроны неподвижны и не излучают;
- в случае одного электрона (атом водорода или водородоподобный ион) электрон может совершать гармонические колебания вблизи центра шара и излучает монохроматическую электромагнитную волну, что соответствует тому, что многие спектральные линии атомов очень узкие, т.е. близки к монохроматическим.

После эксперимента Резерфорда по рассеянию альфа-частиц на золотой фольге физики были вынуждены принять планетарную модель атома, но понадобились дополнительные объяснения, почему электроны в атомах могут двигаться по орбитам, не излучая. Первоначально отсутствие излучения на некоторых выделенных орбитах было постулировано Нильсом Бором. Позднее развитие его идей привело к созданию квантовой механики.

59. Излучение при лобовом столкновении в кулоновском поле. Два одноимённых заряда (q_1, m_1) и (q_2, m_2) испытывают лобовое столкновение. Определите полную излучённую энергию, если задана относительная скорость на бесконечности $v_\infty \ll c$.
а) Дипольный случай $(q_1/m_1 \neq q_2/m_2)$.
б) Квадрупольный случай $(q_1/m_1 = q_2/m_2)$.

Решение

Пусть частицы движутся навстречу друг другу с нерелятивистскими скоростями вдоль оси z. В качестве начала отсчёта выберем центр масс системы. Расстояние между частицами обозначим R. Имеем

$$z_1 = -R\,\frac{m_2}{m_1+m_2}, \qquad z_2 = R\,\frac{m_1}{m_1+m_2}.$$

Ненулевые компоненты дипольного и квадрупольного моментов имеют вид

$$d_z = R\,\underbrace{\frac{m_1q_2 - m_2q_1}{m_1+m_2}}_{q} = qR, \qquad Q_{xx} = Q_{yy} = -\tfrac{1}{2}Q_{zz} = -R^2\,\underbrace{\frac{m_1^2q_2 + m_2^2q_1}{(m_1+m_2)^2}}_{e} = -eR^2.$$

Учитывая электрическое квадрупольное излучение, мы должны также учесть магнитное дипольное излучение, но магнитный дипольный момент тождественно равен нулю.

Интенсивности электрического дипольного и квадрупольного излучений составляет

$$I_d = \frac{2k_\text{к}}{3c^2}\ddot{\mathbf{d}}^2 = \frac{2k_\text{к}q^2}{3c^3}\ddot{R}^2, \qquad I_Q = \frac{k_\text{к}\dddot{Q}_{\alpha\beta}\dddot{Q}_{\alpha\beta}}{180c^5} = \frac{k_\text{к}e^2}{30c^5}\left(\frac{d^3R^2}{dt^3}\right)^2.$$

Пренебрегая радиационным трением, мы можем получить относительное ускорение $\ddot{R}$ из задачи двух тел:

$$\ddot{R} = \frac{k_\text{к}q_1q_2}{\mu R^2} \quad\Rightarrow\quad \dddot{R} = -2\frac{k_\text{к}q_1q_2}{\mu R^3}\,\dot{R} = -2\frac{\ddot{R}\dot{R}}{R},$$

$$\frac{d^3R^2}{dt^3} = \ddddot{R}R + 3\dddot{R}\dot{R} + 3\ddot{R}\ddot{R} + R\dddot{R} = 2\ddddot{R}R + 6\ddot{R}\dot{R} = 2\ddddot{R}\dot{R},$$

$$I_Q = \frac{2e^2}{15c^5}\,\ddot{R}^2\dot{R}^2.$$

[1] Известного как Джи Джи Томсон, не путайте с Уильямом Томсоном (лордом Кельвином).

Потери энергии на дипольное и квадрупольное излучение удобно переписать, перейдя от интегрирования по времени к интегрированию по относительной скорости $v = \dot{R}$:

$$\delta\mathcal{E}_d = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} I_d\,dt = \int\limits_{-v_\infty}^{+v_\infty} I_d\,\frac{dv}{\ddot{R}} = \int\limits_{-v_\infty}^{+v_\infty} \frac{2k_\text{к}q^2}{3c^3}\ddot{R}\,dv,$$

$$\delta\mathcal{E}_Q = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} I_Q\,dt = \int\limits_{-v_\infty}^{+v_\infty} I_Q\,\frac{dv}{\ddot{R}} = \int\limits_{-v_\infty}^{+v_\infty} \frac{2k_\text{к}e^2}{15c^5}\,\ddot{R}v^2\,dv.$$

Мы уже выразили ускорение через R, а сейчас выразим $\frac{1}{R}$ через v, используя закон сохранения энергии (потерями на излучения пренебрежём ввиду их малости, справедливость этого предположения проверим в конце):

$$\frac{\mu v_\infty^2}{2} = \frac{\mu v^2}{2} + \frac{k_\text{к}q_q q_2}{R} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{R} = \frac{\mu}{2k_\text{к}q_1q_2}(v_\infty^2 - v^2).$$

Потери энергии имеют вид ($u = \frac{v}{v_\infty}$)

$$\delta\mathcal{E}_d = \int\limits_{-v_\infty}^{+v_\infty} \frac{2q^2}{3c^3}\frac{\mu}{4q_1q_2}(v_\infty^2 - v^2)^2\,dv = \frac{\mu q^2 v_\infty^5}{6c^3q_1q_2}\int\limits_{-1}^{+1}(1-u^2)^2\,du = \frac{16}{45}\frac{\mu v_\infty^2}{2}\frac{q^2}{q_1q_2}\left(\frac{v_\infty}{c}\right)^3,$$

$$\delta\mathcal{E}_Q = \int\limits_{-v_\infty}^{+v_\infty} \frac{2e^2}{15c^5}\,\frac{\mu}{4q_1q_2}(v_\infty^2 - v^2)^2v^2\,dv = \frac{\mu e^2 v_\infty^7}{30c^5q_1q_2}\int\limits_{-1}^{+1}(1-u^2)^2u^2\,du = \frac{16}{45\cdot 35}\frac{\mu v_\infty^2}{2}\frac{e^2}{q_1q_2}\left(\frac{v_\infty}{c}\right)^5.$$

Мы видим, что потери энергии малы по сравнению с начальной энергией $\frac{\mu v_\infty^2}{2}$. Электрическое дипольное излучение обращается в нуль при $q = 0$, т.е. в случае равенства удельных зарядов $q_1/m_1 = q_2/m_2$. В этом случае необходимо учесть потери на квадрупольное излучение.

Глава 4.13

Реакция излучения и излучение релятивистских частиц (с. 380)

4.13.1 Радиационное трение релятивистских частиц

Электрическое дипольное приближение для излучения становится точным в пределе $v \to 0$. Найденное из интенсивности в дипольном приближении выражение для силы радиационного трения также становится точным в этом пределе. Выбором сопутствующей системы отсчёта скорость любой частицы можно обратить в нуль в некоторый момент времени. Благодаря этому мы можем записать силу радиационного трения как 4-мерную силу, просто переписав имеющееся выражение как соотношение между 4-мерными тензорами (если два тензора равны в одной системе отсчёта, то они равны в любой другой).

4-мерная сила радиационного трения имеет вид

$$f^i_{\text{р.тр.}} = -\frac{dp^i_{\text{поля}}}{d\tau} = -\underbrace{\frac{dt}{d\tau}}_{\gamma}\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{c}\mathcal{E}_{\text{поля}};\mathbf{p}_{\text{поля}}\right) = \gamma\left(\tfrac{1}{c}(\mathbf{v},\mathbf{F}_{\text{р.тр.}});\mathbf{F}_{\text{р.тр.}}\right).$$

При $v = 0$ имеем

$$f^i_{\text{р.тр.}}\Big|_{v=0} = \frac{2k_{\text{к}}q^2}{3c^3}(0;\dot{\mathbf{a}}),$$

$$\begin{aligned} u^i = \frac{dx^i}{d\tau} &= (c\gamma;\gamma\mathbf{v}), \qquad \frac{d}{d\tau} = \gamma\frac{d}{dt}, \quad \frac{d\gamma}{d\tau} = \tfrac{1}{c^2}\gamma^4(\mathbf{a},\mathbf{v}), \\ w^i = \frac{d^2x^i}{d\tau^2} &= (\tfrac{1}{c}\gamma^4(\mathbf{a},\mathbf{v});\tfrac{1}{c^2}\gamma^4(\mathbf{a},\mathbf{v})\mathbf{v} + \gamma^2\mathbf{a}), \end{aligned}$$

$$u^i\Big|_{v=0} = (c;\vec{0}), \qquad w^i\Big|_{v=0} = (0;\mathbf{a}), \qquad \frac{dw^i}{d\tau}\Big|_{v=0} = \frac{d^3x^i}{d\tau^3}\Big|_{v=0} = (\tfrac{1}{c}\mathbf{a}^2;\dot{\mathbf{a}});$$

$$f^i_{\text{р.тр.}}\Big|_{v=0} = \frac{2k_{\text{к}}q^2}{3c^3}\left(\frac{d^3x^i}{d\tau^3} - \tfrac{1}{c^2}\mathbf{a}^2(c,0)\right) = \frac{2k_{\text{к}}q^2}{3c^3}\left(\frac{dw^i}{d\tau} - \tfrac{1}{c^2}\mathbf{a}^2u^i\right) = \frac{2k_{\text{к}}q^2}{3c^3}\left(\frac{dw^i}{d\tau} - \tfrac{1}{c^2}w^jw_j\,u^i\right).$$

Мы получили выражение для 4-мерной силы радиационного трения в произвольной лоренцевой системе отсчёта:

$$f^i_{\text{р.тр.}} = \frac{2k_{\text{к}}q^2}{3c^3}\left(\frac{dw^i}{d\tau} - \tfrac{1}{c^2}w^jw_j\,u^i\right).$$

4.13.2 Потенциалы Лиенара-Вихерта

С помощью запаздывающих потенциалов можно точно определить потенциалы и поле излучения релятивистской частицы, движущейся по произвольному закону $\mathbf{r}'(t')$.

При этом частица создаёт потенциал в точке $\underline{x} = (ct,\mathbf{r})$ в тот момент времени, когда она пересекает световой конус прошлого точки $\underline{x}$. Пусть точка пересечения мировой линии с указанным конусом имеет вид $\underline{x}' = (ct'_0,\mathbf{r}'(t'_0))$, тогда

$$(\underline{x}-\underline{x}')^2 = (\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'_0))^2 - (ct-ct'_0)^2 = 0, \qquad t'_0 < t.$$

Это уравнение и неравенство позволяют определить момент t'.

На 4-потенциал в точке $\underline{x}$ влияет только 4-мерная плотность тока в точке $\underline{x}'$. Это значит, что важны только положение и скорость частицы в момент времени t'_0. Мы всегда можем выбрать инерциальную систему отсчёта так, что $\mathbf{v}(t'_0) = 0$. Тогда

$$\varphi(\underline{x})\big|_{\mathbf{v}(t'_0)=0} = \frac{k_к q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t'_0)|}, \qquad \mathbf{A}(\underline{x}) = 0.$$

Перепишем это равенство в тензорном виде:

$$X^j = x^j - x'^j(t'_0) = (cT; \mathbf{R}),$$
$$A^i(\underline{x})\big|_{\mathbf{v}(t'_0)=0} = \frac{k_к q}{cR}\,(c;\vec{0}) = \frac{k_к q}{c^2 T}\,u^i(t'_0) = \frac{k_к q}{-X^j u_j}\,u^i\Big|_{t'_0}.$$

Получившаяся тензорная формула уже не зависит от системы отсчёта:

$$A^i(\underline{x}) = \frac{k_к q}{-X^j u_j}\,u^i\Big|_{t'_0}, \qquad \underline{X}^2 = \mathbf{R}^2 - c^2T^2 = 0, \quad T > 0.$$

В трёхмерном виде получаем

$$\varphi(t,\mathbf{r}) = \left.\frac{k_к q}{R - (\frac{\mathbf{v}}{c}, \mathbf{R})}\right|_{t'_0}, \qquad \mathbf{A}(t,\mathbf{r}) = \left.\frac{k_к q \frac{\mathbf{v}}{c}}{R - (\frac{\mathbf{v}}{c}, \mathbf{R})}\right|_{t'_0}, \qquad R(t'_0) = c(t - t'_0).$$

Момент времени t'_0 определён неявно. Считая его функцией от точки наблюдения $t'_0(t,\mathbf{r})$, продифференцируем по t и $\mathbf{r}$ обе части уравнения $R(t') = c(t - t'_0)$:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'}\frac{\partial t'_0}{\partial t} = -\left(\frac{\mathbf{R}}{R}, \mathbf{v}\right)\frac{\partial t'_0}{\partial t} = c\left(1 - \frac{\partial t'_0}{\partial t}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial t'_0}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{(\mathbf{v},\mathbf{R})}{cR}},$$
$$\boldsymbol{\nabla} R(t'_0) = \frac{\partial R}{\partial t'}\boldsymbol{\nabla} t'_0 + \frac{\mathbf{R}}{R} = -\left(\frac{\mathbf{R}}{R}, \mathbf{v}\right) + \frac{\mathbf{R}}{R}\boldsymbol{\nabla} t'_0 = c\boldsymbol{\nabla} t'_0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla} t'_0 = -\frac{\mathbf{R}}{c(R - (\mathbf{R}, \frac{\mathbf{v}}{c}))}.$$

После кропотливых вычислений получаем

$$\mathbf{E} = \frac{k_к q}{(1 - (\mathbf{N}, \frac{\mathbf{v}}{c}))^3}\left(\frac{1}{R^2}\frac{\mathbf{N} - \frac{\mathbf{v}}{c}}{\gamma^2} + \frac{1}{c^2 R}\left[\mathbf{N} \times \left[(\mathbf{N} - \frac{\mathbf{v}}{c}) \times \mathbf{a}\right]\right]\right)_{t'_0}, \qquad \mathbf{B} = [\mathbf{N} \times \mathbf{E}]_{t'_0}, \qquad \mathbf{N} = \frac{\mathbf{R}}{R}.$$

При $v \to 0$ первый член даёт кулоновское поле, а второй — дипольное излучение.

4.13.3 Преобразование частот и углового распределения

Пусть релятивистский источник в сопутствующей системе испускает на частоте ω_0 излучение с интенсивностью по углам

$$dI_0 = f(\theta_0, \phi_0)\, d\Omega_0.$$

Преобразуем эту частоту и угловое распределение к лабораторной системе отсчёта.

Запишем преобразование для 4-мерного волнового вектора. Скорость излучателя направим по оси x, сферический угол θ тоже будем отсчитывать от оси x:

$$\frac{1}{c}\begin{pmatrix} \omega \\ \omega\,\cos\theta \\ \omega\,\sin\theta\,\cos\phi \\ \omega\,\sin\theta\,\sin\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ \gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{c}\begin{pmatrix} \omega_0 \\ \omega_0\,\cos\theta_0 \\ \omega_0\,\sin\theta_0\,\cos\phi_0 \\ \omega_0\,\sin\theta_0\,\sin\phi_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} \omega_0\gamma(1 + \frac{v}{c}\cos\theta_0) \\ \omega_0\gamma(\frac{v}{c} + \cos\theta_0) \\ \omega_0\,\sin\theta_0\,\cos\phi_0 \\ \omega_0\,\sin\theta_0\,\sin\phi_0 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая пространственные компоненты 4-мерного волнового вектора, находим

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0, \\ \cos\theta &= \frac{\frac{v}{c} + \cos\theta_0}{1 + \frac{v}{c}\cos\theta_0}, \\ \cos\theta_0 &= \frac{-\frac{v}{c} + \cos\theta}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta}. \end{aligned}$$

Сравнивая временны́е компоненты, находим

$$\omega = \omega_0\gamma\left(1 + \frac{v}{c}\cos\theta_0\right) = \omega_0\gamma\left(1 + \frac{v}{c}\frac{-\frac{v}{c} + \cos\theta}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta}\right) = \omega_0\gamma\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta} = \frac{\omega_0}{\gamma(1 - \frac{v}{c}\cos\theta)}.$$

Частота излучения, испущенного строго вперёд ($\cos\theta = 1$), возрастает в $(1 + \frac{v}{c})\gamma$ раз. Если $v/c \approx 1$ (ультрарелятивистская частица), то $(1 + \frac{v}{c})\gamma \approx 2\gamma$. При этом частоты, излучаемые на углы, существенно отличные от нулевого ($1 - \frac{v}{c}\cos\theta \sim 1$), уменьшаются примерно в γ раз (строго назад — примерно в 2γ раз).

Характерную частоту, испускаемую частицей, мы можем оценить из соображений размерности:

$$\omega_0 \sim \frac{a|_{v=0}}{c} = \frac{1}{c}\sqrt{w_j w^j} = \frac{1}{c}\sqrt{\gamma^4 \mathbf{a}^2 + \tfrac{1}{c^2}\gamma^6 (\mathbf{a}, \mathbf{v})^2}.$$

Для преобразования элемента телесного угла $d\Omega_0 = d\phi_0\, d\cos\theta_0$ нам понадобится соотношение

$$d\cos\theta_0 = \frac{d\cos\theta(1 - \frac{v}{c}\cos\theta) - (-\frac{v}{c} + \cos\theta)(-\frac{v}{c})d\cos\theta}{(1 - \frac{v}{c}\cos\theta)^2} = \frac{1 - (\frac{v}{c})^2}{(1 - \frac{v}{c}\cos\theta)^2}\, d\cos\theta = \frac{d\cos\theta}{\gamma^2(1 - \frac{v}{c}\cos\theta)^2}.$$

Воспользуемся представлением о фотонах, число которых — инвариант. В системе источника фотоны вылетают с частотой ω_0 и энергией $\hbar\omega_0$, тогда распределение фотонов по углам в системе источника имеет вид

$$dN = \frac{dI_0}{\hbar\omega_0}\, dt_0 = \frac{f(\theta_0, \phi_0)}{\hbar\omega_0}\, \underbrace{dt_0}_{\frac{dt}{\gamma}}\, \underbrace{d\phi_0\, d\cos\theta_0}_{d\Omega_0} = \frac{f(\theta_0(\theta), \phi)}{\hbar\omega_0}\, \frac{1}{\gamma}\frac{1}{\gamma^2(1 - \frac{v}{c}\cos\theta)^2}\, dt\, \underbrace{d\phi\, d\cos\theta}_{d\Omega}.$$

Интенсивность по углам в лабораторной системе равна

$$dI = \hbar\omega \frac{dN}{dt} = \frac{\hbar\omega_0}{\gamma(1 - \frac{v}{c}\cos\theta)} \frac{f(\theta_0(\theta), \phi)}{\hbar\omega_0}\, \frac{1}{\gamma}\frac{1}{\gamma^2(1 - \frac{v}{c}\cos\theta)^2}\, d\Omega = \frac{f(\theta_0(\theta), \phi)\, d\Omega}{\gamma^4(1 - \frac{v}{c}\cos\theta)^3}.$$

В частности, для излучения строго вперёд интенсивность возрастает в $\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}\right)^{3/2} = \frac{1}{\gamma}\frac{(1+\frac{v}{c})^3}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}} = (1 + \frac{v}{c})^3\gamma^2$ раз. Для ультрарелятивистского случая $1 + \frac{v}{c} \approx 2$, и этот множитель даёт $\approx 8\gamma^2$.

Преобразование углов переводит угол, разграничивавший переднюю полусферу и заднюю полусферу в системе источника $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, в угол

$$\cos\theta\big|_{\theta_0=\frac{\pi}{2}} = \frac{v}{c} \quad \Rightarrow \quad \sin\theta|_{\theta_0=\frac{\pi}{2}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \gamma^{-1}.$$

В ультрарелятивистском случае $\theta|_{\theta_0=\frac{\pi}{2}} \approx \gamma^{-1}$.

Таким образом, всё то излучение, которое раньше шло в переднюю полусферу, в ультрарелятивистском случае идёт внутрь конуса с углом раствора γ^{-1}. При этом частота (и энергия!) каждого фотона в этом конусе возрастает (по сравнению с системой источника) от γ раз до $\gamma(1 + v/c) \approx 2\gamma$ раз.

Это даёт *эффект прожектора* — для ультрарелятивистской частицы бóльшая часть излучения ($\frac{1}{2}$, если считать фотоны по штукам, и $\sim \frac{3}{4}$, если считать по энергии) идёт внутрь узкого конуса с углом раствора γ^{-1}.

Глава 4.14

Рассеяние (с. 385)

4.14.1 Решения задач 63, 64

63. Рассеяние горошин на арбузе.
Найдите дифференциальное и полное сечения рассеяния точечных частиц на абсолютно твёрдой сфере радиусом R.

Решение

Дифференциальное сечение рассеяния можно записать как элемент площади на плоскости, перпендикулярной потоку частиц:

$$d\sigma = b\,db\,d\phi, \qquad \phi \in [0, 2\pi], \qquad b \in [0, R].$$

Здесь b — расстояние до оси симметрии, называемое *прицельным расстоянием*. Прицельное расстояние берётся не более радиуса арбуза, что соответствует тому, что горошины попадают в арбуз.

На рисунке видно, как угол α между осью симметрии и направлением на точку соударения связан с углом рассеяния θ (угол между направлениями движения частицы до и после рассеяния) и прицельным параметром $b = R\,\sin\alpha$.

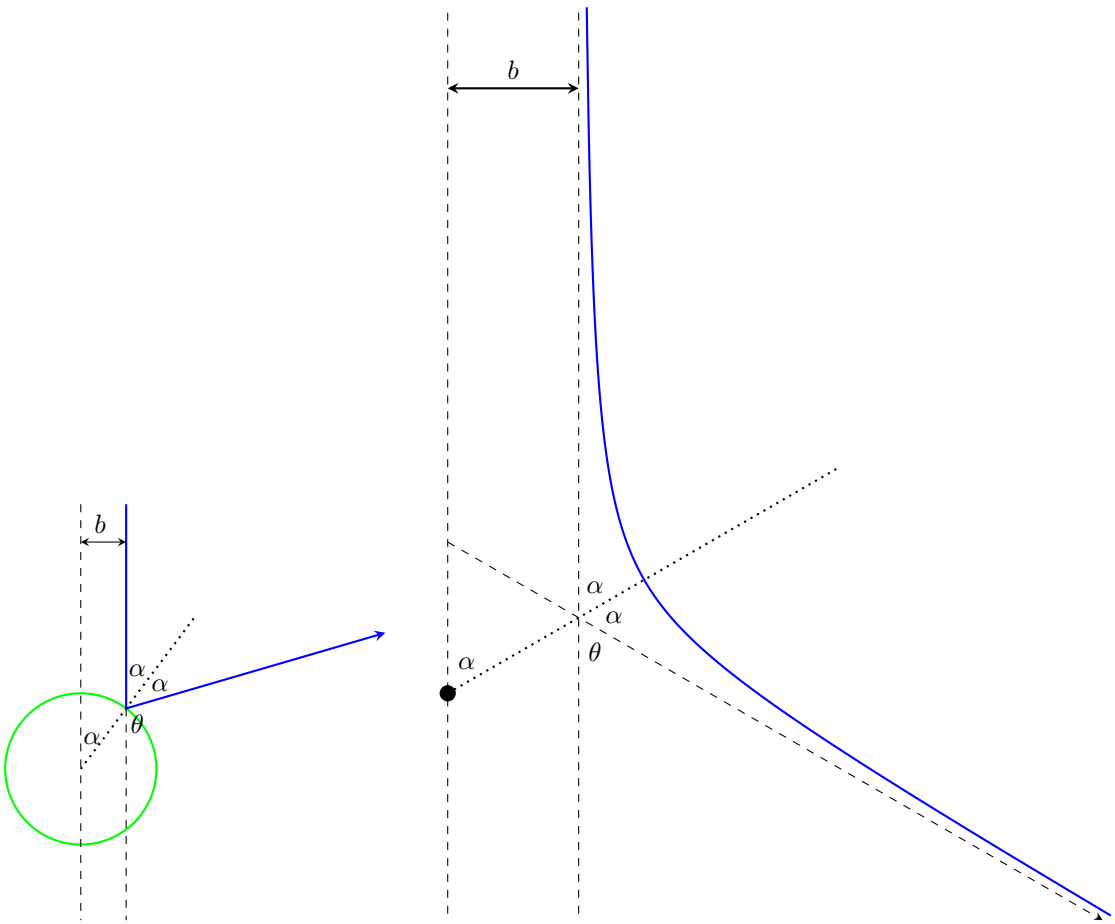
Получаем

$$d\sigma = b\,db\,d\phi = R\,\sin\alpha\,d(R\,\sin\alpha)\,d\phi = \frac{R^2}{2}\,d(\cos^2\tfrac{\theta}{2})\,d\phi = \frac{R^2}{4}\,\underbrace{d\cos\theta\,d\phi}_{d\Omega} = \frac{R^2}{4}\,d\Omega.$$

Таким образом, зеркальное рассеяние точечных частиц на шаре оказалось изотропным ($\frac{d\sigma}{d\Omega}$=const), а полное сечение, как и должно быть при рассеянии классических частиц, оказалось равно площади поперечного сечения мишени:

$$d\sigma = \frac{R^2}{4}\,d\Omega, \qquad \sigma = \int \frac{R^2}{4}\,d\Omega = \pi R^2.$$

(ф*) Интересно, что в квантовой механике коротковолновой (классический) предел для полного сечения рассеяния составляет $2\pi R^2$, т.е. ровно вдвое больше, чем в классике. Квантовая добавка не мала, но она вся связана с рассеянием на малые углы за счёт дифракции налетающего потока частиц на шаре. Характерные углы дифракции составляют $\sim \lambda/R$ (вспомните угловую разрешающую способность телескопа), поэтому в классическом пределе при $\lambda \to 0$ дифракция становится незаметной. Основная часть квантовой поправки связана с явлением, которое в оптике известно как *пятно Пуассона*, — светлым пятном в центре тени от шара.



Рассеяние на зеркальном шаре и на кулоновском центре. Здесь b — прицельное расстояние, $\theta = \pi - 2\alpha$ — угол рассеяния, $\sin\alpha = \cos\frac{\theta}{2}$

64. Резерфордовское рассеяние.
Найдите дифференциальное сечение рассеяния заряженных частиц на кулоновском потенциале. Проверьте, что полное сечение рассеяния бесконечно (расходится на малых углах).

Решение

Дифференциальное сечение рассеяния можно записать как элемент площади на плоскости, перпендикулярной потоку частиц:

$$d\sigma = b\,|db|\,d\phi, \qquad \phi \in [0, 2\pi], \qquad b \in [0, +\infty).$$

Здесь b — расстояние до оси симметрии, т. е. *прицельное расстояние*. Прицельное расстояние меняется до бесконечности, что соответствует тому, что частица, проходящая на сколь угодно большом расстоянии от кулоновского центра, отклонится от первоначального направления.

Уравнение траектории частицы в кулоновском потенциале (конического сечения) имеет вид (2.5.3) (см. с. 203)

$$r(\chi) = \frac{\mathrm{p}}{1 + e\,\cos(\chi - \alpha)}.$$

(!) Здесь χ — полярная координата в плоскости траектории частицы. Её не следует путать с координатой ϕ — полярной координатой на удалённой плоскости, перпендикулярной налетающему потоку.

Число e — *эксцентриситет* орбиты, p — *параметр* гиперболы. В нашем случае частицы налетают с бесконечности с ненулевой скоростью и их траектория должна быть гиперболой. Следовательно, $|e| > 1$.

Пусть частицы налетают с направления $\chi = 0$, тогда $r(0) = \infty$. Следовательно,

$$1 + e\,\cos(-\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = -\frac{1}{e}, \quad \sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{e^2}}.$$

Пусть угол χ растёт при движении частицы, тогда вторая асимптота соответствует условию

$$1 + e\,\cos(\chi_1 - \alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad \chi_1 = 2\alpha.$$

Таким образом, интересующая нас ветвь гиперболы соответствует $\chi \in (0, 2\alpha)$. При $e > 1$ знак параметра $\mathfrak{p}$ соответствует знаку кулоновского потенциала: $\mathfrak{p} > 0$ — притяжение, $\mathfrak{p} < 0$ — отталкивание.

При $\chi \to 0$ (частица вблизи асимптоты) имеем

$$r(\chi) = \frac{\mathfrak{p}}{1 + e\,\cos(\chi - \alpha)} \approx \frac{\mathfrak{p}}{1 + e\,(\cos\alpha + \chi \sin\alpha)} = \frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{e^2 - 1}\,\chi}.$$

С другой стороны, на самой асимптоте (которая проходит на расстоянии b от начала координат) имеем

$$r \approx \frac{b}{\sin\chi} \approx \frac{b}{\chi}.$$

Сравнив две последние формулы, получаем

$$b = \frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{e^2 - 1}} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{p} = b\sqrt{e^2 - 1} = -b\ \mathrm{tg}\,\alpha.$$

Момент импульса можно выразить через прицельное расстояние и скорость на бесконечности:

$$|\mathbf{L}| = bmv_\infty.$$

Если потенциальная энергия имеет вид $U(r) = -\frac{C}{r}$, то, как мы установили при исследовании задачи Кеплера (1.5.7) (см. с. 78),

$$\mathfrak{p} = \frac{|\mathbf{L}|^2}{mC} = b^2\frac{mv_\infty^2}{C} = b^2\frac{2\mathcal{E}}{C}.$$

Приравнивая два выражения для параметра $\mathfrak{p}$, получаем

$$b^2\frac{2\mathcal{E}}{C} = -b\ \mathrm{tg}\,\alpha \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{C}{2\mathcal{E}}\ \mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{C}{2\mathcal{E}}\ \mathrm{ctg}\,\tfrac{\theta}{2}; \tag{4.14.1}$$

$$\begin{aligned} d\sigma &= b\,|db|\,d\phi = \left(\frac{C}{2\mathcal{E}}\right)^2 \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,\frac{|d\alpha|}{\cos^2\alpha}\,d\phi = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{C}{2\mathcal{E}}\right)^2 \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\,\frac{|d\theta|}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\phi = \frac{1}{4}\left(\frac{C}{2\mathcal{E}}\right)^2 \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\,\cos\frac{\theta}{2}\,|d\theta|}{\sin^4\frac{\theta}{2}}\,d\phi. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$d\sigma = \left(\frac{C}{4\mathcal{E}}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\theta}{2}}.$$

При малых углах $\theta \to 0$ имеем

$$d\sigma \approx \left(\frac{C}{\mathcal{E}}\right)^2 \frac{\theta\,d\theta\,d\phi}{\theta^4}.$$

Соответственно, интеграл $\sigma = \int d\sigma$ расходится при малых θ, т.е. при больших прицельных расстояниях. Это вполне естественно: расходящийся при больших b интеграл $2\pi\int_0^\infty b\,db$ после замены переменной интегрирования должен остаться расходящимся.

Глава 4.15

Электродинамика в среде (с. 391)

4.15.1 Неоднозначность полей D и H

Тензор поляризации среды P^{ij}, а значит, и образующие его векторы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$ определены неоднозначно. Равенство

$$j^i_{\text{связ}} = c\partial_k P^{ik}, \quad P^{ik} = -P^{ki},$$

не нарушается, если к P^{ik} добавить дивергенцию от полностью антисимметричного тензора ϕ^{jkl} (поливектора степени 3):

$$P^{jk} \to P'^{jk} = P^{jk} + \partial_l \phi^{jkl},$$

а в криволинейных координатах

$$P^{jk} \to P'^{jk} = P^{jk} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_l(\sqrt{-g}\,\phi^{jkl}).$$

Тензор ϕ^{jkl} удобно задать через дуальный к нему ковектор f_i:

$$\phi^{jkl} = (*^{-1}f)^{jkl} = \varepsilon^{jklm} f_m,$$

а в криволинейных координатах

$$\phi^{jkl} = (*^{-1}f)^{jkl} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\varepsilon^{jklm} f_m.$$

Тогда преобразование принимает вид

$$P^{jk} \to P'^{jk} = P^{jk} + \varepsilon^{jklm}\partial_l f_m,$$

а в криволинейных координатах

$$P^{jk} \to P'^{jk} = P^{jk} + \frac{\varepsilon^{jklm}}{\sqrt{-g}}\partial_l f_m = P^{jk} + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^{jklm}}{\sqrt{-g}}(\partial_l f_m - \partial_m f_l).$$

На безкоординатном языке

$$P \to P' = P + *^{-1}df.$$

Если переписать это преобразование в трёхмерных обозначениях, положив $f^m = (f^0, \mathbf{f})$, то мы получим

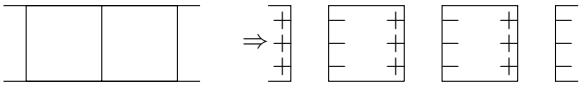
$$\mathbf{P} \to \mathbf{P}' = \mathbf{P} - \operatorname{rot}\mathbf{f}, \qquad \mathbf{M} \to \mathbf{M}' = \mathbf{M} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \operatorname{grad} f^0.$$

(*) Легко видеть, что всегда можно выбрать такую параметризацию, что $\mathbf{M} \equiv 0$. При такой параметризации $\mathbf{B} \equiv \mathbf{H}$. Чтобы такая параметризация была удобной, надо, чтобы среднее по времени значение $\mathbf{M}$ в каждой точке было равно нулю (иначе $\mathbf{P}$ со временем будет неограниченно нарастать). Таким образом, эта параметризация неудобна, например, в магнитостатике, но удобна при рассмотрении многих волновых процессов.

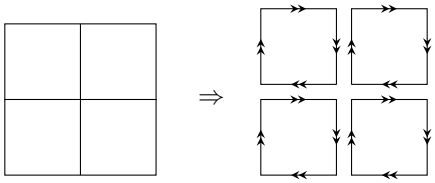
4.15.2 Откуда берётся неоднозначность полей P и M?

То, что дипольные моменты на единицу объёма определены неоднозначно, может показаться противоречащим физической интуиции, но на самом деле это легко проиллюстрировать на конкретных примерах.

Сначала рассмотрим непрерывный случай. Мы разбиваем среду на кубики, считаем дипольные моменты каждого и устремляем размер кубика к нулю. Казалось бы, всё однозначно. Но мы можем произвольным образом добавить на поверхностях разрезов поверхностные заряды и токи так, чтобы при объединении кубиков они взаимно компенсировались.



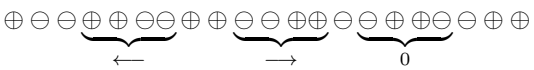
На границы ячеек можно добавить взаимно компенсирующиеся поверхностные заряды. При нулевой плотности зарядов можно получить ненулевой электрический дипольный момент на ячейку



На границы ячеек можно добавить взаимно компенсирующиеся поверхностные токи. При нулевой плотности токов можно получить ненулевой магнитный дипольный момент на ячейку

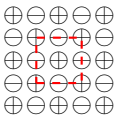
Казалось бы, если не вводить искусственно поверхностных зарядов и токов, то неоднозначность должна исчезнуть, однако реальные связанные заряды в среде дискретны, и существуют разные разбиения среды на элементарные ячейки, которые дают различные значения дипольных моментов.

Например, в следующей цепочке зарядов дипольный момент на одну элементарную ячейку направлен влево, вправо либо равен нулю в зависимости от того, как проведены границы ячеек:

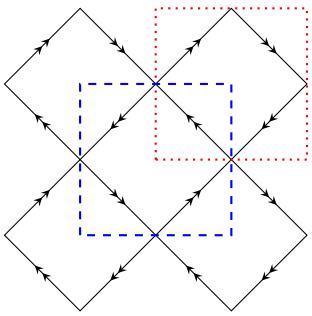


Поскольку для данной цепочки направления слева направо и справа налево равноправны, естественно выбрать границы ячеек так, чтобы дипольный момент ячейки равнялся нулю, но и другие варианты вполне корректны.

Это не надуманный пример. В кристалле обычной поваренной соли NaCl ионы Na^+ и Cl^- чередуются в шахматном порядке При этом, чтобы получить «естественный» нулевой дипольный момент на одну ячейку, приходится делить один ион между несколькими соседними ячейками.



Пересечение «естественной» (с нулевым дипольным моментом) элементарной ячейки с плоскостью кристалла NaCl. Часть ионов оказывается «разрезана» границами ячейки (пунктиром)



Картина связанных токов может давать разный магнитный дипольный момент на одну элементарную ячейку. В ячейке, ограниченной линией из чёрточек, ток течёт против часовой стрелки. В ячейке, ограниченной линией из точек, ток течёт по часовой стрелке. Таким образом магнитный дипольный момент при разном разбиении среды на элементарные ячейки направлен в противоположные стороны

(*) В приведённых примерах «естественные» значения поляризации среды могут быть получены путём усреднения дипольного момента элементарной ячейки по всем возможным её сдвигам.

4.15.3 Поля D и H и действие

Если переменные, описывающие среду, удаётся выразить через тензор электромагнитного поля, то соответствующее действие имеет вид

$$S[A_i(x)] = \int \left(L(F_{ij}) + \frac{1}{c^2} j^i_{\text{стор}} A_i(x) \right) d^4x, \qquad F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i.$$

Первая пара уравнений Максвелла, как обычно, выполняется в силу параметризации тензора F_{ij} через потенциалы. Уравнения поля совпадают со второй парой уравнений Максвелла:

$$\frac{\delta S}{\delta A_i} = \frac{\partial}{\partial x^j} \underbrace{\left(2 \frac{\partial L}{\partial F_{ij}} \right)}_{-\frac{1}{4\pi k_{\text{к}} c} H^{ij}} + \frac{1}{c^2} j^i_{\text{стор}} = 0 \;\Leftrightarrow\; \partial_j H^{ij} = \frac{4\pi k_{\text{к}}}{c} \mathbf{j}_{\text{стор}}.$$

Тензор H^{ij} выражается через производную от лагранжиана:

$$H^{ij} = -8\pi k_{\text{к}} c \frac{\partial L}{\partial F_{ij}}.$$

Лагранжиан $L(F_{ij})$ может также зависеть от некоторых величин, описывающих среду, например от поля скоростей среды.

При таком подходе 4-потенциал A_i оказывается аналогичен обобщённым координатам механической системы, тензор F_{ij} — обобщённым скоростям, а тензор H^{ij} — обобщённым импульсам.

Однако при всём удобстве лагранжева описания мы получаем обратимую динамику, тогда как динамика электромагнитного поля в среде, как правило, необратима за счёт диссипации энергии поля.

(!) Связь полей **D** и **H** с действием показывает, что предпочтительный способ их определения диктуется не столько кинематикой (как параметризация связанных зарядов и токов), сколько динамикой.

4.15.4 Эффект Вавилова–Черенкова

4.15.4.1 Если бы у нас была сверхсветовая частица...

Рассмотрим поле, создаваемое точечным зарядом, движущимся с постоянной сверхсветовой скоростью. Сначала пусть заряд движется с бесконечной скоростью вдоль оси x так, что ось x является его мировой линией. Запаздывающий потенциал такого заряда отличен от нуля в области, получаемой объединением световых конусов будущего всех точек оси x:

$$ct \geqslant \sqrt{y^2 + z^2}.$$

Потенциал имеет вид

$$A^i(t, \mathbf{r}) = k_{\text{к}} \frac{q\, \delta^i_x}{\sqrt{c^2 t^2 - y^2 - z^2}}, \qquad ct \geqslant \sqrt{y^2 + z^2}. \tag{4.15.1}$$

Эту формулу можно считать обобщением формулы для кулоновского потенциала точечной частицы. Только обычный кулоновский потенциал создаётся частицей, движущейся вдоль оси T, а этот — частицей, движущейся вдоль оси x.

Формулу (4.15.1) можно получить из формулы для потенциалов, выраженных через функцию Грина (3.8.4), интегрируя её вдоль оси x. Плотность тока имеет вид $j^i(t, \mathbf{r}) = qc\, \delta^i_x \delta(y)\, \delta(z)\, \delta(ct)$, запаздывающая функция Грина — $G_R(x,t) = k_{\text{к}} \delta(r - ct)/r$.

Любое пространственноподобное направление в пространстве Минковского можно выбрать в качестве направления оси x, так что общий случай сводится к (4.15.1) заменой координат.

Пусть s — интервал вдоль пространственноподобной мировой линии частицы, тогда

$$e^i = \frac{dX^i}{ds}, \qquad e^i e_i = 1,$$

— единичный вектор, касательный к мировой линии. Если мировая линия совпадает с осью x, то $e^i = \delta^i_x$.

Формула (4.15.1) может быть переписана как

$$A^i(x^j) = k_{\text{к}} \frac{q\, e^i}{\sqrt{(e^j x_j)^2 - x^j x_j}}. \tag{4.15.2}$$

Если два вектора равны друг другу в одной системе координат, то они равны и в любой системе координат. Так что формула (4.15.2) справедлива для точечного заряда, пролетающего в момент времени $t = 0$ через начало отсчёта с произвольной сверхсветовой скоростью.

Пусть вектор e^i лежит в плоскости $t - x$. Параметризуем его следующим образом:

$$e^i = (\operatorname{sh}\vartheta, \operatorname{ch}\vartheta, 0, 0) = (\tfrac{v}{c}\gamma, \gamma, 0, 0),$$

где $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$.

Здесь скорость сверхсветовой частицы обозначена $u = \frac{c^2}{v} > c$.

Перепишем формулу (4.15.2) через компоненты:

$$\begin{aligned}
\varphi(t,\mathbf{r}) &= k_{\text{к}} \frac{q\frac{v}{c}\gamma}{\sqrt{(x\gamma - vt\gamma)^2 + c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2}}, \\
A^x(t,\mathbf{r}) &= k_{\text{к}} \frac{q\gamma}{\sqrt{(x\gamma - vt\gamma)^2 + c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2}}, \\
A^y(t,\mathbf{r}) &= A^z(t,\mathbf{r}) = 0, \\
ct - \frac{v}{c}x &\geqslant \sqrt{y^2+z^2}.
\end{aligned}$$

Потенциалы имеют особенность на верхней (позже линии $ct - \frac{v}{c}x = 0$) половине поверхности:

$$(x\gamma - vt\gamma)^2 + c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \gamma^2(ct - \tfrac{v}{c}x)^2 - y^2 - z^2 = 0. \tag{4.15.3}$$

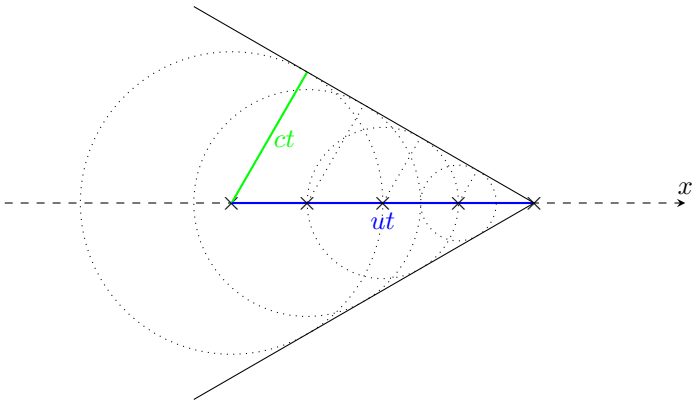
Зафиксировав момент времени $t = t_0$, мы получаем поверхность половины конуса (лучи, образующие конус, направлены назад по оси x) с вершиной в точке $x = ut = \frac{c^2}{v}t$, ось конуса совпадает с осью x:

$$\gamma^2(ct_0 - \tfrac{v}{c}x)^2 - y^2 - z^2 = 0.$$

Угол раствора конуса α таков, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \gamma\frac{v}{c} \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{c}{u} = \frac{c}{v}. \tag{4.15.4}$$

Этот результат легко получить из геометрических соображений.



Каждая точка оси x, когда через неё пролетает частица со скоростью $u > c$, становится источником сферической волны, распространяющейся со скоростью c. Конус с углом раствора α, $\sin\alpha = c/u = v/c$, касается волновых фронтов всех сферических волн. На данном чертеже $u/c = 3/2$. В акустике аналогичный эффект (*конус Маха*) наблюдается при движении тела со сверхзвуковой скоростью

Полученный конус представляет собой фронт электромагнитной волны. Таким образом, волна распространяется в направлениях, перпендикулярных поверхности конуса, под углом $\beta = \pi/2 - \alpha$ к оси конуса:

$$\sin\beta = \sqrt{1 - c^2/u^2} = \sqrt{1 - v^2/c^2} = 1/\gamma.$$

4.15.4.2 Черенковское излучение при движении частицы в среде

В случае однородной среды без дисперсии $\varepsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$ и уравнения Максвелла в среде сводятся к уравнениям Максвелла в вакууме следующей репараметризацией (3.15.4):

$$\mathbf{E}' = \sqrt{\varepsilon}\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\sqrt{\varepsilon}}, \qquad \mathbf{B}' = \sqrt{\mu}\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\mu}}, \qquad c' = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \qquad \rho'_{\text{стор}} = \frac{\rho_{\text{стор}}}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \mathbf{j}'_{\text{стор}} = \frac{\mathbf{j}_{\text{стор}}}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Скорость света в среде меньше скорости света в вакууме, так что заряженная частица может двигаться с такой «сверхсветовой» скоростью u, что $c' < u < c$, не нарушая законов специальной теории относительности.

Особенность электромагнитного поля на поверхности (4.15.3) не наблюдается, поскольку в реальных средах показатель преломления n зависит от частоты ω, соответственно от частоты зависит и угол раствора конуса:

$$\sin\alpha(\omega) = \frac{c'}{u} = \frac{c}{u\,n(\omega)}.$$

При больших частотах показатель преломления стремится к 1, что определяет максимальную частоту $\omega_{\max}$ черенковского излучения при данной скорости u:

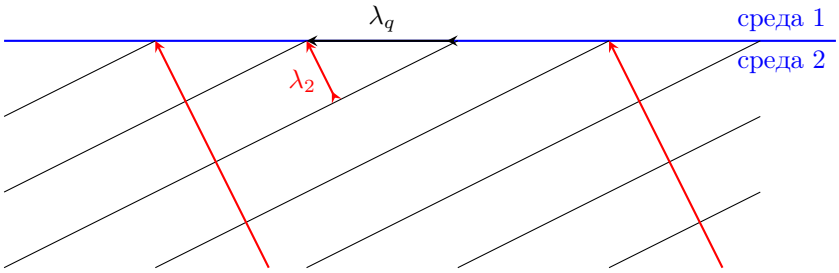
$$c\,n(\omega_{\max}) = u.$$

4.15.4.3 Черенковское излучение на границе двух сред

Может ли наблюдаться черенковское излучение в вакууме? Этот вопрос был поставлен на удивление поздно[1].

Заряженная частица не может двигаться со скоростью, превышающей скорость света в вакууме, но на самом деле нам нужна не частица, а только заряд. А зарядовая волна может двигаться в вакууме и со сверхсветовой скоростью. Так что черенковское излучение в вакууме возможно. Особенность электромагнитного поля на поверхности конуса (4.15.3) при этом не наблюдается, поскольку заряд, переносимый волной, размазан в пространстве.

Как создать сверхсветовую зарядовую волну? Поскольку информация не может передаваться со сверхсветовой скоростью, возбудить такую волну в источнике и подождать, пока она распространится, не получится. Но такая волна может быть возбуждена сразу вдоль всего пути распространения. Удобнее всего возбудить такую волну внешним синхронизирующим сигналом. Такой сигнал должен идти под углом с направлением распространения зарядовой волны, тогда можно будет получить сверхсветовую зарядовую волну.



На границу раздела двух сред со стороны среды-2 падает плоская монохроматическая волна. Изображены граница сред, волновые фронты, направления распространения волны, длина волны в среде-2 λ_2 и длина зарядовой волны λ_q

Плоская монохроматическая волна с периодом T падает на границу раздела двух сред со стороны среды-2. Длина волны (расстояние между волновыми фронтами) равна $\lambda_2 = c''T = \frac{cT}{n_2}$. Длина зарядовой волны, бегущей по поверхности раздела, составляет $\lambda_q = \frac{\lambda_2}{\sin\beta}$, где β — угол падения (угол между волновым фронтом и границей раздела сред или угол между нормалью и волновым вектором). Скорость зарядовой волны $u = \frac{c''}{\sin\beta} = \frac{c}{n_2\,\sin\beta} > c''$ всегда больше, чем скорость света в среде-2. Таким образом, зарядовая волна всегда испускает черенковское излучение в сторону среды-2.

Скорость зарядовой волны меньше или равна скорости света в среде-1, если $\frac{c}{n_2\,\sin\beta} \leqslant \frac{c}{n_1}$, т. е. если выполняется условие полного внутреннего отражения $\sin\beta \geqslant \frac{n_1}{n_2}$. Таким образом, зарядовая волна испускает черенковское излучение в сторону среды-1 в том случае, если падающая волна преломляется на границе сред.

Угол между волновым фронтом черенковского излучения и границей среды (он равен углу между нормалью к границе сред и направлением распространения черенковского излучения) вычисляется по формуле (4.15.4). Для среды-2 получаем

$$\sin\alpha_2 = \frac{c''}{u} = \sin\beta.$$

[1] Б. М. Болотовский, В. Л. Гинзбург, Эффект Вавилова–Черенкова и эффект Допплера при движении источников со скоростью больше скорости света в вакууме // УФН. 972. Т. 106, вып. 4. С. 577-592.

Для среды-1 имеем

$$\sin\alpha_1 = \frac{c'}{u} = \frac{c'\,\sin\beta}{c''} = \frac{n_1\,\sin\beta}{n_2} \;\Rightarrow\; n_1\sin\alpha_1 = n_2\sin\beta.$$

Мы видим, что углы, под которыми испускается черенковское излучение в среду-2 и среду-1, соответствуют закону отражения и закону преломления (*закону Снелля* (*Снелла, Снеллиуса*)) на границе двух сред. С учётом того, что источником в данной системе служит поверхностная волна зарядов и токов, распространяющаяся по границе сред, мы можем сделать вывод, *что отражённая и преломлённая на границе двух сред электромагнитная волна — это и есть черенковское излучение бегущей по границе сред сверхсветовой зарядовой волны.* Если одна из сред — вакуум, то мы получаем казавшееся невозможным *черенковское излучение в вакууме.*

Углублённый материал

Часть V

Механика классическая и квантовая как классическая теория поля

Можно рассматривать квантовую механику как обобщение классической механики, но возможен и противоположный взгляд: можно рассматривать квантовую механику как частный случай классической механики (как правило, с бесконечным числом степеней свободы, т.е. классической теории поля).

При таком рассмотрении, чтобы сравнить квантовую механику с классической, оказывается полезным классическую механику систем с конечным числом степеней свободы также превратить в классическую теорию поля за счёт введения ансамбля одинаковых невзаимодействующих систем.

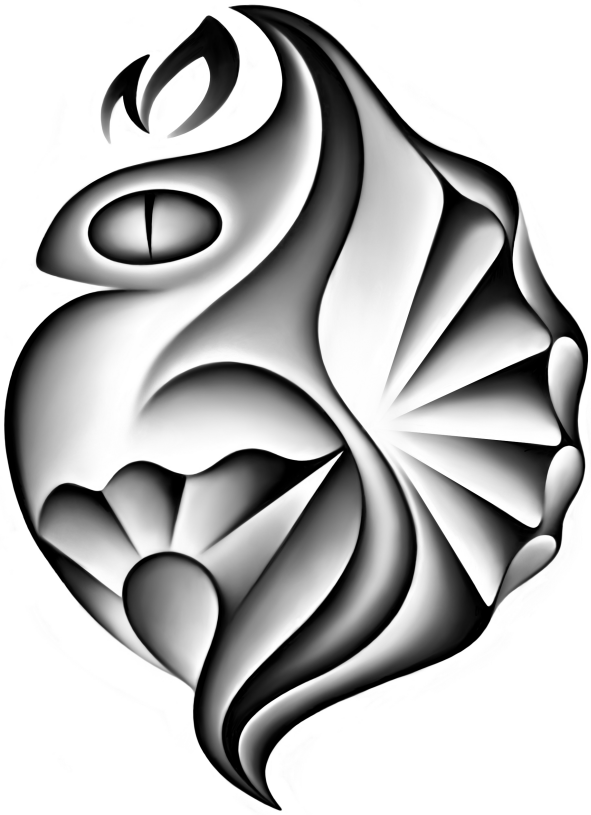


Рисунок Стеллы Риус «Пламенеющий квант»

Глава 5.1

Действие через множитель Лагранжа

В данной части мы будем строить функционалы действия и функционалы (или функции) Гамильтона для ряда уравнений классической и квантовой механики.

Исходный *функционал действия*, как правило, будет получаться с помощью метода множителей Лагранжа, после чего в некоторых случаях он будет преобразовываться с помощью отбрасывания полных производных и/или замены полевых переменных.

Пусть есть некоторое уравнение поля ϕ:

$$F[\phi] = 0,$$

тогда

$$S[\phi, f] = \int \langle f(t), F[\phi] \rangle \, dt.$$

Здесь мы предположили, что уравнение поля — равенство нулю элемента некоторого линейного пространства, $f(t)$ — *множитель Лагранжа*, являющийся элементом сопряжённого линейного пространства (пространства сопряжённых функционалов). Тогда вариационная производная по f даст исходное уравнение поля:

$$\delta_f S = \int \langle \delta f, F[\phi] \rangle \, dt \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta S}{\delta f} = F[\phi].$$

Вариация действия по ϕ даст уравнение поля для множителя Лагранжа f.

Рассматриваемые уравнения часто будут первого порядка по времени, причём разрешёнными относительно временно́й производной:

$$F[\phi] = \frac{\partial \phi}{\partial t} - G[\phi] = 0.$$

В этом случае

$$S[\phi, f] = \int \left(\left\langle f, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle - \langle f, G[\phi] \rangle \right) dt. \tag{5.1.1}$$

Мы получили действие, которое оказывается стандартным для гамильтонова формализма (см. § 1.4.2 «Гамильтонов формализм как частный случай лагранжева формализма», с. 63) вида $S[q(t), p(t)] = \int [\frac{dq}{dt} p - H(q, p, t)] \, dt$. Мы видим, что ϕ и f — *канонически сопряжённые переменные*. В качестве *функционала Гамильтона* выступает

$$\mathcal{H}[\phi(x, p), f(x, p)] = \langle f, G[\phi] \rangle. \tag{5.1.2}$$

Соответственно уравнения полей имеют вид уравнений Гамильтона (с заменой частных производных на вариационные):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta f}, \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi}.$$

(!) В роли координат и импульсов выступают ϕ и f! Переменные x и p при этом играют иную роль, в некоторых случаях они будут нумеровать компоненты векторов (обычно бесконечномерных) ϕ и f.

Данный метод мы применим к следующим уравнениям.

- *Классическое уравнение Лиувилля* (эволюция распределения вероятностей в фазовом пространстве, см. с. 513).
- *Классическое уравнение Гамильтона–Якоби* (эволюция распределения вероятностей в конфигурационном пространстве, см. с. 526).

- *Уравнение Шрёдингера* (эволюция чистого состояния квантовой системы, отчасти аналог уравнения Гамильтона–Якоби, см. с. 531).
- *Квантовое уравнение Лиувилля* (эволюция смешанного состояния квантовой системы, аналог классического уравнения Лиувилля, см. с. 519).

Глава 5.2

Классическая механика как вероятностная теория

Механика не исчерпывается кинематикой и динамикой. Входящие в уравнения динамические величины требуют *интепретации*, которая должна включать *теорию измерений. Интепретация классической механики* и *классическая теория измерений* в простейшем случае тривиальны и поэтому часто игнорируются. В этой главе мы рассмотрим классическую теорию измерений в более общем виде.

Для перехода от классической механики к квантовой механике и статистической физике полезно переформулировать классическую механику как вероятностную теорию.

Более того, классическая механика вовсе не столь детерминистична, как многие думают. Для большинства случаев гамильтонова динамика неустойчива, т.е. траектории в фазовом пространстве, для которых отклонения в начальных данных были малы, со временем экспоненциально удаляются друг от друга. Так, если отклонение двух траекторий друг от друга возрастает в 2 раза за время t_2, то продление времени прогноза на t_2 требует увеличения точности начальных данных в 2 раза, а на kt_2 — в 2^k раз. При достаточно малых k (обычно в пределах первых десятков) требуемая точность окажется неосуществимой на эксперименте (например, придётся учитывать квантовомеханическое соотношение неопределённостей) и/или выйдет за пределы применимости модели (например, придётся учитывать атомарную структуру объекта). Так что отодвинуть горизонт прогноза существенно дальше, чем 10–30–100t_2, как правило, невозможно.

До сих пор мы рассматривали начальное состояние гамильтоновой системы как точку в фазовом пространстве. В реальности за счёт конечной точности как начальных данных, так и самой модели эта «точка» имеет конечный размер и представляет собой распределение вероятности (облако вероятностей), которое со временем может не только перемещаться как целое, но и менять форму[1], постепенно растягиваясь, по мере того как первоначально близкие траектории удаляются друг от друга.

Мы уже определили *наблюдаемые величины* (*наблюдаемые*) как гладкие вещественные функции от точки фазового пространства и времени:

$$F = F(x^\alpha, p_\alpha, t).$$

Наблюдаемые образуют *классическую алгебру наблюдаемых*, на которой определены следующие операции:

- *умножение наблюдаемой* F *на вещественное число* α даёт наблюдаемую $\alpha \cdot F$;
- *сложение наблюдаемых* F и G даёт наблюдаемую $F + G$;
- *умножение наблюдаемых* F и G даёт наблюдаемую $F \circ G$;
- *скобка Пуассона* наблюдаемых F и G даёт наблюдаемую $\{F, G\}$.

Умножение наблюдаемых на число, сложение и умножение наблюдаемых в классической механике осуществляются поточечно: как соответствующие операции над функциями, например,

$$(F \circ G)(x, p, t) = F(x, p, t)\, G(x, p, t).$$

Для точно заданных в момент времени t значений x^α, p_α такая функция даёт вещественное число — значение наблюдаемой величины F в состоянии, задаваемом точкой фазового пространства с координатами x^α, p_α.

[1] Фазовый объём, в соответствии с теоремой Лиувилля, при этом сохраняется.

Пусть мы не знаем точку (x^α, p_α), а знаем только распределение вероятностей в данный момент времени

$$\rho(x^\alpha, p_\alpha, t),$$

для которого выполнено условие нормировки

$$\langle 1 \rangle_\rho = \int \rho(x^\alpha, p_\alpha, t)\, d^n x\, d^n p = 1.$$

Здесь n — число степеней свободы системы, $2n$ — размерность фазового пространства. Интеграл берётся по всему фазовому пространству. Плотность вероятности мы будем называть *состоянием гамильтоновой системы*.

(!) Иногда удобно отказываться от нормировки состояния на единицу и работать с ненормированными состояниями или с состояниями, нормированными на какое-то другое число.

Состояние также является элементом алгебры наблюдаемых. Сложение двух состояний или умножение состояния на число нарушают условие нормировки. Для состояний мы можем определить операцию среднего взвешенного двух и более состояний, которая даёт новое состояние

$$p \cdot \rho_1 + (1-p) \cdot \rho_2, \qquad p \in (0,1).$$

Состояние, которое не может быть представлено в виде среднего взвешенного двух различных состояний, называется *чистым состоянием гамильтоновой системы*. Все остальные состояния (кроме чистых) называются *смешанными состояниями*.

В классической механике чистые состояния имеют вид[2]

$$\rho_{x_0,p_0} = \delta^n(x-x_0)\cdot\delta^n(p-p_0) = \delta(x^1-x_0^1)\cdot\delta(x^2-x_0^2)\cdot\dots\cdot\delta(x^n-x_0^n)\cdot\delta(p_1-p_{10})\cdot\delta(p_2-p_{20})\cdot\dots\cdot\delta(p_n-p_{n0})$$

и соответствуют точке (x_0, p_0) фазового пространства, заданной с абсолютной точностью.

(!) В классической механике[3] любое состояние ρ может быть разложено по чистым состояния единственным образом:

$$\rho(x,p) = \int \rho(x_0,p_0)\, \rho_{x_0,p_0}(x,p)\, d^n x\, d^n p.$$

Состояния ρ_1 и ρ_2 будем называть *взаимоисключающими*, если

$$\langle \rho_1 \rangle_{\rho_2} = 0.$$

(!) Существует единственный максимальный (не допускающий пополнения) набор взаимоисключающих *классических* чистых состояний. В этот набор входят все чистые состояния, они нумеруются точками фазового пространства.

Если состояние системы задано как распределение вероятностей, то мы не можем предсказать результат конкретного измерения, но можем определить *среднее значение* $\langle F \rangle_\rho$ *наблюдаемой* F:

$$\langle F \rangle_\rho = \int F(x^\alpha, p_\alpha, t)\, \rho(x^\alpha, p_\alpha, t)\, d^n x\, d^n p.$$

Для чистого состояния ρ_{x_0,p_0} среднее от (достаточно гладкой) наблюдаемой F даёт её значение в точке (x_0, p_0) фазового пространства:

$$\langle F \rangle_{\rho_{x_0,p_0}} = \int F(x,p,t)\, \delta^n(x-x_0)\, \delta^n(p-p_0)\, d^n x\, d^n p = F(x_0,p_0,t). \tag{5.2.1}$$

Вероятность события также может быть определена через операцию взятия среднего. Пусть $\chi_A(x,p)$ — вероятность того, что событие A произойдёт для заданной точки (x,p) фазового пространства[4]. Тогда вероятность события A в состоянии ρ задаётся выражением

$$\langle \chi_A \rangle_\rho = \int \chi_A(x^\alpha, p_\alpha)\, \rho(x^\alpha, p_\alpha)\, d^n x\, d^n p = \langle \rho \rangle_{\chi_A}.$$

---

[2] Дельта-функция Дирака $\delta(x)$ вводится и рассматривается в п. 4.3.2.4 «Обобщённые функции». Пока нам достаточно считать, что δ-функция не является функцией, но её можно рассматривать как бесконечно узкий и бесконечно высокий пик единичной площади, локализованный около нуля. По существу определением дельта-функции является формула (5.2.1), если интеграл в ней понимать как предел интегралов, в которых пик, приближающий дельта-функцию, становится всё уже и выше (при неизменной единичной площади).

[3] В квантовой механике это не так!

[4] В простейшем случае наблюдаемая $\chi_A(x,p)$ принимает два значения — 0 (событие A при данных x, p не может произойти) и 1 (событие A при данных x, p произойдёт обязательно). В этом случае $\chi_A(x,p)$ является *характеристической функцией* некоторого множества A фазового пространства:

$$\chi_A(x,p) = \begin{cases} 1, & (x,p) \in A, \\ 0, & (x,p) \notin A. \end{cases}$$

(!) Все величины, которые могут быть наблюдаемы на эксперименте, выражаются через средние от наблюдаемых по состояниям. Сами по себе наблюдаемые и состояния физического смысла не имеют.

Пока мы рассматривали состояния и наблюдаемые в фиксированный момент времени и ни слова не сказали о том, как они эволюционируют со временем. Поскольку физический смысл имеют только средние величины, оказывается, что временна́я эволюция может быть описана разными способами (представлениями), которые мы рассмотрим далее.

Во всех представлениях временна́я эволюция задаётся функцией Гамильтона $H(x,p,t)$. При рассмотрении разных представлений мы будем пользоваться тем, что наблюдаемые величины и их скобки Пуассона — скаляры, т.е. не зависят от системы координат.

5.2.1 Идеальное классическое измерение

Состояние, заданное как распределение вероятностей в фазовом пространстве, может меняться не только по ходу эволюции системы, но и при измерении. Даже идеальное измерение, которое никак не возмущает систему, может повлиять на распределение вероятностей. Идеальное измерение считается происходящим мгновенно.

(!) Изменение состояния системы при *идеальном классическом измерении* описывает изменение нашего знания о системе и не связано с физическим влиянием на систему.

Точное измерение. Пусть мы произвели идеальное измерение, которое точно показало, что состояние системы описывается некоторой точкой фазового пространства, принадлежащей множеству U, но не дало никакой информации сверх этого. Тогда после такого измерения плотность вероятности за пределами множества U обнуляется, а отношения плотностей вероятностей для точек внутри U остаются неизменными.

Пусть $\chi_U(x,p)$ — *характеристическая функция* множества U:

$$\chi_U(x,p) = \begin{cases} 1, & (x,p) \in U, \\ 0, & (x,p) \notin U. \end{cases}$$

Функция $\chi_U(x,p)$ — это наблюдаемая, которая принимает значения 1 («да») и 0 («нет») в зависимости от того, был ли исход измерения «успешным» (была ли система обнаружена в множестве U).

При положительном исходе измерения состояние изменится следующим образом:

$$\rho(x,p) \to \rho_U(x,p) = \rho(x,p) \cdot \chi_U(x,p).$$

Новое состояние ρ_U будет нормировано на вероятность $P(U|\rho)$ того, что наше измерение даст положительный результат $(x,p) \in U$ при условии, что до измерения система была в состоянии ρ, т. е.

$$\langle 1 \rangle_{\rho_U} = \int \rho_U(x,p)\, d^n x\, d^n p = \int\limits_U \rho(x,p)\, d^n x\, d^n p = P(U|\rho) = \langle \chi_U \rangle_\rho.$$

Если $P(U|\rho) \neq 0$, то состояния ρ_U можно отнормировать на единицу:

$$\rho_{U\text{норм.}} = \frac{\rho_U}{P(U|\rho)} = \frac{\rho_U}{\langle 1 \rangle_{\rho_U}}.$$

При отрицательном исходе измерения наблюдаемой χ_U мы можем считать, что измерение наблюдаемой $\chi_{\overline{U}} = 1 - \chi_U$ закончилось положительным исходом.

Приближённое измерение. При приближённом идеальном измерении мы не знаем с достоверностью, попала ли система в множество U. Исход измерения задаётся не характеристической функцией χ_U некоторого множества U, а некоторой функцией[5] $\chi_{\text{fuzzy } U}(x,p)$, которая принимает значения от 0 до 1 и показывает, с какой вероятностью система с данными значениями x,p приведёт к положительному результату измерения.

Функция $\chi_{\text{fuzzy } U}(x,p)$ — это наблюдаемая, которая принимает значения от 1 («да») до 0 («нет») в зависимости от того, какова вероятность «успешного» исхода измерения для данной точки (x,p).

При положительном исходе измерения имеем

$$\rho(x,p) \to \rho_{\text{fuzzy } U}(x,p) = \rho(x,p) \cdot \chi_{\text{fuzzy } U}(x,p).$$

Состояние $\rho_{\text{fuzzy } U}$ также нормировано на вероятность положительного исхода измерения:

$$\langle 1 \rangle_{\rho_{\text{fuzzy } U}} = \int \rho_{\text{fuzzy } U}(x,p)\, d^n x\, d^n p = \int \rho(x,p)\, \chi_{\text{fuzzy } U}(x,p)\, d^n x\, d^n p = P(\text{fuzzy } U|\rho) == \langle \chi_{\text{fuzzy } U} \rangle_\rho.$$

[5] Такая функция задаёт *нечёткое множество* (*fuzzy set*), точка (x,p) принадлежат ему с вероятностью $\chi_{\text{fuzzy } U}(x,p)$.

При отрицательном исходе измерения наблюдаемой $\chi_{\text{fuzzy } U}$ мы можем считать, что измерение наблюдаемой $\chi_{\overline{\text{fuzzy } U}} = 1 - \chi_{\text{fuzzy } U}$ закончилось положительным исходом.

(!!!) За исключением перенормирования состояний после измерения, изменение состояний во времени как в результате измерения, так и в результате эволюции оказывается *линейным* вне зависимости от вида функции Гамильтона!

5.2.2 Представление Лиувилля

В представлении Лиувилля динамика описывается при помощи эволюции состояния (распределения вероятностей), тогда как зависимость наблюдаемых от времени никак не связана с эволюцией системы[6].

По умолчанию мы будем подразумевать, что наблюдаемые и состояния относятся к представлению Лиувилля, но в некоторых случаях мы будем помечать лиувиллевские объекты индексом «л».

Пусть задано начальное состояние $\rho(x_0, p_0, 0)$ и нам надо преобразовать его в состояние в момент времени t: $\rho(x, p, t)$.

Пусть фазовая траектория выражена через начальную точку фазового пространства (x_0, p_0) и текущее время t:

$$x(x_0, p_0, t), \quad p(x_0, p_0, t), \qquad x(x_0, p_0, 0) = x_0, \quad p(x_0, p_0, 0) = p_0. \tag{5.2.2}$$

Выразим также начальную точку фазовой траектории (x_0, p_0) через текущую точку (x, p) и текущее время t:

$$x_0(x, p, t), \quad p_0(x, p, t), \qquad x_0(x, p, 0) = x, \quad p_0(x, p, 0) = p. \tag{5.2.3}$$

Как переход (5.2.2) от (x_0, p_0) к (x, p), так и обратный переход (5.2.3) являются каноническими заменами координат, поэтому если одни из координат являются каноническими, то каноническими оказываются и другие координаты, т.е. скобка Пуассона в обоих случаях определяется каноническим способом.

Плотность вероятности не является скаляром, скаляром является вероятность, так что при замене координат в общем случае инвариантом является не сама плотность вероятности, а её произведение на элемент объёма:

$$\rho(x_0, p_0, 0)\, d^n x_0\, d^n p_0 = \rho(x, p, t)\, d^n x\, d^n p.$$

Поскольку замены (5.2.2) и (5.2.3) являются каноническими, они сохраняют фазовый объём, т.е. $d^n x_0\, d^n p_0 = d^n x\, d^n p$, а следовательно,

$$\rho(x, p, t) = \rho(x_0(x, p, t), p_0(x, p, t), 0). \tag{5.2.4}$$

Таким образом, плотность вероятности вдоль фазовой траектории системы остаётся постоянной:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\{\rho, H\}. \tag{5.2.5}$$

Это и есть *классическое уравнение Лиувилля*, описывающее эволюцию классического состояния.

Мы уже получили уравнение Лиувилля (5.2.5), но, поскольку кому-то из читателей этот вывод может показаться слишком простым, получим его ещё раз с помощью дифференцирования. Вычислим производную по времени от лиувиллевской плотности вероятности при $t = 0$:

$$\left.\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|_{x,p} = \frac{\partial \rho}{\partial x_0^\alpha}\frac{dx_0^\alpha}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial p_{\alpha 0}}\frac{dp_{\alpha 0}}{dt} = -\frac{\partial \rho}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{dt} - \frac{\partial \rho}{\partial p_\alpha}\frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial \rho}{\partial x^\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial \rho}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial x^\alpha} = -\{\rho, H\}.$$

Мы воспользовались тем, что в нулевой момент времени $x = x_0$, $p = p_0$, уравнениями Гамильтона, а также тем, что x_0, p_0 эволюционируют (по сравнению с x, p) назад по времени.

Полученное выражение через скобку Пуассона уже никак не привязано к нулевому моменту времени. Его удобно переписать через полную производную по времени от состояния:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \{\rho, H\} = 0.$$

(*) *В квантовой механике* аналогом представления Лиувилля является *представление Шрёдингера*.

[6] Зависимость лиувиллевской (связанной с представлением Лиувилля) наблюдаемой от времени может быть связана с её определением.

5.2.3 Действие для уравнения Лиувилля

Уравнение Лиувилля имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \{\rho, H\} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x^\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial \rho}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial x^\alpha} = 0.$$

Запишем действие вида (5.1.1), построенное с помощью множителя Лагранжа f:

$$\begin{aligned} S[\rho(x,p,t), f(x,p,t)] &= \int f\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \{\rho, H\}\right) d^n x\, d^n p\, dt = \\ &= \int f\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x^\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial \rho}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}\right) d^n x\, d^n p\, dt. \end{aligned}$$

Здесь ρ и f — канонически сопряжённые переменные. В качестве функционала Гамильтона выступает

$$\mathcal{H}[\rho(x,p), f(x,p)] = \int f\{\rho, H\}\, d^n x\, d^n p$$

(см. формулу (5.1.2)).

(!) В роли координат и импульсов выступают $\rho(x,p)$ и $f(x,p)$! Переменные x и p просто нумеруют их компоненты.

Вариационная производная по f даёт исходное уравнение Лиувилля для плотности вероятности $\rho(x,p,t)$, а вариационная производная по ρ (которая легко получается интегрированием по частям) даёт также уравнение Лиувилля, но для плотности вероятности $f(x,p,t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta f(x,p,t)} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \{\rho, H\}, \\ \frac{\delta S}{\delta \rho(x,p,t)} &= -\frac{\partial f}{\partial t} - \{f, H\}. \end{aligned}$$

Мы можем выбирать для плотностей вероятности при фиксированном времени $f(\cdot,\cdot,t)$ и $\rho(\cdot,\cdot,t)$ разные функциональные пространства, например, f и ρ оказываются полностью равноправными при выборе $f, \rho \in L_2$, поскольку для пространства квадратично-интегрируемых функций L_2 сопряжённое пространство совпадает с самим L_2. Такой выбор, однако, не позволяет рассматривать чистые состояния, которые описываются дельта-функциями и не попадают в L_2. Для того чтобы состояния ρ могли быть обобщёнными функциями, следует взять f из подходящего пространства основных функций. Например, если взять f из числа быстро убывающих со всеми производными бесконечно дифференцируемых функций $f \in \mathcal{S}$, то ρ попадает в пространство обобщённых функций медленного роста $\rho \in \mathcal{S}'$.

С помощью интегрирования по частям и отбрасывания полных производных действие можно переписать в виде, более симметричном по отношению к перестановке f и ρ:

$$S[f(x,p,t), \rho(x,p,t)] = \frac{1}{2}\int \left(f\frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho\frac{\partial f}{\partial t} + f\,\{\rho, H\} - \rho\,\{f, H\}\right) d^n x\, d^n p\, dt.$$

Соответствующий функционал Гамильтона имеет вид

$$\mathcal{H}[\rho(x,p), f(x,p)] = \frac{1}{2}\int \left(f\{\rho, H\} - \rho\{f, H\}\right)\, d^n x\, d^n p.$$

5.2.4 Представление Гамильтона

В представлении Гамильтона динамика описывается при помощи эволюции наблюдаемых, которая задаётся через скобку Пуассона с функцией Гамильтона:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}.$$

Гамильтонова (относящаяся к представлению Гамильтона) наблюдаемая задаётся выражением

$$F_{\text{г}}(x_0, p_0, t) = F(x(x_0, p_0, t), p(x_0, p_0, t), t).$$

Частная и полная производные по времени задаются следующими выражениями:

$$\frac{dF}{dt} = \left.\frac{\partial F(x(x_0,p_0,t), p(x_0,p_0,t), t)}{\partial t}\right|_{x_0,p_0} = \left.\frac{\partial F_{\text{г}}(x_0,p_0,t)}{\partial t}\right|_{x_0,p_0},$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \left.\frac{\partial F(x,p,t)}{\partial t}\right|_{x,p} = \left.\frac{\partial F_{\text{г}}(x_0(x,p,t),p_0(x,p,t),t)}{\partial t}\right|_{x,p}.$$

Гамильтонова наблюдаемая зависит от начальной точки в фазовом пространстве и времени, так что состояние (распределение вероятностей) нам нужно в начальный момент времени:

$$\rho_{\text{г}}(x_0,p_0) = \rho(x,p,0).$$

Таким образом, гамильтоново состояние не зависит от времени, если мы не производим измерений.

(*) *В квантовой механике* аналогом представления Гамильтона является *представление Гайзенберга.*

5.2.5 Представление взаимодействия

Представим функцию Гамильтона (*полную функцию Гамильтона*) в виде суммы двух слагаемых:

$$H(x,p,t) = H_0(x,p,t) + V(x,p,t).$$

Функцию H_0 будем называть *невозмущённой функцией Гамильтона*, а V — *возмущением.* Как возмущение часто рассматривается взаимодействие между подсистемами рассматриваемой системы, отсюда возникло название *представление взаимодействия.*

Для построения представления взаимодействия мы используем уже не два, а три набора координат (x,p), (x_0,p_0) и (x_1,p_1), а также две полные производные: $\frac{d_0}{dt}$ вдоль фазовых траекторий невозмущённой функции Гамильтона H_0 и $\frac{d}{dt}$ вдоль фазовых траекторий полной функции Гамильтона H.

Пусть фазовая траектория $(x(t),p(t))$ для полной функции Гамильтона H выражена через начальную точку фазового пространства (x_0,p_0) и текущее время t:

$$x(x_0,p_0,t), \quad p(x_0,p_0,t), \qquad x(x_0,p_0,0) = x_0, \quad p(x_0,p_0,0) = p_0. \tag{5.2.6}$$

Аналогично пусть фазовая траектория $x_1(t), p_1(t)$ для невозмущённой функции Гамильтона H_0 выражена через начальную точку фазового пространства (x_0,p_0) и текущее время t:

$$x_1(x_0,p_0,t), \quad p_1(x_0,p_0,t), \qquad x_1(x_0,p_0,0) = x_0, \quad p_1(x_0,p_0,0) = p_0. \tag{5.2.7}$$

Обе приведённые замены координат являются каноническими.

Применим к наблюдаемым и состояниям, заданным в представлении Лиувилля, одну и ту же каноническую замену переменных:

$$(x_0,p_0,t) \to (x_1(x_0,p_0,t),p_1(x_0,p_0,t),t).$$

Средние значения наблюдаемых при этом не изменятся, так что мы получим другое описание той же самой гамильтоновой динамики.

Для наблюдаемой F имеем

$$F_{\text{в}}(x_0,p_0,t) = F_{\text{л}}(x_1(x_0,p_0,t),p_1(x_0,p_0,t),t).$$

Это соответствует тому, что наблюдаемые эволюционируют под действием невозмущённой функции Гамильтона. Таким образом, наблюдаемая в представлении взаимодействия совпадает с наблюдаемой в представлении Гамильтона для невозмущённого гамильтониана.

Для состояния ρ получаем

$$\begin{aligned}\rho_{\text{в}}(x_0,p_0,t) &= \rho_{\text{л}}(x_1(x_0,p_0,t),p_1(x_0,p_0,t),t) = \\ &= \rho_{\text{г}}\Big(x_0\Big(x_1(x_0,p_0,t),p_1(x_0,p_0,t),t\Big),p_0\Big(x_1(x_0,p_0,t),p_1(x_0,p_0,t),t\Big)\Big).\end{aligned}$$

Поскольку вклад в эволюцию невозмущённого гамильтониана уже учтён в эволюции наблюдаемых, влияние возмущения на эволюцию системы учитывается в эволюции состояния.

Эволюция наблюдаемой в новых координатах описывается дифференциальным уравнением

$$\left.\frac{\partial F_{\text{в}}(x_0,p_0,t)}{\partial t}\right|_{x_0,p_0} = \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{\text{в}} + \{F_{\text{в}},H_0\}.$$

Выражение $\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{\text{в}}$ означает, что частная производная берётся в представлении Лиувилля, а потом делается переход к представлению взаимодействия.

Продифференцируем по времени состояние в представлении взаимодействия. Для упрощения записи обозначим все координаты на фазовом пространстве как $X^L = (x^\alpha, p_\alpha)$:

$$\left.\frac{\partial \rho_{\text{в}}(X_0,t)}{\partial t}\right|_{X_0} = \frac{\partial \rho_{\text{г}}}{\partial X_0^K}\left(\frac{\partial X_0^K}{\partial X_1^L}\frac{\partial X_1^L}{\partial t} + \frac{\partial X_0^K}{\partial t}\right) = \underbrace{\frac{\partial \rho_{\text{г}}}{\partial X_0^K}\frac{\partial X_0^K}{\partial t}}_{-\{\rho,H\}} + \underbrace{\frac{\partial \rho_{\text{г}}}{\partial X_0^K}\frac{\partial X_0^K}{\partial X_1^L}\frac{\partial X_1^L}{\partial t}}_{\{\rho,H_0\},\text{ очевидно, при } t=0},$$

$$\left.\frac{\partial \rho_{\text{в}}(x_0,p_0,t)}{\partial t}\right|_{x_0,p_0} = -\{\rho_{\text{в}}, V_{\text{в}}\}.$$

(!) Если положить $H_0 = H$, $V = 0$, то представление взаимодействия совпадёт с представлением Гамильтона.

(!) Если положить $H_0 = 0$, $V = H$, то представление взаимодействия совпадёт с представлением Лиувилля.

(*) *В квантовой механике* также имеется *представление взаимодействия.*

Глава 5.3

Переход к квантовой механике

Последовательное изложение квантовой механики выходит за пределы данного курса, тем не менее будет полезно изложить некоторые основные понятия квантовой механики в сравнении с классической механикой.

Мы не будем обсуждать тонкие вопросы *интерпретаций квантовой механики*, но общая структура теории, включая *квантовые кинематику, динамику и теорию измерений*, будет рассмотрена.

5.3.1 Квантовые наблюдаемые и квантовые состояния

При рассмотрении квантовой механики нам понадобятся бесконечномерные комплексные векторные пространства и операторы на этих пространствах. Тем не менее многие особенности теории можно объяснить на более простом случае комплексного конечномерного векторного пространства $\mathbb{C}^N$, в роли операторов на котором выступают комплексные квадратные матрицы $N \times N$. Квантовые наблюдаемые и состояния, как и классические, могут быть функциями времени.

Нам понадобится операция *эрмитова сопряжения*, которая является комбинацией комплексного сопряжения и транспонирования и обозначается символом $\dagger$ или $+$. Матрицы (и операторы) по принятой в квантовой механике традиции будут нести шляпку:

$$\hat{M}^\dagger = \hat{M}^+ = (\hat{M}^T)^*, \qquad M^\dagger_{ij} = M^*_{ji}.$$

Вектор-столбец мы будем обозначать ψ или $|\psi\rangle$ и называть *кет-вектором*. Сопряжённую столбцу вектор-строку мы будем обозначать $\psi^\dagger$ или $\langle\psi|$ и называть *бра-вектором*.

Произведение строки на столбец, т.е. *бра-кет* (от английского bracket — скобка) $\langle\phi|\psi\rangle$, — это число, являющееся скалярным произведением векторов ϕ и ψ.

Произведение столбца на строку, т.е. *кет-бра* $|\phi\rangle\langle\psi|$, — это оператор (матрица).

Квантовые наблюдаемые — эрмитовы матрицы $\hat{F}^\dagger = \hat{F}$.

Наблюдаемые образуют *квантовую алгебру наблюдаемых*, на которой определены следующие операции:

- *умножение наблюдаемой* $\hat{F}$ *на вещественное число* α даёт наблюдаемую $\alpha \cdot \hat{F}$;
- *сложение наблюдаемых* $\hat{F}$ и $\hat{G}$ даёт наблюдаемую $\hat{F} + \hat{G}$;
- *умножение наблюдаемых* $\hat{F}$ и $\hat{G}$ даёт наблюдаемую $\hat{F} \circ \hat{G} = \hat{G} \circ \hat{F} = \frac{\hat{F}\hat{G}+\hat{G}\hat{F}}{2}$;
- *квантовая скобка Пуассона* наблюдаемых $\hat{F}$ и $\hat{G}$ даёт наблюдаемую $\{\hat{F}, \hat{G}\}_\hbar = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{F}, \hat{G}]$.

Здесь умножение матриц без какого-либо знака произведения $\hat{F}\hat{G}$ — обычное матричное умножение, выражение $[\hat{F}, \hat{G}] = \hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F}$ — *коммутатор матриц* $\hat{F}$ и $\hat{G}$. Умножение наблюдаемых $\circ$ выбрано симметризованным, т.к. произведение двух некоммутирующих эрмитовых матриц $[\hat{F}, \hat{G}] \neq 0$ не будет эрмитовым: $(\hat{F}\hat{G})^\dagger = \hat{G}^\dagger\hat{F}^\dagger = \hat{G}\hat{F} \neq \hat{F}\hat{G}$. Такое симметризованное произведение неассоциативно, т.е. результат произведения может зависеть от расстановки скобок: $\hat{A} \circ (\hat{B} \circ \hat{C}) \not\equiv (\hat{A} \circ \hat{B}) \circ \hat{C}$.

Умножение наблюдаемых на число и сложение наблюдаемых в квантовой механике осуществляются поэлементно, как соответствующие операции над матрицами.

Квантовое состояние $\hat{\rho}$ (*матрица плотности*) также является элементом алгебры наблюдаемых, но при этом должно удовлетворять следующим условиям:

- $\operatorname{tr}\hat{\rho} = \langle\hat{1}\rangle_\rho = 1$ — *условие нормировки на единицу*;

• $\langle\psi|\hat{\rho}|\psi\rangle \geqslant 0\ \forall\psi \in \mathbb{C}^N$ — *нестрогая положительная определённость* (может обозначаться как $\hat{\rho} \geqslant 0$).

(!) Иногда удобно отказываться от нормировки состояния на единицу и работать с *ненормированными состояниями* или с состояниями, нормированными на какое-то другое число.

Сложение двух состояний или умножение состояния на число может нарушать условие нормировки. Для состояний мы можем определить операцию *среднего взвешенного* двух и более состояний, которая даёт новое состояние

$$p \cdot \hat{\rho}_1 + (1-p) \cdot \hat{\rho}_2, \qquad p \in (0,1).$$

Состояние, которое не может быть представлено в виде среднего взвешенного двух других состояний, называется *чистым состоянием*, все остальные состояния называются *смешанными состояниями*.

Чистое квантовое состояние — ортогональный проектор на некоторое направление, заданное вектором ψ, т. е. оно удовлетворяет дополнительному условию

$$\hat{\rho}^2 = \hat{\rho} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\psi \in \mathbb{C}^N : \hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|.$$

Таким образом, чистым состояниям можно сопоставить векторы из пространства $\mathbb{C}^N$. Аналогично любому ненулевому вектору ψ из $\mathbb{C}^N$ можно сопоставить чистое состояние

$$\hat{\rho}_\psi = \frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle}. \tag{5.3.1}$$

По этой причине пространство $\mathbb{C}^N$ в квантовой механике называют *пространством чистых состояний* (иногда просто пространством состояний), а его элементы — *векторы состояний*.

В силу равенства (5.3.1) векторы состояний, отличающиеся на ненулевой множитель, соответствуют одному и тому же состоянию. Условие нормировки вектора состояния на единицу $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ фиксирует вектор состояния не полностью, так как позволяет умножать вектор состояния на фазовый множитель $\mathrm{e}^{i\alpha}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$.

Состояния $\hat{\rho}_1$ и $\hat{\rho}_2$ будем называть *взаимоисключающими состояниями*, если

$$\langle\hat{\rho}_1\rangle_{\hat{\rho}_2} = \mathrm{tr}(\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2) = 0.$$

Для чистых состояний

$$\langle\hat{\rho}_\psi\rangle_{\hat{\rho}_\phi} = \mathrm{tr}(|\psi\rangle\langle\psi|\phi\rangle\langle\phi|) = \langle\psi|\phi\rangle\langle\phi|\psi\rangle = |\langle\psi|\phi\rangle|^2.$$

(!) Существует бесконечно много максимальных (не допускающих пополнения) наборов взаимоисключающих *квантовых* чистых состояний. Каждый такой набор соответствует ортогональному базису в векторном пространстве чистых состояний $\mathbb{C}^N$.

Среднее значение наблюдаемой $\hat{F}$ в состоянии $\hat{\rho}$ имеет вид

$$\langle\hat{F}\rangle_\rho = \mathrm{tr}(\hat{F}\hat{\rho}).$$

(!) В силу эрмитовости наблюдаемых среднее всегда вещественно.

Для чистого состояния получаем

$$\langle\hat{F}\rangle_\psi = \mathrm{tr}(\hat{F}\underbrace{|\psi\rangle\langle\psi|}_{\hat{\rho}_\psi}) = \langle\psi|\hat{F}|\psi\rangle.$$

5.3.2 Идеальное квантовое измерение

(!!!) За исключением перенормирования состояний после измерения, изменение состояний во времени как в результате измерения, так и в результате эволюции оказывается *линейным* вне зависимости от вида оператора Гамильтона!

Состояние, заданное как матрица плотности или вектор состояния, может меняться не только по ходу эволюции системы, но и при измерении. В квантовой механике даже идеальное измерение (оказывающее на систему минимальное возможное воздействие[1]) не может происходить без взаимодействия системы с прибором. Идеальное измерение считается происходящим мгновенно.

(!) Изменение состояния системы при идеальном квантовом измерении не может быть сведено к изменению нашего знания о системе, оно неизбежно связано с физическим влиянием на систему.

Даже для чистого состояния результат измерения наблюдаемой не является предопределённым, это видно хотя бы из того, что дисперсия случайной величины $\langle\hat{F}^2\rangle_\psi - \langle\hat{F}\rangle_\psi^2$ для чистого состояния может

[1] Что значит «минимальное возможное воздействие», будет объяснено ниже.

быть отлична от нуля. Для чистого состояния дисперсия обращается в нуль тогда и только тогда, когда вектор состояния является собственным вектором матрицы (оператора) $\hat{F}$. Таким образом, уравнение на собственные числа и собственные векторы

$$\hat{F}\psi_f = f \cdot \psi_f$$

позволяет определить:

- *спектр наблюдаемой*, т. е. множество собственных чисел, — набор значений, которые могут быть получены при измерении;
- *собственные состояния*, т. е. собственные векторы оператора наблюдаемой, — чистые состояния, в которых данная наблюдаемая определена однозначно.

Для наблюдаемой (в силу эрмитовости) собственные числа вещественны, а собственных векторов достаточно много, чтобы из них можно было построить ортогональный базис.

Проекционное измерение. Пусть мы произвели идеальное измерение, которое в случае, *если исходное состояние было чистым состоянием с определённым значением наблюдаемой величины*, даёт в результате именно это значение наблюдаемой и оставляет начальное состояние неизменным. Если предположить линейность конечного состояния по начальному, то мы получаем проекционное правило преобразования квантовых состояний.

Пусть для наблюдаемой F построен базис собственных векторов $\{\psi_{fa}\}$:

$$\hat{F}\psi_{fa} = f \cdot \psi_{fa}, \qquad \langle\psi_{f_1a_1}|\psi_{f_2a_2}\rangle = \delta_{f_1f_2}\,\delta_{a_1a_2}.$$

Здесь индекс a различает собственные векторы с одинаковым собственным числом.

Для каждого подмножества U спектра наблюдаемой можно построить оператор (ортогональный проектор на некоторое подпространство)

$$\hat{P}_U = \sum_{f\in U}\sum_a |\psi_{fa}\rangle\langle\psi_{fa}|, \qquad \hat{P}_U^\dagger = \hat{P}_U, \quad \hat{P}_U^2 = \hat{P}_U.$$

Пусть мы произвели идеальное измерение наблюдаемой F, которое точно показало, что $f \in U$, но не дало (и не могло дать[2]) никакой информации сверх этого. Тогда состояние изменяется следующим образом:

$$\hat{\rho} \to \hat{\rho}_U = \hat{P}_U\hat{\rho}\hat{P}_U.$$

Для чистого состояния получаем

$$\psi \to \psi_U = \hat{P}_U\psi.$$

Новое состояние $\hat{\rho}_U$ будет нормировано на вероятность того, что наше измерение даст положительный результат $f \in U$ при условии, что до измерения система была в состоянии $\hat{\rho}$, т.е.

$$\langle\hat{1}\rangle_{\hat{\rho}_U} = \mathrm{tr}(\rho_U) = \mathrm{tr}(\hat{P}_U\hat{\rho}\hat{P}_U) = \mathrm{tr}(\hat{\rho}\hat{P}_U^2) = \mathrm{tr}(\hat{\rho}\hat{P}_U) = P(f \in U|\hat{\rho}).$$

Для чистого состояния получаем

$$\langle\hat{1}\rangle_{\psi_U} = \langle\psi|\hat{P}_U|\psi\rangle = P(f \in U|\psi).$$

Если $P(f \in U|\hat{\rho}) \neq 0$, то состояния $\hat{\rho}_U$ можно отнормировать на единицу:

$$\hat{\rho}_{U\ \text{норм.}} = \frac{\hat{\rho}_U}{P(f \in U|\hat{\rho})} = \frac{\hat{\rho}_U}{\langle\hat{1}\rangle_{\hat{\rho}_U}}.$$

Для чистого состояния

$$\psi_{U\ \text{норм.}} = \frac{\psi_U}{\sqrt{P(f \in U|\psi)}} = \frac{\psi_U}{\sqrt{\langle\hat{1}\rangle_{\psi_U}}}.$$

Отрицательный исход измерения, т. е. случай, когда измерение показало, что $f \notin U$, но не дало (и не могло дать[3]) никакой информации сверх этого, мы можем описать проектором $\hat{P}_{\overline{U}} = \hat{1} - \hat{P}_U$.

Если измерение может иметь несколько взаимоисключающих исходов U_k, то получаем семейство ортогональных проекторов $\{\hat{P}_{U_k}\}$ на взаимно ортогональные подпространства[4]:

$$\sum_k \hat{P}_{U_k} = \hat{1}, \quad \hat{P}_{U_{k_1}}\hat{P}_{U_{k_2}} = \delta_{k_1k_2}\,\hat{P}_{U_{k_1}}.$$

[2] Даже нигде в термостате (окружении) никаких следов не осталось! В квантовой механике это важно.
[3] Даже нигде в термостате (окружении) никаких следов не осталось!
[4] Эти операторы задают *проекторнозначную меру*.

При исходе $f \in U_k$, *если результат измерения известен* (*селективное измерение*), состояние преобразуется в зависимости от номера исхода k:

$$\hat\rho \to \hat\rho_{U_k} = \hat P_{U_k}\hat\rho\hat P_{U_k}, \qquad \operatorname{tr}\hat\rho_{U_k} = P(f\in U_k|\hat\rho), \quad \sum_k P(f\in U_k|\hat\rho) = 1.$$

Если результат измерения неизвестен (*неселективное измерение*), то состояние преобразуется вне зависимости от k (которое всё равно неизвестно):

$$\hat\rho \to \hat\rho_{\text{н.с.}} = \sum_k \hat\rho_{U_k} = \sum_k \hat P_{U_k}\hat\rho\hat P_{U_k}, \qquad \operatorname{tr}\hat\rho_{\text{н.с.}} = 1.$$

Разница между селективным и неселективным измерением — знание наблюдателя об исходе измерения.

(ф) Неселективное измерение — это не всегда измерение. Это может быть взаимодействие системы с окружением, в результате которого информация о системе оказалась «записана» в окружении. Даже если мы не можем извлечь эту информацию технически, неселективное измерение всё равно произошло, если информация в принципе (без нарушения законов физики) доступна.

Приближённое измерение. Приближённое измерение с несколькими исходами описывается набором операторов $\{\hat M_k\}$, удовлетворяющих соотношениям[5]

$$\sum_i \hat M_k^\dagger \hat M_k = \hat 1, \tag{5.3.2}$$

$$\langle\psi|\hat M_k^\dagger\hat M_k|\psi\rangle \geqslant 0 \quad \forall\psi\neq 0. \tag{5.3.3}$$

Говорят, что такие операторы $\hat M_k^\dagger\hat M_k$ образуют *разбиение единицы*. В силу соотношений (5.3.2), (5.3.3) собственные числа операторов $\hat M_k^\dagger\hat M_k$ лежат в диапазоне $[0,1]$, т.е. эти операторы аналогичны функции $\chi_{\text{fuzzy }U}(x,p)$ из § 5.2.1 «Идеальное классическое измерение». При исходе измерения с номером k состояние преобразуется следующим образом:

$$\hat\rho \to \hat\rho_k = \hat M_k\hat\rho\hat M_k^\dagger.$$

Для чистого состояния имеем

$$\psi \to \psi_k = \hat M_k\psi.$$

Конечное состояние с номером k нормировано на вероятность исхода номер k:

$$\langle\hat 1\rangle_{\hat\rho_k} = \operatorname{tr}(\hat M_k\hat\rho\hat M_k^\dagger) = \operatorname{tr}(\hat\rho\hat M_k^\dagger\hat M_k) = P(k|\hat\rho).$$

Приближённое *неселективное измерение* не даёт информации о системе, но изменяет её состояние:

$$\hat\rho \to \hat\rho_{\text{н.с.}} = \sum_k \hat\rho_k = \sum_k \hat M_k\hat\rho\hat M_k^\dagger, \qquad \operatorname{tr}\hat\rho_{\text{н.с.}} = 1.$$

5.3.3 Действие для квантового уравнения Лиувилля

Матрица плотности $\hat\rho$ — самосопряжённый оператор, $\hat\rho^\dagger = \hat\rho$. Такие операторы образуют вещественное линейное пространство, скалярное произведение операторов такого вида можно записать через след их произведения:

$$(\hat f, \hat\rho) = \operatorname{tr}(\hat f\hat\rho).$$

Для операторов, действующих на конечномерном пространстве, этого достаточно. Для операторов, действующих на бесконечномерном пространстве, следует обсудить вопросы о существовании следа, линейном пространстве и сопряжённом линейном пространстве. Мы воздержимся от этого обсуждения.

Квантовое уравнение Лиувилля имеет вид

$$\frac{\partial\hat\rho}{\partial t} + \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat\rho,\hat H] = 0.$$

Соответствующее действие (5.1.1), полученное методом множителей Лагранжа, имеет вид

$$S[\hat\rho(t),\hat f(t)] = \int \operatorname{tr}\left(\hat f\,\frac{\partial\hat\rho}{\partial t} + \hat f\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat\rho,\hat H]\right)dt = \int \operatorname{tr}\left(\hat f\,\frac{\partial\hat\rho}{\partial t} + \frac{\hat f\hat\rho\hat H - \hat f\hat H\hat\rho}{\mathrm{i}\hbar}\right)dt.$$

[5] Эти соотношения задают *положительно определённую операторную меру* (*positive-operator valued measure — POVM*).

Функционал Гамильтона равен

$$\mathcal{H}[\hat{\rho},\hat{f}] = \operatorname{tr}\left(\hat{f}\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{\rho},\hat{H}]\right) = \frac{\operatorname{tr}(\hat{f}\hat{\rho}\hat{H} - \hat{f}\hat{H}\hat{\rho})}{\mathrm{i}\hbar}.$$

С учётом того, что под операцией взятия следа множители можно циклически переставлять, получаем, как и в классическом случае, два уравнения Лиувилля — для состояния $\hat{\rho}$ и для состояния $\hat{f}$:

$$\frac{\delta S}{\delta \hat{f}} = \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{\rho},\hat{H}], \qquad \frac{\delta S}{\delta \hat{\rho}} = -\frac{\partial \hat{f}}{\partial t} - \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{f},\hat{H}].$$

5.3.4 Представление Шрёдингера

В *представлении Шрёдингера* эволюция системы описывается как эволюция квантовых состояний.

По умолчанию мы будем подразумевать, что наблюдаемые и состояния относятся к представлению Шрёдингера, но в некоторых случаях будем помечать шрёдингеровские объекты индексом «ш».

Представление Шрёдингера — квантовый аналог *представления Лиувилля*. Все введённые для представления Лиувилля формулы переносятся на квантовый случай заменой классических наблюдаемых, состояний и скобок Пуассона на квантовые.

Эволюция состояния в представлении Шрёдингера задаётся *квантовым уравнением Лиувилля* (*уравнением фон Неймана*)

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\{\hat{\rho},\hat{H}(t)\}_{\hbar} = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{\rho},\hat{H}(t)].$$

Для чистых состояний оно сводится к *уравнению Шрёдингера*

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}(t)\,\psi.$$

В классической механике решение уравнения Лиувилля выражалось через задание эволюции чистых состояний системы (5.2.2) (точки в фазовом пространстве) $x(x_0,p_0,t)$, $p(x_0,p_0,t)$, а в представлении Шрёдингера решение уравнения фон Неймана также выражается через эволюцию чистых состояний, которая описывается унитарным[6] *оператором эволюции*:

$$\psi(t_2) = \hat{U}(t_2,t_1)\,\psi(t_1).$$

Оператор эволюции, как всякий унитарный (обратимый и сохраняющий скалярное произведение) оператор, — аналог матрицы поворота в пространстве $\mathbb{C}^N$.

Оператор эволюции удовлетворяет уравнениям

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t_2}\hat{U}(t_2,t_1) = \hat{H}(t_2)\,\hat{U}(t_2,t_1), \qquad \hat{U}(t_1,t_1) = \hat{1}.$$

Для оператора эволюции выполняются следующие свойства:

$$\hat{U}(t_3,t_2)\,\hat{U}(t_2,t_1) = \hat{U}(t_3,t_1), \quad \hat{U}^{\dagger}(t_2,t_1) = \hat{U}^{-1}(t_2,t_1) = \hat{U}(t_1,t_2).$$

В случае автономной системы (если оператор Гамильтона не зависит от времени) оператор эволюции выражается через операторную (или матричную) экспоненту:

$$\hat{U}(t_2,t_1) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}\cdot(t_2-t_1)\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}\cdot(t_2-t_1)\right)^k.$$

Эволюция шрёдингеровского состояния со временем записывается как

$$\hat{\rho}(t_2) = \hat{U}(t_2,t_1)\,\hat{\rho}(t_1)\,\hat{U}^{\dagger}(t_2,t_1) = \hat{U}(t_2,t_1)\,\hat{\rho}(t_1)\,\hat{U}(t_1,t_2). \tag{5.3.4}$$

Это уравнение является аналогом уравнения (5.2.4).

Оператор эволюции в некотором смысле более фундаментален, чем уравнения фон Неймана или Шрёдингера: он позволяет записать временну́ю эволюцию по *дискретному времени*.

[6] *Унитарный оператор* удовлетворяет условию $\hat{U}^{\dagger} = \hat{U}^{-1}$.

5.3.5 Представление Гайзенберга

В *представлении Гайзенберга* эволюция системы описывается как эволюция квантовых наблюдаемых.

Представление Гайзенберга — квантовый аналог *представления Гамильтона*. Все введённые для представления Гамильтона формулы переносятся на квантовый случай заменой классических наблюдаемых, состояний и скобок Пуассона на квантовые.

Гайзенберговские объекты, как и гамильтоновские, мы будем помечать индексом «г», путаницы это вызвать не может, т.к. эти представления аналогичны друг другу.

В представлении Гайзенберга динамика описывается при помощи эволюции наблюдаемых, которая задаётся через квантовую скобку Пуассона с оператором Гамильтона:

$$\frac{d\hat{F}_{\text{г}}}{dt} = \left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial t}\right)_{\text{г}} + \{\hat{F}_{\text{г}}, \hat{H}\}_{\hbar} = \frac{\partial \hat{F}_{\text{г}}}{\partial t} + \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{F}_{\text{г}}, \hat{H}].$$

Выражение $\left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial t}\right)_{\text{г}} = \frac{\partial \hat{F}_{\text{г}}}{\partial t}$ означает, что производная по времени берётся в представлении Шрёдингера, после чего делается переход к представлению Гайзенберга.

Гайзенберговское состояние не зависит от времени, если мы не проводим измерений:

$$\hat{\rho}_{\text{г}} = \hat{\rho}_{\text{ш}}(0).$$

Тем самым при переходе от шрёдингеровского представления к гайзенберговскому начальный (нулевой) момент времени оказывается выделен. Для упрощения записи будем опускать в аргументах оператора эволюции начальный момент времени, если он равен нулю:

$$\hat{U}(t,0) = \hat{U}(t).$$

Гайзенберговская наблюдаемая выражается через шрёдингеровскую с помощью оператора эволюции:

$$\hat{F}_{\text{г}}(t) = \hat{U}^{\dagger}(t)\,\hat{F}_{\text{ш}}(t)\,\hat{U}(t).$$

Средние величины в гайзенберговском и шрёдингеровском представлениях совпадают:

$$\begin{aligned}\langle \hat{F}_{\text{г}}(t)\rangle_{\hat{\rho}_{\text{г}}} &= \operatorname{tr}\Big(\hat{F}_{\text{г}}(t)\,\hat{\rho}_{\text{г}}\Big) = \operatorname{tr}\Big(\hat{U}^{\dagger}(t)\,\hat{F}_{\text{ш}}(t)\,\hat{U}(t)\,\hat{\rho}_{\text{ш}}(0)\Big) = \\ &= \operatorname{tr}\Big(\hat{F}_{\text{ш}}(t)\,\underbrace{\hat{U}(t)\,\hat{\rho}_{\text{ш}}(0)\,\hat{U}^{\dagger}(t)}_{\hat{\rho}_{\text{ш}}(t)}\Big) = \operatorname{tr}\Big(\hat{F}_{\text{ш}}(t)\,\hat{\rho}_{\text{ш}}(t)\Big) = \langle \hat{F}_{\text{ш}}(t)\rangle_{\hat{\rho}_{\text{ш}}(t)}.\end{aligned}$$

Если вспомнить, что оператор эволюции — аналог матрицы вращения, то представление Гайзенберга отличается от представления Шрёдингера тем, что все объекты задаются во вращающемся базисе так, что эволюция (вращение) состояний полностью компенсируется.

5.3.6 Представление взаимодействия

Представим оператор Гамильтона в виде суммы двух слагаемых — *невозмущённого гамильтониана* и *возмущения*:

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0(t) + \hat{V}(t).$$

Для *полного гамильтониана* $\hat{H}$ имеется *полный оператор эволюции* $\hat{U}(t_1,t_1)$:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t_2}\hat{U}(t_2,t_1) = \hat{H}(t_2)\,\hat{U}(t_2,t_1), \qquad \hat{U}(t_1,t_1) = \hat{1}.$$

Для *невозмущённого гамильтониана* $\hat{H}_0$ имеется *невозмущённый оператор эволюции* $\hat{U}_0(t_1,t_1)$:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t_2}\hat{U}_0(t_2,t_1) = \hat{H}_0(t_2)\,\hat{U}_0(t_2,t_1), \qquad \hat{U}_0(t_1,t_1) = \hat{1}.$$

Далее если оператор эволюции имеет только один аргумент, это означает, что второй аргумент зафиксирован:

$$\hat{U}(t) := \hat{U}(t,0), \qquad \hat{U}_0(t) := \hat{U}_0(t,0), \qquad \hat{U}_{\text{в}}(t) := \hat{U}_{\text{в}}(t,0).$$

Наблюдаемые эволюционируют так же, как в гайзенберговском представлении для невозмущённого гамильтониана:

$$\frac{d\hat{F}_{\text{в}}}{dt} = \left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial t}\right)_{\text{в}} + \{\hat{F}_{\text{в}}, \hat{H}_0\}_{\hbar} = \frac{\partial \hat{F}_{\text{в}}}{\partial t} + \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{F}, \hat{H}_0]; \quad \hat{F}_{\text{в}}(t) = \hat{U}_0^{\dagger}(t)\,\hat{F}_{\text{ш}}(t)\,\hat{U}_0(t).$$

Вклад возмущения учитывается через эволюцию состояния:

$$\hat\rho_{\text{в}}(t) = \hat U_0^\dagger(t)\,\hat\rho_{\text{ш}}(t)\,\hat U_0(t) = \underbrace{\hat U_0^\dagger(t)\,\hat U(t)}_{\hat U_{\text{в}}(t)}\,\hat\rho_{\text{ш}}(0)\,\underbrace{\hat U^\dagger(t)\,\hat U_0(t)}_{\hat U_{\text{в}}^\dagger(t)}.$$

Выражение

$$\hat U_{\text{в}}(t) = \hat U_0^\dagger(t)\,\hat U(t)$$

называют *оператором эволюции в представлении взаимодействия*. Имеем

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t_2}\hat U_{\text{в}}(t_2,t_1) = \hat V_{\text{в}}(t_2)\,\hat U_{\text{в}}(t_2,t_1), \qquad \hat U_{\text{в}}(t_1,t_1) = \hat 1.$$

Состояние эволюционирует в соответствии с *уравнением фон Неймана в представлении взаимодействия*, в котором роль гамильтониана играет оператор возмущения в представлении взаимодействия:

$$\frac{\partial\hat\rho_{\text{в}}}{\partial t} = -\{\hat\rho_{\text{в}},\hat V_{\text{в}}\}_\hbar = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat\rho_{\text{в}},\hat V_{\text{в}}].$$

Для чистого состояния уравнение фон Неймана можно заменить на *уравнение Шрёдингера в представлении взаимодействия*

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi_{\text{в}}}{\partial t} = \hat V_{\text{в}}(t)\,\psi_{\text{в}}.$$

Если вспомнить, что оператор эволюции — аналог матрицы вращения, то представление взаимодействия отличается тем, что все объекты задаются во вращающемся базисе так, что компенсируется вклад в эволюцию (вращение) состояний невозмущённого гамильтониана.

(!) Если положить $\hat H_0 = \hat H$, $\hat V = 0$, то представление взаимодействия совпадёт с представлением Гайзенберга.

(!) Если положить $\hat H_0 = 0$, $\hat V = \hat H$, то представление взаимодействия совпадёт с представлением Шрёдингера.

5.3.7 Каноническое квантование

В классической механике эволюция системы определяется функцией Гамильтона, которая представляет собой энергию, выраженную через обобщённые координаты и импульсы. Функцию Гамильтона мы, как правило, можем достаточно легко восстановить по описанию системы. В квантовой механике вместо функции Гамильтона нужен оператор Гамильтона (гамильтониан). Откуда его взять?

Если квантовая система имеет классический аналог, то можно ожидать, что должна существовать некоторая процедура, которая позволила бы по классической функции Гамильтона построить квантовый гамильтониан. Такая процедура называется *квантованием*.

(!) Квантование связано с большим количеством математических тонкостей, особенно для систем с бесконечным числом степеней свободы (полей). Для первого знакомства мы проигнорируем почти все эти тонкости. С точки зрения чистой математики мы оставляем огромные дыры в изложении.

Мы рассмотрим простейший случай квантования — *каноническое квантование* для невырожденных гамильтонианов.

Поскольку функция Гамильтона — функция от обобщённых координат и импульсов, хотелось бы просто заменить координаты и импульсы на операторы, после чего подставить их в функцию Гамильтона и получить оператор Гамильтона. Если функция Гамильтона аналитическая (хорошо определена через ряд Тейлора), то её можно вычислить и для операторных аргументов.

Канонические координаты и импульсы в гамильтоновом формализме удовлетворяют соотношениям

$$\{x^\alpha,x^\beta\} = \{p_\alpha,p_\beta\} = 0, \qquad \{x^\alpha,p_\beta\} = \delta^\alpha_\beta.$$

Поскольку у нас есть квантовая скобка Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_\hbar = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\cdot,\cdot]$, мы можем переписать эти соотношения для операторов и получить *канонические коммутационные соотношения*

$$[x^\alpha,x^\beta] = [p_\alpha,p_\beta] = 0, \qquad [x^\alpha,p_\beta] = \mathrm{i}\hbar\delta^\alpha_\beta. \tag{5.3.5}$$

Осталось подобрать операторы, удовлетворяющие этим соотношениям, и можно подставлять их в функцию Гамильтона.

К сожалению, в конечномерном пространстве $\mathbb{C}^N$ подобрать набор операторов, которые удовлетворяли бы каноническим коммутационным соотношениям (5.3.5), невозможно. Приходится использовать бесконечномерные пространства состояний[7]. Такие пространства в квантовой механике возникают как пространства квадратично-суммируемых последовательностей l_2 или пространства квадратично-интегрируемых функций L_2 (на разных областях определения), но на самом деле все они устроены одинаково (изоморфны).

Идейно использование бесконечномерного пространства состояний в квантовой механике не сильно отличается от использования конечномерного пространства $\mathbb{C}^N$, однако технически оно сопряжено с большим количеством математических нюансов (некоторые из них могут иметь и физический смысл). Неслучайно работа с конечномерными линейными пространствами относится к *линейной алгебре*, тогда как работа с бесконечномерными пространствами l_2 и L_2 — к *функциональному анализу*.

(*) Перечислим некоторые сложности, возникающие в бесконечномерном случае.

- **Вопросы сходимости**: конечная сумма, например скалярное произведение в конечномерном пространстве, сходится всегда, а интеграл или бесконечномерная сумма могут расходиться.

- **Области определения**: действие оператора на бесконечномерный вектор состояния не всегда определено, а если и определено, то результат может выйти за пределы нашего функционального пространства. Например, пусть функция $\psi(x)$ квадратично-интегрируема, т. е. интеграл $\int |\psi(x)|^2\,dx$ сходится, но функция $x\cdot\psi(x)$ может не быть квадратично-интегрируемой, т. е. интеграл $\int |x\cdot\psi(x)|^2\,dx$ может расходиться. В этом случае функция $\psi(x)$ не попадает в область определения оператора умножения функции на x. Однако область определения этого оператора плотна в пространстве L_2. Ситуация с оператором $-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ ещё тоньше: мы можем его доопределить на некоторых недифференцируемых функциях, но не все эти доопределения одинаково хороши с точки зрения квантовой теории.

- **Бесконечномерное пространство изоморфно своему подпространству.** Например, какое бы конечное число базисных векторов мы ни выкинули из бесконечного базиса, размерность не изменится. Из-за этого условие $\hat{U}^\dagger\hat{U}=\hat{1}$ уже не является достаточным для того, чтобы оператор $\hat{U}$ был унитарным. Надо дополнительно потребовать обратимость оператора $\hat{U}$ или выполнение условия $\hat{U}\hat{U}^\dagger=\hat{1}$.

- **Непрерывный спектр.** Собственные векторы непрерывного спектра не будут попадать в пространство L_2 или l_2, однако такие собственные векторы часто важны (таковы волны де Бройля — собственные функции оператора импульса). Приходится вводить *оснащённое гильбертово пространство* (см. п. 4.3.2.4 «Обобщённые функции* (л)», с. 430) или использовать другие ухищрения, чтобы работать с такими состояниями.

Так что же мы обычно делаем на практике?

1. Любые операторы, удовлетворяющие каноническим коммутационным соотношениям (5.3.5), можно объявить координатами и импульсами.

2. Мы можем просто взять операторы координат $\hat{x}^\alpha$ и импульсов $\hat{p}_\alpha$ как абстрактные символы, для которых выполняются канонические коммутационные соотношения (5.3.5), выразить через них все остальные операторы в задаче и свести все возникающие коммутаторы к исходным каноническим коммутаторам.

3. Мы можем взять в качестве пространства чистых состояний пространство комплекснозначных ограниченных[8] гладких функций на конфигурационном пространстве системы $\psi(x)$. В качестве операторов обобщённых координат можно взять операторы умножения на обобщённые координаты:

$$\hat{x}^\alpha\psi(x)=x^\alpha\cdot\psi(x).$$

В качестве обобщённых импульсов[9] можно взять операторы дифференцирования по обобщённым координатам, умноженные на $-\mathrm{i}\hbar$:

$$\hat{p}_\alpha\psi(x)=-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\psi(x).$$

При подстановке операторов координат и импульсов в функцию, задающую классическую наблюдаемую, возникает некоторая неоднозначность, связанная с тем, что координата не коммутирует со «своим»

[7] Это комплексные бесконечномерные *сепарабельные гильбертовы пространства. Гильбертовы пространства — полные* пространства со скалярным произведением. Полнота пространства означает, что всякая фундаментальная последовательность имеет предел. Сепарабельность пространства означает, что существует всюду плотное счётное множество.

[8] В практических задачах вместо возни с квадратичной интегрируемостью и оснащёнными гильбертовыми пространствами часто можно потребовать просто ограниченность функций.

[9] Луи де Бройль догадался, что состоянию с определённым импульсом $\mathbf{p}_0$ соответствует волновая функция $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\mathbf{p}_0\mathbf{r}}{\hbar}}$. Тем самым он угадал собственные числа и собственные векторы для операторов $\hat{p}_\alpha$, что позволяет однозначно воспроизвести эти операторы.

импульсом. Больших проблем это обычно не вызывает. Главное — следить, чтобы получившийся оператор квантовой наблюдаемой оказался эрмитовым.

Глава 5.4

Уравнение Гамильтона–Якоби как описание ансамбля невзаимодействующих систем

Переменную действия в уравнении Гамильтона–Якоби обозначим $s(x,t)$, чтобы не путать с функционалом действия.

Уравнение Гамильтона–Якоби описывает не одну, а целое семейство траекторий динамической системы. В области расширенного конфигурационного пространства, где определено решение уравнения Гамильтона–Якоби, через каждую точку проходит своя траектория. Поэтому мы можем интерпретировать уравнение Гамильтона–Якоби как описание ансамбля невзаимодействующих между собой одинаковых систем, каждая из которых описывается исходной функцией Гамильтона $H(x,p,t)$.

Такое описание неполно, для полного описания следует к функции $s(x,t)$ добавить функцию $\rho(x,t)$ — *плотность числа систем* в конфигурационном пространстве в зависимости от времени.

Эволюция $\rho(x,t)$ задаётся условием постоянства числа подсистем, которое может быть выражено как *уравнение непрерывности*:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \partial_\alpha(\rho v^\alpha) = 0, \tag{5.4.1}$$

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \quad v^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}.$$

В простейшем случае, когда

$$H(x,p,t) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(x),$$

уравнение непрерывности имеет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\left(\rho\,\frac{\mathbf{p}}{m}\right) = 0.$$

Полную энергию ансамбля невзаимодействующих систем можно задать интегрированием энергии одной системы по конфигурационному пространству с учётом плотности ρ:

$$\mathcal{E}_{\text{анс.}} = \int H(x^\alpha, \partial_\alpha s, t)\,\rho(x^\alpha,t)\,d^n x.$$

Здесь мы переходим от механики с конечным числом степеней свободы к теории поля (бесконечномерной механике).

Энергию ансамбля можно попробовать рассматривать как *функционал Гамильтона* для ансамбля систем:

$$\mathcal{H}[s(x),\rho(x)] = \int H(x^\alpha, \partial_\alpha s, t)\,\rho(x^\alpha)\,d^n x. \tag{5.4.2}$$

Это не функция Гамильтона, а функционал, так как энергия в момент времени t выражается не через дискретный набор координат x^α и импульсов p_α, а через функции $s(x)$, $\rho(x)$. Таким образом, точка конфигурационного пространства x выступает в роли индекса α, который нумерует обобщённые координаты и импульсы. В роли частных производных $\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}$, $\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}$ могут выступать функциональные производные $\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta s(x)}$, $\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\rho(x)}$.

Проварьируем функционал $\mathcal{H}[s(x),\rho(x)]$ по $s(x)$ и $\rho(x)$:

$$\delta\mathcal{H} = \int\Big(H\,\delta\rho + \rho\,\delta H\Big)\,d^n x = \int\left(H\,\delta\rho + \rho\,\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\,\partial_\alpha(\delta s)\right)\,d^n x = \int\left(H\,\delta\rho - \partial_\alpha\left(\rho\,\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right)\,\delta s\right)\,d^n x.$$

Таким образом,

$$\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\rho(x)} = H(x,\partial s,t), \qquad \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta s(x)} = -\partial_\alpha\left(\rho(x)\,\frac{\partial H(x,\partial s,t)}{\partial(\partial_\alpha s)}\right).$$

Чтобы уравнения Гамильтона воспроизвели уравнение Гамильтона–Якоби и уравнение непрерывности, можно считать, что функция $\rho(x)$ задаёт плотность обобщённых координат, а функция $s(x)$ — обобщённые импульсы. Полевой аналог уравнений Гамильтона (с заменой частных производных функциональными) в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial s(x)}{\partial t} = -\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\rho(x)} = -H(x,\partial s,t),$$
$$\frac{\partial\rho(x)}{\partial t} = \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta s(x)} = -\partial_\alpha\left(\rho(x)\,\frac{\partial H(x,\partial s,t)}{\partial(\partial_\alpha s)}\right).$$

Другой вариант[1] — считать обобщёнными координатами $-s(x)$, а плотностью обобщённых импульсов[2] $\rho(x)$:

$$\frac{\partial(-s(x))}{\partial t} = \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\rho(x)} = H(x,\partial s,t),$$
$$\frac{\partial\rho(x)}{\partial t} = -\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta(-s(x))} = -\partial_\alpha\left(\rho(x)\,\frac{\partial H(x,\partial s,t)}{\partial(\partial_\alpha s)}\right).$$

5.4.1 Действие для уравнения Гамильтона–Якоби

С учётом того, что ρ и s — канонические переменные, мы можем преобразовать действие вида (5.1.1) к форме

$$S[\rho(x,t),s(x,t)] = \int\left(s\,\frac{\partial\rho}{\partial t} - \rho\,H(x,\partial s,t)\right)d^n x\,dt. \tag{5.4.3}$$

В случае, когда $H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + U(x)$, получаем

$$S[\rho(x,t),s(x,t)] = \int\left(s\,\frac{\partial\rho}{\partial t} - \rho\,\frac{(\nabla s)^2}{2m} - \rho\,U(x)\right)d^n x\,dt.$$

Вариация данного действия даёт уравнение непрерывности и уравнение Гамильтона–Якоби.

Функционал Гамильтона в данном случае (как мы показали выше) имеет смысл энергии, усреднённой по распределению ρ.

[1] **(**)** Этот вариант (если сопоставлять с квантовым случаем) лучше соответствует стандартным в механике переменным действие-угол.

[2] В любом случае $\rho(x)$ лучше считать *плотностью* обобщённых координат или обобщённых импульсов, т.к. ρ при замене координат ведёт себя как плотность.

Глава 5.5

Квантовый аналог уравнения Гамильтона–Якоби

5.5.1 Предел малой $\hbar$

Уравнение Шрёдингера, как и уравнение Гамильтона–Якоби, можно интерпретировать как описание ансамбля одинаковых систем. *Плотность числа систем* в конфигурационном пространстве связана с модулем значения волновой функции в данной точке:

$$\rho(x,t) = \psi^*(x,t)\cdot\psi(x,t) = |\psi(x,t)|^2.$$

Мы можем параметризовать комплексную волновую функцию $\psi(x,t)$ через две вещественные функции $\rho(x,t)$ и $s(x,t)$:

$$\psi(x,t) = \pm\sqrt{\rho(x,t)}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}s(x,t)}. \tag{5.5.1}$$

Множитель $\frac{1}{\hbar}$ в показателе экспоненты добавлен для того, чтобы функция $s(x,t)$ имела размерность действия, как и в классическом уравнении Гамильтона–Якоби.

(!) Функция s, а также знак перед корнем по заданной функции ψ определяются неоднозначно. Мы будем выбирать их так, чтобы функция s оказалась дифференцируемой, например, для $\psi = \sin(kx)$ мы будем полагать $s \equiv 0$, а знак перед корнем меняется при каждом прохождении корня через нуль так, чтобы выполнялось условие $\pm\sqrt{\rho} = \sin(kx)$.

Уравнение Шрёдингера имеет вид

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi.$$

Пусть оператор Гамильтона получен в результате канонического квантования функции Гамильтона $H(x,p,t)$:

$$\hat{H} = H(x^\alpha, -\mathrm{i}\hbar\partial_\alpha, t).$$

Уравнение Шрёдингера принимает вид

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{\rho}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}s} = H(x^\alpha, -\mathrm{i}\hbar\partial_\alpha, t)\sqrt{\rho}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}s}.$$

(!) Пусть *постоянная Планка* $\hbar$ может рассматриваться *как малый параметр*. Разумеется, постоянная Планка, как всякая размерная постоянная, не может быть мала или велика — её численное значение зависит от выбора единиц измерения. В данном случае малость постоянной Планка означает её малость по сравнению с характерными изменениями функции $s(x,t)$, которая также имеет размерность действия. Более аккуратное рассмотрение условий, при которых постоянная Планка может считаться малой (условий применимости квазиклассического приближения), мы отложим до курса квантовой механики.

В нулевом порядке по $\hbar$ в обеих частях уравнения Шрёдингера все дифференцирования действуют только на $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}s}$, в этом случае $\hbar$ сокращается и мы имеем

$$\frac{\partial s}{\partial t}\sqrt{\rho}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}s} = H\left(x^\alpha, \frac{\partial s}{\partial x^\alpha}, t\right)\sqrt{\rho}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}s} + O(\hbar).$$

Сокращая общий множитель $\sqrt{\rho}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}s}$, получаем, что в нулевом порядке по $\hbar$ выполняется классическое уравнение Гамильтона–Якоби на функцию $s(x,t)$ для исходной классической функции Гамильтона:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = H\left(x^\alpha, \frac{\partial s}{\partial x^\alpha}, t\right) + o(\hbar).$$

Отброшенные члены имеют не менее чем второй порядок по $\hbar$, что позволило заменить $O(\hbar)$ на $o(\hbar)$, т.к. линейные по $\hbar$ члены были бы чисто мнимыми, а значит, их надо было бы приравнивать друг другу отдельно.

Рассмотрим линейные по $\hbar$ члены (общий множитель $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}s}$ мы откидываем, так как его дифференцирование не даст линейных по $\hbar$ членов):

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\sqrt{\rho}}{\partial t} = \left.\frac{H\left(x^\alpha, p_\alpha, t\right)}{\partial p_\alpha}\right|_{p_\alpha=\frac{\partial s}{\partial x^\alpha}} \circ (-\mathrm{i}\hbar\partial_\alpha)\,\sqrt{\rho}.$$

Производную от функции Гамильтона по импульсу мы взяли для $p_\alpha = \frac{\partial s}{\partial x^\alpha}$, взяв аргумент из нулевого порядка по $\hbar$. Кружок означает симметризованное произведение операторов: $a \circ b = \frac{ab+ba}{2}$. Обозначим

$$\left.\frac{H\left(x^\alpha, p_\alpha, t\right)}{\partial p_\alpha}\right|_{p_\alpha=\frac{\partial s}{\partial x^\alpha}} = V^\alpha\left(x^\alpha, \frac{\partial s}{\partial x^\alpha}, t\right).$$

Получаем

$$\frac{\partial\sqrt{\rho}}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(V^\alpha(-\partial_\alpha) + (-\partial_\alpha)V^\alpha\right)\sqrt{\rho} = -\frac{1}{2}V^\alpha\partial_\alpha\sqrt{\rho} - \frac{1}{2}\partial_\alpha(V^\alpha\sqrt{\rho});$$
$$\frac{1}{2\sqrt{\rho}}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{4\sqrt{\rho}}V^\alpha\partial_\alpha\rho + \frac{1}{2}\sqrt{\rho}\partial_\alpha V^\alpha + \frac{1}{4\sqrt{\rho}}V^\alpha\partial_\alpha\rho = 0.$$

Умножая равенство на $2\sqrt{\rho}$, получаем уравнение непрерывности, такое же, как при рассмотрении классического уравнения Гамильтона–Якоби как описания ансамбля одинаковых систем (5.4.1):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \partial_\alpha(V^\alpha\rho + O(\hbar)) = 0.$$

Таким образом, в нулевом и первом порядке по $\hbar$ мы воспроизвели классическое уравнение Гамильтона–Якоби и уравнение непрерывности в конфигурационном пространстве.

5.5.2 Квантовые поправки

Квантовые поправки к получившимся уравнениям мы рассмотрим в простейшем случае $H(x,p,t) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(x)$. Тогда

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle + U(x).$$

Уравнение Шрёдингера для данного гамильтониана имеет вид

$$-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m}\triangle\psi + U(x)\,\psi = 0.$$

Выразив волновую функцию ψ через ρ и s, получаем левую часть уравнения в виде

$$F = \left(\sqrt{\rho}\,\frac{\partial s}{\partial t} - \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\sqrt{\rho}}{\partial t} + \sqrt{\rho}\,\frac{(\nabla s)^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{2m}\triangle\sqrt{\rho} - \mathrm{i}\frac{\hbar}{2m}\left[2(\nabla\sqrt{\rho},\nabla s) + \sqrt{\rho}\,\triangle s\right] + \sqrt{\rho}\,U(x)\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}s/\hbar} = 0. \quad (5.5.2)$$

Для получения уравнений непрерывности умножим выражение F на $-\frac{2}{\hbar}\psi^* = -\frac{2}{\hbar}\sqrt{\rho}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s/\hbar}$ и возьмём мнимую часть:

$$\mathrm{Im}\left(-\frac{2}{\hbar}F\psi^*\right) = 2\sqrt{\rho}\,\frac{\partial\sqrt{\rho}}{\partial t} + \frac{1}{m}\left[2\sqrt{\rho}\,(\nabla\sqrt{\rho},\nabla s) + \rho\nabla^2 s\right] = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{m}\left[(\nabla\rho,\nabla s) + \rho\,\nabla^2 s\right] = 0.$$

Получаем, что уравнение непрерывности осталось неизменным по сравнению с классическим случаем

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{m}\,\nabla(\rho\,\nabla s) = 0, \quad (5.5.3)$$

но теперь это *уравнение непрерывности потока вероятности*.

Для получения квантового аналога уравнения Гамильтона–Якоби делим F на ψ и берём вещественную часть:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{F}{\psi}\right) = \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{(\nabla s)^2}{2m} + U(x) \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\triangle\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}}_{\text{квантовая поправка}} = 0.$$

Квантовый аналог уравнения Гамильтона–Якоби содержит *квантовую поправку*, которая зависит от плотности вероятности. Таким образом, мы по-прежнему можем интерпретировать это уравнение как описание ансамбля одинаковых систем, но благодаря квантовой поправке эти системы взаимодействуют между собой:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{(\nabla s)^2}{2m} + U(x) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\triangle\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} = 0. \quad (5.5.4)$$

5.5.3 Функционал Гамильтона

Как и в классическом случае, уравнения эволюции чистого состояния (обычное и комплексно-сопряжённое уравнения Шрёдингера) могут быть получены вариацией *функционала Гамильтона*, который соответствует средней энергии квантовой системы или полной энергии ансамбля, рассмотренного выше:

$$\mathcal{H} = \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle = \int \psi^* \hat{H}\psi \, d^n x = \int (\hat{H}\psi^{**})^* \, \psi \, d^n x.$$

(!!) В случае конечномерного пространства чистых состояний мы можем во всех формулах этого параграфа заменить интеграл по x суммой, а вариационные производные в уравнениях Гамильтона — частными производными. Однако при каноническом квантовании пространство чистых состояний всегда бесконечномерно.

Если рассматривать $\psi(x)$ и $\psi^*(x)$ как независимые функции, то

$$\delta\mathcal{H} = \delta(\langle\psi|)\hat{H}|\psi\rangle + \langle\psi|\hat{H}\delta(|\psi\rangle) = \int \Big(\delta\psi^* \hat{H}\psi + (\hat{H}\psi^{**})^* \, \delta\psi\Big) \, d^n x;$$

$$\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\psi^*(x)} = \hat{H}\,\psi(x), \qquad \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\psi(x)} = (\hat{H}\,\psi(x))^*.$$

Если мы возьмём в качестве обобщённых координат $a\psi(x)$, а в качестве обобщённых импульсов $b\psi^*(x)$, причём выберем константы a и b так, что $ab = \mathrm{i}\hbar$, то уравнения Гамильтона

$$\frac{\partial a\psi(x)}{\partial t} = \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta b\psi^*(x)},$$

$$\frac{\partial b\psi^*(x)}{\partial t} = -\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta a\psi(x)}$$

воспроизведут уравнение Шрёдингера и комплексно-сопряжённое уравнение Шрёдингера.

Например, обобщённые координаты и импульсы мы можем задать полями

$$q_0(x,t) = \sqrt{\hbar}\,\psi(x,t), \qquad \pi_0(x,t) = \mathrm{i}\sqrt{\hbar}\,\psi^*(x,t).$$

Как мы знаем, если замена координат в фазовом пространстве такова, что каждая новая координата зависит только от пары канонически сопряжённых старых координат, то необходимое и достаточное условие каноничности замены — сохранение ориентированной площади на каждой поверхности $x^a - p_a$. В нашем случае в роли нумерующего обобщённые координаты и импульсы индекса a выступают координаты в конфигурационном пространстве исходной системы x. Получим некоторые интересные канонические замены.

Элемент ориентированной площади (при данном x) имеет вид[1]

$$\begin{aligned} dq_0 \wedge d\pi_0 &= \mathrm{i}\hbar(d\mathrm{Re}\,\psi + \mathrm{i}\,d\mathrm{Im}\,\psi) \wedge (d\mathrm{Re}\,\psi - \mathrm{i}\,d\mathrm{Im}\,\psi) = \\ &= \hbar\Big(\mathrm{i}\underbrace{d\mathrm{Re}\,\psi \wedge d\mathrm{Re}\,\psi}_{0} + d\mathrm{Re}\,\psi \wedge d\mathrm{Im}\,\psi - d\mathrm{Im}\,\psi \wedge d\mathrm{Re}\,\psi + \mathrm{i}\underbrace{d\mathrm{Im}\,\psi \wedge d\mathrm{Im}\,\psi}_{0}\Big) = \\ &= 2\hbar\, d\mathrm{Re}\,\psi \wedge d\mathrm{Im}\,\psi = d\underbrace{\big(\sqrt{2\hbar}\,\mathrm{Re}\,\psi\big)}_{q_1} \wedge d\underbrace{\big(\sqrt{2\hbar}\,\mathrm{Im}\,\psi\big)}_{\pi_1}. \end{aligned}$$

Мы получили, что в роли обобщённых координат можно взять $q_1 = \sqrt{2\hbar}\,\mathrm{Re}\,\psi$, а в роли обобщённых импульсов — $\pi_1 = \sqrt{2\hbar}\,\mathrm{Im}\,\psi$. Мы ещё используем эти переменные, когда рассмотрим сведение уравнения Шрёдингера к системе взаимодействующих *классических* гармонических осцилляторов.

Другая пара канонических переменных — это

$$\rho = (\mathrm{Re}\,\psi)^2 + (\mathrm{Im}\,\psi)^2 \quad \text{и} \quad s = \hbar\left(\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{Im}\,\psi}{\mathrm{Re}\,\psi} + \pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z}$$

(или $-s$ и ρ):

$$\begin{aligned} d\rho \wedge ds &= d\Big((\mathrm{Re}\,\psi)^2 + (\mathrm{Im}\,\psi)^2\Big) \wedge d\Big(\hbar\ \mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{Im}\,\psi}{\mathrm{Re}\,\psi}\Big) = \\ &= \hbar\Big(2\mathrm{Re}\,\psi\, d\mathrm{Re}\,\psi + 2\mathrm{Im}\,\psi\, d\mathrm{Im}\,\psi\Big) \wedge \frac{\mathrm{Re}\,\psi\, d\mathrm{Im}\,\psi - \mathrm{Im}\,\psi\, d\mathrm{Re}\,\psi}{(\mathrm{Re}\,\psi)^2 + (\mathrm{Im}\,\psi)^2} = \\ &= 2\hbar\, d\mathrm{Re}\,\psi \wedge d\mathrm{Im}\,\psi. \end{aligned}$$

[1] Напоминаем, что $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ — элемент ориентированной площади.

Вне зависимости от выбора канонических переменных получаются уравнения, описывающие одну и ту же динамику, так что уравнения Гамильтона

$$\frac{\partial s(x)}{\partial t} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \rho(x)}, \qquad \frac{\partial \rho(x)}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta s(x)}$$

дают снова уравнение Шрёдингера, выраженное через s и ρ, т.е. квантовый аналог уравнения Гамильтона–Якоби и уравнение непрерывности соответственно.

5.5.4 Функционалы наблюдаемых и скобка Пуассона

Подобно тому как мы определили функционал $\mathcal{H}$ для средней энергии системы, мы можем определить функционал $\mathcal{F}$ для среднего значения квантовой наблюдаемой $\hat{F}$:

$$\mathcal{F} = \langle\psi|\hat{F}|\psi\rangle.$$

В качестве аргументов функционала $\mathcal{F}$ можно брать любые канонические переменные, например рассматривавшиеся выше для $\mathcal{H}$.

Для функционалов такого вида мы можем определить скобку Пуассона. *Для дискретного параметра* x скобка Пуассона определяется каноническим образом:

$$\{q(x_1), q(x_2)\} = \{\pi(x_1), \pi(x_2)\} = 0, \qquad \{q(x_1), \pi(x_2)\} = \delta_{x_1 x_2}.$$

В этом случае

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} = \sum_x \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q(x)} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \pi(x)} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \pi(x)} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q(x)} \right).$$

Для непрерывного параметра x в определении скобки Пуассона сумма заменяется на интеграл, частные производные на вариационные, а дельта-символ в канонических скобках Пуассона на дельта-функцию:

$$\{q(x_1), q(x_2)\} = \{\pi(x_1), \pi(x_2)\} = 0, \qquad \{q(x_1), \pi(x_2)\} = \delta(x_1 - x_2).$$

В этом случае

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} = \int \left(\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta q(x)} \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \pi(x)} - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \pi(x)} \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta q(x)} \right) dx.$$

Путём прямых вычислений легко убедиться, что для наблюдаемых рассматриваемого вида скобка Пуассона сводится к квантовой скобке Пуассона для операторов соответствующих наблюдаемых:

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} = \langle\psi|\{\hat{F}, \hat{G}\}_{\text{кв.}}|\psi\rangle,$$

т. е.

$$\{\langle\psi|\hat{F}|\psi\rangle, \langle\psi|\hat{G}|\psi\rangle\} = \langle\psi|\tfrac{1}{i\hbar}[\hat{F}, \hat{G}]|\psi\rangle.$$

Доказательство этого соотношения читатель может проделать самостоятельно, в качестве дополнительной задачи.

5.5.5 Функционал Гамильтона для частицы в потенциале

Рассмотрим функционал Гамильтона $\mathcal{H}$ для частицы в потенциале, т.е. для оператора Гамильтона $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle + U(x)$:

$$\mathcal{H} = \int \psi^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle + U(x) \right) \psi \, d^n x = \int \left(\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla\psi^*, \nabla\psi) + U(x)\, \psi^*\psi \right) d^n x.$$

В последней формуле мы проинтегрировали первое слагаемое по частям и отбросили граничный член (считая, что на бесконечности $\psi \to 0$).

В канонических переменных $q_0 = \sqrt{\hbar}\,\psi$, $\pi_0 = \mathrm{i}\sqrt{\hbar}\,\psi^*$ имеем

$$\mathcal{H}[q_0(x), \pi_0(x)] = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar} \int \pi_0 \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle + U(x) \right) q_0 \, d^n x = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar} \int \left(\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla\pi_0, \nabla q_0) + U(x)\, \pi_0 q_0 \right) d^n x.$$

В этих переменных уравнения Гамильтона дают уравнение Шрёдингера и комплексно-сопряжённое уравнение Шрёдингера.

Тот же функционал через вещественную и мнимую части волновой функции переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \int\left(\operatorname{Re}\psi\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle+U(x)\right)\operatorname{Re}\psi+\operatorname{Im}\psi\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle+U(x)\right)\operatorname{Im}\psi\right)d^nx=\\ &= \int\left(\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla\operatorname{Re}\psi)^2+\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla\operatorname{Im}\psi)^2+U(x)\,\left[(\operatorname{Re}\psi)^2+(\operatorname{Im}\psi)^2\right]\right)d^nx.\end{aligned}$$

В канонических переменных $q_1=\sqrt{2\hbar}\operatorname{Re}\psi$, $\pi_1=\sqrt{2\hbar}\operatorname{Im}\psi$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}[q_1(x),\pi_1(x)] &= \frac{1}{2\hbar}\int\left(q_1\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle+U(x)\right)q_1+\pi_1\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle+U(x)\right)\pi_1\right)d^nx=\\ &= \frac{1}{2\hbar}\int\left(\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla q_1)^2+\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla\pi_1)^2+U(x)\,\left[q_1^2+\pi_1^2\right]\right)d^nx.\end{aligned}$$

В этих переменных уравнения Гамильтона дают уравнения Шрёдингера для вещественной и мнимой частей волновой функции.

В канонических переменных ρ, s (как и раньше, $\psi(x)=\sqrt{\rho(x)}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}s(x)}$) имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \int\psi^*\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle+U(x)\right)\psi\,d^nx=\int\left(\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla\psi^*,\nabla\psi)+U(x)\,\psi^*\psi\right)d^nx=\\ &= \int\left(\frac{\hbar^2}{2m}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}s}(\nabla\sqrt{\rho}-\sqrt{\rho}\,\tfrac{\mathrm{i}}{\hbar}\nabla s),\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}s}(\nabla\sqrt{\rho}+\sqrt{\rho}\,\tfrac{\mathrm{i}}{\hbar}\nabla s)\right)+U(x)\,\rho\right)d^nx,\end{aligned}$$

$$\mathcal{H}[\rho(x),s(x)]=\int\left(\rho\,\frac{(\nabla s)^2}{2m}+\rho\,U(x)+\frac{\hbar^2(\nabla\sqrt{\rho})^2}{2m}\right)d^nx=\int\Bigg(\underbrace{H(x,\partial s,t)\,\rho(x,t)}_{\text{классическая часть}}\ \underbrace{+\frac{\hbar^2(\nabla\sqrt{\rho})^2}{2m}}_{\text{квантовая поправка}}\Bigg)d^nx.$$

Мы получили, что функционал Гамильтона в переменных ρ, s отличается от аналогичного функционала для ансамбля классических невзаимодействующих систем (5.4.2) добавлением квантовой поправки.

В переменных ρ, s уравнения Гамильтона дают уравнение непрерывности (5.5.3) и уравнение Гамильтона–Якоби с квантовой поправкой (5.5.4).

(*) Интересно, что квантовая поправка и кинетическая энергия $\rho\,\frac{(\nabla s)^2}{2m}$ возникают в функционале Гамильтона из одного члена $\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla\psi^*,\nabla\psi)$, который задаёт кинетическую энергию. Можно интерпретировать это в рамках газодинамической аналогии: есть средняя скорость частиц газа и связанная со средней скоростью кинетическая энергия макроскопического движения, но есть ещё хаотическое движение атомов, которое накладывается на среднюю скорость. Хаотическое движение атомов газа не меняет его среднюю скорость, но даёт добавку в энергию системы.

(**) Как и во многих других задачах, при исключении из функции Гамильтона каких-то движений соответствующая им кинетическая энергия с точки зрения оставшихся движений ведёт себя как потенциальная энергия. Так получается при описании движения оси гироскопа, когда кинетическая энергия вращения вокруг оси играет роль добавки к потенциальной энергии. Так получается при рассмотрении движения по радиусу в центральном потенциале, когда кинетическая энергия движения по углу играет роль добавки к потенциальной энергии. Так получается при рассмотрении усреднённого движения маятника с быстро колеблющейся точкой подвеса (*маятник Капицы*).

5.5.6 Действие для уравнения Шрёдингера

Уравнение эволюции чистого квантового состояния (временно́е уравнение Шрёдингера) имеет вид

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle=\hat{H}|\psi\rangle.$$

Сопряжённое уравнение Шрёдингера (с учётом соотношения $\hat{H}^\dagger=\hat{H}$, $|\psi\rangle^\dagger=\langle\psi|$) имеет вид

$$-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi|=\langle\psi|\hat{H}.$$

Легко подобрать действие, вариация которого даёт эти уравнения ($\langle\psi|$ и $|\psi\rangle$ считаем независимыми функциями от времени):

$$S[\langle\psi|,|\psi\rangle] = \int\left(\langle\psi|\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle\right)dt.$$

С учётом того, что (как мы установили выше при обсуждении функционала Гамильтона) $q_0 = \sqrt{\hbar}\,\psi$ и $\pi_0 = \mathrm{i}\sqrt{\hbar}\,\psi^*$ — канонические переменные, данное действие — стандартное для гамильтонова формализма (см. § 1.4.2 «Гамильтонов формализм как частный случай лагранжева формализма», с. 63) действие вида (1.4.15):

$$\begin{aligned}\delta S &= \int\left(\langle\delta\psi|\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle - \langle\delta\psi|\hat{H}|\psi\rangle + \langle\psi|\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\delta\psi\rangle - \langle\psi|\hat{H}|\delta\psi\rangle\right)dt = \\ &= \int\left(\langle\delta\psi|\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle - \hat{H}|\psi\rangle\right) + \left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi| - \langle\psi|\hat{H}\right)|\delta\psi\rangle\right)dt.\end{aligned}$$

Если чистое состояние $|\psi\rangle$ задано как волновая функция в конфигурационном пространстве $\psi(x)$, то сопряжённому состоянию будет соответствовать сопряжённая функция $\psi^*(x)$, а скалярное произведение должно пониматься в смысле пространства L_2:

$$\langle\phi|\psi\rangle = \int \phi^*(x)\,\psi(x)\,d^n x.$$

Оператор импульса в этом случае имеет вид $\hat{\mathbf{p}} = -\mathrm{i}\hbar\boldsymbol{\nabla}$. Тогда действие перепишется в виде полевого действия:

$$S[\psi^*(x,t),\psi(x,t)] = \int \underbrace{\left(\int\left(\psi^*(x,t)\,\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) - \psi^*(x,t)\,\hat{H}\psi(x,t)\right)d^n x\right)}_{L[\psi^*(x,t),\psi(x,t)]\ \text{— функционал Лагранжа}} dt.$$

Здесь $\hat{H}$ — некоторый эрмитов оператор на пространстве квадратично-интегрируемых функций L_2.

Оператор Гамильтона для частицы в потенциале имеет вид следующего дифференциального оператора:

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}}{2m} + U(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle + U(x).$$

Действие для него приобретает вид

$$\begin{aligned}S[\psi^*(x,t),\psi(x,t)] &= \int\left(\psi^*\,\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi + \frac{\hbar^2}{2m}\,\psi^*\triangle\psi - \psi^*\,U(x)\,\psi\right)d^n x\,dt = \\ &= \int\left(\psi^*\,\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\boldsymbol{\nabla}\psi^*,\boldsymbol{\nabla}\psi\right) - U(x)\,|\psi|^2\right)d^n x\,dt.\end{aligned}$$

Последнее выражение (полученное после интегрирования по частям члена с лапласианом) соответствует действию из задачи 50**в**. Вариация его по ψ^* даёт уравнение Шрёдингера в виде

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\psi(x,t) + U(x)\cdot\psi(x,t),$$

а вариация по ψ — комплексно-сопряжённое к нему уравнение.

Уравнение Шрёдингера, как и уравнение Гамильтона–Якоби, можно интерпретировать как описание ансамбля одинаковых систем. При такой интерпретации удобно параметризовать волновую функцию ψ через плотность числа систем ρ и фазу s, как мы уже делали ранее (5.5.1): $\psi(x,t) = \pm\sqrt{\rho(x,t)}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\,s(x,t)}$. В новых переменных получаем

$$S[\rho(x,t),s(x,t)] = \int\left(\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\frac{\partial\rho}{\partial t} - \rho\,\frac{\partial s}{\partial t} - \mathcal{H}[\rho,s]\right)d^n x\,dt.$$

Член $\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\frac{\partial\rho}{\partial t}$ можно отбросить, поскольку он даёт полную производную по времени и не вносит вклада в вариационные производные.

Для красоты можно добавить в подынтегральное выражение $\frac{\partial}{\partial t}(\rho s)$, после чего с учётом того, что (как мы установили выше при обсуждении функционала Гамильтона) ρ и s — канонические переменные, мы

снова получаем действие, которое оказывается стандартным для гамильтонова формализма (см. § 1.4.2 «Гамильтонов формализм как частный случай лагранжева формализма». с. 63) вида (1.4.15):

$$S[\rho(x,t),s(x,t)] = \int \left(s\,\frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho\,\frac{(\nabla s)^2}{2m} - \rho\,U(x) - \frac{\hbar^2(\nabla\sqrt{\rho})^2}{2m} \right) d^n x\,dt.$$

Вариация данного действия даёт уравнение непрерывности и квантовый аналог уравнения Гамильтона–Якоби.

Глава 5.6

Уравнение Шрёдингера как описание системы гармонических осцилляторов

Данная глава может рассматриваться как продолжение § 4.4.3 «Комплексные координаты и амплитуды» (с. 450).

5.6.1 От уравнения Шрёдингера к системе осцилляторов

Выразим *уравнение Шрёдингера через переменные* $q = \sqrt{2\hbar}\,\mathrm{Re}\psi$ и $p = \sqrt{2\hbar}\,\mathrm{Im}\psi$. Для простоты будем считать, что ψ — N-мерный комплексный вектор-столбец, а все операторы — матрицы $N \times N$. Получим

$$\mathrm{i}\hbar\,\frac{d}{dt}\,\psi = \hat{H}\psi \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{i}\hbar\,\frac{d}{dt}(q + \mathrm{i}p) = (\hat{A} + \mathrm{i}\hat{B})(q + \mathrm{i}p).$$

Оператор (*матрицу*) *Гамильтона* мы представили как комбинацию двух вещественных матриц:

$$\hat{H} = \hat{A} + \mathrm{i}\hat{B}, \qquad \hat{A}^T = \hat{A}, \quad \hat{B}^T = -\hat{B}.$$

Вещественная и мнимая части уравнения Шрёдингера дают уравнения

$$\dot{q} = \frac{1}{\hbar}(\hat{A}p + \hat{B}q), \qquad \dot{p} = -\frac{1}{\hbar}(\hat{A}q - \hat{B}p).$$

Предположим, что симметричная матрица $\hat{A}$ обратима, причём все собственные числа положительны[1], тогда мы можем из одного уравнения выразить p через q и $\dot{q}$:

$$p = \hat{A}^{-1}(\hbar\dot{q} - \hat{B}q).$$

Подставив это выражение в другое уравнение, получаем

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{A}^{-1}(\hbar\dot{q} - \hat{B}q) &= -\frac{1}{\hbar}(\hat{A}q - \hat{B}\hat{A}^{-1}(\hbar\dot{q} - \hat{B}q)),\\
\hbar^2\hat{A}^{-1}\ddot{q} - \hbar\hat{A}^{-1}\hat{B}\dot{q} &= -\hat{A}q + \hbar\hat{B}\hat{A}^{-1}\dot{q} - \hat{B}\hat{A}^{-1}\hat{B}q,\\
\hbar^2\hat{A}^{-1}\ddot{q} - \hbar(\hat{B}\hat{A}^{-1} + \hat{A}^{-1}\hat{B})\dot{q} + (\hat{A} + \hat{B}\hat{A}^{-1}\hat{B})q &= 0. \qquad (5.6.1)
\end{aligned}$$

Последнее уравнение соответствует системе взаимодействующих гармонических осцилляторов с гироскопическими силами. Симметричная положительно определённая матрица $\hbar^2\hat{A}^{-1}$ играет роль *матрицы масс*, симметричная положительно определённая матрица $\hat{A} + \hat{B}\hat{A}^{-1}\hat{B}$ — роль *матрицы жёсткости*, а антисимметричная матрица $\hbar(\hat{B}\hat{A}^{-1} + \hat{A}^{-1}\hat{B})$ задаёт *гироскопические силы*.

Эрмитова матрица $\hat{H}$ всегда может быть диагонализована с помощью унитарных преобразований комплексных векторов ψ. После такой диагонализации антисимметричная матрица $\hat{B}$ обнуляется, а гироскопические силы исчезают. Матрица $\hat{A}$ становится диагональной, и система уравнений (5.6.1) распадается на уравнения невзаимодействующих осцилляторов с частотами $\omega_n = \frac{A_{nn}}{\hbar}$:

$$\hbar^2\ddot{q} + \hat{A}^2 q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = 0, \quad n \in \{1, \ldots, N\}.$$

При диагонализации матрицы $\hat{H}$ само уравнение Шрёдингера распадается на уравнения вида

$$\dot{\psi}_n = -\mathrm{i}\omega_n\psi_n, \quad n \in \{1, \ldots, N\}.$$

[1] Это условие выполняется не всегда, но мы можем переопределить матрицу: $\hat{A} \to \hat{A} + E_0\hat{1}$. Такое переопределение соответствует сдвигу нулевого уровня энергии на E_0.

5.6.2 Функция Гамильтона системы осцилляторов

Как мы видели в § 5.5.3, взяв в качестве функционала Гамильтона среднюю энергию квантовой системы, а в качестве канонических переменных $q = \sqrt{2\hbar}\,\mathrm{Re}\,\psi$ и $p = \sqrt{2\hbar}\,\mathrm{Im}\,\psi$, мы воспроизводим для волновой функции динамику, задаваемую уравнением Шрёдингера. Исследуем эту динамику для случая, когда волновая функция является функцией дискретной переменной $n \in \{1, \ldots, N\}$.

В этом случае интегралы заменяются суммами, а функционал Гамильтона становится функцией $2N$ переменных:

$$\mathcal{H}(q_n, p_n) = \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle = \psi^\dagger \hat{H}\psi = \sum_{n_1,n_2=1}^{N} \psi^*_{n_1} H_{n_1 n_2} \psi_{n_2},$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} = \frac{q + \mathrm{i}p}{\sqrt{2\hbar}} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\hbar}} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix},$$

$$\psi^\dagger = (\psi^*_1, \psi^*_2, \ldots, \psi^*_N) = \frac{q^T - \mathrm{i}p^T}{\sqrt{2\hbar}} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(q_1, q_2, \ldots, q_N) - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\hbar}}(p_1, p_2, \ldots, p_N).$$

Оператор (матрица) Гамильтона оказывается самосопряжённым: $\hat{H} = \hat{H}^\dagger$, т.е. $H_{n_1 n_1} = H^*_{n_2 n_1}$. Мы можем выразить комплексную матрицу $\hat{H}$ через две вещественные, одна из которых симметрична, а другая антисимметрична:

$$\hat{H} = \hat{A} + \mathrm{i}\hat{B}, \qquad \hat{A}^T = \hat{A}, \quad \hat{B}^T = -\hat{B}.$$

(!!!) В данном случае легко можно запутаться в гамильтонианах, которых у нас имеется 3 вида и которые нельзя путать между собой.

1. У нас есть оператор (матрица) Гамильтона $\hat{H}$.

2. У нас есть функционал (или функция) Гамильтона $\mathcal{H}$, который получается как средняя энергия квантовой системы.

3. У нас может быть классическая функция Гамильтона $H(x, p)$, из которой оператор $\hat{H}$ был получен каноническим квантованием.

Аргументы классической функции Гамильтона $H(x, p)$ (классические обобщённые координаты и импульсы) не имеют ничего общего с аргументами функционала (или функции) Гамильтона $\mathcal{H}$ (параметрами, через которые параметризуется волновая функция).

Мы получили функционал (функцию) Гамильтона в виде

$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2\hbar}(q^T - \mathrm{i}p^T)(\hat{A} + \mathrm{i}\hat{B})(q + \mathrm{i}p) = \frac{1}{2\hbar}\left(q^T\hat{A}q + p^T\hat{A}p - q^T\hat{B}p + p^T\hat{B}q\right) = \frac{1}{2\hbar}\left(q^T\hat{A}q + p^T\hat{A}p\right) + \frac{1}{\hbar}\underbrace{p^T\hat{B}q}_{-q^T\hat{B}p}.$$

Уравнения Гамильтона, эквивалентные уравнению Шрёдингера (мы их запишем в матричном виде), имеют вид

$$\dot{q} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p^T} = \frac{1}{\hbar}(\hat{A}p + \hat{B}q), \qquad \dot{p} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q^T} = -\frac{1}{\hbar}(\hat{A}q - \hat{B}p).$$

Умножив первое уравнение на $\mathrm{i}\hbar$ и вычтя второе, умноженное на $\hbar$, получаем уравнение Шрёдингера:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{d}{dt}(q + \mathrm{i}p) = (\hat{A} + \mathrm{i}\hat{B})(q + \mathrm{i}p) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{i}\hbar\frac{d}{dt}\psi = \hat{H}\psi.$$

5.6.3 Скалярное произведение

Среди квантовых интегралов движения всегда есть наблюдаемая, задаваемая единичным оператором $\hat{1}$, среднее от неё — скалярный квадрат вектора состояния:

$$\langle\psi|\hat{1}|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle = \|\psi\|^2.$$

Сохранение квадрата вектора состояния — *сохранение полной вероятности.*

Если есть два вектора состояния ψ и ϕ, эволюция которых задаётся одним гамильтонианом, то сохраняется также их скалярное произведение, которое, как легко проверить, выражается через скалярные квадраты:

$$\langle\psi|\phi\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} \mathrm{i}^{-n}\|\psi + \mathrm{i}^n\phi\|^2.$$

В рассматриваемом конечномерном случае имеем

$$\langle\phi|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{N} \phi_n^* \psi_n.$$

Распишем это скалярное произведение через вещественные параметры q и p:

$$\langle\phi|\psi\rangle = \frac{1}{2\hbar}(q_\phi^T - \mathrm{i}p_\phi^T)(q_\psi + \mathrm{i}p_\psi) = \frac{1}{2\hbar}(q_\phi^T q_\psi + p_\phi^T p_\psi) - \mathrm{i}\frac{1}{2\hbar}(-q_\phi^T p_\psi + p_\phi^T q_\psi).$$

Вещественная часть скалярного произведения чистых квантовых состояний выражается через скалярное произведение в фазовом пространстве:

$$q_\phi^T q_\psi + p_\phi^T p_\psi = (q_\phi^T, p_\phi^T) \begin{pmatrix} q_\psi \\ p_\psi \end{pmatrix} = (q_{\phi 1}, \ldots, q_{\phi N}, p_{\phi 1}, \ldots, p_{\phi N}) \begin{pmatrix} q_{\psi 1} \\ \vdots \\ q_{\psi N} \\ p_{\psi 1} \\ \vdots \\ p_{\psi N} \end{pmatrix} = \delta_{KL} X_\phi^K X_\psi^L.$$

Мнимая часть скалярного произведения чистых квантовых состояний выражается через *каноническую симплектическую форму*:

$$\begin{aligned} -q_\phi^T p_\psi + p_\phi^T q_\psi &= (q_\phi^T, p_\phi^T) \begin{pmatrix} 0 & -\hat{1} \\ \hat{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_\psi \\ p_\psi \end{pmatrix} = \\ &= (q_{\phi 1}, \ldots, q_{\phi N}, p_{\phi 1}, \ldots, p_{\phi N}) \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{\psi 1} \\ \vdots \\ q_{\psi N} \\ p_{\psi 1} \\ \vdots \\ p_{\psi N} \end{pmatrix} = \omega_{KL} X_\phi^K X_\psi^L. \end{aligned}$$

Таким образом, унитарные преобразования (сохраняющие скалярное произведение чистых квантовых состояний) для переменных q, p оказываются каноническими (сохраняющими скобку Пуассона) и одновременно изометрическими (сохраняющими расстояние).

Мы свели квантовую динамику, описываемую уравнением Шрёдингера к классической динамике ансамбля гармонических осцилляторов. На первый взгляд это размывает различие между классической и квантовой механиками. Тем не менее это различие можно выделить вполне отчётливо.

Классическая и квантовая механики предполагают разные *теории измерений* и, соответственно, разные *интерпретации* динамических переменных. Введённые для описания шрёдингеровской динамики канонические переменные q, p в классической теории интерпретируются как наблюдаемые величины, тогда как в квантовой теории они параметризуют амплитуды вероятностей. При сопоставлении соответствующих друг другу классической и квантовой систем оказывается, что на каждую точку x классического конфигурационного пространства в квантовой теории приходится один гармонический осциллятор, описывающий динамику соответствующей амплитуды вероятности $\psi(x) = \frac{q+\mathrm{i}p}{\sqrt{2\hbar}}$.

Таким образом, как классическая, так и квантовая механики не исчерпываются динамическими уравнениями. Помимо этого требуется *интерпретация теории*, включающая *теорию измерений*, которая описывает, что наблюдатель может узнать о системе в процессе измерения и как измерение меняет состояние системы.

Часть VI

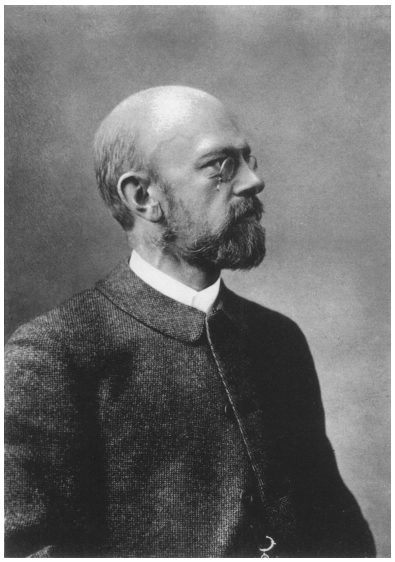
Внешнее гравитационное поле

В данной части рассматривается физика в искривлённом пространстве-времени, т.е. рассматривается динамика полей и частиц во внешнем гравитационном поле (в поле метрического тензора). Это первая часть стандартного курса общей теории относительности (ОТО). Это ещё не совсем ОТО (динамика гравитационного поля), подобно тому как динамика частицы во внешнем электромагнитном поле — это ещё не совсем электродинамика (динамика электромагнитного поля).

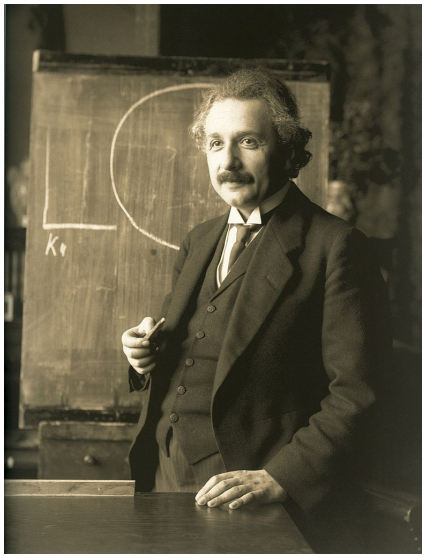
Динамика гравитационного поля рассматривается в отдельном разделе.

Глава 6.1

Основные идеи ОТО



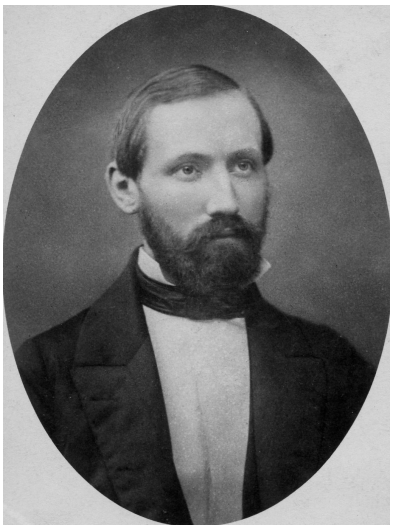
Давид Гильберт 1907 г. (1862–1943). W



Альберт Эйнштейн 1921 г. (1879–1955). W

Общая теория относительности (ОТО) была создана А. Эйнштейном и Д. Гильбертом в 1915 году как релятивистская теория гравитации. Интересно, что А. Эйнштейн, как физик, шёл со стороны уравнений гравитационного поля (*уравнений Эйнштейна*), последовательно внося поправки в уравнения исходя из физических соображений, а Д. Гильберт, как математик, подобрал из общегеометрических соображений функционал действия (*действие Гильберта*).

Предтечами создания ОТО были Б. Риман и Г. Минковский.



Бернхардр Риман (1826–1866). W

Герман Минковский (1864–1909). W

Риман в середине XIX века предположил, что гравитация может быть описана как геометрия пространства, его «ошибкой» было использование пространства, вместо пространства-времени и римановой

геометрии (с положительно определённой метрикой) вместо псевдоримановой (со знакопеременной метрикой). Впрочем, с учётом того что экспериментальный материал для ОТО в XIX веке ещё отсутствовал, а необходимый математический аппарат (дифференциальная геометрия) только начинал создаваться тем же Риманом, правильнее считать, что Риман (проживший всего 39 лет) не ошибся, а просто не успел довести до физических приложений все свои идеи.

Минковский в Цюрихе был одним из учителей Эйнштейна, а потом, в Гёттингене в рамках семинара о электродинамике движущихся тел, геометризовал специальную теорию относительности (СТО). В 1909 году вышла его книга «Пространство и время» и в том же 1909 году Минковский внезапно (в возрасте 44 лет) скончался от аппендицита. Близкий друг Минковского Д. Гильберт (также работавший в Гёттингене) издал в 1911 году полное собрание трудов Минковского, так что эстафета идей геометризации физики чётко прослеживается от Минковского к Гильберту. Минковский, в отличие от Римана, уже ввёл псевдоевклидово пространство-время со знакопеременной метрикой. Оставалось сделать последний шаг: совместить искривлённой пространство Римана с плоским пространством-временем Минковского и получить искривлённое псеводориманово пространство-время. Для последнего шага не хватало математического аппарата: псевдориманова геометрия тогда только создавалась, причём как раз как математический аппарат ОТО.

Переписка Гильберта и Эйнштейна помогла Эйнштейну заполнить пробелы в математике, а Гильберту — пробелы в физике. И решающий шаг к созданию ОТО был сделан в 1915 году с двух сторон. Оставалось понять, каков физический смысл полученной теории. Для неклассической теории, этот шаг не менее важен, чем создание математического аппарата. Понимание физического смысла теории было тесно связано с её экспериментальным подтверждением. С точки зрения экспериментального подтверждения ОТО очень сильно опередила своё время.

Можно сказать, что вопросы о физической интерпретации и экспериментальном подтверждении ОТО не решены полностью до сих пор.

ОТО безусловно является одной из красивейших физических теорий. Подобно другим теориям того же уровня (классическая механика, электродинамика, квантовая теория, специальная теория относительности) ОТО не только разрешила какие-то частные физические вопросы, но и задала свой стиль мышления. Этот стиль оказался плодотворным в рамках ОТО и послужил примером для подражания в создании новых физических моделей.

Фактически в современной физике есть два несводимых друг к другу «больших стиля»: стиль ОТО и квантовый стиль (на сегодня — стиль квантовой теории поля (КТП)). Пока физики не располагают непротиворечивой квантовой теорией гравитации, т.е. совместить эти два стиля не удаётся.

Можно было бы выделить и другие стили современного физического мышления, например стиль хаотическо-статистический. Однако именно ОТО и КТП являясь фундаментальными общепризнанными теориями не могут согласоваться друг с другом, тогда как хаотический стиль примирим с обеими концепциями (на самом деле и тут не всё ясно: статистическая физика начинает давать сбои в присутствии сильного гравитационного поля, или когда в квантовой теории встаёт в полный рост Проблема Измерения).

Интересно, что как правило проблемы ОТО (сингулярности) возникают в области малых расстояний, где должны сказываться квантовые эффекты, а проблемы КТП (расходимости) в области больших энергий, где должны сказываться гравитационные эффекты. Это даёт нам надежду, что объединение ОТО и КТП в рамках квантовой теории гравитации позволит решить основные проблемы обеих теорий.

Из общих концепций ОТО отметим:

1. Последовательное использование дифференциально-геометрического формализма допускающего использование произвольных координат (общековариантная запись). Такой подход позволяет аккуратно отделить влияние выбора координат от действительно физических эффектов.

2. Выделение среди движений частиц «естественных» (свободных), восходящее ещё к грекам (которые считали естественным круговое движение) и прослеживающееся в классической механике («естественное движение» — движение по инерции) присутствует и в ОТО как движение частиц по геодезическим мировым линиям (мировым линиям с экстремальным интервалом). При этом движение под действием гравитации оказывается «естественным».

Обе эти концепции произвели очень сильное влияние на многих физиков «проникшихся духом» ОТО и породили идею геометризации физики. Возник целый ряд моделей стремящихся свести к геометрии не только гравитацию, но и все остальные поля и взаимодействия. При этом ожидается, что движение частицы под действие любых полей окажется «естественным».

Отметим, что общековариантная запись уравнений плохо согласуется с квантовой теорией. При этом, как квантовая теория, так и ОТО представляются теориями очень глубокими и каждая по-своему фундаментальной. То, что до сих пор не существует общепринятой теории их объединяющей, представляется свидетельством того, что мы до сих пор не понимаем что-то очень важное. Впрочем, претендующих на

такое объединение моделей существует довольно много, хотя все они обладают определёнными недостатками, в особенности недостатком экспериментальных подтверждений. Другим недостатком может оказаться их недостаточная сумасшедшесть.

Глава 6.2

Комментированная библиография

Ниже привожу комментированный список литературы. Из всех перечисленных книг настоятельно рекомендую прочитать от корки до корки только брошюру Дирака [1]. Это не значит, что остальное совсем не надо читать, но чтобы прочитать всё и полностью потребуется уйма времени. Даже если вы будете специализироваться по ОТО или близкой тематике, за один-два семестра необъятного не объять, а вот отдельные главы или параграфы из многих книг можно прочитать и вынести из них интересные идеи. Данная библиография ни в коем случае не претендует на полноту.

6.2.1 Популярные книги

Мне кажется, что популярные книги и статьи интереснее всего читать, уже имея некоторое (лучше основательное) представление о предмете, тогда порой можно бывает понять, что же имел в виду автор (если этот автор – специалист).

Впрочем, возможно неспециалисту читать научно-популярную литературу тоже непредосудительно. Только тогда это непременно должна быть качественная литература, а не «научно-популярные» статьи в жёлтых газетах. Из последних извлечь какую-либо содержательную информацию может лишь человек, разбирающийся в предмете. Максимум информации который можно извлечь из «жёлтой» научно-популярной статьи — фамилия исследователя и ключевые слова для последующего самостоятельного поиска информации. К сожалению, «научно-популярные» статьи в которых путают тепловой насос с вечным двигателем второго рода, а антивещество с тёмной материей появляются в последние два-три десятилетия и в изданиях, претендующих на солидность (включая правительственную «Российскую газету», «Известия» и др.).

Ещё одна напасть — низкое качество новых переводов научно-популярных книг, издаваемых многими новыми издательствами.

[п0] Э.П. Кругляков «“Учёные” с большой дороги», Москва, «Наука», 2002.

Академик Эдуард Павлович Кругляков — председатель Комиссии по борьбе с лженаукой и фальсификацией научных исследований РАН. Книга написана по материалам собранным комиссией. Из этой книги можно узнать, почему не следует читать «научно-популярные» статьи где попало. Освещены в книге и некоторые аферы связанные с некоторыми «теориями» претендующими обобщить или опровергнуть ОТО (см. например раздел «Торсионные войны» в [п0]).

[п1] А.А. Фридман «Мир как пространство и время». Одна из первых популярных книг по ОТО. Написана основоположником научной космологии. Было много изданий, например, РХД 2001.

[п2] С. Хокинг «Краткая история времени (От большого взрыва до чёрных дыр)», Амфора/Эврика

Стивена Хокинга, широкая публика знает как популяризатора, но на самом деле он — крупный специалист по ОТО.

[п3] С. Хокинг «Чёрные дыры и молодые вселенные», СПб., Амфора/Эврика, 2001

Переводчик этого издания безбожно переврал многие специальные термины.

[п4] Р. Пенроуз «Новый ум короля»

Книга о том, почему Пенроуз считает невозможным создание искусственного интеллекта, но по ходу дела автор излагает свои взгляды на ряд разделов математики, физики и биологии, включая квантовую теорию и перспективы квантования ОТО. Роджер Пенроуз, как мы все знаем, — живой классик. Он получил Нобевскую премию за теорему о несуществовании (за доказательство неизбежности появления сингулярностей в ОТО).

[п5] С. Хокинг, Р. Пенроуз «Природа пространства и времени», РХД 2000

Дискуссия двух классиков о путях дальнейшего развития науки (т.е. о том, что будет, если проквантовать гравитацию). Поскольку предмет не слишком разработан, книга доступна и для начинающих. Как

Хокин, так и Пенроуз умеют мыслить как в духе ОТО, так и в духе КТП.

[п6] Д. Дойч «Структура реальности», РХД 2001

Один из основных предметов книги — философские выводы из результатов квантовой теории (автор придерживается многомировой интерпретации квантовой механики в духе Эверетта). Дэвид Дойч — крупный специалист по квантовым вычислениям. Его книга — яркий образец квантового мышления. Что характерно, философские последствия ОТО кажутся Дойчу не существенными, по сравнению с философскими последствиями квантовой теории.

6.2.2 Основной список литературы

[1] П.А.М. Дирак «Общая теория относительности»

Издавалась неоднократно, в том числе в различных сборниках. Эта книга настоятельно рекомендуется как очень краткое введение в ОТО. Книга не исчерпывает предмета, но как введение великолепна. Прочитав эту брошюру, можно браться и за более объёмистые труды уже имея некоторое представление о предмете.

[2] А. Лайтман, В. Пресс, Р. Прайс, С. Тюкольски «Сборник задач по теории относительности и гравитации», Москва, Мир, 1979, тираж 12500 экз.

Может быть, есть и более поздние издания. Это задачник по форме аналогичный задачнику Галицкого, Карнакова и Когана по квантовой механике — там есть теоретическая часть, задачи и их решения. Думаю, что прочитав брошюру [1] можно браться решать задачи из [2], благо решения всегда можно подсмотреть.

В ходе решения задач по ОТО можно легко запутаться в компонентах многочисленных величин, даже при рассмотрении простейших случаев типа решения Шварцшильда. Могу посоветовать, как можно тщательнее продумывать систему обозначений, чтобы сократить работу и исключить возможность ошибок. По моему опыту, делая выкладки в ОТО, приходится быть педантом, чтобы добраться до ответа и быть в нём хоть немного уверенным.

[3] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц «Теория поля»

Неплохая книга, очевидно, вполне доступная, но начинать лучше с Дирака [1].

[4] Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко «Современная геометрия»

Переиздавалась неоднократно, например Москва, Наука, 1986 г., тираж 16000 экз. В 2-х томах. Деление на тома зависит от издания, но в большинстве изданий нам нужен 1-й том (как правило 1-й том больше 2-го раза в три, но есть издание, где книга разбита на 3 тома равного объёма, там может быть будет нужен и второй том). В этой книге можно почитать о собственно геометрической части интересующего нас предмета. О тензорах, многообразиях, касательных пространствах, расслоениях, группах и алгебрах Ли, топологии, кривизне, кручении. Но думаю, что без физических иллюстраций материал может показаться суховатым. В [4] есть и примеры, имеющие физический смысл, скажем, уравнения Эйнштейна там выводятся, но одной этой книгой ограничиваться нельзя, а поскольку книга толстая, то читать её подряд может быть нерационально, а не подряд — полезно.

[5] В. Паули, «Теория относительности», М.«Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1991, тираж 17700 экз.

Было много изданий. Это один из старейших обзоров по данному предмету, но читается и сейчас. Правда мат. аппарат там излагается, может быть, немного своеобразно, а потому о тензорах лучше узнавать не из этой книги, но когда человек знает, что такое тензор, ковариантная производная, дифференциальные формы и внешняя производная, то книга читается с удовольствием.

[6] В.И. Арнольд «Математические методы классической механики»

Были разные издания, например Москва, Наука, 1974, 17500 экз.

Книга шире по тематике, чем обещает название. Книга интересна не только с точки зрения теор. механики, но и для изучающих ОТО (хотя ОТО там и не излагается). Почитать там о кривизне, расхождении геодезических и т.п. приятно и полезно. В книге много «Добавлений», которые можно читать отдельно. Для нас интересно геометрическое изложение теор. механики в основном тексте и некоторые добавления о кривизне пространства. Для тех, кто как раз сейчас изучает на втором курсе теор. механику книга тем более полезная.

6.2.3 Дополнительный список литературы

[7] Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уиллер «Гравитация», Москва, Мир, 1977

Это трёхтомник. Труд немного устаревший, но подробный и капитальный. Впрочем, если заниматься предметом профессионально, то одной этой книги мало.

Рекомендовать эту книгу я не берусь, так как книга очень большого объёма. Впрочем, прочитать отдельные главы было бы очень полезно. Многие вопросы (в том числе математические) объяснены настолько обстоятельно и подробно, что их даже можно понять.

[8] И.Д. Новиков, В.П. Фролов «Физика чёрных дыр», М.«Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1986

Монография довольно обзорного характера.

[9] Р. Пенроуз «Структура пространства-времени», Могилев, БИБФИЗМАТ, 1992

О глобальном устройстве пространства-времени. О том как карты склеивать.

[10] Н. Биррелл, П. Девис «Квантованные поля в искривлённом пространстве-времени», Новокузнецк, ИО НФМИ, 1998

Последовательной квантовой теории гравитации пока не создано, а книга эта как раз об эффектах квантовой гравитации.

Думаю, что прежде чем браться за квантовую гравитацию не помешает немного разобраться в такой простой классической теории как ОТО.

[11] А.З. Петров «Пространства Эйнштейна», М. Государственное издательство физико-математической литературы, 1961

А это в основном о том, как классифицировать разные пространства по присущей им симметрии. Тоже книга не для первого чтения.

6.2.4 Где искать текущие публикации

Текущие публикации по физике (а часто и по математике) в большом количестве могут быть найдены в электронном архиве Корнелльского университета (по адресу `https://arxiv.org/`). Большинство статей выходящих сейчас в бумажных журналах до этого появляется там. Теории гравитации и смежным вопросам посвящён раздел gr-qc («General Relativity and Quantum Cosmology»), однако, часть статей попадает в другой раздел: hep-th («High Energy Physics, Theory»).

В Москве существует Российское гравитационное общество (`http://rgs.da.ru/`), которое регулярно проводит семинары на Физическом факультете МГУ, периодически проводит конференции и издаёт журнал «Gravitation & Cosmology».

На интернет-страничке (`https://mipt.ru/education/chair/theoretical_physics/`) Кафедры теоретической физики МФТИ в разделе «читаемые курсы» можно найти программу, материалы и старую версию конспектов факультативного курса «Геометрические методы в классической теории поля», на основе которого написаны факультативные части этого пособия (`https://mipt.ru/education/chair/theoretical_physics/courses/geomm.php`).

Глава 6.3

Дифференцируемое многообразие-+

Глава 6.4

Ковариантная производная-+

Глава 6.5

Частица в ОТО

6.5.1 Свободная частица в общей теории относительности

В общей теории относительности (ОТО) пространство-время описывается как дифференцируемое многообразие с псевдоевклидовой метрикой $g_{ij}(x)$ с сигнатурой $(-,+,+,+)$[1], т.е. компоненты метрического тензора задаются невырожденной матрицей, у которой одно собственное число отрицательное и 3 — положительных. В каждой точке пространства-времени выбором системы координат метрический тензор может быть приведён к виду $g_{ij} = \mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1)$, но в конечной области (в отличие от специальной теории относительности) это может быть невозможно.

Метрический тензор в ОТО выступает в роли потенциала гравитационного поля.

Скалярное произведение, как обычно, определяется с помощью метрики

$$(\underline{a},\underline{b}) = g_{ij}\, a^i\, b^j = g^{ij}\, a_i\, b_j = a^i\, b_i = a_i\, b^i.$$

Как и в специальной теории относительности в ОТО векторы классифицируются на пространственноподобные $\underline{a}^2 > 0$, времени-подобные $\underline{a}^2 < 0$ и свето-подобные ($\underline{a}^2 = 0$) в зависимости от знака скалярного квадрата.

В пространстве-времени ОТО определяется симметричная метрическая связность (2.2.12), которая выступает в роли напряжённости гравитационного поля

$$\Gamma_{kij} = \frac{1}{2}\left[\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}\right], \qquad \Gamma^m{}_{ij} = \frac{g^{mk}}{2}\left[\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}\right].$$

Таким образом, параллельный перенос для векторов и тензоров оказывается нетривиальным и, как правило, зависит от траектории. Поэтому следует внимательно следить за тем, в какой точке определён тот или иной тензор.

В любой выбранной точке x_0 выбором системы координат (аналог калибровочного преобразования) можно привести метрику к метрике Минковского $g_{ij}(x_0) = \mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1)$, чтобы при этом коэффициенты связности *в данной точке* равнялись нулю $\Gamma^m{}_{ij}(x_0) = 0$. Это означает, что гравитационное поле в любой выбранной точке можно обнулить выбором системы координат. Такую систему координат иногда называют «системой падающего лифта».

Частица, которая взаимодействует только с гравитационным полем, в ОТО считается свободной. И вообще, в ОТО разделяют гравитационное поле и все остальные поля и частицы, которые называют полями материи. Такое разделение связано с тем, что только гравитационное поле в ОТО описывается геометрией пространства-времени.

Уравнение движения свободной частицы в ОТО — уравнение геодезической (аналог прямой) в пространстве-времени (2.2.5)

$$\frac{d^2X^s}{d\tau^2} + \Gamma^s{}_{ij}\frac{dX^i}{d\tau}\frac{dX^j}{d\tau} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad m\frac{d^2X^s}{d\tau^2} = -m\Gamma^s{}_{ij}\frac{dX^i}{d\tau}\frac{dX^j}{d\tau},$$

где $\tau = \int \sqrt{-g_{ij}(X(l))\,\frac{dX^i}{dl}\frac{dX^j}{dl}}\,dl$ — собственное время (натуральный параметр) вдоль мировой линии частицы.

Второе выражение мы специально переписали так, чтобы оно выглядело, как второй закон Ньютона.

Обычно на геометрию пространства-времени накладывают *принцип причинности*: условие отсутствия замкнутых времени-подобных кривых. Такая кривая могла бы быть мировой линией *машины времени* — частицы, которая возвращается в собственное прошлое. Принцип причинности не следует из уравнения Эйнштейна, он накладывается как дополнительный постулат.

[1] Во многих книгах используется сигнатура $(+,-,-,-)$.

6.5.2 Кривая экстремальной длины и свободная частица

По аналогии с функционалом длины (и действием для свободой частицы в СТО) легко записать действие для частицы массы m во внешнем гравитационном поле.

$$S[X(\lambda)] = -m\int \sqrt{-\frac{dX^i}{d\lambda}\frac{dX^j}{d\lambda}\,g_{ij}(X(\lambda))}\,d\lambda. \tag{6.5.1}$$

Здесь

$$\int \sqrt{-\frac{dX^i}{d\lambda}\frac{dX^j}{d\lambda}\,g_{ij}(X(\lambda))}\,d\lambda = \tau \text{ — собственное время.}$$

$$\frac{\delta S}{\delta X^k} = -mg_{ks}\left(\frac{d^2X^s}{d\tau^2} + \Gamma^s{}_{ij}\frac{dX^i}{d\tau}\frac{dX^j}{d\tau}\right) = 0. \tag{6.5.2}$$

В силу произвольности монотонного параметра λ лагранжиан в действии (6.5.1) является вырожденным.

6.5.3 Кривая экстремальной длины и свободная частица-2

Написать уравнение движения свободной нерелятивистской частицы в произвольных координатах как условие постоянства ковектора импульса (дифференцировать с учётом базисных векторов).

Действие для нерелятивистской свободной частицы в произвольных координатах имеет вид

$$S[X^\alpha(t)] = \int \frac{m\mathbf{v}^2}{2}\,dt = \int \frac{m}{2}\,g_{\alpha\beta}(x(t))\,\dot X^\alpha \dot X^\beta\,dt = \int \frac{m}{2}\left(\mathbf{e}_\alpha\big(X(t)\big),\mathbf{e}_\beta\big(X(t)\big)\right)\dot X^\alpha\dot X^\beta\,dt.$$

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int m\left((\mathbf{e}_\alpha,\mathbf{e}_\beta)\dot X^\alpha\delta\dot X^\beta + (\mathbf{e}_\alpha,\delta\mathbf{e}_\beta)\dot X^\alpha\dot X^\beta\right)dt = \\
&= \int m\left(g_{\alpha\gamma}\dot X^\alpha\delta\dot X^\gamma + \left(\mathbf{e}_\alpha,\frac{\partial\mathbf{e}_\beta}{\partial x^\gamma}\delta X^\gamma\right)\dot X^\alpha\dot X^\beta\right)dt = \\
&= \int\left(-\frac{d}{dt}(mg_{\alpha\gamma}\dot X^\alpha) + m\left(\mathbf{e}_\alpha,\frac{\partial\mathbf{e}_\beta}{\partial x^\gamma}\right)\dot X^\alpha\dot X^\beta\right)\delta X^\gamma\,dt.
\end{aligned}$$

Получаем уравнения движения в виде[2]

$$-\frac{d}{dt}\underbrace{(mg_{\alpha\gamma}\dot X^\alpha)}_{p_\gamma} + m\underbrace{\left(\mathbf{e}_\alpha,\frac{\partial\mathbf{e}_\beta}{\partial x^\gamma}\right)}_{\Gamma_{\alpha\gamma\beta}}\dot X^\alpha\dot X^\beta = 0 \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{Dp_\gamma}{dt} = -\frac{dp_\gamma}{dt} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}p_\alpha\dot X^\beta = 0.$$

Те же уравнения движения можно записать через метрику

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int\frac{m}{2}\left(g_{\alpha\beta}\dot X^\alpha\delta\dot X^\beta + g_{\alpha\beta}\delta\dot X^\alpha\dot X^\beta + \delta g_{\alpha\beta}\,\dot X^\alpha\dot X^\beta\right)dt = \\
&= \int\frac{m}{2}\left(g_{\alpha\gamma}\dot X^\alpha\delta\dot X^\gamma + g_{\gamma\beta}\delta\dot X^\gamma\dot X^\beta + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\delta X^\gamma\,\dot X^\alpha\dot X^\beta\right)dt = \\
&= \int\frac{m}{2}\left(-\frac{d}{dt}(g_{\alpha\gamma}\dot X^\alpha + g_{\gamma\beta}\dot X^\beta) + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\,\dot X^\alpha\dot X^\beta\right)\delta X^\gamma\,dt = \\
&= \int m\left(-g_{\alpha\gamma}\ddot X^\alpha - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta}\dot X^\beta\,\dot X^\alpha + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\alpha}\dot X^\alpha\,\dot X^\beta\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\,\dot X^\alpha\dot X^\beta\right)\delta X^\gamma\,dt = \\
&= \int m\left(-g_{\alpha\gamma}\ddot x^\alpha - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\right]\dot X^\alpha\dot X^\beta\right)\delta X^\gamma\,dt.
\end{aligned}$$

Уравнения движения частицы имеют вид

$$\frac{\delta S}{\delta X^\gamma} = -mg_{\alpha\gamma}\ddot x^\alpha - m\underbrace{\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\right]}_{\Gamma_{\gamma\alpha\beta}}\dot X^\alpha\dot X^\beta = 0.$$

[2]На ковариантную производную $\frac{Dp_\gamma}{dt}$ и коэффициенты связности $\Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}$ в контексте задачи 7г** можно не обращать внимания. Эти объекты обсуждаются в разделе «Ковариантная производная».

Если поднять индекс, то получается уравнение, которое (как ясно из обсуждения ковариантной производной) является уравнением геодезической

$$\ddot{X}^\lambda + \Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta}\dot{X}^\alpha\dot{X}^\beta = 0, \qquad \Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta} = \frac{g^{\lambda\gamma}}{2}\left[\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\right].$$

Теперь уравнения движения (и входящие в них коэффициенты связности) оказались выражены через компоненты метрического тензора и их производные. Отсюда видно, что пространство, в котором движется частица, может не быть плоским (можно рассмотреть частицу на искривлённой поверхности или пространство ориентаций твёрдого тела), это не мешает обобщить на случай такого пространства описание движения по инерции.

Такой подход применим при описании движения частицы в гравитационном поле в общей теории относительности (ОТО), в которой гравитационное поле описывается как искривлённая метрика пространства-времени. В ОТО, по сравнению с данным случаем, надо только вместо координатного времени t взять собственное время частицы τ и добавить дополнительную временную координату, например $X^0 = ct$. Кроме того, в теории относительности (как общей, так и в специальной) метрика пространства-времени не является положительно определённой, а имеет сигнатуру $(-,+,+,+)$.

$$S[X^i(\tau)] = \int \frac{m}{2}\, g_{ij}(X(\tau))\, \frac{dX^i}{d\tau}\frac{dX^j}{d\tau}\, d\tau = \int \frac{m}{2}\left(\mathbf{e}_i\big(X(\tau)\big), \mathbf{e}_j\big(X(\tau)\big)\right)\frac{dX^i}{d\tau}\frac{dX^j}{d\tau}\, d\tau. \tag{6.5.3}$$

4-мерный импульс имеет вид

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial(\frac{dX^i}{d\tau})} = m g_{ij}\,\frac{dX^j}{d\tau}.$$

Если константа m — масса частицы, то τ — собственное время.

Чтобы перейти к пределу безмассовой частицы можно сделать замену переменной интегрирования с τ на аффинный параметр $a = \frac{\tau}{m}$.

Новое действие равно применимо к массивным и безмассовым частицам:

$$S[X^i(a)] = \int \frac{1}{2}\, g_{ij}(X(a))\, \frac{dX^i}{da}\frac{dX^j}{da}\, da. \tag{6.5.4}$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial(\frac{dX^i}{da})} = g_{ij}\,\frac{dX^j}{da}.$$

Поскольку 4-импульс и обобщённая скорость $\frac{dX^i}{d\tau}$ (или $\frac{dX^i}{da}$) выражаются друг через друга взаимно однозначно, лагранжианы в действиях (6.5.3), (6.5.4) являются невырожденными.

6.5.4 Нерелятивистский предел

6.5.4.1 Уравнения движения

Рассмотрим уравнение геодезической в случае, когда скорость частицы мала по сравнению со скоростью света, а метрика близка к метрике Минковского.

$$g_{ij}(x) = \eta_{ij} + h_{ij}(x), \qquad \eta_{ij} = \mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1) = \eta^{ij}.$$

Связность вычислим в линейном порядке по возмущению метрики $h_{ij}(x)$. Поднимать и опускать индексы будем с помощью невозмущённой метрики Минковского η_{ij}

$$\begin{aligned}
\Gamma^m{}_{ij} &= \frac{g^{mk}}{2}\left[\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}\right] = \frac{g^{mk}}{2}\left[\partial_i h_{jk} + \partial_j h_{ki} - \partial_k h_{ij}\right] \approx \\
&\approx \frac{\eta^{mk}}{2}\left[\partial_i h_{jk} + \partial_j h_{ki} - \partial_k h_{ij}\right] = \frac{1}{2}\left[\partial_i h^m_j + \partial_j h^m_i - \partial^m h_{ij}\right].
\end{aligned} \tag{6.5.5}$$

Уравнения геодезической (2.2.10) (стр. 177), если взять его в нулевом порядке по $\mathbf{v}$ и h_{ij}, даст тождество $0 = 0$. Рассмотрим его в линейном порядке. $\frac{dX^i}{d\tau}$ достаточно взять в линейном порядке, т.е. можно положить $\frac{dX^i}{d\tau} = (1, \mathbf{v})$. Пространственные компоненты уравнения геодезической дают второй закон Ньютона для частицы гравитационном поле

$$\begin{aligned}
m\frac{d^2X^\mu}{dt^2} &\approx -m\Gamma^\mu{}_{00} - m\Gamma^\mu{}_{0\alpha}v^\alpha - m\Gamma^\mu{}_{\alpha0}v^\alpha = -m\Gamma^\mu{}_{00} - m2\Gamma^\mu{}_{0\alpha}v^\alpha \approx \\
&\approx -m\frac{1}{2}\left[\partial_0 h^\mu_0 + \partial_0 h^\mu_0 - \partial^\mu h_{00}\right] - m\left[\partial_0 h^\mu_\alpha + \partial_\alpha h^\mu_0 - \partial^\mu h_{0\alpha}\right]v^\alpha \\
&= m\left[-\partial_0 h_{0\mu} + \tfrac{1}{2}\partial_\mu h_{00}\right] + m[\partial_\mu h_{0\alpha} - \partial_\alpha h_{0\mu}]v^\alpha - m\partial_0[h_{\mu\alpha}]v^\alpha = \\
&= mg_\mu + m[\mathbf{v}\times\mathbf{h}]_\mu - m\partial_0[h_{\mu\alpha}]v^\alpha,
\end{aligned}$$

где введены следующие обозначения (скорость света добавлена в формулы из соображений размерности)

- $\varphi_{\text{гр.}}(x) = -\frac{c^2}{2} h_{00}$ — скалярный потенциал слабого гравитационного поля,
- $(\mathbf{A}_{\text{гр.}})_\mu(x) = c^2\, h_{0\mu}$ — векторный потенциал слабого гравитационного поля,
- $\mathbf{g} = -\operatorname{grad}\varphi_{\text{гр.}} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}_{\text{гр.}}}{\partial t}$ — ускорение свободного падения (создаётся гравитирующими телами),
- $\mathbf{h} = \operatorname{rot}\mathbf{A}_{\text{гр.}}$ — гравимагнитное поле, создаёт силу, аналогичную силе Кориолиса во вращающейся системе отсчёта в Ньютоновской механике (создаётся движущимися, в том числе вращающимися, гравитирующими телами),
- $2\hat{\gamma}_{\mu\alpha} = c\,\partial_0[h_{\mu\alpha}]$ — симметричная матрица сил вязкого трения и самоускорения (создаётся гравитационными волнами (7.3.10), которые излучаются ускоренными гравитирующими телами).

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{g} + \frac{m}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{h}] - 2m(\hat{\gamma}\mathbf{v}). \tag{6.5.6}$$

Силы вязкого трения и самоускорения возникают при зависящем от времени изменении масштабов координат. Если координата растягивается, то возникает иллюзия замедления всех частиц, а если сжимается — иллюзия ускорения.

Для стационарной (не зависящей от времени) метрики ситуация упрощается

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{g} + m[\mathbf{v}\times\mathbf{h}],$$

причём поле ускорения свободного падения становится потенциальным $\mathbf{g} = -\operatorname{grad}\varphi_{\text{гр.}}$.

Не стоит чрезмерно обольщаться сходством уравнения геодезической в слабом поле с уравнением движения для частицы в электромагнитном поле. Потенциал гравитационного поля (метрика) — симметричный тензор g_{ij} валентности $(0,2)$, тогда как потенциал электромагнитного поля $A_i = (-\varphi, \mathbf{A})$ — ковектор. У них разные трансформационные свойства, так что аналогия оказывается ограниченной.

В ОТО невозможно разделить гравитационные силы и силы инерции. В любой точке гравитационное поле можно обнулить выбором системы координат. Неустранимы только приливные эффекты — эффекты неоднородности гравитационного поля, связанные с кривизной пространства-времени (зависимостью параллельного переноса от траектории).

ОТО строится так, что все системы координат равноправны, а потому произвол в выборе системы координат соответствует заданию на пространстве-времени четырёх произвольных гладких функций (координат). Теория измерений (моделирование и анализ процесса измерения) в ОТО становится ещё более сложным, чем в специальной теории относительности.

6.5.4.2 Действие

Рассмотрим действие для свободной частицы в ОТО в следующей форме:

$$S[X^i(\tau)] = \int \frac{m}{2}\, g_{ij}(X(\tau))\, \frac{dX^i}{d\tau}\frac{dX^j}{d\tau}\, d\tau.$$

Для нерелятивистского предела мы положим $t \approx \tau$, $\frac{dX^i}{d\tau} \approx \frac{dX^i}{dt} = (1;\mathbf{v})$, $g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}$.

$$\begin{aligned} S[X^i(\tau)] &\approx S[\mathbf{r}(t)] = \int \frac{m}{2}\,[\eta_{ij} + h_{ij}]\;\frac{dX^i}{dt}\frac{dX^j}{dt}\,dt = \\ &= \int \frac{m}{2}\,[(\underbrace{\eta_{00}}_{-1} + \underbrace{h_{00}}_{-2\varphi_{\text{гр.}}}) + 2(\underbrace{\eta_{0\alpha}}_{0} + \underbrace{h_{0\alpha}}_{A_{\text{гр.}\alpha}})v^\alpha + (\underbrace{\eta_{\alpha\beta}}_{\delta_{\alpha\beta}} + h_{\alpha\beta})v^\alpha v^\beta]\,dt = \\ &= \int \left[-m(\varphi_{\text{гр.}} + \tfrac{1}{2}) + m(\mathbf{A}_{\text{гр.}},\mathbf{v}) + \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^\alpha h_{\alpha\beta} v^\beta}{2}\right] dt. \end{aligned}$$

Мы видим, что функция Лагранжа состоит из стандартной кинетической энергии $\frac{mv^2}{2}$, стандартных членов взаимодействия со скалярным и векторным гравитационными потенциалами и добавки $\frac{mv^\alpha h_{\alpha\beta} v^\beta}{2}$.

Только последняя добавка является для нас новой. Её вклад в уравнения Эйлера-Лагранжа в интересующем нас приближении имеет вид

$$\frac{\delta S_{\text{доб.}}}{\delta X^\alpha} \approx -\frac{d}{dt}[m h_{\alpha\beta} v^\beta] \approx -m\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial t}\, v^\beta.$$

Мы удержали по скорости члены не выше линейного порядка и пренебрегли ускорением.

6.5.4.3 Гравитационное смещение спектральных линий

Пусть в пространстве-времени можно ввести такие координаты, что метрика не зависит от $t = X^0$.

Тогда пространство симметрично относительно сдвигов по координатному времени t, для свободной частице этой симметрии соответствует закон сохранения ковариантной временно́й компоненты импульса

$$p_0 = g_{0i}p^i.$$

Для светового луча импульс на один фотон связан с частотой: $p_0 = -\hbar\omega$.

Определим, какую частоту измерит прибор, пространственные координаты которого постоянны вдоль его мировой линии, т.е. прибор неподвижный в данной системе координат.

Для такого прибора собственное время связано с координатным через g_{00}

$$ds^2 = -d\tau^2 = g_{00}\,dt^2 \quad \Rightarrow \quad d\tau = \sqrt{-g_{00}}\,dt.$$

Для слабых полей мы установили соответствие

$$g_{00} = -1 - 2\varphi_{\text{гр.}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} \approx 1 - \varphi_{\text{гр.}}$$

$$\omega_{\text{измеренное}} = \frac{\omega}{\sqrt{-g_{00}}} \approx \omega \underbrace{-\omega\varphi_{\text{гр.}}}_{\delta\omega} \tag{6.5.7}$$

Таким образом, при приближении к массивному телу свет испытывает *фиолетовое смещение* (частота растёт), а при удалении — *красное смещение* (частота падает), а при удалении — наоборот.

Для наблюдения поверхности Солнца из точки с нулевым гравитационным потенциалом имеем красное смещение

$$\frac{\delta\omega_\odot}{\omega} \approx -2{,}12 \cdot 10^{-6}.$$

Для наблюдения поверхности Земли из точки с нулевым гравитационным потенциалом красное смещение намного меньше,

$$\frac{\delta\omega_\oplus}{\omega} \approx -7 \cdot 10^{-10}.$$

Впрочем, для нас на Земле актуальнее фиолетовое смещение $+7 \cdot 10^{-10}$ при наблюдении с поверхности Земли объектов с нулевым гравитационным потенциалом.

Гравитационное смещение спектральных линий наблюдалось даже на перепаде высот в десятки метров вблизи поверхности Земли. Впрочем, в почти однородном гравитационном поле сдвиг частот может быть легко выведен из принципа эквивалентности, как это было проделано ранее (см. (2.14.10) на стр. 283 в разделе 2.14.1.1 «Ускорение протяжённого тела»).

Глава 6.6

Частица в поле Шварцшильда

6.6.1 Симметрии и законы сохранения в поле Шварцшильда

Рассмотрим уравнение геодезической в одной из реально возникающих в ОТО пространственно-временных метрик — метрике Шварцшильда. Поскольку мы пока не ознакомились с уравнениями гравитационного поля в ОТО (уравнениями Эйнштейна), введём эту метрику без вывода

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{r}} + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2\right),$$

где G — гравитационная постоянная, а M — некоторая константа.[1]

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

При $r \gg 2GM$ метрика близка к метрике Минковского в сферических координатах

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

Воспользовавшись результатами, полученными при рассмотрении нерелятивистского предела, мы видим, что при $r \gg 2GM$ скалярный потенциал слабого гравитационного поля имеет вид

$$\varphi_{\text{гр.}}(r) = \frac{\eta_{00} - g_{00}}{2} = -\frac{GM}{r},$$

соответствующий ньютоновскому закону всемирного тяготения для точечной частицы массы M, расположенной в начале координат.

Таким образом, задача о движении частицы в поле Шварцшильда — обобщение классической задачи Кеплера.

(!) В ньютоновской теории всемирного тяготения уравнения поля линейны по гравитационному потенциалу, а потому действует принцип суперпозиции, и потенциал произвольного распределения масс может быть разложен по потенциалам точечных масс. В ОТО уравнения гравитационного поля нелинейны, а потому поле системы частиц не сводится к метрике Шварцшильда.

При малых расстояниях $r \sim 2GM$ приближение слабого поля уже не работает, а при $r = 2GM$ имеется особенность, которая называется *горизонт событий* шварцшильдовской чёрной дыры. При $r > 2GM$ координата t является времени-подобной (т.е. вектор $\underline{e}_t$ времени-подобен), а координата r — пространственно-подобна. При $r < 2GM$ меняются знаки компонент метрики и координата t становится

[1] Метрика Шварцшильда, как и любая метрика, в разных системах координат принимает разную форму, например мы можем переопределить радиальную координату $\rho = r - 2GM$, после чего метрика Шварцшильда принимает вид

$$ds^2 = -\frac{dt^2}{1 + \frac{2GM}{\rho}} + \left(1 + \frac{2GM}{\rho}\right) dr^2 + (\rho + 2GM)^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2\right).$$

пространственно-подобной, а координата r — времени-подобной. На самом деле горизонт событий является особенностью не геометрии пространства-времени, а используемой системы координат, на что намекает тот факт, что $\det g_{ij}$ на горизонте особенности не имеет.

Метрика Шварцшильда достаточно симметрична, чтобы найти решение уравнения геодезической из законов сохранения.

Метрика Шварцшильда обладает рядом симметрий, которым соответствуют векторы Киллинга. Два вектора Киллинга мы видим сразу, поскольку компоненты метрики не зависят от координат t и ϕ, метрика симметрична относительно сдвига по ним, т.е. вдоль векторных полей $\underline{e}_t$ и $\underline{e}_\phi$. Это симметрии относительно сдвига по времени и поворота вокруг оси z. Ещё два линейно независимых вектора Киллинга можно связать с поворотами вокруг осей x и y, но они нам не понадобятся, и мы их выписывать не будем.

Симметрии метрики позволяют свести любое движение частицы к движению в экваториальной плоскости $\theta = \frac{\pi}{2}$. Ограничим метрику на соответствующее подпространство

$$ds^2_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{r}} + r^2\, d\phi^2.$$

Контравариантные и ковариантные компоненты 4-импульса имеют вид

$$p^i = \left(\frac{dt}{da}\ ;\ \frac{dr}{da}\ ;\ 0\ ;\ \frac{d\phi}{da}\right), \qquad p_i = \left(-\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\frac{dt}{da}\ ;\ \frac{\frac{dr}{da}}{1 - \frac{2GM}{r}}\ ;\ 0\ ;\ r^2\,\frac{d\phi}{da}\right).$$

По теореме Нётер сохраняются следующие величины

$$p_t = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\frac{dt}{da} = -E, \qquad p_\phi = r^2\,\frac{d\phi}{da} = L_z.$$

Мы ввели для интегралов движения привычные из классической механики обозначения E (энергия) и L_z (момент импульса по z).

Также сохраняется масса частицы, т.е. квадрат 4-импульса

$$\begin{aligned} -m^2 = p^i p_i &= -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\left(\frac{dt}{da}\right)^2 + \frac{\left(\frac{dr}{da}\right)^2}{1 - \frac{2GM}{r}} + r^2\left(\frac{d\phi}{da}\right)^2 = \\ &= -\frac{E^2}{1 - \frac{2GM}{r}} + \frac{\left(\frac{dr}{da}\right)^2}{1 - \frac{2GM}{r}} + \frac{L_z^2}{r^2}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем выражение, которое выглядит как закон сохранения энергии для нерелятивистской частицы с единичной массой в потенциале

$$\frac{(E^2 - m^2)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{da}\right)^2 - \frac{GMm^2}{r} + \frac{L_z^2}{2r^2} - \frac{GML_z^2}{r^3},$$

$m \neq 0$:

$$\frac{(E^2 - m^2)}{2m} = \frac{E+m}{2m}(E - m) = \frac{1}{2m}\left(\frac{dr}{da}\right)^2 - \frac{GMm}{r} + \frac{L_z^2}{2mr^2} - \frac{GML_z^2}{mr^3},$$

$m = 0$:

$$\frac{E}{2} = \frac{1}{2E}\left(\frac{dr}{da}\right)^2 + \frac{L_z^2}{2Er^2} - \frac{GML_z^2}{Er^3}.$$

При $m \neq 0$ удобно ввести следующие обозначения:

- $m_0 = m$;
- $\delta E = \frac{1}{2m}(E^2 - m^2) = (E - m)\frac{E+m}{2m} = \text{const}$ — в роли полной энергии (в нерелятивистском пределе $\frac{E+m}{2m} \approx 1$, $\delta E \approx E - m$, что соответствует кинетической энергии);
- $\frac{1}{2m}\left(\frac{dr}{da}\right)^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2$ — в роли кинетической энергии;
- $U(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{L_z^2}{2mr^2} - \frac{GML_z^2}{mr^3}$ — эффективный потенциал, он, в свою очередь, состоит из трёх слагаемых
  - $-\frac{GMm}{r}$ — ньютоновский гравитационный потенциал,
  - $\frac{L_z^2}{2mr^2}$ — классический центробежный потенциал (есть уже в классической задаче Кеплера),

- $-\frac{GML_z^2}{mr^3}$ — релятивистская поправка, которая возникает в ОТО.

При $m = 0$ удобно ввести следующие обозначения:

- $m_0 = E$;
- $\delta E = \frac{E}{2} = \text{const}$ — в роли полной энергии;
- $\frac{1}{2E}\left(\frac{dr}{da}\right)^2$ — в роли кинетической энергии;
- $U(r) = \frac{L_z^2}{2Er^2} - \frac{GML_z^2}{Er^3}$ — эффективный потенциал, он, в свою очередь, состоит из двух слагаемых
  - $\frac{L_z^2}{2Er^2}$ — классический центробежный потенциал с энергие в роли массы (есть уже в классической задаче Кеплера),
  - $-\frac{GML_z^2}{Er^3}$ — релятивистская поправка (с энергией в роли массы), которая возникает в ОТО.

В обоих случаях получаем

$$\delta E = \frac{1}{2m_0}\left(\frac{dr}{da}\right)^2 \underbrace{-\frac{GMm}{r} + \frac{L_z^2}{2m_0r^2} - \frac{GML_z^2}{m_0r^3}}_{U(r)},$$

$$L_z = r^2\frac{d\phi}{da}, \qquad E = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\frac{dt}{da}.$$

Отсюда мы решаем задачу в квадратурах.

$$\frac{dr}{da} = \sqrt{2m_0(\delta E - U(r))} \quad \Rightarrow \quad a(r) = \int \frac{dr}{\sqrt{2m_0(\delta E - U(r))}} \quad \Rightarrow \quad r = F(a),$$

$$\frac{L_z}{r^2} = \frac{d\phi}{da} = \frac{d\phi}{dr}\frac{dr}{da} = \frac{d\phi}{dr}\sqrt{2m_0(\delta E - U(r))} \quad \Rightarrow \quad \phi(r) = L_z\int \frac{dr}{r^2\sqrt{2m_0(\delta E - U(r))}},$$

$$\frac{E}{1-\frac{2GM}{r}} = \frac{dt}{da} = \frac{dt}{dr}\frac{dr}{da} = \frac{dt}{dr}\sqrt{2m_0(\delta E - U(r))} \quad \Rightarrow \quad t(r) = E\int \frac{dr}{\left(1-\frac{2GM}{r}\right)\sqrt{2m_0(\delta E - U(r))}}.$$

Исследование отклонения получающейся траектории от классической мы проведём после того, как решим классическую задачу Кеплера и ознакомимся с теорией возмущений для нелинейных колебаний.

Закон сохранения энергии удобно переписать заменив производные по времени на производные по углу ϕ.

$$\frac{dr}{da} = \frac{dr}{d\phi}\frac{d\phi}{da} = \frac{dr}{d\phi}\cdot\frac{L_z}{r^2} = -\frac{d(1/r)}{d\phi}\,L_z.$$

Обозначим $\frac{1}{r} = \rho$. Теперь

$$\delta E = \frac{L_z^2}{2m_0}\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2 \underbrace{-GMm\,\rho + \frac{L_z^2}{2m_0}\,\rho^2 - \frac{GML_z^2}{m_0}\,\rho^3}_{U(\rho)},$$

$$\frac{\delta E\, m_0}{L_z^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2 - \frac{GMmm_0}{L_z^2}\,\rho + \frac{\rho^2}{2} - GM\,\rho^3.$$

6.6.2 Прецессия перигелия Меркурия

Масса планеты отлична от нуля, так что закон сохранения энергии, выписанный через $\rho = 1/r$ и производные по углу ϕ имеет вид

$$\frac{\delta E\, m}{L_z^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2 - \frac{GMm^2}{L_z^2}\,\rho + \frac{\rho^2}{2} - GM\,\rho^3.$$

В классическом пределе член пропорциональный ρ^3 исчезает и функция $\rho(\phi)$ ведёт себя как эволюция гармонического осциллятора (ρ в роли координаты, ϕ в роли времени) с $\omega = 1$ и периодом ровно 2π. Т.е., когда частица совершает один оборот (ϕ изменяется на 2π), радиальная координата возвращается к прежнему значению, и частица возвращается в исходную точку. Таким образом, траектория оказывается

замкнутой. Если потенциал будет иметь вид, отличный от const/r, то период функции $\rho(\phi)$ изменится, и траектория не будет замкнутой. Если возмущение мало, то это будет соответствовать движению по медленно вращающемуся эллипсу. Это явление называется прецессией перигелия. Его объяснение для Меркурия было одной из первых проверок общей теории относительности. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Этот раздел предполагает предварительное знакомство с разделом 2.5.2 «Задача Кеплера в переменных $\phi, \rho = r^{-1}$» (см. стр. 202).

Мы получили дифференциальное уравнение (**??**)

$$\frac{L_z^2}{\mu}\frac{d^2\rho}{d\phi^2} = -\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{L_z^2}{2\mu r^2} + U(r)\right)\Big|_{r=\frac{1}{\rho}}.$$

Пусть потенциал близок к ньютоновскому (кулоновскому)

$$U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} + V(r) = -Gm_1m_2\rho + V(\rho^{-1}), \qquad \rho = \frac{1}{r},$$

где $V(r)$ — малая поправка, а частица совершает в нём финитное движение.

Тогда уравнение траектории в полярных координатах (**??**) приобретает вид

$$\frac{d^2\rho}{d\phi^2} = -\rho + \frac{1}{p} - \frac{\mu}{L_z^2}\frac{\partial}{\partial\rho}V(\rho^{-1}), \qquad \frac{1}{p} = \frac{\mu}{L_z^2}Gm_1m_2.$$

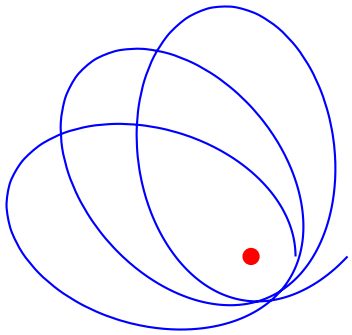
Пусть на больших (по сравнению с p) расстояниях поправка $V(r)$ может быть разложена по степеням $\frac{1}{r}$

$$V(r) = \frac{A}{2r^2} + \frac{B}{3r^3} + \frac{C}{4r^4} + \cdots = \frac{1}{2}A\rho^2 + \frac{1}{3}B\rho^3 + \frac{1}{4}C\rho^4 + \cdots.$$

Член $\frac{1}{r}$ мы опустили, так как он может быть рассмотрен вместе с невозмущённым ньютоновским (кулоновским) потенциалом.

Квадратичная добавка к потенциалу изменит период по углу, который больше не будет равен 2π, в результате чего минимальные расстояния до притягивающего центра (перигелии) не будут попадать в одну точку. На каждом обороте перигелий будет смещаться (прецессировать).

Добавки высших степеней (начиная с 3-й) дают уравнение ангармонического осциллятора. Как мы узнаем далее, частота ангармонического осциллятора зависит от амплитуды колебаний (в последующих разделах мы найдём зависимость по теории возмущений), что также даст прецессию перигелия.



Прецессия перигелия. $r^{-1} = 1 + 0{,}7\cos(1{,}1\cdot\phi)$, $\phi \in [0, 6\pi]$.

Прецессия перигелия вызывается практически любым отклонением потенциала от закона $\frac{1}{r}$. Она может быть связана с отклонением распределения массы центрального тела от сферической симметрии, влиянием третьих тел (других планет), релятивистскими эффектами (если скорость частицы достаточно велика), приближённым характером ньютоновского закона всемирного тяготения.

В своё время прецессия перигелия Меркурия была одним из первых эффектов, на которых проверялась общая теория относительности (ОТО).

Мы уже рассматривали движение частицы в метрике Шварцшильда, т.е. в гравитационном поле сферически симметричного тела в рамках ОТО (см. стр. 552). Мы нашли эффективный потенциал для радиального движения (в исходной формуле скорость света была положена 1, здесь она восстановлена из соображений размерности)

$$U_{\text{рад.}}(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{L_z^2}{2mr^2} - \frac{GML_z^2}{mc^2r^3}.$$

Первые два слагаемых здесь в точности соответствуют задаче Кеплера, а третье слагаемое даёт малую поправку $V(r) = V(r^{-1}) = -\frac{GML_z^2}{m}\rho^3$. Считая $m_1 = M \gg m = m_2 \approx \mu$, получаем

$$\frac{d^2\rho}{d\phi^2} = -\rho + \frac{1}{\mathrm{p}} + \frac{\partial}{\partial\rho}\frac{GM}{c^2}\rho^3 = -\rho + \frac{1}{\mathrm{p}} + \frac{3GM}{c^2}\rho^2.$$

(!) Напоминаем, что p — не импульс, а *параметр конического сечения.* p имеет размерность длины. $\frac{1}{\mathrm{p}} = \frac{\mu}{L_z^2}Gm_1m_2$.

Для нахождения равновесного значения ρ приравняем правую часть нулю. Из двух корней выберем тот, который ближе к корню линейного уравнения, получающемуся в исходной задаче Кеплера:

$$\frac{3GM}{c^2}\rho^2 - \rho + \frac{1}{\mathrm{p}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\frac{3GM}{c^2}\frac{1}{\mathrm{p}}}}{2\frac{3GM}{c^2}} \approx \frac{1}{\mathrm{p}}.$$

Обозначим $X = \rho - \rho_0$

$$\frac{d^2X}{d\phi^2} = -X - \rho_0 + \frac{1}{\mathrm{p}} + \frac{3GM}{c^2}(X + \rho_0)^2 = -X\left(1 - \frac{6GM}{c^2}\rho_0\right) + \frac{3GM}{c^2}X^2.$$

Мы получили уравнение, которое соответствует ангармоническому осциллятору с частотой *малых колебаний* (по углу ϕ)

$$\sqrt{1 - \frac{6GM}{c^2}\rho_0} \approx 1 - \frac{3GM}{c^2\mathrm{p}} \approx 1 - 3\left(\frac{GMm}{L_zc}\right)^2.$$

Период малых колебаний (по углу) составляет $\frac{2\pi}{\sqrt{1-\frac{6GM}{c^2}}} \approx 2\pi\left(1 + 3\left(\frac{GMm}{L_zc}\right)^2\right)$. Таким образом, за один период перигелий смещается на угол

$$\delta\phi \approx 6\pi\left(\frac{GMm}{L_zc}\right)^2.$$

Для Меркурия соответствующий угол составляет

$$\delta\phi_{\mathrm{☿}} \approx 0'',104,$$

что даёт $43''$ на столетие (100 земных лет = 415 меркурианских года).

Обратите внимание, мы вычислили смещения перигелия «для малых колебаний», т.е. для случая орбит близких к круговым, у которых высоты перигелия и афелия отличаются мало, другими словами, для орбит с малым эксцентриситетом.

Для орбит с достаточно большим эксцентриситетом нельзя пренебречь ангармонической поправкой $\frac{3GM}{c^2}X^2$, можно использовать теорию возмущений для ангармонических колебаний.

6.6.3 Отклонение луча света вблизи Солнца

Масса фотона равна нулю, так что закон сохранения энергии, выписанный через $\rho = 1/r$ и производные по углу ϕ, имеет вид

$$\frac{E^2}{2L_z^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2 + \frac{\rho^2}{2} - GM\,\rho^3.$$

Мы получили ангармонический осциллятор (ρ в роли координаты, ϕ в роли времени) с положением равновесия $\rho = 0$, т.е. $r = \infty$.

Удобно ввести два параметра с размерностью расстояния:

$$R_{\text{ш}} = 2GM \ \text{— } \textit{гравитационный радиус} \ (\textit{радиус Шварцшильда}),$$

$$b = \frac{L_z}{E} \ \text{— прицельный параметр.}$$

Теперь закон сохранения энергии приобрёл следующий вид:

$$\frac{1}{b^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2 + \frac{\rho^2}{2} - \frac{R_{\text{ш}}}{2}\rho^3. \tag{6.6.1}$$

Пролёт фотона мимо притягивающего центра (Солнца) соответствует тому, r уменьшается от бесконечности до минимального расстояния, а потому снова возрастает до бесконечности. Приращение ϕ при таком пролёте — $\pi + \delta\phi$, где $\delta\phi$ — отклонение луча света от исходного направления.

Нахождение $\pi + \delta\phi$ соответствует нахождению половины периода колебаний для осциллятора с потенциалом $U(x) = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} + \frac{m\varepsilon|x|^3}{3}$ и амплитудой a. Такую задачу мы уже решали ранее 49 (стр. 328).

В соответствии с (4.5.1)

$$\delta T = -\frac{8}{3}\frac{\varepsilon\, a}{\omega_0^3} \to 2\delta\phi.$$

Сравнивая (6.6.1) с законом сохранения энергии для ангармонического осциллятора получаем соответствие

$$\omega_0 \to 1, \quad \varepsilon \to -\frac{3}{2} R_{\text{ш}}, \quad a \to \frac{1}{b}.$$

Окончательно получаем отклонение луча света через отношение радиуса Шварцшильда к прицельному параметру

$$\delta\phi = \frac{2R_{\text{ш}}}{b}. \tag{6.6.2}$$

Без учёта эффектов общей теории относительности можно рассмотреть движение света как движение частицы со скоростью света в поле $U = -\frac{C}{r}$ и рассмотреть отклонение луча света как резерфордовское рассеяние на малый угол. Для резерфордовского рассеяния мы получили связь угла рассеяния с прицельным параметром (4.14.1) (стр. 497):

$$b = -\frac{C}{2\mathcal{E}}\ \operatorname{ctg}\tfrac{\theta}{2} \approx -\frac{C}{\mathcal{E}\theta}.$$

Для рассмотрения отклонения релятивистской частицы надо сделать следующие подстановки:

$$\theta \to -\delta\phi_{\text{классическое}}, \quad C = GMm, \quad \mathcal{E} = \tfrac{mc^2}{2}, \quad m = \tfrac{E}{c^2}$$

Такое полуклассическое рассмотрение даёт угол отклонения луча (одинаковые в случае ньютоновской корпускулы и СТО) ровно в 2 раза меньше, чем в рамках ОТО.

$$\delta\phi_{\text{классическое}} = \frac{C}{b\mathcal{E}} = \frac{GM\frac{E}{c^2}}{b\frac{E}{c^2}\frac{c^2}{2}} = \frac{2GM/c^2}{b} = \frac{R_{\text{ш}}}{b}. \tag{6.6.3}$$

Таким образом, мы имеем два альтернативных предсказания, которые можно сравнить с результатами наблюдений.

Сравнение формул (6.6.2) и (6.6.3) показывает, что в слабых полях в ОТО безмассовые частицы в два раза сильнее притягиваются гравитационным полем, чем в полуклассической теории. В дальнейшем, при рассмотрении линеаризованных уравнений Эйнштейна, мы увидим, что безмассовая (или ультрарелятивистская) частица создаёт в два раз больший ньютоновский гравитационный потенциал, чем нерелятивистская частица с той же энергией (7.3.13) (стр. 591).

Максимальное отклонение луча света будет наблюдаться при минимальном значении прицельного параметра, т.е. когда луч света проходит над самой поверхностью Солнца, при этом прицельный параметр равен радиусу Солнца $b = R_\odot$.

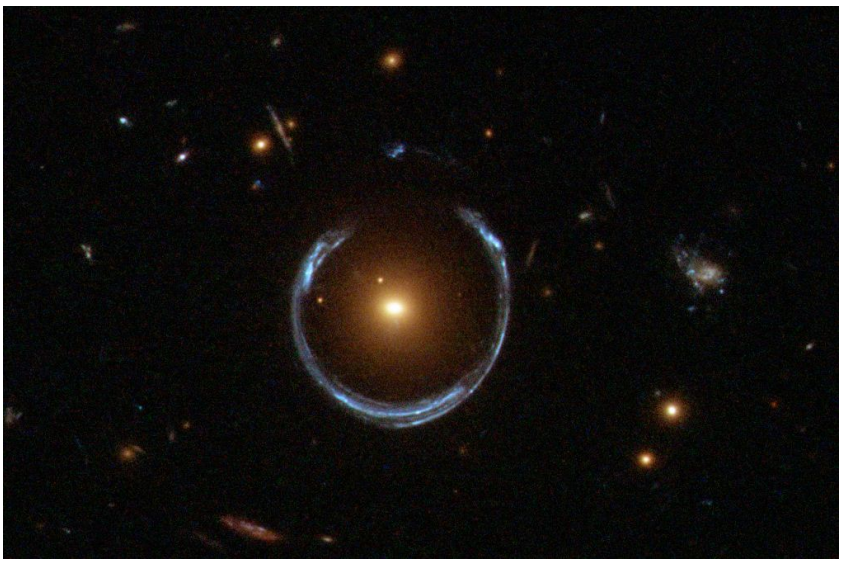
Соответствующее значение отклонения луча света

$$\delta\phi_{\max} = \frac{2R_{\text{ш}}}{R_\odot} = \frac{2 \cdot 2{,}95 \text{ км}}{6{,}957 \cdot 10^5 \text{ км}} \approx 0{,}85 \cdot 10^{-5} \text{ радиан} \approx 1'',75.$$

Такое наблюдение с поверхности Земли возможно во время солнечного затмения. Уже в 1919 году соответствующие наблюдения были проведены двумя группами:

- Кромелен и Дейвидсон — $1'',98 \pm 0'',18$;
- Эддингтон и Коттингам — $1'',61 \pm 0'',46$.

В наше время мы имеем намного более наглядные наблюдения гравитационного отклонения света, связанные с гравитационным линзированием.



Снятая телескопом «Хаббл» т. н. «космическая подкова» — гигантская эллиптическая галактика на z=0,45, линзирующая карликовую галактику на z=2,38. W©

Глава 6.7

Поля материи во внешнем гравитационном поле

В общей теории относительности все поля и частицы, кроме гравитационного поля (поля метрического тензора), принято называть полями материи.

Уравнения полей материи в ОТО должны допускать запись в произвольной системе координат, при этом в ОТО, как правило, нет предпочтительных систем координат, поскольку само пространство-время искривлено.

Мы пока ограничимся случаем, когда уравнения движения полей материи записываются в тензорном виде.

Простейший способ включить взаимодействие поля материи с гравитационным полем в уравнения движения — замена всех частных производных и производных по направлению ковариантными производными

$$\partial_i \to \nabla_i$$

и

$$\partial_{\mathbf{v}} \to \nabla_{\mathbf{v}}$$

соответственно.

Часто удобнее начать с функционала действия для соответствующего поля. Чтобы гарантировать ковариантность (тензорность) уравнений поля можно выбрать действие, инвариантное по отношению к замене координат. Для этого надо интегрировать по инвариантному элементу объёма

$$d^4x \to \sqrt{-\det g_{ij}}\, d^4x = \sqrt{-g}\, d^4x,$$

использовать вместо метрики Минковского метрику данного пространства-времени

$$\eta_{ij} \to g_{ij}$$

и (в некоторых случаях) заменить частные производные и производные по направлению ковариантными производными.

(!) Переход от СТО к ОТО с точки зрения уравнений движения и функционала действия не отличается от перехода от Лоренцевских координат к криволинейным.

(!*) Переход от СТО к ОТО *в случае общего положения* лишает нас симметрий, которыми обладало пространство-время Минковского и соответствующих законов сохранения (энергии, импульса, момента импульса). Соответствующие законы могут выполняться локально (как уравнения непрерывности) с заменой частных производных на ковариантные, но их уже нельзя интерпретировать как законы сохранения чего бы то ни было. Это связано с тем, что гравитационное поле взаимодействия с полями материи может обмениваться с ними энергией и импульсом, при этом принцип эквивалентности позволяет в любой точке пространства-времени обнулить гравитационное поле (выбрать систему координат, в которой метрика совпадает с метрикой Минковского), из-за чего энергию и импульс гравитационного поля невозможно однозначно (вне зависимости от системы координат) локализовать.

(*) Ковариантные производные при переходе к ОТО не всегда обязательны, в ряде случаев уравнения поля записываются через внешние производные, производные Ли и ходжевскую дуальность. Впрочем, для симметричной связности в определении внешней производной и производной Ли мы можем заменить частные производные и производные по направлениям ковариантными (вклад симметричных коэффициентов связности при этом сократится).

Тензор энергии-импульса для полей материи мы определим (как это принято в ОТО) и рассмотрим после вариации действия Гильберта для гравитационного поля.

6.7.1 Пробная точечная частица

Для массивной частицы мы уже ввели два разных функционала действия (6.5.1) и (6.5.3)

$$S_1[X(\lambda)] = -m \int\limits_l \sqrt{-\frac{dX^i}{d\lambda}\frac{dX^j}{d\lambda}\, g_{ij}(X(\lambda))}\, d\lambda, \qquad S_2[X^i(\tau)] = \int\limits_l \frac{m}{2}\, g_{ij}(X(\tau))\, \frac{dX^i}{d\tau}\frac{dX^j}{d\tau}\, d\tau.$$

Также мы ввели действие (6.5.4), применимое как к массивным, так и к безмассовым частицам.

$$S_3[X^i(a)] = \int \frac{1}{2}\, g_{ij}(X(a))\, \frac{dX^i}{da}\frac{dX^j}{da}\, da.$$

В этих трёх функционалах действия используются три разных параметра интегрирования: произвольный монотонный параметр, собственное время и аффинный параметр (выбранный так, чтобы производная по нему от координат давала 4-импульс).

Для всех трёх действий уравнения движения — уравнениях геодезической.

Мы определили 4-мерный импульс пробной частицы. Для массивной частицы 4-импульс выражается через 4-скорость

$$p^m = mu^m, \quad u^m = \frac{dX^m}{d\tau},$$

или в общем случае 4-импульс выражается через производную по аффинному параметру

$$p^m = \frac{dX^m}{da}.$$

Тем самым мы полностью описали энергию и импульс частицы, но в ОТО нам понадобится представить ту же информацию в виде тензора энергии-импульса. Аналогично в электродинамике нам пришлось записывать движение электрических зарядов через 4-мерную плотность тока (см. раздел 3.7.2 «4-мерная плотность электрического тока», стр.339).

Перепишем действие (6.5.4) как интеграл по мировому объёму U. Используя $g(X(a)) = \int_U g_{ij}(x)\, \delta^4(X(a) - x)\, d^4x$

$$S_3[X^i(a)] = \int \frac{1}{2}\, g_{ij}(X(a))\, \frac{dX^i}{da}\frac{dX^j}{da}\, da = \int\limits_U g_{ij}(x)\, \left[\frac{1}{2}\int \delta^4\big(X(a) - x\big)\, \frac{dX^i}{da}\frac{dX^j}{da}\, da\right] d^4x.$$

$$\frac{\delta S_3}{\delta g_{ij}(x)} = \frac{1}{2}\int \delta^4\big(X(a) - x\big)\, \frac{dX^i}{da}\frac{dX^j}{da}\, da = \frac{1}{2}\int \delta^4\big(X(a) - x\big)\, p^i\, p^j\, da.$$

Отсюда

$$T^{ij} = \frac{c}{\sqrt{-g}}\int \delta^4\big(X(a) - x\big)\, \frac{dX^i}{da}\frac{dX^j}{da}\, da = \frac{c\,\delta^3(X^\alpha - x^\alpha)}{\sqrt{-g}\,|p^0|}\, p^i p^j. \tag{6.7.1}$$

6.7.2 Скалярное поле

Действие для скалярного вещественного поля $\varphi(x)$ в СТО имеет вид

$$S_{\varphi\ \text{сто}}[\varphi(x)] = \int\limits_{\mathbf{U}} \left[\frac{1}{2}\eta^{ij}(\partial_i\varphi)(\partial_j\varphi) - U(\varphi)\right] d^4x.$$

В ОТО (или в СТО в криволинейных координатах) это действие приобретает вид

$$S_{\varphi\ \text{ото}}[\varphi(x)] = \int\limits_{\mathbf{U}} \left[\frac{1}{2}g^{ij}(\partial_i\varphi)(\partial_j\varphi) - U(\varphi)\right] \sqrt{-g}\, d^4x.$$

Для скалярного поля частная производная совпадает с ковариантной, так что ковариантные производные пока не возникли.

Проварьируем новое действие (гравитационное поле мы считаем фиксированным и метрический тензор не варьируем)

$$\begin{aligned}
\delta S_{\varphi\ \text{ото}} &= \int\limits_{\mathbf{U}} \left[\frac{1}{2}g^{ij}(\partial_i\delta\varphi)(\partial_j\varphi)+\frac{1}{2}g^{ij}(\partial_i\varphi)(\partial_j\delta\varphi)-U'(\varphi)\,\delta\varphi\right]\sqrt{-g}\,d^4x = \\
&= \int\limits_{\mathbf{U}} \left[\sqrt{-g}\,g^{ij}(\partial_i\varphi)(\partial_j\delta\varphi)-\sqrt{-g}\,U'(\varphi)\,\delta\varphi\right]\sqrt{-g}\,d^4x = \\
&= \int\limits_{\mathbf{U}} \left[\partial_j\{\sqrt{-g}\,g^{ij}(\partial_i\varphi)\delta\varphi\}-\{\sqrt{-g}\,g^{ij}\partial_i\varphi\}\,\delta\varphi-\sqrt{-g}\,U'(\varphi)\,\delta\varphi\right]\,d^4x = \\
&= \int\limits_{\partial\mathbf{U}} \sqrt{-g}\,g^{ij}(\partial_i\varphi)\delta\varphi\,d^3S_j+\int\limits_{\mathbf{U}}\left[-\frac{\partial_j\{\sqrt{-g}\,g^{ij}\partial_i\varphi\}}{\sqrt{-g}}-U'(\varphi)\right]\delta\varphi\,\sqrt{-g}\,d^4x.
\end{aligned}$$

Поверхностный интеграл $\int_{\partial\mathbf{U}}$ обнуляется в силу обычных граничных условий на вариацию поля

$$\delta\varphi|_{\partial\mathbf{U}}=0.$$

Мы получаем уравнение поля в виде

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{\varphi\ \text{ото}}}{\delta\varphi}=-\underbrace{\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_j\{\sqrt{-g}\,g^{ij}\partial_i\varphi\}}_{\text{Что это?}}-U'(\varphi)=0.$$

Мы разделили вариационную производную на $\sqrt{-g}$, чтобы получить скаляр.

Рассмотрим дифференциальный оператор, действующий на φ в члене помеченным как «Что это?» Очевидно, что это обобщение волнового оператора $\eta^{ij}\partial_i\partial_j=\triangle-\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, который получается если вернуться к метрике Минковского $g_{ij}=\eta_{ij}=\mathrm{diag}(-1;+1;+1;+1)$.

Можно ожидать, что в общем случае частные производные превратятся в ковариантные.

Выбором системы координат мы можем в любой точке получить $g_{ij}=\eta_{ij}$, $\partial_k g_{ij}=0$, $\Gamma^i_{jk}=0$. В такой системе координат в заданной точке

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_j\{\sqrt{-g}\,g^{ij}\partial_i\varphi\}=\partial^i\partial_i\varphi=\nabla^i\partial_i\varphi=\nabla^i\nabla_i\varphi.$$

Мы также воспользовались тем, что ковариантная производная от скаляра совпадает с частной $\nabla_i\varphi=\partial_i\varphi$.

Два скаляра совпали в произвольной точке в специальной системе координат. Если два скаляра совпадают в одной системе координат, то они совпадают в любой системе координат.

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{\varphi\ \text{ото}}}{\delta\varphi}=-\nabla^i\nabla_i\varphi-U'(\varphi)=0.$$

Однако, можно обойтись и без ковариантных производных через внешние производные и ходжевскую дуальность:

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_j\{\sqrt{-g}\quad\overbrace{g^{ij}\underbrace{\partial_i\varphi}_{d\varphi}}^{d\varphi\ \text{индекс поднят}}\quad\}}_{\hat{\boldsymbol{\delta}}d\varphi}=*^{-1}d*d\varphi=\hat{\boldsymbol{\delta}}d\varphi=\Box\varphi. \tag{6.7.2}$$

Аналогичное выражение мы получали в главе 2.12 «Интегрирование антисимметричных тензоров*» для *оператора Бельтрами-Лапласа* (2.12.4) (стр. 273).

Оператор (6.7.2) строится с помощью знакопеременной метрики с сигнатурой $(-,+,+,+)$, поэтому он больше похож на оператор Даламбера, чем на оператор Лапласа, и мы будем его называть *оператором Даламбера-Бельтрами*.

Тензор энергии-импульса набора скалярных полей мы получали ранее в разделе 4.6.3 «Тензор энергии-импульса и вариация действия по метрике» (стр. 456), при этом убедились, что вариация полевого действия для метрики и прежнее «механическое» определение дают одинаковый результат.

6.7.3 Электромагнитное поле

Электромагнитное поле в произвольном 4-мерном пространстве-времени описывается аналогично тому, как мы описывали ранее электромагнитное поле в пространстве-времени Минковского в главе 3.7 «Описание электромагнитного поля» (стр. 338). Надо только сделать следующие изменения:

- метрику Минковского $\eta_{ij} = \mathrm{diag}(-1;+1;+1;+1)$ на метрику рассматриваемого пространства-времени g_{ij};
- использовать инвариантный элемент объёма $\sqrt{-g}\,d^4x$;
- заменить форму объёма ε_{ijkl} на $\Omega_{ijkl} = \sqrt{-g}\,\varepsilon_{ijkl}$;
- заменить поливектор обратный к форме объёма форму объёма ε^{ijkl} на $(\Omega^{-1})^{ijkl} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\varepsilon^{ijkl}$;
- оператор $\hat{\boldsymbol{\delta}} = *^{-1}d*$ переписать в виде $(\hat{\boldsymbol{\delta}}F)^i = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_j(\sqrt{-g}\,F^{ij})$.

См. главу 2.12 «Интегрирование антисимметричных тензоров*» (стр. 271).

(!) Напомним, что в наших обозначениях

$$\varepsilon_{0123} = \varepsilon^{0123} = +1.$$

Внешние производные в ОТО сохраняют прежний вид и их можно с одинаковым успехом писать через частные и ковариантные производные[1], например

$$\begin{aligned}
(d\varphi)_i &= \partial_i\varphi = \nabla_i\varphi,\\
(dA)_{ij} &= \partial_i A_j - \partial_j A_i = \nabla_i A_j - \nabla_j A_i,\\
(dF)_{ijk} &= \partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} + \partial_k F_{ij} = \nabla_i F_{jk} + \nabla_j F_{ki} + \nabla_k F_{ij}.
\end{aligned}$$

Действие для электромагнитного поля с источниками в пространстве Минковского было рассмотрено в разделе 3.7.3 «Действие для электромагнитного поля» (стр. 340). Повторим соответствующие выкладки для электромагнитного поля в ОТО.

Всё необходимое про электромагнитное поле в ОТО здесь уже написано, но в связи с важностью и нетривиальностью электромагнитного поля будет полезно полностью переписать главу 3.7 «Описание электромагнитного поля» (стр. 338) для случая ОТО, подчеркнув в ключевых местах сходства и различия.

Прежде чем переходить к следующей главе читателю будет полезно попробовать самостоятельно расписать для случая ОТО первую пару уравнений Максвелла, калибровочные преобразования, действие и его вариацию.

[1] Тут важно, что в ОТО коэффициенты связности симметричны.

Глава 6.8

Описание электромагнитного поля (с. 338)

Здесь и далее при работе с электромагнитным полем мы будем использовать произвольные невырожденные пространственно-временные координаты кроме тех случаев, когда иное оговорено явно. Не всегда мы даже сможем сказать какая из координат пространственная, а какая — временная. По этой причине нет смысла измерять одну из координат в особых единицах (секундах вместо метров) и скорость света кладётся равной 1.

Также всё нижеприведённое относится к пространству-времени Минковского как в линейных, так и в криволинейных координатах.

6.8.1 Кинематика электромагнитного поля

Повторим основные результаты применительно к ОТО.

Поле описывается *ковекторным потенциалом*

$$A_i = (-\varphi; \mathbf{A}).$$

Разделять компоненты A_i на скалярный и векторный потенциалы в случае метрики общего вида не имеет особого смысла.[1]

По потенциалу можно построить *тензор электромагнитного поля* F_{ij}, компоненты которого обозначаются как компоненты электрического поля $\mathbf{E}$ и магнитного поля $\mathbf{B}$

$$F_{ij} = (dA)_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = \nabla_i A_j - \nabla_j A_i = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B^z & -B^y \\ E_y & -B^z & 0 & B^x \\ E_z & B^y & -B^x & 0 \end{pmatrix}.$$

Смысл в разделении тензора F_{ij} на электрические и магнитные компоненты есть только в том случае, если одна из координат может считаться временно́й, а остальные — пространственными.

(!) Параметризация может показаться странной, т.к. у компонент поля $\mathbf{E}$ индексы нижние, а у компонент $\mathbf{B}$ — верхние. Раньше (в СТО) мы так не делали. Но в СТО пространственная часть метрики Минковского задавалась единичной матрицей и верхнее или нижнее положение пространственных индексов было не важно. В ОТО метрика произвольна и верхние индексы надо отличать от нижних более последовательно. В данном случае верхние индексы компонент $\mathbf{B}$ связаны с тем, что $F_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} B^\gamma$.

С помощью метрического тензора индексы у тензора электромагнитного поля можно поднять

$$F^{ij} = g^{ik} F_{kl} g^{lj} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \begin{pmatrix} 0 & D^x & D^y & D^z \\ -D^x & 0 & H_z & -H_y \\ -D^y & -H_z & 0 & H_x \\ -D^z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Для недиагональной метрики при этом компоненты электрического и магнитного полей перемешиваются, поэтому мы их параметризовали компонентами двух других 3-мерных векторов, которые обозначили так, как в электродинамике в среде принято обозначать индукцию электрического поля $\mathbf{D}$ и напряжённость

[1] Про скалярный и векторный потенциалы имеет смысл говорить в некоторых частных случаях: (а) смешанные компоненты метрики равны нулю $g_{01} = g_{02} = g_{03} = 0$; (б) метрика близка к метрике Минковского.

магнитного поля $\mathbf{H}$. Такие обозначения, как мы увидим далее, хорошо согласуются с видом уравнений Максвелла в ОТО. (Множитель $\frac{1}{\sqrt{-g}}$ мы вставили для того, чтобы он сократился ниже в формуле для $(*F)_{ij}$.) При этом в роли проницаемостей «среды» (электрической, магнитной и перекрёстных) выступают некоторые комбинации компонент метрического тензора.

Также строится дуальный псевдотензор электромагнитного поля

$$(*F)_{ij} = \tilde{F}_{ij} = \frac{1}{2}\Omega_{klij}\,F^{kl} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,\varepsilon_{klij}\,F^{kl} = \begin{pmatrix} 0 & H_x & H_y & H_z \\ -H_x & 0 & D^z & -D^y \\ -H_y & -D^z & 0 & D^x \\ -H_z & D^y & -D^x & 0 \end{pmatrix}.$$

Опять, для недиагональной метрики компоненты параметризуются через $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$.

Для это поднимем индексы у формы объёма

$$\begin{aligned} \Omega^{i_1i_2i_3i_4} &= \Omega_{j_1j_2j_3j_4}g^{i_1j_1}g^{i_2j_2}g^{i_3j_3}g^{i_4j_4} = \sqrt{-g}\,\underbrace{\varepsilon_{j_1j_2j_3j_4}g^{i_1j_1}g^{i_2j_2}g^{i_3j_3}g^{i_4j_4}}_{\underbrace{\det(g^{ij})}_{g^{-1}}\,\varepsilon^{i_1i_2i_3i_4}} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{-g}}\varepsilon^{i_1i_2i_3i_4} = -(\Omega^{-1})^{i_1i_2i_3i_4} \end{aligned}$$

(!) Напомним, что в наших обозначениях

$$\varepsilon_{0123} = \varepsilon^{0123} = +1.$$

Чтобы связать компоненты дуального псевдотензора электромагнитного поля с компонентами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ удобнее поднять индексы

$$(*F)^{ij} = \tilde{F}^{ij} = \frac{1}{2}\Omega^{klij}\,F_{kl} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\varepsilon^{klij}\,F_{kl} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\begin{pmatrix} 0 & -B^x & -B^y & -B^z \\ B^x & 0 & E_z & -E_y \\ B^y & -E_z & 0 & E_x \\ B^z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Из определения тензора электромагнитного поля F_{ij} через потенциалы следует автоматическое выполнение *1-й пары уравнений Максвелла* (тех уравнений, которые не содержат зарядов и токов)

$$(dF)_{ijk} = \partial_iF_{jk} + \partial_jF_{ki} + \partial_kF_{ij} = \nabla_iF_{jk} + \nabla_jF_{ki} + \nabla_kF_{ij} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \end{cases}.$$

Поскольку первая пара уравнений Максвелла в 4-мерном виде может быть записана через обычные частные производные, дивергенция $\operatorname{div}\mathbf{B}$, ротор $\operatorname{rot}\mathbf{E}$ и проивздодная $\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ имеют привычный по классике «плоский» вид.

Потенциалы не имеют непосредственного физического смысла. Для заданного электромагнитного поля они определены неоднозначно. При калибровочном (градиентном) преобразовании потенциалов электромагнитное поле (тензор F_{ij}) не изменяется

$$A \to A' = A + df \quad \Leftrightarrow \quad A_i \to A'_i = A_i + \partial_i f = A_i + \nabla_i f.$$

При замене координат ковекторный потенциал A_i, тензор электромагнитного поля F_{ij} и дуальный псевдотензор $\tilde{F}_{ij}$ (а также F^{ij} и $\tilde{F}^{ij}$) преобразуются так, как полагается тензорам/псевдотензорам с соответствующим набором индексов

$$A_{i'} = A_i\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}, \qquad A^{i'} = A^i\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \qquad F_{i'j'} = F_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}, \qquad \tilde{F}_{i'j'} = \tilde{F}_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\,\operatorname{sgn}\frac{Dx}{Dx'}.$$

В частности, при чисто пространственных преобразованиях (не зависящих от времени и не затрагивающих время), сохраняющих евклидову метрику, $\mathbf{A}$, $\mathbf{E}$ ведут себя как 3-векторы, $\mathbf{B}$ — как псевдовектор (при заменах с отрицательным якобианом общий знак другой, чем для вектора), а φ — как скаляр.

Преобразования Лоренца в ОТО появляются при переходе между локально-лоренцевскими системами координат, либо между локальными ортноромированными базисами (**тетрадами**, их мы рассмотрим позже). При этом формулы имею прежний вид как в СТО. При преобразованиях Лоренца (бустах) вдоль оси x со скоростью v и гамма-фактором $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$

$$A_{i'} = \begin{pmatrix} -\varphi' \\ A_{1'} \\ A_{2'} \\ A_{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma(\varphi - \frac{v}{c}A_1) \\ \gamma(A_1 - \frac{v}{c}\varphi) \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix},$$

$$E_x = E'_x, \qquad E_y = \gamma(E'_y + \frac{v}{c}B'_z), \qquad E_z = \gamma(E'_z - \frac{v}{c}B'_y),$$
$$B_x = B'_x, \qquad B_y = \gamma(B'_y - \frac{v}{c}E'_z), \qquad B_z = \gamma(B'_z + \frac{v}{c}E'_y).$$

6.8.2 4-мерная плотность электрического тока

Мы уже рассматривали действие для взаимодействия заряженной частицы с электромагнитным полем

$$S_{\text{вз.}}[X^i(l)] = e\int A_i(X(l))\,\frac{dX^i}{dl}\,dl = e\int A_i(X(l))\,dX^i.$$

Это выражение не зависит от метрики и не требует при переходе к ОТО каких-либо изменений.

(!) Независимость от метрики (в силу используемого в ОТО определения тензора энергии-импульса через вариационную производную $T^{mn} = \frac{c}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g_{mn}}$) означает, что действие для взаимодействия заряженной частицы с электромагнитным полем не даёт вклад в тензор энергии-импульса.

Это действие *вместе с действием для свободного электромагнитного поля* (оно появится в следующем разделе) мы будем варьировать по потенциалам $A_i(x)$. Но полевое действие задаётся как интеграл по 4-мерному объёму, а действие для взаимодействия пока задано как интеграл вдоль мировой линии частицы, поэтому его придётся преобразовать.

Заряженных частиц может быть много, так что полное действие их взаимодействия с полем должно быть просуммировано по всем частицам, и каждая частица взаимодействует с полем в той точке, где она находится

$$S_{\text{вз.}}[X^i_a(l_a), A_i(x)] = \sum_a e_a\int A_i(X_a(l_a))\,\frac{dX^i_a}{dl_a}\,dl_a.$$

(!) Не путайте $X^i_a(l_a)$ — координаты частицы номер a как функции от параметра l_a, заданного вдоль мировой линии данной частицы, и x^i — независимые переменные, от которых зависит поле $A_i(x)$.

Для перехода к интегралу по 4-объёму воспользуемся δ-функцией, чтобы переписать поле в точке, где находится частица

$$A_i(X_a(l_a)) = \int\limits_U A_i(x)\,\frac{\delta^4(X_a(l_a)-x)}{\sqrt{-g}}\,\sqrt{-g}\,d^4x.$$

Мы поделили и умножили на $\sqrt{-g}$ для того, чтобы выделить инвариантный элемент объёма $\sqrt{-g}\,d^4x$.

(*) выражение $\frac{\delta^4(X-x)}{\sqrt{-g}}$ может показаться некрасивым, но на самом деле оно «лучше» исходной δ-функции, т.к. является скаляром. То, что δ-функция не скаляр видно хотя бы по формуле $\delta(kx) = \frac{\delta(x)}{|k|}$.

Подставим получившееся выражение в действие

$$S_{\text{вз.}}[X^i(l), A_i(x)] = \sum_a e_a\int\left(\int\limits_U A_i(\underline{x})\frac{\delta^4(X_a(l_a)-x)}{\sqrt{-g}}\,\sqrt{-g}\,d^4x\right)\,\frac{dX^i_a}{dl_a}\,dl_a.$$

Теперь внесём всё под интеграл по 4-объёму и вынесем из-под интеграла по dl_a всё, что не зависит от l_a

$$S_{\text{вз.}}[X^i(l), A_i(x)] = \int\limits_U A_i(x)\underbrace{\left(\sum_a e_a\int\frac{\delta^4(X_a(l_a)-x)}{\sqrt{-g}}\,\frac{dX^i_a}{dl_a}\,dl_a\right)}_{j^i(x)}\sqrt{-g}\,d^4x = \int\limits_U A_i(x)j^i(x)\,\sqrt{-g}\,d^4x.$$

Мы получили действие для взаимодействия поля $A_i(x)$ с источником $j^i(x)$, который не зависит от полевых переменных.

Осталось установить физический смысл 4-вектора $j^i(x)$.

$$j^i(x) = \sum_a e_a\int\frac{\delta^4(X_a(l_a)-x)}{\sqrt{-g}}\,\frac{dX^i_a}{dl_a}\,dl_a.$$

Параметры l_a вдоль мировых линий выбираются произвольным образом, поскольку действие от них не зависит. Пусть все они совпадают с координатным временем: $l_a = T$.

Временна́я часть источника выражается через *плотность заряда* $\rho(x)$. Это видно из того, что интеграл по 3-мерному объёму (по свойству δ-функции) даёт суммарный заряд в объёме.

$$j^0(x) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\sum_a e_a\int\underbrace{\delta^4(X_a(T)-x)}_{\delta(T-t)\delta^3(\mathbf{R}-\mathbf{r})}\underbrace{\frac{dX^0_a}{dT}}_{1}\,dT = \frac{1}{\sqrt{-g}}\sum_a e_a\delta^3(\mathbf{R_a}(t)-\mathbf{r}) = \rho(x).$$

Пространственная часть источника даёт произведение плотности заряда на скорость заряженных частиц в данной точке (в предположении, что мировые линии частиц не пересекаются), в этом выражении можно узнать *плотность электрического тока.*

$$\mathbf{j}(x) = \sum_a e_a \frac{1}{\sqrt{-g}} \int \underbrace{\delta^4(X_a(T) - x)}_{\delta(T-t)\delta^3(\mathbf{R}-\mathbf{r})} \underbrace{\frac{d\mathbf{R}_a}{dT}}_{\mathbf{v}_a} dT = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_a e_a \delta^3(\mathbf{R_a}(t) - \mathbf{r})\mathbf{v}_a = \rho(x)\mathbf{v}(x).$$

Таким способом источник $j^i = (\rho, \mathbf{j})$ идентифицируется с *4-мерной плотностью тока.*

Полученная плотность заряда является скалярной (по отношению к 3-мерным заменам координат) плотностью, т.е. чтобы найти суммарный заряд её надо интегрировать по инвариантному 3-мерному элементу объёма.

Может возникнуть вопрос, почему в 3-мерных плотностях заряда и тока в знаменателе стоит корень из определителя 4-мерной метрики. Это связано с тем, что плотности заряда и тока меняется не только при преобразовании пространственных координат, но и при преобразовании временно́й координаты.

6.8.3 Действие для электромагнитного поля

Как и в рамках СТО из компонент электромагнитного поля можно построить два независимых инварианта (остальные выражаются через эти два) — скаляр и псевдоскаляр соответственно

$$F^{ij}F_{ij} = \frac{2}{\sqrt{-g}}((\mathbf{B},\mathbf{H}) - (\mathbf{E},\mathbf{D})), \qquad \tilde{F}^{ij}F_{ij} = \frac{4}{\sqrt{-g}}(\mathbf{D},\mathbf{H}) = \frac{4}{\sqrt{-g}}(\mathbf{E},\mathbf{B}).$$

Соответственно квадратичный по полю инвариантный лагранжиан должен быть линейной комбинацией этих инвариантов.

(**) Псевдоскалярный инвариант, как и раньше может быть представлен в виде 4-мерной дивергенции (2.12.1):

$$\begin{aligned}\tilde{F}^{ij}F_{ij} = \frac{1}{2}\Omega^{ijkl}F_{ij}F_{kl} = \Omega^{ijkl}F_{ij}\partial_{[k}A_{l]} = \Omega^{ijkl}F_{ij}\partial_k A_l = \\ = \Omega^{ijkl}\partial_k(F_{ij}A_l) - \underbrace{\Omega^{ijkl}(\partial_k F_{ij})}_{0} A_l = \Omega^{ijkl}\partial_k(F_{ij}A_l) = \\ = -\frac{\varepsilon^{ijkl}}{\sqrt{-g}}\partial_k(F_{ij}A_l) = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_k(\varepsilon^{ijkl}F_{ij}A_l) = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_k(\sqrt{-g}\Omega^{ijkl}F_{ij}A_l).\end{aligned}$$

Интеграл от 4-дивергенции по инвариантному 4-объёму сводится к интегралу по границе объёма и не даёт вклада в уравнения поля.

Таким образом, остаётся лагранжиан в виде $\text{const} \cdot F^{ij}F_{ij}$. Постоянную $-\frac{1}{16\pi k_к}$ мы уже определили в случае лоренцевских координат в СТО, из принципа эквивалентности постоянная должна остаться прежней:

$$\mathrm{L}_п = -\frac{F^{ij}F_{ij}}{16\pi k_к}.$$

Действие для электромагнитного поля, взаимодействующего с заряженными частицами — сумма действия для свободных частиц, действия для взаимодействия частиц и поля, действия для свободного поля

$$S[X^i_a(l_a), A_i(x)] = \underbrace{-\sum_a m_a \int \sqrt{-g_{ij}\frac{\partial X^i_a}{\partial l_a}\frac{\partial X^j_a}{\partial l_a}}\, dl_a}_{S_ч[X^i_a(l_a)]} + \underbrace{\sum_a e_a \int A_i(X_a(l_a))\frac{dX^i_a}{dl_a}\, dl_a}_{S_{вз.}[X^i_a(l_a),A_i(x)]=\int_U A_i(x)j^i(x)\sqrt{-g}d^4x} + \underbrace{\int_U \frac{-F^{ij}F_{ij}}{16\pi k_к}\sqrt{-g}\, d^4x}_{S_п[A_i(x)]}. \tag{6.8.1}$$

Если мы варьируем общее действие по потенциалам $A_i(x)$, то мы можем откинуть член, описывающий свободные частицы $S_ч[X^i_a(l_a)]$, поскольку он не зависит от полевых переменных. Член, описывающий взаимодействие, удобнее написать в виде интеграла по 4-объёму.

То, что остаётся — действие для поля с внешними источниками

$$S[A_i(x)] = \int_U \left(\frac{-F^{ij}F_{ij}}{16\pi k_к} + j^i(x)A_i(x)\right)\sqrt{-g}\, d^4x. \tag{6.8.2}$$

6.8.4 Вторая пара уравнений Максвелла

Проварьируем действие (6.8.2) для электромагнитного поля с внешними источниками.
При вариации $\delta(F^{ij}F_{ij}) = 2F^{ij}\,\delta F_{ij}$ (поскольку оба вхождения F_{ij} дают одинаковый вклад)

$$\delta S = \int\limits_U \left(\frac{-F^{ij}\,\delta F_{ij}}{8\pi k_{\text{к}}} + j^i\,\delta A_i \right) \sqrt{-g}\,d^4x.$$

Числитель в силу антисимметричности F^{ij} преобразуется как $F^{ij}\,\delta F_{ij} = F^{ij}(\partial_i\delta A_j - \partial_j\delta A_i) = -2F^{ij}\partial_j\delta A_i$

$$\begin{aligned}\delta S &= \int\limits_U \left(\frac{F^{ij}}{4\pi k_{\text{к}}}\,\partial_j\delta A_i + j^i\,\delta A_i \right) \sqrt{-g}\,d^4x = \\ &= \int\limits_U \left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_j \left[\sqrt{-g}\frac{F^{ij}}{4\pi k_{\text{к}}}\,\delta A_i \right] - \delta A_i \frac{\partial_j\sqrt{-g}F^{ij}}{4\pi k_{\text{к}}\sqrt{-g}} + j^i\,\delta A_i \right) \sqrt{-g}\,d^4x.\end{aligned}$$

Первое слагаемое даёт интеграл по инвариантному объёму $\sqrt{-g}\,d^4x$ от инвариантной 4-дивергенции, либо (если сократить $\sqrt{-g}$) интеграл по объёму d^4x от неинвариантной (плоской) 4-дивергенции. В любом случае первое слагаемое сводится к поверхностному интегралу и не даёт вклада в действие в силу условия $\delta A_i|_{\partial U} = 0$.

$$\delta S = \int\limits_U \left(-\frac{\partial_j(\sqrt{-g}\,F^{ij})}{4\pi k_{\text{к}}\sqrt{-g}} + j^i \right) \delta A_i\,\sqrt{-g}\,d^4x, \qquad \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta A_i(x)} = -\frac{\partial_j(\sqrt{-g}\,F^{ij})}{4\pi k_{\text{к}}\sqrt{-g}} + j^i.$$

Приравнивая нулю вариационную производную, получаем уравнения поля

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_j(\sqrt{-g}\,F^{ij}) = 4\pi k_{\text{к}}\,j^i.$$

Выражение в левой части знакомо нам как дивергенция от поливектора ($\hat{\boldsymbol{\delta}} = *^{-1}d*$) степени 2 (от антисмметричного тензора с двумя верхними индексами), так что мы можем переписать уравнения поля как

$$(\hat{\boldsymbol{\delta}}F)^i = 4\pi k_{\text{к}}\,j^i.$$

Индексы обычно опускают и пишут просто

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}F = 4\pi k_{\text{к}}\,j.$$

Можно проверить, что это же уравнение можно записать через ковариантную производную:

$$\nabla_j F^{ij} = 4\pi k_{\text{к}}\,j^i.$$

При $i = 0$ подставляем компоненты тензора поля и 4-вектора плотности тока (используя параметризацию через векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$)

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_j\sqrt{-g}F^{0j} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\Big[\partial_0\underbrace{F^{00}}_{0} + \partial_\alpha\underbrace{F^{0\alpha}}_{D_\alpha}\Big] = 4\pi k_{\text{к}}\underbrace{j^0}_{\rho}.$$

Получаем одно из уравнений Максвелла

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi k_{\text{к}}\sqrt{-g}\,\rho.$$

Дивергенция в левой части «плоская», $\sqrt{-g}\,\rho$ — это нескалярная плотность заряда, чтобы получить заряд её надо интегрировать по элементу координатного (неинвариантного) 3-мерного объёма $d^3\mathbf{r}$ как будто в евклидовом пространстве.

При $i = \alpha$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_j\sqrt{-g}F^{\alpha j} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\Big[\underbrace{\partial_0}_{\frac{\partial}{\partial t}}\underbrace{F^{\alpha 0}}_{-D_\alpha} + \partial_\beta\underbrace{F^{\alpha\beta}}_{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}H_\gamma}\Big] = \frac{1}{\sqrt{-g}}\Big[-\frac{\partial}{\partial t}D_\alpha + \underbrace{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial_\beta H_\gamma}_{(\operatorname{rot}\mathbf{H})_\alpha}\Big] = 4\pi k_{\text{к}}j^\alpha.$$

Отсюда получаем оставшееся уравнение Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi k_{\text{к}}\sqrt{-g}\,\mathbf{j}.$$

Ротор в левой части «плоский», $\sqrt{-g}\,\mathbf{j}$ — это невекторная плотность тока, чтобы получить ток её надо интегрировать её поток по элементу координатной (неинвариантной) 2-мерного площади $d^2\mathbf{s}$ как будто в евклидовом пространстве. Коэффициент $\frac{-1}{16\pi k_к}$ задним числом определился из соответствия с уравнениями Максвелла. Его численное значение обусловлено выбором единиц измерения. Знак, как мы увидим ниже (обсуждая тензор энергии-импульса), обусловлен знаком энергии электромагнитного поля и знаком сил, действующих на заряды.

Таким образом, *вторая пара уравнений Максвелла* может быть записана как в 4-мерном, так и в 3-мерном виде

$$\nabla_j F^{ij} = 4\pi k_к\, j^i \qquad \Leftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi k_к\,\sqrt{-g}\,\rho \\ \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi k_к\,\sqrt{-g}\,\mathbf{j} \end{array} \right. .$$

Трёхменая записать с точностью до множителя $\sqrt{-g}$ при источниках[2] совпала со второй парой уравнений Максвелла в среде.

(**) Как обычно, если два тензора равны в одной системе координат, то они равны в любой другой. Это позволяет записать уравнения поля в криволинейных координатах через дивергенцию антисимметричного тензора F^{ij} просто из ранее полученных «плоских уравнений» $\partial_j F^{ij} = 4\pi k_к\, j^i$ с учётом того, что для любой точки пространства-времени можно подобрать такую систему координат, что метрика совпадёт с метрикой Минковского, а её первые производные (вместе с коэффициентами связности) равны нулю. И ходя эти свойства будут выполнены только в одной точке, в силу произвольности этой точки этого достаточно.

(!) В силу антисимметричности F^{ij} 4-дивергенция от уравнений поля даёт нуль, откуда следует *уравнение непрерывности электрического тока*, которое в данном случае возникает как *условие совместности уравнений Максвелла*

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_i\sqrt{-g}\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_j\sqrt{-g}F^{ij} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_i\partial_j\sqrt{-g}F^{ij} = 0 = 4\pi k_к\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_i(\sqrt{-g}\,j^i) \qquad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_i(\sqrt{-g}\,j^i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial(\sqrt{-g}\,\rho)}{\partial t} + \operatorname{div}(\sqrt{-g}\,\mathbf{j}) = 0. \tag{6.8.3}$$

В последней формуле дивергенция «плоская» 3-мерная.

(**) Может показаться странным, почему первая и вторая пара так похожи в 3-мерном виде и совсем не похожи в 4-мерном. Чтобы увидеть их сходство в 4-мерном виде надо переписать одну из пар через $\tilde{F}_{ij}$, а вторую оставить записанной через F_{ij} (применить к одному из уравнений ходжевскую дуальность). Тогда сходство станет явным.

$$dF = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} + \partial_k F_{ij} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla_j \tilde{F}^{ij} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad *^{-1} d \underbrace{*(*F)}_{-F} = 0,$$

$$*^{-1}d*F = 4\pi k_к\, j \;\Leftrightarrow\; \nabla_j F^{ij} = 4\pi k_к\, j^i \;\Leftrightarrow\; \partial_i\tilde{F}_{jk}+\partial_j\tilde{F}_{ki}+\partial_k\tilde{F}_{ij} = 4\pi k_к\,(*j)_{ijk} = 4\pi k_к\,\Omega_{mijk}\,j^m \;\Leftrightarrow\; d*F = 4\pi k_к * j.$$

Цепочки эквивалентных формул здесь начинают и кончают выражения на языке дифференциальных форм, делающие соответствие очевидным. Если вы ещё не освоили этот язык, то смотрите только на две средний формулы в каждой цепочке.

6.8.5 Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

Построим тензор энергии-импульса электромагнитного поля.

Ранее мы определяли тензор энергии-импульса по формуле

$$T^i{}_j = \mathrm{L}_п\delta^i_j - \frac{\partial \mathrm{L}_п}{\partial\partial_i\varphi_a}\partial_j\varphi_a.$$

Здесь φ_a — компоненты полей. По повторяющемуся индексу a (этот индекс может быть или не быть тензорным) во втором слагаемом идёт суммирование.

В общей теории относительности это определение не применяется!

Вместо этого тензор энергии-импульса определяется через вариационную производную по метрическому тензору от действия для полей материи:

$$T^{ij} = \frac{2c}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_м}{\delta g_{ij}}. \tag{6.8.4}$$

[2]Можно было бы убрать $\sqrt{-g}$ переопределив плотности заряда и тока.

(!) Определение (6.8.4) всегда даёт симметричный тензор энергии импульса!

(*) Откуда взялась вариация по метрическому тензору? Аккуратно мы ответим на этот вопрос при выводе уравнений Эйнштейна путём вариации действия Гильберта. Пока отметим, что компоненты метрического тензор как функция координат будут выступать в роли динамических полей $g_{ij}(x)$ и по этим полям будет варьироваться суммарное действие для гравитации и полей материи. Тензор энергии импульса окажется вкладом в уравнения поля метрики от полей материи.

Ранее мы показали в разделе 4.6.3 «Тензор энергии-импульса и вариация действия по метрике» (стр. 456), что для набора скалярных полей эти два определения тензора энергии-импульса совпадают.

Для электромагнитного поля два определения дают разные тензоры энергии-импульса. Ранее (в контексте СТО, стр. 342) мы действовали по первому определению и получили несимметричный тензор энергии-импульса, который к тому же не был калибровочно-инвариантным, а значит не мог быть выражен в терминах физически измеримых величин. После симметризации тензор энергии-импульса стал калибровочно-инвариантным и выразился через компоненты электромагнитного поля. Такой же симметричный тензор энергии-импульса мы получим сейчас по новому определению (6.8.4).

Член действия, описывающий взаимодействие поля и токов $S_{\text{вз.}}$, как мы отмечали выше, не зависит от метрического тензора, а значит он не даёт вклада в тензор энергии-импульса (6.8.4).

Вклад частиц мы сейчас не рассматриваем, так что остаётся вклад лагранжиана свободного поля

$$\mathrm{L}_{\text{п}} = -\frac{1}{16\pi k_{\text{к}}} F^{ij}F_{ij} = -\frac{1}{16\pi k_{\text{к}}} F_{ij}F_{kl}g^{ik}g^{jl}.$$

Соответствующее действие мы выпишем теперь как функционал не только от $A_i(x)$, но и от $g_{ij}(x)$:

$$S_{\text{п}}[A_i(x), g_{ij}(x)] = \int\limits_U -\frac{1}{16\pi k_{\text{к}}} F_{ij}F_{kl}g^{ik}g^{jl}\,\sqrt{-g}\,d^4x.$$

Проварьируем это действие по метрике.

$$\begin{aligned}
\delta S_{\text{п}} &= \frac{1}{16\pi k_{\text{к}}} \int\limits_U \Big(- F_{ij}F_{kl}\delta g^{ik}g^{jl}\,\sqrt{-g} - F_{ij}F_{kl}g^{ik}\delta g^{jl}\,\sqrt{-g} - F_{ij}F_{kl}g^{ik}g^{jl}\,\delta\sqrt{-g}\Big)\,d^4x = \\
&= \frac{1}{16\pi k_{\text{к}}} \int\limits_U \Big(- 2F^k{}_jF_{kl}\delta g^{jl}\,\sqrt{-g} - F_{ij}F^{ij}\,\delta\sqrt{-g}\Big)\,d^4x.
\end{aligned}$$

Как мы уже выводили ранее 456

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{mn}\,\delta g_{mn}, \qquad \delta g^{jl} = -g^{jm}g^{ln}\,\delta g_{mn}.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}
\delta S_{\text{п}} &= \frac{1}{16\pi k_{\text{к}}} \int\limits_U \Big(2F^k{}_jF_{kl}g^{jm}g^{ln}\,\delta g_{mn}\,\sqrt{-g} - F_{ij}F^{ij}\,\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{mn}\,\delta g_{mn}\Big)\,d^4x = \\
&= \frac{1}{16\pi k_{\text{к}}} \int\limits_U \Big(2F^{km}F_k{}^n - F_{ij}F^{ij}\,\frac{1}{2}\,g^{mn}\Big)\,\delta g_{mn}\,\sqrt{-g}\,d^4x.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы построили тензор энергии-импульса для свободного электромагнитного поля, который совпал (с точностью до используемой метрики) с симметричным тензором энергии-импульса для электромагнитногополя в СТО:

$$T^{mn} = -g^{mn}\frac{1}{16\pi k_{\text{к}}}F^{ij}F_{ij} + \frac{1}{4\pi k_{\text{к}}}F^{km}F_k{}^n, \qquad T^m_n = -\delta^m_n\frac{1}{16\pi k_{\text{к}}}F^{ij}F_{ij} + \frac{1}{4\pi k_{\text{к}}}F^{km}F_{kn}. \tag{6.8.5}$$

Важное свойство этого тензора энергии-импульса, специфичное для электромагнитного поля — равенство нулю следа

$$T^i{}_i = 0.$$

В частности, для фотонного газа в системе центра инерции из изотропии, симметрии и нулевого следа получаем $T^{ij} = \mathrm{diag}(W, \frac{1}{3}W, \frac{1}{3}W, \frac{1}{3}W)$, т.е. давление фотонного газа равно трети от плотности энергии.

Электромагнитное поле может обмениваться энергией и импульсом с другими полями материи (с заряженными частицами), а также с гравитационным полем.

Возьмём ковариантную дивергенцию от тензора энергии-импульса для электромагнитного поля, взаимодействующего с источниками. В силу того, что $\nabla_i g_{ij} = 0$ (метрический тензор ковариантно постоянен) мы можем свободно поднимать-опускать индексы под ковариантной производной.

$$\begin{aligned}
\nabla_i T^i{}_j &= -\nabla_j \frac{1}{16\pi k_к} F^{kl} F_{kl} + \nabla_i \frac{1}{4\pi k_к} F^{ik} F_{jk} = -\frac{1}{8\pi k_к} F^{kl}\,\nabla_j F_{kl} + \frac{1}{4\pi k_к} F^{ik}\,\nabla_i F_{jk} + \underbrace{\frac{1}{4\pi k_к}(\nabla_i F^{ik})}_{-j^k} F_{jk} = \\
&= -F_{jk} j^k + \frac{1}{8\pi k_к}\left(-F^{kl}\,\nabla_j F_{kl} + 2F^{lk}\,\nabla_l F_{jk}\right) = -F_{jk} j^k + \frac{F^{lk}}{8\pi k_к}\left(\nabla_j F_{kl} + 2\nabla_l F_{jk}\right) = \\
&= -F_{jk} j^k + \frac{F^{lk}}{8\pi k_к}\left(\nabla_j F_{kl} + \nabla_l F_{jk} - \nabla_k F_{jl}\right) = -F_{jk} j^k + \frac{F^{lk}}{8\pi k_к}\underbrace{\left(\nabla_j F_{kl} + \nabla_l F_{jk} + \nabla_k F_{lj}\right)}_{0}.
\end{aligned}$$

Во второй строчке мы переименовали немой индекс $i \to l$. В третьей строчке мы воспользовались тем, что при свёртке с F^{lk} вклад даёт только антисимметричная по k, l часть выражения $\nabla_l F_{jk}$. В итоге большая часть членов уничтожилась в силу первой пары уравнений Максвелла, и мы получили уравнение баланса энергии-импульса

$$\nabla_i T^i{}_j = -F_{jk} j^k \qquad \Leftrightarrow \qquad \nabla_i T^{ij} = -F^j{}_k j^k.$$

(*) Полученные ковариантные уравнения непрерывности для энергии-импульса показали, что электромагнитное поле может обмениваться энергией и импульсом с зарядами и токами (об этом говорит правая часть уравнений), но обмен энергией и импульсом с гравитационном полем почему-то не виден. Между тем, мы уже показывали, что в гравитационном поле луч света отклоняется, значит есть обмен импульсом. Также мы показали, что в гравитационном поле меняется частота света, т.е. по формуле $\mathcal{E} = \hbar\omega$ меняется и энергия, а значит обмен энергией тоже есть. Почему же мы этот обмен не виден в *ковариантных* уравнениях непрерывности?

(*) Дело в комбинации принципа эквивалентности и свойств тензоров. Принцип эквивалентности позволяет в любой точке пространства-времени «убрать» гравитационное поле выбором системы координат, а значит убрать в этой точке обмен энергией и импульсом между гравитационным полем и полями материи. А значит обмен энергией и импульсом материи и гравитации нельзя описать тензором (если тензор равен нулю в одной системе отсчёта, то он равен нулю и в любой другой системе отсчёта). При более внимательном рассмотрении оказывается, что в искривлённом пространстве *ковариантное* уравнение непрерывности действительно является локальной формой закона сохранения только когда дивергенция берётся от вектора (когда рассматривается поток скалярной величины). Для 4-мерного импульса в искривлённом пространстве сложно записать глобальный закон сохранения, т.к. чтобы сложить импульсы относящиеся к разным точкам пространства мы сперва должны параллельным переносом собрать их в одной точке, а результат параллельного переноса зависит от траектории. Мы ещё вернёмся к вопросу о энергии и импульсе гравитационного поля после того, как введём уравнения Эйнштейна.

6.8.5.1 Компоненты тензора энергии-импульса

Выпишем компоненты тензора энергии-импульса (6.8.5) через поля **E**, **B**, **D**, **H**.

$$T^0_0 = -\underbrace{\delta^0_0}_{1}\frac{1}{16\pi k_к}\underbrace{F^{kl}F_{kl}}_{\frac{2}{\sqrt{-g}}((\mathbf{H},\mathbf{B})-(\mathbf{D},\mathbf{E}))} + \frac{1}{4\pi k_к}\underbrace{F^{0k}F_{0k}}_{-\frac{(\mathbf{D},\mathbf{E})}{\sqrt{-g}}} = -\frac{(\mathbf{H},\mathbf{B})-(\mathbf{D},\mathbf{E})}{8\pi k_к\sqrt{-g}}.$$

$$g_\alpha = T^0_\alpha = -\underbrace{\delta^0_\alpha}_{0}\frac{1}{16\pi k_к}F^{kl}F_{kl} + \frac{1}{4\pi k_к}F^{0k}F_{\alpha k} = \frac{1}{4\pi k_к}\underbrace{F^{00}}_{0}F_{\alpha 0} + \frac{1}{4\pi k_к}\underbrace{F^{0\beta}}_{\frac{D^\beta}{\sqrt{-g}}}\underbrace{F_{\alpha\beta}}_{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}B^\gamma} = \frac{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}}{4\pi k_к\sqrt{-g}}D^\beta B^\gamma = \frac{1}{4\pi k_к\sqrt{-g}}[\mathbf{D}\times\mathbf{B}]_\alpha.$$

$$S^\alpha = T^\alpha_0 = -\underbrace{\delta^\alpha_0}_{0}\frac{1}{16\pi k_к}F^{kl}F_{kl} + \frac{1}{4\pi k_к}F_{0k}F^{\alpha k} = \frac{1}{4\pi k_к}\underbrace{F_{00}}_{0}F^{\alpha 0} + \frac{1}{4\pi k_к}\underbrace{F_{0\beta}}_{E_\beta}\underbrace{F^{\alpha\beta}}_{\frac{\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}H_\gamma}{\sqrt{-g}}} = \frac{\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}}{4\pi k_к\sqrt{-g}}E_\beta H_\gamma = \frac{1}{4\pi k_к\sqrt{-g}}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]^\alpha.$$

$$
\begin{aligned}
\sigma^\alpha_\beta &= T^\alpha_\beta = -\delta^\alpha_\beta \frac{1}{16\pi k_к} \underbrace{F^{kl}F_{kl}}_{\frac{2}{\sqrt{-g}}((\mathbf{H},\mathbf{B})-(\mathbf{D},\mathbf{E}))} + \frac{1}{4\pi k_к} F^{\alpha k}F_{\beta k} = \\
&= \delta^\alpha_\beta \frac{(\mathbf{D},\mathbf{E})-(\mathbf{H},\mathbf{B})}{8\pi k_к\sqrt{-g}} + \frac{1}{4\pi k_к} \underbrace{F^{\alpha 0}}_{-\frac{D^\alpha}{\sqrt{-g}}} \underbrace{F_{\beta 0}}_{E_\beta} + \frac{1}{4\pi k_к} \underbrace{F^{\alpha\gamma}}_{\frac{\varepsilon^{\alpha\gamma\mu}}{\sqrt{-g}}H_\mu} \underbrace{F_{\beta\gamma}}_{\varepsilon_{\beta\gamma\nu}B^\nu} = \\
&= \delta^\alpha_\beta \frac{(\mathbf{D},\mathbf{E})-(\mathbf{H},\mathbf{B})}{8\pi k_к\sqrt{-g}} - \frac{D^\alpha E_\beta}{4\pi k_к\sqrt{-g}} + \frac{1}{4\pi k_к\sqrt{-g}} \underbrace{\varepsilon^{\alpha\gamma\mu}\varepsilon_{\beta\gamma\nu}}_{\delta^\alpha_\beta\delta^\mu_\nu-\delta^\alpha_\nu\delta^\mu_\beta} H_\mu B^\nu = \\
&= \delta^\alpha_\beta \frac{(\mathbf{D},\mathbf{E})+(\mathbf{H},\mathbf{B})}{8\pi k_к\sqrt{-g}} - \frac{D^\alpha E_\beta + B^\alpha H_\beta}{4\pi k_к\sqrt{-g}}.
\end{aligned}
$$

Получившиеся формулы для компонент тензора энергии-импульса с точностью до множителя $\frac{1}{\sqrt{-g}}$ воспроизводят аналогичные формулы для «плоской» электродинамики в среде (при условии линейности полей $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ по полям $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$).

Часть VII

Динамика гравитационного поля

В данной части рассматривается динамика геометрии искривлённого пространства-времени с точки зрения общей теории относительности. Это вторая часть стандартного курса общей теории относительности.

Глава 7.1

Тензор Римана

7.1.1 Вывод тензора Римана (без метрики!)

Для обычных частных производных вторая производная была симметрична. Для ковариантных производных это не так. Мы можем лишь гарантировать симметричность второй производной от скаляра в случае отсутствия кручения.

(!) Пусть на рассматриваемом дифференцируемом многообразии задана ковариантная производная. **Никаких других структур мы не предполагаем, в частности метрику мы пока не вводим.**

Чтобы изучить несимметричность второй производной рассмотрим следующий тензор

$$(\nabla_k\nabla_l - \nabla_l\nabla_k)v^a. \tag{7.1.1}$$

Распишем в явном виде вторую производную от v^a

$$\begin{aligned}\nabla_k\nabla_l v^a &= \partial_k(\nabla_l v^a) + \Gamma^a_{ck}\nabla_l v^c - \Gamma^c_{lk}\nabla_c v^a = \\ &= \partial_k(\partial_l v^a + \Gamma^a_{cl}v^c) + \Gamma^a_{ck}(\partial_l v^c + \Gamma^c_{bl}v^b) - \Gamma^c_{lk}\nabla_c v^a = \\ &= \left[\partial_k\partial_l v^a + \Gamma^a_{cl}\partial_k v^c + \Gamma^a_{ck}\partial_l v^c\right] + \left[\partial_k\Gamma^a_{cl} + \Gamma^a_{bk}\Gamma^b_{cl}\right]v^c - \Gamma^c_{lk}\nabla_c v^a\end{aligned}$$

Мы разбили члены этого выражения на три группы:

- первая группа симметрична по индексам k, l при подстановке в (7.1.1) эти члены сократятся,
- вторая группа линейна по вектору v^c (в квадратичном по Γ члене мы переименовали индексы $b \leftrightarrow c$),
- третья группа состоит из одного члена, в котором индексы k, l несёт один коэффициент связности Γ^c_{lk}.

Подставив получившееся выражение в (7.1.1) получаем

$$\underbrace{(\nabla_k\nabla_l - \nabla_l\nabla_k)v^a}_{\text{тензор}} = \underbrace{\left\{\partial_k\Gamma^a_{cl} - \partial_l\Gamma^a_{ck} + \Gamma^a_{bk}\Gamma^b_{cl} - \Gamma^a_{bl}\Gamma^b_{ck}\right\}}_{R^a{}_{ckl}}\underbrace{v^c}_{\text{вектор}} + \overbrace{\underbrace{\left[\Gamma^c_{kl} - \Gamma^c_{lk}\right]}_{T^c{}_{kl}\ -\ \text{тензор}}\underbrace{\nabla_c v^a}_{\text{тензор}}}^{\text{тензор}} \tag{7.1.2}$$

Левая часть выражения — тензор (ковариантные производные переводят тензоры в тензоры). Выражение в квадратных скобках — это тензор кручения (2.2.7) (стр. 176), он сворачивается с тензором $\nabla_c v^a$ и выражение с квадратными скобками в целом также оказывается тензором. Соответственно тензором оказывается и выражение с фигурными скобками (как разность двух тензоров). Фигурные скобки сворачиваются с *произвольным* вектором v^c, так что по признаку тензора выражение в фигурных скобках — это тоже тензор, который называется *тензором кривизны Римана* (или *тензором Римана*, или *тензором кривизны*) и обозначается $R^a{}_{ckl}$.

Таким образом

$$(\nabla_k\nabla_l - \nabla_l\nabla_k)v^a = R^a{}_{ckl}v^c + T^c{}_{kl}\nabla_c v^a.$$

(!) Обратите внимание, мы пока не вводили метрику, а использовали только наличие ковариантной производной (коэффициентов связности). И мы не будем вводить метрику до тех пор, пока можем без неё обойтись.

В общей теории относительности коэффициенты связности симметричны (кручение отсутствует) и остаётся только член с тензором Римана.

7.1.2 Действие оператора $(\nabla_k\nabla_l - \nabla_l\nabla_k)$ на тензоры

Рассмотрим как коммутатор ковариантных производных $(\nabla_k\nabla_l - \nabla_l\nabla_k)$ действует на тензоры разной валентности.

Скаляр:

$$\nabla_k\nabla_l\varphi = \nabla_k(\partial_l\varphi) = \partial_k\partial_l\varphi - \Gamma^s_{lk}\partial_s\varphi$$
$$(\nabla_k\nabla_l - \nabla_l\nabla_k)\varphi = T^s_{kl}\,\nabla_s\varphi. \tag{7.1.3}$$

Вектор:

$$(\nabla_k\nabla_l - \nabla_l\nabla_k)v^a = R^a{}_{ckl}v^c + T^c{}_{kl}\nabla_c v^a. \tag{7.1.4}$$

Чтобы получить действие коммутатора ковариантных производных на ковектор, рассмотрим его действие на скаляр, полученный свёрткой $v^m u_m$. С одной стороны (по формуле для скаляра) получаем

$$(\nabla_k\nabla_l - \nabla_l\nabla_k)(v^m u_m) = T^s_{kl}\,\nabla_s(v^m u_m) = T^s{}_{kl}\,(\nabla_s v^m)u_m + T^s{}_{kl}\,(\nabla_s u_m)v^m.$$

С другой стороны по правилу Лейбница (сокращая 4 члена вида $(\nabla v)(\nabla u)$) получаем

$$\begin{aligned}(\nabla_k\nabla_l - \nabla_l\nabla_k)(v^m u_m) &= u_m(\nabla_k\nabla_l - \nabla_l\nabla_k)v^m + v^m(\nabla_k\nabla_l - \nabla_l\nabla_k)u_m = \\ &= u_m R^m{}_{skl}v^s + T^s{}_{kl}(\nabla_s v^m)u_m + v^m(\nabla_k\nabla_l - \nabla_l\nabla_k)u_m.\end{aligned}$$

Приравнивая два полученных выражения и сокращая на v^m (в силу произвольности вектора v^m) получаем

$$(\nabla_k\nabla_l - \nabla_l\nabla_k)u_m = -R^s{}_{mkl}u_m + T^s{}_{kl}\nabla_s u_m \tag{7.1.5}$$

При внимательном можно увидеть, что для нашего оператора при действии на произвольное тензорное произведение справедливо правило Лейбница, как будто он является дифференциальным оператором первого порядка.

$$(\nabla_k\nabla_l - \nabla_l\nabla_k)(T\otimes S) = [(\nabla_k\nabla_l - \nabla_l\nabla_k)T]\otimes S + T\otimes(\nabla_k\nabla_l - \nabla_l\nabla_k)S.$$

Поскольку любой тензор можно представить как линейную комбинацию произведений векторов и ковекторов, несущих соответствующий набор индексов, то мы можем записать для произвольного тензора[1]

$$\begin{aligned}(\nabla_k\nabla_l - \nabla_l\nabla_k)S^{mn\ldots}{}_{pq\ldots} &= T^s{}_{kl}\nabla_s S^{mn\ldots}{}_{pq\ldots} + \\ &= R^m{}_{skl}S^{sn\ldots}{}_{pq\ldots} + R^n{}_{skl}S^{ms\ldots}{}_{pq\ldots} + \cdots - \\ &\quad - R^s{}_{pkl}S^{mn\ldots}{}_{sq\ldots} - R^s{}_{qkl}S^{mn\ldots}{}_{ps\ldots} - \cdots .\end{aligned} \tag{7.1.6}$$

7.1.3 Производные от тензора Римана объекты

Тензор Риччи получается из тензора Римана свёрткой первого и третьего индексов[2]

$$R_{mn} = R^k{}_{mkn}. \tag{7.1.7}$$

Поскольку при этом мы не поднимаем и не опускаем индексы, тензор Риччи определён вне зависимости от наличия метрики.

(!) *Уравнения Эйнштейна в отсутствии полей материи* могут быть записаны как $R_{mn} = 0$.

Скалярная кривизна — след тензора Риччи — получается свёрткой двух оставшихся индексов тензора Риччи

$$R = R^m{}_m = R_{mn}g^{mn}. \tag{7.1.8}$$

Поскольку оба индекса тензора Риччи исходно были нижними, нам понадобился метрический тензор.

(!) Действие Гильберта для гравитационного поля получается интегрированием скалярной кривизны для симметричной метрической связности $S[g_{ij}(x)] = \frac{c^3}{16\pi G}\cdot\int_U R\sqrt{-g}\,d^4x$.

Тензор Эйнштейна имеет вид

$$G_{mn} = R_{mn} - \tfrac{1}{2}\,R\,g_{mn}. \tag{7.1.9}$$

(!) Тензор Эйнштейна входит в уравнения Эйнштейна, которые имеют вид $G_{mn} = \frac{8\pi G}{c^4}\cdot T_{mn}$, где T_{mn} — тензор энергии-импульса полей материи.

[1] Сравните это выражение с выражениями для производной Ли (2.3.17) и ковариантной производной (2.2.6) от произвольного тензора.

[2] В некоторых книгах сворачивают первый индекс с четвёртым, в таких книгах тензор Риччи отличается знаком.

7.1.4 Симметрии тензора Римана

Мы будем различать свойства тензора Римана в зависимости от того, какие предположения сделаны о связности. Мы будем выделять:

- связность общего вида (заданы коэффициенты связности Γ^i_{jk} как гладкие функции координат, никакие дополнительные свойства не предполагаются),
- симметричную связность ($T^i{}_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} = 0$),
  - Для произвольной точки x_0 можно выбрать такую систему координат, что $\Gamma^i_{jk}\Big|_{x_0} = 0$.
- связность согласованную с метрикой ($\nabla_i g_{jk} = 0$) (2.2.14) (стр. 179),
- симметричную связность, согласованную с метрикой ($T^i{}_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} = 0$ и $\nabla_i g_{jk} = 0$) (2.2.12) (стр. 178).

Для произвольной связности по определению тензора Римана он антисимметричен по последним двум индексам

$$R^a{}_{ckl} = -R^a{}_{clk} \tag{7.1.10}$$

Для симметричной связности для любой точки x_0 можно выбрать систему координат в которой $\Gamma^i_{jk}\Big|_{x_0} = 0$, тогда

$$R^a{}_{ckl}|_{x_0} = \partial_k \Gamma^a_{cl} - \partial_l \Gamma^a_{ck}$$

$$\left[R^a{}_{ckl} + R^a{}_{klc} + R^a{}_{lck}\right]_{x_0} = \cancel{\partial_k \Gamma^a_{cl}} \underbrace{-\partial_l \Gamma^a_{ck} + \partial_l \Gamma^a_{kc}}_{0} \underbrace{-\partial_c \Gamma^a_{kl} + \partial_c \Gamma^a_{lk}}_{0} \cancel{-\partial_k \Gamma^a_{lc}} = 0.$$

В силу произвольности точки x_0, поскольку если тензор равен нулю в одной системе координат, то он равен нулю в любой другой системе координат, получаем *для произвольной симметричной связности*

$$R^a{}_{cjk} + R^a{}_{jkc} + R^a{}_{kcj} = 0. \tag{7.1.11}$$

Для метрической связности мы можем получить дополнительную симметрию тензора Римана применив формулу (7.1.6) к метрическому тензору

$$0 = (\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) g_{pq} = T^s{}_{kl} \underbrace{\nabla_s g_{pq}}_{0} - R^s{}_{pkl} g_{sq} - R^s{}_{qkl} g_{ps} = -R_{qpkl} - R_{pqkl}.$$

Мы получили антисимметрию тензора Римана для метрической связности по двум первым индексам (если их опустить)

$$R_{qpkl} = -R_{pqkl}. \tag{7.1.12}$$

Для симметричной метрической связности можно найти ещё одну симметрию. Воспользуемся такой системой координат, что в точке x_0 частные производные от метрического тензора обращаются в нуль $\partial_i g_{kl}|_{x_0} = 0$

$$R^a{}_{ckl}|_{x_0} = \partial_k \Gamma^a_{cl} - \partial_l \Gamma^a_{ck} \quad \Rightarrow \quad R_{ackl}|_{x_0} = \partial_k \Gamma_{acl} - \partial_l \Gamma_{ack}.$$

$$\partial_k \Gamma_{acl}|_{x_0} = \partial_k \frac{1}{2} \left[\partial_c g_{al} + \partial_l g_{ac} - \partial_a g_{cl}\right] = \frac{1}{2} \left[\partial_k \partial_c g_{al} + \partial_k \partial_l g_{ac} - \partial_k \partial_a g_{cl}\right].$$

$$R_{ackl}|_{x_0} = \frac{1}{2} \left[\partial_k \partial_c g_{al} - \underline{\partial_k \partial_a g_{cl}} - \underline{\partial_l \partial_c g_{ak}} + \partial_l \partial_a g_{ck}\right].$$

Мы видим, что при перестановке $c \leftrightarrow k$, $a \leftrightarrow l$ не подчёркнутые члены переходят в себя, а подчёркнутые — друг в друга. Таким образом $R_{ackl} = R_{lkca}$. С учётом ранее найденной антисимметрии по первой и второй парам индексов получаем симметрию по отношению к перестановке пар индексов:

$$R_{ackl} = R_{klac} \tag{7.1.13}$$

(*) В ОТО, когда выполняются все перечисленные симметрии, три из них (7.1.10), (7.1.12), (7.1.13) можно сформулировать так: тензор Римана определяется квадратичной формой на дифференциальных 2-формах

$$\frac{1}{4} R^{ijkl} \omega_{ij} \omega_{kl}, \qquad \omega_{ij} = -\omega_{ji}.$$

(Множитель $\frac{1}{4} = \frac{1}{(2!)^2}$ вставлен из эстетических соображений.)

7.1.5 Структура тензора Римана*

На первый взгляд формула, выражающая компоненты тензора Римана через коэффициенты связности пугает: много разных индексов, некоторые из которых (почему именно эти?) сворачиваются друг с другом, и очень не хочется это зубрить. Однако тензор Римана имеет очень чёткую и прозрачную структуру, которую мы сейчас выявим.

При записи тензора Римана через коэффициенты связности, все входящие в формулу индексы естественным образом делятся на две разновидности: индексы из начала алфавита (*тензорные индексы*) и индексы из середины алфавита (*координатные индексы*). Они занимают определённые места у коэффициентов связности и тензора Римана, свёртываются и переставляются только между собой.

Формулу для тензора Римана удобно переписать расставив скобки так, чтобы тензорные индексы попали внутрь скобок:

$$(R^a{}_c)_{kl} = \partial_k(\Gamma^a_c)_l - \partial_l(\Gamma^a_c)_k + (\Gamma^a_b)_k(\Gamma^b_c)_l - (\Gamma^a_b)_l(\Gamma^b_c)_k \tag{7.1.14}$$

Это деление соблюдается (для тензора Римана, но не для тензора кручения!) и при действии коммутатора ковариантных производных на тензор:

$$(\nabla_k\nabla_l - \nabla_l\nabla_k)S^{ab}{}_c = T^m{}_{kl}\nabla_m S^{ab}{}_c + (R^a{}_d)_{kl}S^{db}{}_c + (R^b{}_d)_{kl}S^{ad}{}_c - (R^d{}_c)_{kl}S^{ab}{}_d. \tag{7.1.15}$$

Это деление можно провести и для первой ковариантной производной:

$$\nabla_i T^a{}_{bc} = \partial_i T^a{}_{bc} + (\Gamma^a_d)_i T^d{}_{bc} - (\Gamma^d_b)_i T^a{}_{dc} - (\Gamma^d_c)_i T^a{}_{bd} \tag{7.1.16}$$

(!*) Это позволяет разделить две операции, которые у нас до сих пор были неразрывно связаны: замену координат и замену локальных базисов. После этого координатные индексы нумеруют координаты x^i (но не базисные векторы и не компоненты тензоров!), а тензорные индексы нумеруют базисные векторы $\mathbf{e}_a$, базисные ковекторы $\mathbf{e}^a$ и компоненты тензоров $T^{a\cdots}{}_{bc\ldots}$. Компоненты базисных векторов $e^i_a = (\mathbf{e}_a)^i$ и ковекторов $e^a_i = (\mathbf{e}^a)_i$ по старому (координатному) базису являются матрицами, позволяющими преобразовывать координатные и тензорные индексы друг в друга:

$$\nabla_a = e^i_a\nabla_i, \quad v^i = e^i_a v^a, \quad g^{aj} = e^a_i g^{ij}, \quad (\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b) = e^i_a e^j_b g_{ij} = g_{ab}, \quad e^a_i e^b_j g_{ab} = g_{ij}, \quad \cdots.$$

На основе этой идеи можно придти к широко применяющемуся в ОТО *тетрадному формализму*, когда вместо метрики задаётся локальный ортонормированный базис (*тетрада*), как функция от координат $e^i_a(x)$. Условия ортонормированности: $(\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b) = e^i_a e^j_b g_{ij} = \eta_{ab} = \mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1)$. Метрика восстанавливается через обратные матрицы e^a_i как $e^a_i e^b_j \eta_{ab} = g_{ij}$.

Структура тензора Римана (7.1.14) проясняется, если не писать тензорные индексы, а считать что тензор Римана несёт всего два (координатных) индекса, но его компоненты — матрицы (компоненты этих матриц нумеруются тензорными индексами). Аналогично коэффициенты связности образуют ковектор $Gamma_k$, компоненты которого также матрицы.

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{kl} &= \underbrace{\partial_k\Gamma_l - \partial_l\Gamma_k}_{d\Gamma} + \underbrace{\Gamma_k\Gamma_l - \Gamma_l\Gamma_k}_{[\Gamma,\Gamma]=\Gamma\wedge\Gamma} = \\
&= (d\Gamma)_{kl} + [\Gamma_k, \Gamma_l] = \\
&= (d\Gamma)_{kl} + (\Gamma\wedge\Gamma)_{kl}.
\end{aligned}$$

Γ_k и Γ_l умножаются как матрицы. Первые два слагаемых — внешняя производная от матричнозначного ковектора (так из потенциала A получался тензор электромагнитного поля F). Третье и четвёртое слагаемое — коммутатор двух матриц[3] Также этот коммутатор можно записать как внешнее умножение ковектора Γ на самого себя. Если бы компоненты ковектора Γ коммутрировали между собой (были бы перестановочны), то этот третий и четвёртый члены сократились бы.

На языке матричнозначных дифференциальных форм (опуская также и координатные индексы) тензор Римана пишется ещё короче

$$\mathcal{R} = d\Gamma + \Gamma\wedge\Gamma. \tag{7.1.17}$$

(*) Поскольку координатные и тензорные индексы не сворачиваются друг с другом. Обязательно ли эти типы индексов должны быть одинаковой размерности? На самом деле не обязательно. Можно модифицировать математический аппарат так, чтобы бывшие тензорные индексы относились к совсем другом пространству другой размерности, чем пространство-время. Для этого нам понадобятся понятия *векторного расслоения* и *связности в векторном расслоении*. Это приведёт нас к теории *калибровочных полей*, которые похожи на электромагнитное, но имеют матричнозначные потенциал A_i (соответствует Γ_i) и тензор поля F_{ij} (соответствует $\mathcal{R}_{ij}$). Электромагнитное поле является простейшим случаем калибровочного поля, в случае когда «тензорные» индексы одномерны.

[3] По определению коммутатор двух квадратных матриц: $[a,b] = ab - ba$.

7.1.6 Тождества Бианки для симметричной связности

Как мы уже писали, для симметричной связности для любой точки x_0 можно выбрать систему координат в которой $\Gamma^i_{jk}\Big|_{x_0} = 0$, тогда

$$(R^a{}_c)_{kl}|_{x_0} = \partial_k(\Gamma^a_c)_l - \partial_l(\Gamma^a_c)_k$$

Это равенство удобно записать через внешнюю производную от матричнозначного ковектора (см. (7.1.17))

$$\mathcal{R}|_{x_0} = d\Gamma.$$

Вторая внешняя производная, как и обычно даёт тождественный нуль

$$d\,\mathcal{R}|_{x_0} = d^2\Gamma = 0.$$

Получаем (это тождество легко проверить не обращаясь к внешним производным)

$$\Big[\partial_m(R^a{}_c)_{kl} + \partial_k(R^a{}_c)_{lm} + \partial_l(R^a{}_c)_{mk}\Big]_{x_0} = 0.$$

В избранной системе координат в точке x_0 частные производные совпадают с ковариантными. С учётом произвольности точки x_0 получаем *тождество Бианки*:

$$\nabla_m(R^a{}_c)_{kl} + \nabla_k(R^a{}_c)_{lm} + \nabla_l(R^a{}_c)_{mk} = 0. \tag{7.1.18}$$

7.1.7 Свёрнутые тождества Бианки для симметричной метрической связности

Пусть связность симметричная.
Свернём в тождестве (7.1.18) индексы a и k.

$$\nabla_m \underbrace{R_{cl}}_{R^k{}_{ckl}} + \nabla_k R^k{}_{clm} - \nabla_l \underbrace{R_{cm}}_{-R^k{}_{cmk}} = 0.$$

Пусть связность не только симметричная, но и метрическая. Свернём в тождестве (7.1.18) индексы c и m, т.е. свернём тождество с обратным метрическим тензором g^{ak}. Для метрической связности метрику можно свободно вносить/выносить под ковариантную производную, т.е. под ковариантной производной можно поднимать/опускать индексы.

$$\nabla_m R^m{}_l + \nabla_k \underbrace{R^k{}_l}_{R^{km}{}_{lm}} - \nabla_l \underbrace{R}_{R^m{}_m} = 2\nabla_m R^m{}_l - \nabla_m \delta^m_l R = 0.$$

Получившееся тождество удобно записать как равенство нулю ковариантной дивергенции от тензора Эйнштейна (7.1.9):

$$\nabla_m G^m{}_l = 0. \tag{7.1.19}$$

7.1.8 Ковариантное уравнение непрерывности для тензора энергии-импульса

Уравнения Эйнштейна связывают тензор Эйнштейна и тензор энергии-импульса:

$$G^m{}_l = \frac{8\pi G}{c^4} \cdot T^m{}_l.$$

Если взять от обоих частей равенства ковариантную дивергенцию и использовать свёрнутые тождества Бианки (7.1.19), то мы получим условие совместности — условие, которому должен удовлетворять любой тензор энергии-импульса в ОТО:

$$\underbrace{\nabla_m G^m{}_l}_{0} = \frac{8\pi G}{c^4} \cdot \nabla_m T^m{}_l \quad \Rightarrow \quad \nabla_m T^m{}_l = 0. \tag{7.1.20}$$

Условие (7.1.20) *выглядит* как уравнение непрерывности, т.е как законы сохранения компонент 4-мерного импульса полей материи в дифференциальной форме. В плоском пространстве-времени Минковского оно действительно будет означать сохранение энергии и импульса полей материи, но в искривлённом пространстве-времени интерпретация условия (7.1.20) сложнее. Поля материи в могут получать энергию и импульс от гравитационного поля, поэтому сохранение энергии и импульса отдельно для полей материи не должно выполняться.

$$\overbrace{\nabla_m T^m{}_l}^{\text{тензор}} = \overbrace{\partial_m T^m{}_l + \underbrace{\Gamma^m_{sm}}_{\frac{\partial_s\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}} T^s{}_l - \Gamma^s_{lm}\underbrace{T^m{}_s}_{\frac{c^4}{8\pi G}G^m{}_s}}^{\text{не тензоры}} = \overbrace{\underbrace{\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_m\left(\sqrt{-g}\,T^m{}_l\right)}_{(\hat{\boldsymbol{\delta}}T)_l}}^{\text{не тензор}} \overbrace{\underbrace{-\frac{c^4}{8\pi G}\Gamma^s_{lm}G^m{}_s}_{(\hat{\boldsymbol{\delta}}T_{\text{гр}})_l=\frac{\partial_m(\sqrt{-g}T^m_{\text{гр}\,l})}{\sqrt{-g}}}}^{\text{не тензор}}.$$

Мы получили, что ковариантная дивергенция, помимо члена $\hat{\boldsymbol{\delta}}T$, содержит лишний член, который мы обозначили как $\hat{\boldsymbol{\delta}}T_{\text{гр}}$. Этот член отвечает за обмен энергией и импульсом между полями материи и гравитационным полем. Если удастся переписать этот член в виде

$$-\frac{c^4}{8\pi G}\Gamma^s_{lm}G^m{}_s = -\frac{c^4}{16\pi G}(\partial_l g_{ms})G^{ms} = (\hat{\boldsymbol{\delta}}T_{\text{гр}})_l = \frac{\partial_m(\sqrt{-g}T^m_{\text{гр}\,l})}{\sqrt{-g}},$$

то мы получим закон сохранения энергии-импульса для системы поля материи плюс гравитационное поле. Возникший здесь объект $T^m_{\text{гр}\,l}$ называют *псевдотензором* (тензором он не является!) *энергии-импульса гравитационного поля*. В выражении $\hat{\boldsymbol{\delta}}T_{\text{гр}}$ мы выразили тензор энергии-импульса полей материи через тензор Эйнштейна для того, чтобы показать, что $T_{\text{гр}}$ может быть выражен через компоненты метрического тензора и их производные.

Выражение для псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля мы получим ниже в разделе 7.2.3 (стр. 583).

7.1.9 Пространство с двумя связностями

Как мы уже отмечали ранее, (2.2.8), (2.2.9) (стр. 176)

Разность двух разных наборов коэффициентов связности Γ и $\tilde{\Gamma}$ является <u>*тензором*</u> *относительной связности* $\hat{\Gamma}$:

$$\hat{\Gamma}^n{}_{mk} = \Gamma^n{}_{mk} - \tilde{\Gamma}^n{}_{mk}.$$

Коэффициентам связности $\Gamma^n{}_{mk}$ и $\tilde{\Gamma}^n{}_{mk}$ соответствуют ковариантные производные ∇ и $\tilde{\nabla}$, которые связаны друг с другом соотношением

$$\begin{aligned}\nabla_i T^{k_1\ldots k_{n_1}}{}_{m_1\ldots m_{n_2}} \;=\;& \tilde{\nabla}_i T^{k_1\ldots k_{n_1}}{}_{m_1\ldots m_{n_2}} + \\ &+ \hat{\Gamma}^{k_1}{}_{ji}T^{j\ldots k_{n_1}}{}_{m_1\ldots m_{n_2}} + \cdots + \hat{\Gamma}^{k_{n_1}}{}_{ji}T^{k_1\ldots j}{}_{m_1\ldots m_{n_2}} - \\ &- \hat{\Gamma}^{j}{}_{m_1 i}T^{k_1\ldots k_{n_1}}{}_{j\ldots m_{n_2}} - \cdots - \hat{\Gamma}^{j}{}_{m_{n_2} i}T^{k_1\ldots k_{n_1}}{}_{m_1\ldots j},\end{aligned}$$

т.е. ∇ расписывается $\tilde{\nabla}$ и $\hat{\Gamma}$ точно также как через частную производную ∂ и коэффициенты связности Γ.

Как мы уже писали, для <u>симметричной</u> связности $\tilde{\Gamma}$ для любой точки x_0 можно выбрать систему координат в которой $\tilde{\Gamma}^i_{jk}\Big|_{x_0} = 0$, тогда

$$\begin{aligned}R^a{}_{ckl}|_{x_0} \;&=\; \partial_k\Gamma^a_{cl} - \partial_l\Gamma^a_{ck} + \Gamma^a_{bk}\Gamma^b_{cl} - \Gamma^a_{bl}\Gamma^b_{ck} = \\ &=\; \partial_k(\tilde{\Gamma}^a_{cl} + \hat{\Gamma}^a_{cl}) - \partial_l(\tilde{\Gamma}^a_{ck} + \hat{\Gamma}^a_{ck}) + \hat{\Gamma}^a_{bk}\hat{\Gamma}^b_{cl} - \hat{\Gamma}^a_{bl}\hat{\Gamma}^b_{ck} = \\ &=\; \underbrace{\partial_k\tilde{\Gamma}^a_{cl} - \partial_l\tilde{\Gamma}^a_{ck}}_{\tilde{R}^a{}_{ckl}} + \underbrace{\tilde{\nabla}_k\hat{\Gamma}^a_{cl} - \tilde{\nabla}_l\hat{\Gamma}^a_{ck} + \hat{\Gamma}^a_{bk}\hat{\Gamma}^b_{cl} - \hat{\Gamma}^a_{bl}\hat{\Gamma}^b_{ck}}_{\hat{R}^a{}_{ckl}}.\end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что при $\tilde{\Gamma} = 0$ частная производная совпадает с ковариантной с тильдой: $\partial = \tilde{\nabla}$. Здесь $R^a{}_{ckl}$ и $\tilde{R}^a{}_{ckl}$ — тензоры Римана для связностей Γ и $\tilde{\Gamma}$ соответственно.

Мы получили для разности тензоров Римана формулу, которая получается из формулы для тензора Римана заменой $\Gamma \to \hat{\Gamma}$, $\partial \to \tilde{\nabla}$:

$$\hat{R}^a{}_{ckl} = \tilde{\nabla}_k\hat{\Gamma}^a_{cl} - \tilde{\nabla}_l\hat{\Gamma}^a_{ck} + \hat{\Gamma}^a_{bk}\hat{\Gamma}^b_{cl} - \hat{\Gamma}^a_{bl}\hat{\Gamma}^b_{ck}. \tag{7.1.21}$$

Для несимметричной связности $\tilde{\Gamma}$ в тензор R помимо суммы $\tilde{R} + \hat{R}$ также входит член с тензором кручения:

$$R^a{}_{ckl} = \tilde{R}^a{}_{ckl} + \hat{R}^a{}_{ckl} + \hat{\Gamma}^a_{cs}\tilde{T}^s_{kl} \tag{7.1.22}$$

Задача 66. Приращение тензора Римана. Докажите формулу (7.1.22) для произвольной связности $\tilde{\Gamma}$.

Свернув первый индекс с третьи получаем аналогичную формулу для тензора Риччи:

$$R_{cl} = \tilde{R}_{cl} + \underbrace{\tilde{\nabla}_k \hat{\Gamma}^k_{cl} - \tilde{\nabla}_l \hat{\Gamma}^k_{ck} + \hat{\Gamma}^k_{bk}\hat{\Gamma}^b_{cl} - \hat{\Gamma}^k_{bl}\hat{\Gamma}^b_{ck}}_{\hat{R}_{cl}} + \hat{\Gamma}^k_{cs}\tilde{T}^s_{kl}. \tag{7.1.23}$$

Глава 7.2

Действие для гравитационного поля

7.2.1 Действие Гильберта $S[g_{mn}(x)]$

Мы можем выразить коэффициенты симметричной метрической связности через метрический тензор (2.2.12)

$$\Gamma_{kij} = \frac{1}{2}\left[\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}\right], \qquad \Gamma^m{}_{ij} = \frac{g^{mk}}{2}\left[\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}\right],$$

подставить получившееся выражение в тензор Римана (7.1.14)

$$R^a{}_{ckl} = \partial_k(\Gamma^a_c)_l - \partial_l(\Gamma^a_c)_k + (\Gamma^a_b)_k(\Gamma^b_c)_l - (\Gamma^a_b)_l(\Gamma^b_c)_k$$

и свернув индексы с помощью обратной метрики получить скалярную кривизну, как функцию компонент метрического тензора и производных (первых *и вторых*) от него

$$R(g_{mn}, \partial_k g_{mn}, \partial_k\partial_l g_{mn}) = R^k{}_{ckl}g^{cl} = R_{cl}g^{cl}.$$

Действие Гильберта для гравитационного поля — интеграл от скалярной кривизны *выраженной через метрику* по инвариантному элементу объёма $\sqrt{-\det g_{mn}}\,d^4x$

$$S_\text{г}[g_{mn}(x)] = \frac{c^3}{16\pi G}\int\limits_U R\sqrt{-g}\,d^4x = \int\limits_U R_{cl}\,g^{cl}\sqrt{-g}\,d^4x. \tag{7.2.1}$$

$$\delta S_\text{г} = \int\limits_U \left[(\delta R_{cl})\,g^{cl}\sqrt{-g} + R_{cl}\,\delta(g^{cl}\sqrt{-g})\right]d^4x.$$

При вариации действия у нас есть два набора коэффициентов связности: Γ и $\Gamma+\delta\Gamma$. Их разность $\delta\Gamma$ является тензором. Для вычисления δR_{cl} мы можем воспользоваться формулой (7.1.23) заменив в ней $\hat{R}\to\delta R$, $\hat{\Gamma}\to\delta\Gamma$, $\tilde{\nabla}\to\nabla$. Отбрасывая члены второго порядка по $\delta\Gamma$ получаем *тождество Палатини*

$$\delta R_{cl} = \nabla_k\delta\Gamma^k_{cl} - \nabla_l\delta\Gamma^k_{ck} + \delta\Gamma^k_{cs}T^s_{kl}, \tag{7.2.2}$$

Мы сейчас рассматриваем симметричную связность, так что тензор кручения равен нулю. Свернув вариацию тензора Риччи с обратным метрическим тензором и внеся обратный метрический тензор под ковариантные производные (здесь мы используем, что связность метрическая!) получаем

$$(\delta R_{cl})\,g^{cl} = (\nabla_k\delta\Gamma^k_{cl} - \nabla_l\delta\Gamma^k_{ck})\,g^{cl} = \nabla_k(\delta\Gamma^k_{cl}\,g^{cl}) - \nabla_l(\delta\Gamma^k_{ck}\,g^{cl}).$$

Мы видим, что выражение $(\delta R_{cl})\,g^{cl}$ оказалось ковариантной дивергенцией, а значит оно (после применения теоремы Гаусса-Остроградского) свелось к поверхностному члену, который не даёт вклад в уравнения поля.

$$\delta S_\text{г} = \frac{c^3}{16\pi G}\int\limits_U R_{cl}\,\delta(g^{cl}\sqrt{-g})\,d^4x = \frac{c^3}{16\pi G}\int\limits_U R_{cl}\left[(\delta g^{cl})\sqrt{-g} + g^{cl}\,\delta\sqrt{-g}\right]d^4x.$$

Как мы установили ранее (4.6.5), (4.6.6) (раздел 4.6.3, стр. 456)

$$\delta g^{cl} = -g^{mc}g^{nl}\,\delta g_{mn}, \qquad \delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{mn}\,\delta g_{mn}.$$

Применив эти формулы получаем

$$\begin{aligned}\delta S_{\text{г}} &= \frac{c^3}{16\pi G}\int\limits_U R_{cl}\left[(\delta g^{cl})\sqrt{-g}+g^{cl}\,\delta\sqrt{-g}\right]d^4x = \\ &= \frac{c^3}{16\pi G}\int\limits_U R_{cl}\Big[-g^{mc}g^{nl}+g^{cl}\,\frac{1}{2}\,g^{mn}\Big]\,\delta g_{mn}\sqrt{-g}\,d^4x = \\ &= -\frac{c^3}{16\pi G}\int\limits_U \underbrace{\Big[R^{mn}-\frac{1}{2}\,R\,g^{mn}\Big]}_{G^{mn}}\,\delta g_{mn}\sqrt{-g}\,d^4x\end{aligned}$$

Таким образом, ковариантная производная от действия Гильберта свелась к тензору Эйнштейна:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{\text{г}}}{\delta g_{mn}} = -\frac{c^3}{16\pi G}\,G^{mn}. \tag{7.2.3}$$

Если система кроме гравитационного поля включает поля материи, описываемые действием S_m, то уравнения гравитационного поля получаются варьированием суммарного действия

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{\text{г}}}{\delta g_{mn}}+\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{\text{м}}}{\delta g_{mn}} = 0.$$

Если ввести *тензор энергии-импульса полей материи* (напомним, что в ОТО всё кроме гравитационного поля принято называть *полями материи*)

$$T^{mn} = \frac{2c}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{\text{м}}}{\delta g_{mn}}, \tag{7.2.4}$$

то уравнения гравитационного поля (*уравнения Эйнштейна*) записываются в виде

$$G^{mn} = \frac{8\pi G}{c^4}\,T^{mn}. \tag{7.2.5}$$

В отсутствии полей материи (или если след тензора энергии-импульса равен нулю, как для электромагнитного поля) тензор Эйнштейна оказывается равен тензору Риччи

$$G^m_m = R^m_m-\frac{1}{2}R\delta^m_m = -R = \frac{8\pi G}{c^4}\,T^m_m = 0, \quad \Rightarrow \quad G^{mn} = R^{mn} = 0.$$

7.2.1.1 Высшие производные в действии Гильберта**

Скалярная кривизна содержит высшие (вторые) производные от метрики в членах R^* содержащих $\partial\Gamma$.

$$R(g_{mn},\partial_k g_{mn},\partial_k\partial_l g_{mn}) = R_{cl}g^{cl} = \underbrace{(\partial_k\Gamma^k_{cl}-\partial_l\Gamma^k_{ck})\,g^{cl}}_{R^*}-\underbrace{(-\Gamma^k_{bk}\Gamma^b_{cl}+\Gamma^k_{bl}\Gamma^b_{ck})\,g^{cl}}_{L}.$$

Хотя действие Гильберта содержит высшие (вторые) производные от метрики, однако уравнения поля (уравнения Эйнштейна) высших производных (третьего порядка и выше) не содержат. Это связано с тем, что высшие производные из действия Гильберта могут быть исключены. Для этого в выражении $R^*\sqrt{-g}$ выделим полные дивергенции

$$R^*\sqrt{-g} = \underbrace{\partial_k(\Gamma^k_{cl}\,g^{cl}\sqrt{-g})}_{\text{div}}-\Gamma^k_{cl}\,\partial_k(g^{cl}\sqrt{-g})-\underbrace{\partial_l(\Gamma^k_{ck}\,g^{cl}\,\sqrt{-g})}_{\text{div}}+\Gamma^k_{ck}\,\partial_l(g^{cl}\,\sqrt{-g}).$$

По теореме Гаусса-Остроградского интегралы от полных дивергенций можно свести к интегралам по границе, поэтому в уравнения поля они вклада не дают. После отбрасывания полных дивергенций получается уже действие без высших производных. После несложных выкладок получаем

$$R^*\sqrt{-g}-\text{div} = -\Gamma^k_{cl}\,\partial_k(g^{cl}\sqrt{-g})+\Gamma^k_{ck}\,\partial_l(g^{cl}\,\sqrt{-g}) = 2L.$$

Таким образом, с точностью до поверхностного члена действие Гильберта свелось к виду

$$S[g_{mn}(x)]-\int\limits_{\partial U}\cdots = \frac{c^3}{16\pi G}\int\limits_U L\,\sqrt{-g}\,d^4x.$$

Мы избавились от высших производных, но потеряли инвариантность по отношению к замене координат: новый лагранжиан L (в отличие от скалярной кривизны R) уже не является скаляром.

7.2.2 Формализм Палатини

Аттилио Палатини (1889–1949). W

Давид Гильберт написал своё действие как функционал от метрического тензора в 1915 году, а уже в 1919 году Аттилио Палатини обнаружил[1], что в этом действии можно считать коэффициенты связности Γ^m_{kl} независимыми полями. Такой подход получил название *формализм Палатини* (или *метод Палатини*). Палатини предложил другой функционал действия

$$S_\Gamma[g_{mn}(x),\Gamma^k_{mn}(x)] = \frac{c^3}{16\pi G}\int\limits_U R_{cl}[\Gamma]\, g^{cl}\,\sqrt{-g}\,d^4x, \quad R_{cl}[\Gamma] = \partial_k\Gamma^a_{cl} - \partial_l\Gamma^a_{ck} + \Gamma^a_{bk}\Gamma^b_{cl} - \Gamma^a_{bl}\Gamma^b_{ck}. \tag{7.2.6}$$

Проварьируем новое действие. Вариация $\delta(g^{cl}\sqrt{-g})$ выполняется как раньше, для вариации δR_{cl} снова используем тождество Палатини (7.2.2), но мы уже не можем вносить g^{cl} под ковариантные производные.

$$\begin{aligned}
\delta S_\Gamma &= \frac{c^3}{16\pi G}\int\limits_U \Big[(\delta R_{cl})\, g^{cl}\sqrt{-g} + R_{cl}\,\delta(g^{cl}\sqrt{-g})\Big]\,d^4x = \\
&= \frac{c^3}{16\pi G}\int\limits_U \Big[(\nabla_k\delta\Gamma^k_{cl} - \nabla_l\delta\Gamma^k_{ck} + \delta\Gamma^k_{cs}T^s_{kl})\, g^{cl} - G^{mn}\,\delta g_{mn}\Big]\sqrt{-g}\,d^4x = \\
&= \frac{c^3}{16\pi G}\int\limits_U \Big[(-\delta\Gamma^k_{cl}\,\nabla_k g^{cl} + \delta\Gamma^k_{ck}\,\nabla_l g^{cl} + \delta\Gamma^k_{cs}T^s_{kl}\,g^{cl}) - G^{mn}\,\delta g_{mn}\Big]\sqrt{-g}\,d^4x + \int\limits_{\partial U}\cdots = \\
&= \frac{c^3}{16\pi G}\int\limits_U \Big[\delta\Gamma^k_{cs}(-\nabla_k g^{cs} + \delta^s_k\,\nabla_l g^{cl} + T^s{}_k{}^c) - G^{mn}\,\delta g_{mn}\Big]\sqrt{-g}\,d^4x + \int\limits_{\partial U}\cdots .
\end{aligned}$$

Вариационная производная по метрике имеет прежний вид

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_\Gamma}{\delta g_{mn}} = -\frac{c^3}{16\pi G}\,G^{mn}. \tag{7.2.7}$$

Вариацией по метрике действия для полей материи как и раньше получаем тензор энергии импульса (7.2.4).

Вариационная производная по коэффициентам связности выражается через ковариантные производные от метрики

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_\Gamma}{\delta\Gamma^k_{cs}} = \frac{c^3}{16\pi G}(-\nabla_k g^{cs} + \delta^s_k\,\nabla_l g^{cl} + T^s{}_k{}^c). \tag{7.2.8}$$

Мы должны приравнять нулю вариационную производную от полного действия, включая действие для полей материи $S_\text{м}$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_\Gamma}{\delta\Gamma^k_{cs}} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_\text{м}}{\delta\Gamma^k_{cs}} = 0. \tag{7.2.9}$$

Пусть $\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_\text{м}}{\delta\Gamma^k_{cs}} = 0$, такое может быть, например, если в действии для полей материи не используются ковариантные производные, или ковариантные производные используются, но коэффициенты связности выражены через метрику, тогда из поля материи влада не дают. В выражении (7.2.8) опускаем индекс c и симметризуем его с k, при этом тензор кручения уходит и мы получаем, что $\nabla_k g^{cs} = 0$[2], т.е метричность связности. Подставит это условие обратно в (7.2.8) получаем, что $T^s{}_k{}^c = 0$, т.е. условие симметричности связности. Эти условия позволяют восстановить стандартные для ОТО коэффициенты связности.

7.2.3 Псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля

Для определения псевдотензора $T^m_{\text{гр}\,l}$ мы можем воспользоваться определением тензора энергии-импульса, введённым ранее

$$\sqrt{-g}\,T^m{}_l = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_m\varphi^a)}\,\partial_l\varphi^a - \mathcal{L}\delta^m_l,$$

[1] Palatini, Attilio (1919), "Deduzione invariantiva delle equazioni gravitazionali dal principio di Hamilton" [Инвариантный вывод гравитационных уравнений из приницпа Гамильтона], Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1 (на итальянском), 43: 203–212

[2] Точнее мы получаем что равны нулю некоторые выражения линейные по $\nabla_k g^{cs}$, получающиеся из компонент $\nabla_k g^{cs}$ невырожденным линейным преобразованием.

применив это выражение для гравитационного поля. Данное определение предполагает, что действие не содержит высших производных, поэтому его применимость к действию Гильберта требует дополнительного обоснования. Кроме того, выражение лагранжиана Гильберта через g_{mn} и $\partial_k g_{mn}$ весьма громоздко.

Лагранжиан в формализме Палатини не содержит высших производных

$$\mathcal{L}_\Gamma = \frac{c^3}{16\pi G}\, R\,\sqrt{-g} = \frac{c^3}{16\pi G}\, R_{cl}(\Gamma,\partial\Gamma)\, g^{cl}\,\sqrt{-g}.$$

Этот лагранжиан не содержит производных от метрики, так что

$$\sqrt{-g}\, T^m_{\mathrm{rp}\,l} = \frac{\partial \mathcal{L}_\Gamma}{\partial(\partial_m \Gamma^k_{cs})}\,\partial_l \Gamma^k_{cs} - \mathcal{L}\delta^m_l,$$

$$\begin{aligned} R = g^{cl}\, R_{cl} &= g^{cl}\left[\partial_k \Gamma^k_{cl} - \partial_l \Gamma^k_{ck} + \Gamma^k_{bk}\Gamma^b_{cl} - \Gamma^k_{bl}\Gamma^b_{ck}\right] = \\ &= g^{cl}\partial_m \Gamma^k_{cs}(\delta^m_k \delta^s_l - \delta^m_l \delta^s_k) + \cdots = \partial_m \Gamma^k_{cs}(\delta^m_k g^{cs} - \delta^s_k g^{cm}) + \cdots . \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{\partial R}{\partial(\partial_m \Gamma^k_{cs})} = (\delta^m_k g^{cs} - \delta^s_k g^{cm})$$

$$\sqrt{-g}\, T^m_{\mathrm{rp}\,l} = \frac{c^3\sqrt{-g}}{16\pi G}\left[(\delta^m_k g^{cs} - \delta^s_k g^{cm})\,\partial_l \Gamma^k_{cs} - R\delta^m_l\right]. \tag{7.2.10}$$

Псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля определён неоднозначно. Как ранее при рассмотрении тензора энергии-импульса гравитационного поля (3.7.5) (3.7.6), мы можем модифицировать его добавив полную дивергенцию

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}\, T^m_{\mathrm{r}\,l} &= \frac{c^3}{16\pi G}\left[-\Gamma^m_{cs}\partial_l(g^{cs}\sqrt{-g}) + \Gamma^k_{ck}\partial_l(g^{cm}\sqrt{-g}) - \sqrt{-g}R\,\delta^m_l\right] = \\ &= \frac{c^3\sqrt{-g}}{16\pi G}\left[(\delta^m_s\Gamma^k_{ck} - \Gamma^m_{cs})\frac{\partial_l(g^{cs}\sqrt{-g})}{\sqrt{-g}} - R\,\delta^m_l\right] \end{aligned} \tag{7.2.11}$$

Такое выражение более распространено в литературе.

Глава 7.3

Предел слабого поля-

7.3.1 Линеаризованные уравнения Эйнштейна

Для сравнения с классической механикой и СТО интересно рассмотреть уравнения Эйнштейна в пределе слабого поля. Этот предел также имеет большое практическое значение, поскольку в пределах Солнечной системы мы имеем дело только со слабыми гравитационными полями.

Влияние слабого гравитационного поля на движение нерелятивистской частицы мы уже рассматривали ранее в главе 6.5.4 «Нерелятивистский предел» (стр. 549). Теперь мы рассмотрим динамику слабого гравитационного поля.

Как и раньше для слабого поля полагаем, что метрика отличается от метрики Минковского на малую поправку:

$$g_{ij}(x) = \eta_{ij} + h_{ij}(x), \qquad \eta_{ij} = \mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1) = \eta^{ij}.$$

Поднимать и опускать индексы будем с помощью невозмущённой метрики Минковского η_{ij} Связность вычислим в линейном порядке по возмущению метрики $h_{ij}(x)$ имеет вид (6.5.5):

$$\Gamma^m{}_{ij} \approx \frac{1}{2}\left[\partial_i h^m_j + \partial_j h^m_i - \partial^m h_{ij}\right].$$

Тензор Римана в линейном порядке по возмущению:

$$\begin{aligned} R^a{}_{ckl} &\approx \partial_k \Gamma^a_{cl} - \partial_l \Gamma^a_{ck} = \partial_k \frac{1}{2}\left[\partial_c h^a_l + \cancel{\partial_l h^a_c} - \partial^a h_{cl}\right] - \partial_l \frac{1}{2}\left[\partial_c h^a_k + \cancel{\partial_k h^a_c} - \partial^a h_{ck}\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[\partial_k\partial_c h^a_l - \partial_l\partial_c h^a_k - \partial_k\partial^a h_{cl} + \partial_l\partial^a h_{ck}\right]. \end{aligned}$$

$$R_{cl} = R^k{}_{ckl} \approx \frac{1}{2}\left[\partial_k\partial_c h^k_l - \partial_l\partial_c h^k_k - \partial_k\partial^k h_{cl} + \partial_l\partial^k h_{ck}\right] = \frac{1}{2}\left[\partial_c(\partial_k h^k_l) + \partial_l(\partial_k h^k_c) - \partial_l\partial_c h - \Box h_{cl}\right].$$

Здесь

$$h = h^k_k, \qquad \Box = \partial_k\partial^k.$$

Скалярная кривизна в линейном порядке по возмущению:

$$R = R_{cl}g^{cl} \approx R_{cl}\eta^{cl} = \frac{\eta^{cl}}{2}\left[\partial_c(\partial_k h^k_l) + \partial_l(\partial_k h^k_c) - \partial_l\partial_c h - \Box h_{cl}\right] = \partial_k\partial_s h^{ks} - \Box h.$$

Тензор Эйнштейна в линейном порядке по возмущению:

$$G_{cl} = R_{cl} - \frac{1}{2}g_{cl}R \approx R_{cl} - \frac{1}{2}\eta_{cl}R = \frac{1}{2}\left[\partial_c(\partial_k h^k_l) + \partial_l(\partial_k h^k_c) - \partial_l\partial_c h - \Box h_{cl}\right] - \frac{1}{2}\eta_{cl}\left[\partial_k\partial_s h^{ks} - \Box h\right].$$

Введём поле ψ_{cl}:

$$\psi_{cl} = h_{cl} - \tfrac{1}{2}\eta_{cl}h, \quad \partial_k\psi^k_s = \partial_k h^k_s - \tfrac{1}{2}\partial_s h, \quad \partial_c\partial_k\psi^k_l = \partial_c\partial_k h^k_l - \tfrac{1}{2}\partial_c\partial_l h, \quad \partial_k\partial_s\psi^{ks} = \partial_k\partial_s h^{ks} - \tfrac{1}{2}\Box h.$$

$$G_{cl} \approx \frac{1}{2}\left[\partial_c(\partial_k\psi^k_l) + \partial_l(\partial_k\psi^k_c) - \Box\psi_{cl} - \eta_{cl}\partial_k\partial_s\psi^{ks}\right].$$

Полученное выражение систематически содержит дивергенцию $\partial_k\psi^k_s$. Когда мы выводили волновое уравнение для потенциалов электромагнитного поля, мы избавились от похожего слагаемого $\partial_i\partial_j A^j$ наложив калибровочное условие Лоренца $\partial_j A^j = 0$.

Далее мы покажем, что для гравитационного поля мы можем наложить *калибровочные условия Лоренца*:

$$\partial_k \psi^k_s = 0. \tag{7.3.1}$$

После наложения этих условий мы получаем

$$G_{cl} \approx -\frac{1}{2}\Box\psi_{cl}.$$

Уравнения Эйнштейна $G_{cl} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{cl}$ при этом превращаются в волновые уравнения для поля ψ_{cl} с тензором энергии-импульса полей материи в роли источника (правой части):

$$\Box\psi_{cl} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{cl}. \tag{7.3.2}$$

7.3.2 Калибровочные преобразования и калибровка Лоренца

Метрический тензор определён с точностью да замены координат, т.е. произвол в задании метрики определяется четырьмя скалярными функциями (координатами) от точки пространства-времени. Соответственно мы можем ожидать, что на компоненты метрического тензора можно наложить четыре условия, ограничивающих произвол в выборе координат.

Поскольку мы рассматриваем метрику близкую к метрике Минковского в лоренцевских координатах, то и замены координат будем рассматривать такие, которые эту близость не нарушают. Рассмотрим бесконечномалое преобразование координат вида[1]

$$x^m \to x'^m = x^m - \xi^m(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} = \delta^m_k - \partial_k\xi^m, \quad \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} \approx \delta^k_m + \partial_m\xi^k. \tag{7.3.3}$$

$$g'_{mn} = g_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial x'^m}\frac{\partial x^l}{\partial x'^n} \approx (\eta_{kl} + h_{kl})(\delta^k_m - \partial_m\xi^k)(\delta^l_n - \partial_n\xi^l) \approx \eta_{mn} + h_{mn} + \partial_m\xi_n + \partial_n\xi^m.$$

Таким образом, преобразование поля h_{mn}, которое выступает в роли калибровочного преобразования для гравитационного поля, имеет вид:

$$h_{mn} \to h'_{mn} \approx h_{mn} + \partial_m\xi_n + \partial_n\xi^m, \quad h = h^k_k \to h' \approx h + 2\partial_k\xi^k, \tag{7.3.4}$$

(*) При бесконечномалом преобразовании координат (7.3.3) компоненты тензорных полей в линейном порядке по ξ получают добавку в виде производной Ли вдоль векторного поля ξ^m, в частности

$$g_{mn} \to g'_{mn} = g_{mn} + \underbrace{\nabla_m\xi_n + \nabla_n\xi_m}_{L_\xi g_{mn}} + o(\xi).$$

Для поля ψ калибровочное преобразование имеет вид

$$\psi_{mn} = h_{mn} - \tfrac{1}{2}h\eta_{mn} \to \psi'_{mn} = \psi_{mn} + \partial_m\xi_n + \partial_n\xi_m - \eta_{mn}\partial_q\xi^q$$

Посмотрим как меняется дивергенция от поля ψ, через которую выражаются калибровочные условия Лоренца (7.3.1).

$$\partial_k\psi^k_s \to \partial_k\psi'^k_s = \partial_k\psi^k_s + \partial_k(\partial^k\xi_s + \partial_s\xi^k - \delta^k_s\partial_q\xi^q) = \partial_k\psi^k_s + \Box\xi_s.$$

Таким образом, если мы хотим, чтобы в штрихованных координатах выполнялось условие Лоренца (7.3.1), векторное поле ξ должно быть решением волнового уравнения

$$\Box\xi_s = -\partial_k\psi^k_s.$$

Возможны и *остаточные калибровочные преобразования*: если

$$\Box\xi_s = 0,$$

то соответствующее калибровочное преобразование на нарушает калибровочных условий Лоренца (7.3.1).

[1] В данной книге по возможности штрихи, призванные отличить новую систему координат от старой, по возможности ставятся на индексы, а не на координаты или тензоры, но в данном случае следовать этому соглашению не удаётся.

7.3.3 Две поляризации гравитационной волны

Рассмотрим слабую плоскую монохроматическую гравитационную волну с волновым вектором k^s и комплексной амплитудой $a_{mn} = a_{nm}$:

$$\psi_{mn}(t,x,y,z) = \mathrm{Re}\left[a_{mn}\,\exp(\mathrm{i}k_s x^s)\right].$$

Действие оператора ∂_s даёт появление под операцией Re множителя $\mathrm{i}k_s$.

Такая волна решает однородное (без правой части) волновое уравнение если

$$k_s k^s = 0,$$

что соответствует распространению волны со скоростью света.

Калибровочное условие Лоренца накладывает четыре ограничения на амплитуду:

$$a_{mn}k^n = 0.$$

Пусть волна распространяется вдоль оси z, тогда

$$k^m = (\omega;0;0;\omega).$$

Получаем систему уравнений на амплитуду

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} a_{00}+a_{03} \\ a_{10}+a_{13} \\ a_{20}+a_{23} \\ a_{30}+a_{33} \end{pmatrix} = 0.$$

С учётом симметрии матрицы a_{mn} у неё остаётся 10 независимых компонент, с учётом калибровочных условий их число сокращается до $10-4=6$:

$$a_{mn} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & -a_{00} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} & -a_{01} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & -a_{02} \\ -a_{00} & -a_{01} & -a_{02} & a_{00} \end{pmatrix}.$$

Ещё на четыре можно уменьшить число независимых компонент с помощью остаточных калибровочных преобразований. Зададим ξ через ту же комплексную экспоненту. Это гарантирует выполнение условия $\Box\xi_s = 0$, т.е. сохранение калибровки Лоренца.

$$\xi_m = \mathrm{Re}\left[\tfrac{1}{\mathrm{i}\omega}b_s\exp(\mathrm{i}k_s x^s)\right],\quad \partial_m\xi_n + \partial_n\xi_m = \mathrm{Re}\left[\tfrac{1}{\omega}(k_m b_n + k_n b_m)\exp(\mathrm{i}k_s x^s)\right],\quad \partial_q\xi^q = \mathrm{Re}\left[\tfrac{1}{\omega}k_q b^q\exp(\mathrm{i}k_s x^s)\right]$$

$$a_{mn} \to a'_{mn} + \tfrac{1}{\omega}(k_m b_n + k_n b_m - \eta_{mn}k^q b_q)$$

$$\tfrac{1}{\omega}(k_m b_n + k_n b_m - \eta_{mn}\underbrace{k^q b_q}_{\omega(b_3+b_0)}) =$$

$$= \begin{pmatrix} -b_0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_0 & 0 & 0 & b_0 \\ -b_1 & 0 & 0 & b_1 \\ -b_2 & 0 & 0 & b_2 \\ -b_3 & 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -b_0-b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0+b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0+b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0+b_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_3-b_0 & -b_1 & -b_2 & b_0-b_3 \\ -b_1 & b_0+b_3 & 0 & b_1 \\ -b_2 & 0 & b_0+b_3 & b_2 \\ b_0-b_3 & b_1 & b_2 & b_3-b_0 \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$b_1 = a_{01},\quad b_2 = a_{02},\qquad b_0 - b_3 = a_{00},\quad b_0 + b_3 = \frac{a_{11}+a_{22}}{2}$$

После соответствующего остаточного калибровочного преобразования у амплитуды гравитационной волны остаётся два независимых параметра, которые соответствуют двум независимым поляризациям:

$$a'_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a'_{11} & a'_{12} & 0 \\ 0 & a'_{12} & -a'_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.3.5}$$

След этой матрицы равен нулю, так что $h_{mn} = \psi_{mn}$.

Переход от a_{mn} к a'_{mn} можно осуществить следующим образом:
1. Введём проектор P_{mn} на плоскость волнового фронта. Если волна бежит вдоль оси z, то

$$P^m_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В общем случае, когда направление оси времени задано единичным времениподобным вектором u^m, а направление распространения волны — единичным пространственноподобным вектором N^m ($N^m u_m = 0$, $N^m N_m = -u^m u_m = 1$)

$$P^m_n = \delta^m_n + u^m u_n - N^m N_n, \qquad P_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - N_\mu N_\nu. \tag{7.3.6}$$

Мы выписали также пространственную часть проектора $P_{\mu\nu}$ (только она существенна).
2. Спроецируем a_{mn} на плоскость волнового фронта, и обнулим след

$$a'_{mn} = P^k_m a_{kl} P^l_n - \frac{1}{2} P_{mn} P^{kl} a_{kl} = \left(P^k_m P^l_n - \frac{1}{2} P_{mn} P^{kl} \right) a_{kl}, \quad a'_{\mu\nu} = \left(P_{\kappa\mu} P_{\lambda\nu} - \frac{1}{2} P_{\mu\nu} P_{\kappa\lambda} \right) a_{\kappa\lambda}. \tag{7.3.7}$$

Мы можем ограничиться пространственной частью амплитуды $a'_{\mu\nu}$, поскольку только она отлична от нуля.

7.3.4 Интерпретация поляризаций гравитационной волны

Мы получили две линейно независимые поляризации гравитационной волны (7.3.5), которые задаются следующими матрицами

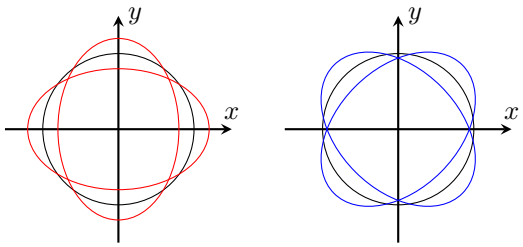
$$a_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad a_\times = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.3.8}$$

Эти поляризации мы будем называть линейными.

Обе эти поляризации искажают метрику в плоскостях перпендикулярных направлению распространения волны. Поляризация a_+ задаёт гармоническое растяжение-сжатие расстояний вдоль оси x и сжатие-растяжение вдоль оси y, т.е. вдоль лежащих в плоскости $x - y$ собственных векторов матрицы первой из матриц (7.3.8).

Площадь в плоскости $x - y$ при это остаётся неизменной [2]

Аналогично поляризация $a_\times$ задаёт гармоническое растяжение-сжатие и сжатие-растяжение вдоль лежащих в плоскости $x - y$ собственных векторов второй из матриц (7.3.8)



Две линейные поляризации гравитационной волны:
Окружность в плоскости $x - y$ под действием волны, с поляризаций a_+ колеблется растягиваясь-сжимаясь по оси x и сжимаясь-растягиваясь по оси y.
Та же окружность под действием волны с поляризацией $a_\times$ колеблется растягиваясь-сжимаясь и сжимаясь-растягиваясь по направлениям, повёрнутым относительно координатных осей на угол $\frac{\pi}{4}$.

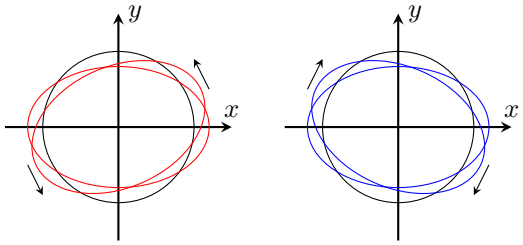
(*) Две линейные поляризации переходят друг в друга поворотом на $\frac{\pi}{4}$. Из квантовой теории мы знаем, что у частицы со спином $\frac{1}{2}$ есть две независимые поляризации («спин вверх» и «спин вниз»), переходящие друг в друга поворотом на π. Для массивной частицы со спином 1 есть три независимых поляризации, но если частица безмассовая, то из них остаётся только две, например «фотон поляризован по x» и «фотон поляризован по y», они переходят друг в друга поворотом на $\frac{\pi}{2}$. Вообще для массивной частицы со спином

[2] $|a_{11}| \ll 1$, поэтому $\sqrt{1+|a_{11}|}\sqrt{1-|a_{11}|} \approx (1 + \frac{|a_{11}|}{2}) \cdot (1 - \frac{|a_{11}|}{2}) \approx 1 + o(|a_{11}|)$.

s есть $2s+1$ независимая поляризация, но если частица безмассовая из них остаётся только две, которые можно выбрать так, чтобы они переходили друг в друга при повороте вокруг волнового вектора на $\frac{\pi}{2s}$. Так что при квантовании гравитационного поля его квант-переносчик должен иметь спин 2. Мы это уже знаем, хотя общепринятой последовательной квантовой теории гравитации до сих пор не создано.

Вместо двух линейных поляризаций мы можем выбрать в качестве базисных две круговых поляризации, задаваемых следующими матрицами:

$$a_{\circlearrowleft} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad a_{\circlearrowright} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.3.9}$$



Две круговые поляризации гравитационной волны:
Окружность в плоскости $x-y$ под действием волны, с поляризаций $a_{\circlearrowleft}$ превращается в эллипс, вращающийся против часовой стрелке с угловой скоростью $\frac{\omega}{2}$.
Та же окружность под действием волны с поляризацией $a_{\circlearrowright}$ превращается в эллипс, вращающийся по часовой стрелке.
Направление вращения (по/против часовой стрелки) соответствует тому, что мы смотрим против волнового вектора.[3]

В поле гравитационной волны на нерелятивистскую частицу будет действовать сила (6.5.6)

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -2m(\hat{\gamma}\mathbf{v}), \qquad 2\hat{\gamma}_{\mu\alpha} = \partial_0[h_{\mu\alpha}] = \mathrm{Re}\left[-\mathrm{i}\,\omega\, a_{\mu\alpha}\,\exp(\mathrm{i}k_s x^s)\right]. \tag{7.3.10}$$

Здесь $\hat{\gamma}$ — матрица коэффициентов вязкого трения. Для скорости вдоль собственного вектора матрицы $\hat{\gamma}$ с положительным собственным числом действует вязкое трение. Для скорости вдоль собственного вектора матрицы $\hat{\gamma}$ с отрицательным собственным числом действует самоускорение (отрицательное вязкое трение).

7.3.5 Псевдотензор энергии-импульса слабого гравитационного поля

Выпишем явно псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля (7.2.11) для слабого поля (в линейном порядке по h_{ij}).

$$T_{\mathrm{r}}{}^m{}_l = \frac{c^3}{16\pi G}\left[(\delta^m_s\Gamma^k_{ck} - \Gamma^m_{cs})\frac{\partial_l(g^{cs}\sqrt{-g})}{\sqrt{-g}} - R\,\delta^m_l\right]$$

Входящие в эту формулу выражения в линейном порядке по h имеют вид:

$$g_{ij}(x) = \eta_{ij} + h_{ij}(x), \qquad g^{ij}(x) \approx \eta^{ij} - h_{ij}(x), \quad h = h^k_k.$$

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{ij}\underbrace{\delta g_{ij}}_{h_{ij}} \approx \frac{1}{2}h \quad \Rightarrow \quad \sqrt{-g} \approx 1 + \frac{1}{2}h, \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \approx 1 - \frac{1}{2}h.$$

$$\sqrt{-g}g^{ij} \approx (1+\tfrac{1}{2}h)(\eta^{ij} - h^{ij}) \approx \eta^{ij} - h^{ij} + \tfrac{1}{2}h\eta^{ij} = \eta^{ij} - \psi^{ij}$$

$$\Gamma^m{}_{cs} \approx \frac{1}{2}\left[\partial_c h^m_s + \partial_s h^m_c - \partial^m h_{cs}\right], \qquad \Gamma^k{}_{ck} \approx \frac{1}{2}\partial_c h.$$

$$R \approx \partial_k\partial_s h^{ks} - \Box h.$$

[3] Существует две противоположные традиции в определении правой/левой круговой поляризации. В оптике направление вращения определяется с точки зрения наблюдателя, который смотрит навстречу волне, в теории поля правое направление вращения определяется по правому винту к волновому вектору. В данном случае мы воспользвоались оптической традицией.

$$
\begin{aligned}
T_{\text{г}}{}^m{}_l &\approx \frac{c^3}{16\pi G}\Big[\tfrac{1}{2}(\delta^m_s\partial_c h - \partial_c h^m_s - \partial_s h^m_c + \partial^m h_{cs})\,\partial_l\psi^{cs} - (\partial_k\partial_s h^{ks} - \Box h)\,\delta^m_l\Big] = \\
&= \frac{c^3}{16\pi G}\Big[\tfrac{1}{2}(\delta^m_s\partial_c h - 2\partial_c h^m_s + \partial^m h_{cs})\,\partial_l\psi^{cs} - (\partial_k\partial_s h^{ks} - \Box h)\,\delta^m_l\Big] = \\
&= \frac{c^3}{16\pi G}\Big[(-\partial_c\psi^m_s + \tfrac{1}{2}\partial^m h_{cs})\,\partial_l\psi^{cs} - (\partial_k\partial_s h^{ks} - \Box h)\,\delta^m_l\Big].
\end{aligned}
$$

Множитель при δ^m_l — скалярная кривизна. В отсутствие полей материи (или если след тензора энергии-импульса полей материи равен нулю) скалярная кривизна обращается в нуль. Так будет и для свободной гравитационной волны.

Для плоской монохроматической волны в калибровке Лоренца, после того, как мы остаточными калибровочными преобразованиями получили амплитуду в форме (7.3.5) выполняются свойства

$$
h = 0, \quad \psi_{ij} = h_{ij}, \quad \partial_s h^{ks} = 0, \quad (\partial_l h^{cs})\partial_s h_{ij} = 0.
$$

Мы воспользовались тем, что отличны от нуля только производные по t и z, и только компоненты h, ψ, a с индексами x и y.

Теперь

$$
T_{\text{г}}{}^m{}_l \approx \frac{c^3}{32\pi G}\,(\partial^m h_{cs})\,(\partial_l h^{cs}) \tag{7.3.11}
$$

$$
\begin{aligned}
h_{cs} &= (\operatorname{Re} a_{cs})\,\cos(k_n x^n) - (\operatorname{Im} a_{cs})\,\sin(k_n x^n) \\
\partial_l h_{cs} &= -k_l\,(\operatorname{Re} a_{cs})\,\sin(k_n x^n) - k_l\,(\operatorname{Im} a_{cs})\,\cos(k_n x^n)
\end{aligned}
$$

$$
T_{\text{г}}{}^m{}_l \approx \frac{c^3}{32\pi G}\,k^m k_l\Big[\underbrace{(\operatorname{Re} a_{cs})(\operatorname{Re} a^{cs})}_{2[(\operatorname{Re} a_{11})^2+(\operatorname{Re} a_{12})^2]}\,\sin^2(k_n x^n) + \underbrace{(\operatorname{Im} a_{cs})(\operatorname{Im} a^{cs})}_{2[(\operatorname{Im} a_{11})^2+(\operatorname{Im} a_{12})^2]}\,\cos^2(k_n x^n) + \underbrace{(\operatorname{Re} a_{cs})(\operatorname{Im} a^{cs})}_{2[(\operatorname{Re} a_{11})(\operatorname{Im} a_{11})+(\operatorname{Re} a_{12})(\operatorname{Im} a_{12})]}\,\sin(2k_n x^n)\Big].
$$

Если волна распространяется вдоль оси z, то псевдотензор энергии-импульса следующим образом выражается через плотность энергии гравитационного поля $W_{\text{г}}$ также, как тензор энергии-импульса бегущей электромагнитной волны через плотность энергии электромагнитного поля

$$
T_{\text{г}}^{ml} \approx \begin{pmatrix} W_{\text{г}} & 0 & 0 & W_{\text{г}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ W_{\text{г}} & 0 & 0 & W_{\text{г}} \end{pmatrix}
$$

Физический смысл ненулевых компонент: T^{00} — плотность энергии, T^{30} — плотность потока энергии, T^{03} — объёмная плотность импульса, T^{33} — давление гравитационной волны.

После усреднения по времени получаем

$$
\langle T_{\text{г}}{}^m{}_l\rangle_t \approx \frac{c^3}{32\pi G}\,k^m k_l\Big[|a_{11}|^2 + |a_{12}|^2\Big], \qquad \langle W_{\text{г}}\rangle_t \approx \frac{c^2\,\omega^2}{32\pi G}\Big[|a_{11}|^2 + |a_{12}|^2\Big].
$$

7.3.6 Решение неоднородного волнового уравнения для возмущения метрики–

Рассмотрим линеаризованные уравнения Эйнштейна (7.3.2) в калибровке Лоренца (7.3.1)

$$
\Box\psi_{cl} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{cl}, \qquad \partial_k\psi^k_s = 0.
$$

Поле ψ можно выразить в виде запаздывающих потенциалов, используя запаздывающую функцию Грина для волнового уравнения (3.8.5) получаем

$$
\psi_{cl}(\underbrace{\mathbf{r},t}_{x}) = \int G_R(x-x_0)\,\frac{4G}{c^4}\,T_{cl}(x_0)\,d^4x_0 = \frac{4G}{c^4}\int\frac{T_{cl}(\mathbf{r}_0, t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\,d^3\mathbf{r}_0 = \\
= \frac{4G}{c^4}\int\frac{T_{cl}(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho}, t - \frac{|\boldsymbol{\rho}|}{c})}{|\boldsymbol{\rho}|}\,d^3\boldsymbol{\rho}.
$$

Проверим выполнение калибровочных условий:

$$\partial_c^{(\mathbf{r},t)}\psi_l^c(\mathbf{r},t) = \frac{4\pi}{c^4}\int \frac{\partial_c^{(\mathbf{r},t)}T_l^c(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho},t-\frac{|\boldsymbol{\rho}|}{c})}{|\boldsymbol{\rho}|}\,d^3\boldsymbol{\rho} = 0.$$

Выражение в числителе подынтегрального выражения — это уравнение непрерывности для энергии и импульса полей материи со сдвинутыми на $\boldsymbol{\rho}$ и $-\frac{|\boldsymbol{\rho}|}{c}$ аргументами

$$\partial_c^{(\mathbf{r},t)}T_l^c(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho},t-\tfrac{|\boldsymbol{\rho}|}{c}) \approx \nabla_c^{(\mathbf{r},t)}T_l^c(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho},t-\tfrac{|\boldsymbol{\rho}|}{c}) = 0.$$

Мы сейчас рассматриваем уравнения Эйнштейна в линейном порядке по отклонению метрики от метрики Минковского, при этом (исходя из получившегося волнового уравнения (7.3.2)) тензор энергии-импульса также имеет первый порядок малости. По этой причине различием между частной и ковариантной производными в уравнениях непрерывности можно пренебречь.

Пусть источником гравитационного поля является пробная точечная частица. Тензор энергии-импульса имеет вид (6.7.1)

$$T^{ij}(x_0) = \frac{c\,\delta^3(X^\alpha - x_0^\alpha)}{\sqrt{-g}\,|p^0|}\,p^ip^j \approx c\,\delta^3(\mathbf{R}-\mathbf{r}_0)\,\frac{p^ip^j}{p^0}\bigg|_{t_0}$$

Подставляя тензор энергии-импульса в выражение для запаздывающих гравитационных потенциалов ψ получаем гравитационный аналог (в линейном приближении!) потенциалов Лиенара-Вихерта:

$$\psi_{cl}(\mathbf{r},t) = \frac{4G}{c^4}\int \frac{c\,\delta^3(\mathbf{R}-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\;\frac{p_cp_l}{p^0}\bigg|_{t-\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{c}} d^3\mathbf{r}_0 = \frac{4G}{c^3\,|\mathbf{r}-\mathbf{R}|}\;\frac{p_cp_l}{p^0}\bigg|_{t-\frac{\mathbf{r}-\mathbf{R}}{c}}.$$

$$\psi_{cl} = h_{cl} - \tfrac{1}{2}\eta_{cl}h \quad\Rightarrow\quad \psi_k^k = h - 2h = -h, \quad h_{cl} = \psi_{cl} + \tfrac{1}{2}\eta_{cl}h = \psi_{cl} - \tfrac{1}{2}\eta_{cl}\psi_k^k.$$

Для пробной точечной частицы $p^kp_k = -m^2c^2$

$$h_{cl} = \frac{4G}{c^3\,|\mathbf{r}-\mathbf{R}|}\;\frac{p_cp_l + \frac{1}{2}\eta_{cl}m^2c^2}{p^0}\bigg|_{t-\frac{\mathbf{r}-\mathbf{R}}{c}}. \tag{7.3.12}$$

(!) Есть ли физический смысл у потенциалов типа Лиенара-Вихерта (7.3.12)? Мы ведь знаем, что точечная массивная частица будет чёрной дырой, а отклонение метрического тензора от метрики Минковского вблизи горизонта чёрной дыры нельзя считать малым, а мы выводили (7.3.12) в линейном приближении. Смысл у такого решения тем не менее есть:
1. Мы можем считать, что частица имеет размер малый по сравнению с расстояниями до других частиц, но большой по сравнению с гравитационным радиусом.
2. Мы можем считать, что смысл имеет не само решение (7.3.12), а суперпозиция таких решений, соответствующая непрерывному распределению масс, размер неоднородностей которого много меньше, чем гравитационные радиусы этих неоднородностей.

Выпишем для точечной пробной частицы создаваемые ей возмущения метрики в терминах раздела 6.5.4 «Нерелятивистский предел» (стр. 549).

$\varphi_{\text{гр.}}(x) = -\frac{c^2}{2}h_{00}$ — скалярный потенциал слабого гравитационного поля.

Для массивной частицы

$$\varphi_{\text{гр.}}(\mathbf{r},t) = -\frac{Gm}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|}\left(2\gamma - \frac{1}{\gamma}\right)_{t-\frac{\mathbf{r}-\mathbf{R}}{c}} = -\frac{Gm}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|}\;\frac{1+\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\bigg|_{t-\frac{\mathbf{r}-\mathbf{R}}{c}},$$

При $v \ll c$

$$\varphi_{\text{гр.}}(\mathbf{r},t) \approx -\frac{Gm}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|}\left(1+\frac{3}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)_{t-\frac{\mathbf{r}-\mathbf{R}}{c}}$$

Мы видим, что для неподвижной частицы воспроизводится ньютоновское выражение, но кинетическая энергия по сравнению с энергией покоя входит с коэффициентом 3.

Для безмассовой частицы по сравнению по сравнению с ньютоновским потенциалом в роли гравитационной массы выступает не $\frac{\mathcal{E}}{c^2}$, а $2\frac{\mathcal{E}}{c^2}$:

$$\varphi_{\text{гр.}}(\mathbf{r},t) = -\;\frac{2G\mathcal{E}}{c^2\,|\mathbf{r}-\mathbf{R}|}\bigg|_{t-\frac{\mathbf{r}-\mathbf{R}}{c}} \tag{7.3.13}$$

Ранее мы получили (6.6.2) и (6.6.3) (стр. 557), что в слабых полях в ОТО безмассовые частицы в два раза сильнее отклоняются гравитационным полем, чем в полуклассической теории.

$(\mathbf{A}_{\text{гр.}})_\mu(x) = c^2\, h_{0\mu}$ — векторный потенциал слабого гравитационного поля.

Для пробной частицы (не важно массивной или безмассовой)

$$\mathbf{A}_{\text{гр.}}(\mathbf{r},t) = -\left.\frac{4G\,\mathbf{p}}{c\,|\mathbf{r}-\mathbf{R}|}\right|_{t-\frac{\mathbf{r}-\mathbf{R}}{c}}.$$

- $\mathbf{g} = -\operatorname{grad}\varphi_{\text{гр.}} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}_{\text{гр.}}}{\partial t}$ — ускорение свободного падения (создаётся гравитирующими телами),
- $\mathbf{h} = \operatorname{rot}\mathbf{A}_{\text{гр.}}$ — гравимагнитное поле, создаёт силу, аналогичную силе Кориолиса во вращающейся системе отсчёта в Ньютоновской механике (создаётся движущимися, в том числе вращающимися, гравитирующими телами),
- $2\hat{\gamma}_{\mu\alpha} = c\,\partial_0[h_{\mu\alpha}]$ — симметричная матрица сил вязкого трения и самоускорения (создаётся гравитационными волнами (7.3.10), которые излучаются ускоренными гравитирующими телами).

7.3.7 Излучение гравитационных волн

Пусть источник гравитационного поля локализован в области с характерным размером a в окрестности начала координат, причём $a \ll \lambda$, где $\lambda = cT_0$ — характерная длина излучаемой гравитационной волны. Как при рассмотрении испускания электромагнитной волны в мультипольном разложении, мы будем считать разность хода волн, испущенных разными частями источника, малой. В первом приближении разностью хода мы вообще пренебрежём (для электромагнитного поля этому соответствовало дипольное приближение):

$$\psi_{mn}(\mathbf{r},t) = \frac{4G}{c^4}\int \frac{T_{cl}(\mathbf{r}_0, t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\,d^3\mathbf{r}_0 \approx \frac{4G}{c^4\,r}\int T_{mn}(\mathbf{r}_0, t-\tfrac{r}{c})\,d^3\mathbf{r}_0, \quad r=|\mathbf{r}|.$$

В волновой зоне (при $R \gg \lambda$) мы имеем практически плоскую волну. Как мы убедились выше в разделе 7.3.3 «Две поляризации гравитационной волны» (стр. 587), при этом для нас важны только те компоненты тензора ψ_{cl}, которые остаются при проецировании на плоскость волнового фронта с помощью проектора (7.3.6) $P_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - N_\mu N_\nu$ и взятия бесследовой части (7.3.7):

$$h'_{\mu\nu} = \psi'_{\mu\nu} = \Big(P_{\kappa\mu}P_{\lambda\nu} - \frac{1}{2}P_{\mu\nu}P_{\kappa\lambda}\Big)\psi_{\kappa\lambda} = \Big(P_{\kappa\mu}P_{\lambda\nu} - \frac{1}{2}P_{\mu\nu}P_{\kappa\lambda}\Big)\frac{4G}{c^4\,r}\int \sigma_{\kappa\lambda}(\mathbf{r}_0, t-\tfrac{r}{c})\,d^3\mathbf{r}_0,$$

здесь $\sigma_{\mu\nu}$ — тензор напряжений Максвелла (пространственная часть тензора энегии-импульса) для полей материи. $h'_{\mu\nu} = \psi'_{\mu\nu}$ потому, что след равен нулю.

Поскольку следующая свертка равна нулю

$$\Big(P_{\kappa\mu}P_{\lambda\nu} - \frac{1}{2}P_{\mu\nu}P_{\kappa\lambda}\Big)\delta_{\kappa\lambda} = 0,$$

мы можем заменить тензор напряжений $\sigma_{\mu\nu}$ на его бесследовую часть

$$h'_{\mu\nu} = \Sigma_{\kappa\lambda}(t-\tfrac{r}{c})\cdot\Big(P_{\kappa\mu}P_{\lambda\nu} - \frac{1}{2}P_{\mu\nu}P_{\kappa\lambda}\Big)\frac{4G}{c^4\,r},$$

где источник описывается тензором

$$\Sigma_{\mu\nu}(t) = \int \Big(\sigma_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\sigma_{\lambda\lambda}\Big)\Big|_{\mathbf{r}_0,t} d^3\mathbf{r}_0.$$

Мы видим, что в первом приближении гравитационные волны излучаются потоками импульса, отклоняющимися от закона Паскаля[4].

Плотность энергии в гравитационной волне (7.3.11)

$$W_{\text{г}} = T^{00}_{\text{г}} = \frac{c^3}{32\pi G}\,(\partial_0 h'_{\mu\nu})\,(\partial_0 h'_{\mu\nu}) = \frac{G}{2\pi c^2\,r^2}\,\dot{\Sigma}_{\kappa\lambda}\cdot\Big(P_{\kappa\mu}P_{\lambda\nu} - \frac{1}{2}P_{\mu\nu}P_{\kappa\lambda}\Big)\cdot\dot{\Sigma}_{\mu\nu}.$$

Интенсивность гравитационного излучения в элемент телесного угла:

$$dI_{\text{г}} = cW_{\text{г}}\,r^2\,d\Omega = \frac{G}{2\pi c}\,\dot{\Sigma}_{\kappa\lambda}\cdot\Big(P_{\kappa\mu}P_{\lambda\nu} - \frac{1}{2}P_{\mu\nu}P_{\kappa\lambda}\Big)\cdot\dot{\Sigma}_{\mu\nu}\,d\Omega \tag{7.3.14}$$

[4]Имеется в виду закон Паскаля из гидростатики: одинаковость давления во всех направлениях. Если закон Паскаля выполняется, то $\sigma_{\mu\nu} = \text{давление}\cdot\delta_{\mu\nu}$.

Используя симметричность матрицы $\dot\Sigma$ и равенство нулю её следа получаем

$$\begin{aligned}\dot\Sigma_{\mu\nu}\Big(P_{\kappa\mu}P_{\lambda\nu}-\frac12 P_{\mu\nu}P_{\kappa\lambda}\Big)\dot\Sigma_{\kappa\lambda} &= \dot\Sigma_{\mu\nu}\Big((\delta_{\kappa\mu}-N_\kappa N_\mu)(\delta_{\lambda\nu}-N_\lambda N_\nu)-\frac12(\delta_{\mu\nu}-N_\mu N_\nu)(\delta_{\kappa\lambda}-N_\kappa N_\lambda)\Big)\dot\Sigma_{\kappa\lambda}= \\ &= \dot\Sigma_{\mu\nu}\Big(\delta_{\kappa\mu}\delta_{\lambda\nu}+\frac12 N_\mu N_\nu N_\kappa N_\lambda-2\delta_{\kappa\mu}N_\lambda N_\nu\Big)\dot\Sigma_{\kappa\lambda}= \\ &= \dot\Sigma_{\mu\nu}\dot\Sigma_{\mu\nu}+\frac12(N_\mu\dot\Sigma_{\mu\nu}N_\nu)^2-2N_\nu\dot\Sigma_{\nu\mu}\dot\Sigma_{\mu\lambda}N_\lambda.\end{aligned}$$

Для нахождения полной интенсивности усредним по всем направлениям

$$\begin{aligned}\Big\langle\dot\Sigma_{\mu\nu}\Big(P_{\kappa\mu}P_{\lambda\nu}-\frac12 P_{\mu\nu}P_{\kappa\lambda}\Big)\dot\Sigma_{\kappa\lambda}\Big\rangle &= \dot\Sigma_{\mu\nu}\Big(\delta_{\kappa\mu}\delta_{\lambda\nu}+\frac12\underbrace{\langle N_\mu N_\nu N_\kappa N_\lambda\rangle}_{\frac{1}{15}(\delta_{\mu\nu}\delta_{\kappa\lambda}+\delta_{\mu\kappa}\delta_{\nu\lambda}+\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\kappa})}-2\delta_{\kappa\mu}\underbrace{\langle N_\lambda N_\nu\rangle}_{\frac13\delta_{\lambda\nu}}\Big)\dot\Sigma_{\kappa\lambda}= \\ &= \Big(1+\frac{1}{15}-\frac23\Big)\dot\Sigma_{\mu\nu}\dot\Sigma_{\mu\nu}=\frac25\,\dot\Sigma_{\mu\nu}\dot\Sigma_{\mu\nu}\end{aligned}$$

Полная интенсивность гравитационного излучения:

$$I_{\text{г}}=\frac{4G}{5c}\,\dot\Sigma_{\mu\nu}\dot\Sigma_{\mu\nu}. \tag{7.3.15}$$

7.3.8 Излучение системы нерелятивистских частиц—

Рассмотрим гравитационное излучение системы нерелятивистских частиц. В этом случае

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{r},t)=\rho v_\alpha v_\beta,$$

где ρ — объёмная плотность массы.

$$\Sigma_{\alpha\beta}=\sum_a m_a\Big(\dot r_{a\alpha}\dot r_{a\beta}-\frac13\delta_{\alpha\beta}\dot{\mathbf{r}}_a^2\Big).$$

Введём тензор гравитационного квадрупольного момента $\cancel{I}_{\alpha\beta}$, который совпадает с бесследовой частью момента инерции системы частиц:

$$\cancel{I}_{\alpha\beta}=\sum_a m_a\Big(r_{a\alpha}r_{a\beta}-\frac13\delta_{\alpha\beta}\mathbf{r}_a^2\Big).$$

По сравнению с введённым нами ранее электрическим квадрупольным моментом $Q_{\alpha\beta}=\sum_a q_a\Big(3r_{a\alpha}r_{a\beta}-\delta_{\alpha\beta}\mathbf{r}_a^2\Big)$, заряды заменены на массы и выражение поделено на 3[5].

[5]Общий множитель — исключительно вопрос традиций. Иногда электрический квадрупольный момент определяют иначе:

$$Q^{\text{иной}}_{\alpha\beta}=\sum_a q_a\Big(r_{a\alpha}r_{a\beta}-\tfrac13\delta_{\alpha\beta}\mathbf{r}_a^2\Big).$$

Часть VIII

Точные решения уравнений Эйнштейна

Уравнения Эйнштейна представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Нелинейные дифференциальные уравнения обычно не допускают построения общих решений. Более того, даже существование и единственность решения при заданных начальных условиях не гарантирована.

По этой причине при исследовании нелинейных дифференциальных уравнений большую роль играют частные решения, особенно те из них, которые обладают хорошим физическим смыслом, или служат контрпримерами, демонстрирующими возможность нарушения тех или иных (казавшихся естественными!) условий.

Для нахождения точных решений как правило используются соображения симметрии.

Для уравнений Эйнштейна в присутствии полей материи распространённый приём — подгонка полей материи под заданную пространственно-временную метрику.

Данная часть представляет собой обзор некоторых наиболее простых и популярных точных решений ОТО. Материал по возможности упорядочен от простого к сложному.

Глава 8.1

Пространства постоянной кривизны–

8.1.1 Римановы пространства постоянной кривизны

В ОТО нас интересуют в первую очередь псевдоримановы пространства с сигнатурой $(-,+,+,+)$, однако и римановы пространства с сигнатурой $(+,+,+)$ представляют интерес в как сечения псевдоримановых пространства-времени.

Существует три *локально* различных римановых пространства постоянной кривизны: евклидово пространство (постоянная нулевая кривизна), пространство Лобачевского (постоянная отрицательная кривизна), геометрия поверхности сферы (постоянная положительная кривизна). Евклидову геометрия мы считаем общеизвестной, а остальные две Римановых геометрии мы рассматривали ранее в разделе 2.8.10 «Геометрия Лобачевского и сферическая геометрия» (стр. 246).

Во всех трёх случаях метрика может быть записана в форме (2.8.7):

$$dl^2 = \frac{4\,\delta_{\alpha\beta}\,dX^\alpha\,dX^\beta}{(1+K\,\delta_{\mu\nu}\,X^\mu\,X^\nu)^2}. \tag{8.1.1}$$

Здесь $K=\mathrm{const}$ — кривизна пространства. Для евклидового пространства $K=0$, для сферы $K=\frac{1}{R^2}>0$, для пространства Лобачевского $K=-\frac{1}{R^2}<0$.

Сферическая геометрия при этом рассматривалась как внутренняя геометрия на поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, погружённой в евклидово пространство большей на 1 размерности.

Геометрия Лобаческого рассматривалась как внутренняя геометрия на поверхности псевдосферы $-t^2+x^2+y^2+z^2=-R^2$, погружённой в пространство Минковского большей на 1 размерности.

Почему мы подчеркнули, что существует три локально различных римановых пространства постоянной кривизны? Локально изометричные римановы пространства могут быть глобально устроены поразному.

Пространства, локально совпадающее с евклидовым пространством глобально может быть устроено различно и иметь разную топологию. Например в двумерном случае возможны следующие варианты:

- плоскость: $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, все пары точек различны;
- цилиндр: $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, проводится отождествление $(x,y)\sim(x+na,y)$, $n\in\mathbb{Z}$;
- тор: $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, проводится отождествление $(x,y)\sim(x+n_xa,y+n_yb)$, $n_x,n_y\in\mathbb{Z}$;
- лист Мёбиуса: $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, проводится отождествление $(x,y)\sim(x+na,(-1)^ny)$, $n\in\mathbb{Z}$;
- бутылка Клейна: $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, проводится отождествление $(x,y)\sim(x+n_xa,(-1)^{n_x}y+n_yb)$, $n_x,n_y\in\mathbb{Z}$.

Координаты (x,y) при этом могут быть декартовы, либо косоугольные.

Сворачивание евклидовой плоскости в конус мы пока не рассматриваем, т.к. такое сворачивание имеет особую точку с бесконечной кривизной — вершину конуса.

Пространства, локально совпадающие с поверхностью сферы могут быть также проективными пространствами, которые отличаются от сферы отождествлением диаметральных точек $(x,y,z)\sim(-x,-y,-z)$.

8.1.2 Евклидово пространство и сфера

В евклидовом пространстве можно ввести сферические координаты.

Процесс их введения можно описать по индукции.

- Основание индукции: на плоскости $x_1 - x_2$ вводятся полярные координаты

$$x_1 = r_1 \cos\phi, \quad x_2 = r_1 \sin\phi, \quad \phi \sim \phi + 2\pi, \quad r_1 \geqslant 0.$$

- Индукционный переход: если $j{+}1 < D$, то на полуплоскости $x_{j+2}{-}r_j$ вводятся полярные координаты

$$x_{j+2} = r_{j+1} \sin\theta_{D-j}, \quad r_j = r_{j+1} \cos\theta_{D-j}, \quad \theta_{D-j} \in [0,\pi], \quad r_j \geqslant 0..$$

- Последнюю радиальную координату r_{D-1} переименуем в r.

В результате получаем

- на плоскости (полярные координаты)

$$x = r \cos\phi, \quad y = r \sin\phi,$$

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2, \quad r \in [0,\infty), \quad \phi \sim \phi + 2\pi.$$

- в 3-мерном пространстве

$$x = r \sin\theta \cos\phi, \quad y = r \sin\theta \sin\phi, \quad z = r \cos\theta$$

$$dl^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2), \quad r \in [0,\infty), \quad \theta \in [0,\pi] \quad \phi \sim \phi + 2\pi.$$

- в 4-мерном пространстве

$$x_1 = \underbrace{\overbrace{r \sin\theta_1}^{r_2} \sin\theta_2}_{r_1} \cos\phi, \quad x_2 = \underbrace{\overbrace{r \sin\theta_1}^{r_2} \sin\theta_2}_{r_1} \sin\phi, \quad x_3 = \underbrace{r \sin\theta_1}_{r_2} \cos\theta_2, \quad x_4 = \underbrace{r}_{r_3} \cos\theta_1$$

$$dl^2 = dr^2 + r^2(d\theta_1^2 + \sin^2\theta_1\, d\theta_2^2 + \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2\, d\phi^2),$$
$$r \in [0,\infty), \quad \theta_1, \theta_2 \in [0,\pi], \quad \phi \sim \phi + 2\pi.$$

- в D-мерном пространстве

$$x_1 = r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\phi, \quad x_2 = r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\phi, \quad x_3 = r \sin\theta_1 \cos\theta_2, \quad \ldots$$

$$x_n = r \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{D-n} \cos\theta_{D-n+1}, \quad \ldots \quad x_D = r \cos\theta_1$$
$$dl^2 = dr^2 + r^2(d\theta_1^2 + \sin^2\theta_1\, d\theta_2^2 + \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2\, d\theta_3^2 + \cdots + \sin^2\theta_1 \ldots \sin^2\theta_{D-2}\, d\phi^2),$$
$$r \in [0,\infty), \quad \theta_j \in [0,\pi], \quad j = 1,\ldots,D-2, \quad \phi \sim \phi + 2\pi.$$

При $r = 0$ или $\theta_j \in \{0,\pi\}$ получаем особые точки. Все значения ϕ равноправны (есть симметрий по отношению к сдвигу по ϕ) но точки различающиеся по ϕ на целое кратное 2π совпадают (склеиваются).

Зафиксировав в сферических координатах на евклидовом пространстве $r = R = \text{const}$ получаем метрику $(D-1)$-мерной сферы:

- плоскость $\to$ окружность (евклидова прямая с периодическим граничными условиями)

$$dl^2 = R^2 d\phi^2, \quad \phi \sim \phi + 2\pi.$$

  Периодические граничные условия $\phi \sim \phi + 2\pi$ могут быть изменены ($\phi \sim \phi + \text{const}$) или отброшены ($\phi \in \mathbb{R}$).

- 3-мерное пространство $\to$ 2-сфера

$$dl^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2), \quad \theta \in [0,\pi], \quad \phi \sim \phi + 2\pi.$$

- D-мерное пространство $\to$ $(D-1)$-сфера

$$dl^2 = R^2(d\theta_1^2 + \sin^2\theta_1\, d\theta_2^2 + \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2\, d\theta_3^2 + \cdots + \sin^2\theta_1 \ldots \sin^2\theta_{D-2}\, d\phi^2),$$

$$\theta_j \in [0,\pi], \quad j = 1,\ldots,D-2, \quad \phi \sim \phi + 2\pi.$$

8.1.3 Пространства Минковского, Лобачевского и де Ситтера

На пространстве Минковского можно ввести аналог сферических координат двумя разными способами.

В одном случае система координат покрывает внутреннюю часть светового конуса будущего (или прошлого):

- на плоскости Минковского

$$t = r\ \mathrm{ch}\,\xi, \quad x = r\ \mathrm{sh}\,\xi,$$
$$ds^2 = -dr^2 + r^2 d\xi^2, \quad r \in [0,\infty), \quad \xi \in (-\infty,+\infty).$$

- в (2+1)-мерном пространстве Минковского

$$t = r\ \mathrm{ch}\,\xi, \quad x = r\ \mathrm{sh}\,\xi\ \cos\phi, \quad y = r\ \mathrm{sh}\,\xi\ \sin\phi,$$
$$ds^2 = -dr^2 + r^2(d\xi^2 + \mathrm{sh}^2\,\xi\, d\phi^2), \quad r \in [0,\infty), \quad \xi \in (-\infty,+\infty), \quad \phi \sim \phi + 2\pi,$$

- в (3+1)-мерном пространстве Минковского

$$t = r\ \mathrm{ch}\,\xi, \quad x = r\ \mathrm{sh}\,\xi\ \sin\theta\ \cos\phi, \quad y = r\ \mathrm{sh}\,\xi\ \sin\theta\ \sin\phi, \quad z = r\ \mathrm{sh}\,\xi\ \cos\theta,$$
$$ds^2 = -dr^2 + r^2(d\xi^2 + \mathrm{sh}^2\,\xi\, d\theta^2 + \mathrm{sh}^2\,\xi\ \sin^2\theta\, d\phi^2),$$
$$r \in [0,\infty), \quad \xi \in (-\infty,+\infty), \quad \theta \in [0,\pi], \quad \phi \sim \phi + 2\pi,$$

- в $(D+1)$-мерном пространстве Минковского

$$t = r\ \mathrm{ch}\,\xi, \quad x_1 = r\ \mathrm{sh}\,\xi\ \cos\theta_1, \quad x_2 = r\ \mathrm{sh}\,\xi\ \sin\theta_1\ \cos\theta_2, \quad \ldots \quad x_n = r\ \mathrm{sh}\,\xi\ \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{n-1}\ \cos\theta_n, \quad \ldots$$
$$x_{D-2} = r\ \mathrm{sh}\,\xi\ \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{D-2}\ \cos\phi, \quad x_{D-1} = r\ \mathrm{sh}\,\xi\ \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{D-2}\ \sin\phi,$$
$$ds^2 = -dr^2 + r^2(d\xi^2 + \mathrm{sh}^2\,\xi\, d\theta_1^2 + \mathrm{sh}^2\,\xi\ \sin^2\theta_1\, d\theta_2^2 + \cdots + \mathrm{sh}^2\,\xi\ \sin^2\theta_1 \ldots \sin^2\theta_{D-2}\, d\phi^2),$$
$$r \in [0,\infty), \quad \xi \in (-\infty,+\infty), \quad \theta_j \in [0,\pi], \quad j = 1,\ldots,D-2, \quad \phi \sim \phi + 2\pi.$$

Зафиксировав $r = R = \mathrm{const}$ получаем метрику D-мерного пространства Лобачевского, которое вложено в пространство Минковского как одна пола (половина) двуполого гиперболоида (для плоскости Минковского — гиперболы):

- плоскость Минковского $\to$ прямая Лобачевского (евклидова прямая)

$$ds^2 = R^2 d\xi^2, \quad \xi \in (-\infty,+\infty).$$

- (2+1)-мерное пространство Минковского $\to$ плоскость Лобаческого

$$ds^2 = R^2(d\xi^2 + \mathrm{sh}^2\,\xi\, d\phi^2), \quad \xi \in (-\infty,+\infty), \quad \phi \sim \phi + 2\pi,$$

- (3+1)-мерное пространство Минковского $\to$ 3-мерное пространство Лобаческого

$$ds^2 = R^2(d\xi^2 + \mathrm{sh}^2\,\xi\, d\theta^2 + \mathrm{sh}^2\,\xi\ \sin^2\theta\, d\phi^2),$$
$$\xi \in (-\infty,+\infty), \quad \theta \in [0,\pi], \quad \phi \sim \phi + 2\pi,$$

- $(D+1)$-мерное пространство Минковского $\to$ D-мерное пространство Лобаческого

$$ds^2 = R^2(d\xi^2 + \mathrm{sh}^2\,\xi\, d\theta_1^2 + \mathrm{sh}^2\,\xi\ \sin^2\theta_1\, d\theta_2^2 + \cdots + \mathrm{sh}^2\,\xi\ \sin^2\theta_1 \ldots \sin^2\theta_{D-2}\, d\phi^2),$$
$$\xi \in (-\infty,+\infty), \quad \theta_J \in [0,\pi], \quad j = 1,\ldots,D-2, \quad \phi \sim \phi + 2\pi.$$

В другом случае система координат покрывает внешнюю часть светового конуса:

- на плоскости Минковского покрывается половина внешней части светового конуса

$$t = r\ \mathrm{sh}\,\xi, \quad x = r\ \mathrm{ch}\,\xi,$$
$$ds^2 = dr^2 - r^2 d\xi^2, \quad r \in [0,\infty), \quad \xi \in (-\infty,+\infty).$$

- в (2+1)-мерном пространстве Минковского

$$t = r\ \mathrm{sh}\,\xi, \quad x = r\ \mathrm{ch}\,\xi\ \cos\phi, \quad y = r\ \mathrm{ch}\,\xi\ \sin\phi,$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2(-d\xi^2 + \mathrm{ch}^2\,\xi\, d\phi^2), \quad r \in [0,\infty), \quad \xi \in (-\infty,+\infty), \quad \phi \sim \phi + 2\pi,$$

- в (3+1)-мерном пространстве Минковского

$$t = r\ \mathrm{sh}\,\xi, \quad x = r\ \mathrm{ch}\,\xi\ \sin\theta\ \cos\phi, \quad y = r\ \mathrm{ch}\,\xi\ \sin\theta\ \sin\phi, \quad z = r\ \mathrm{ch}\,\xi\ \cos\theta,$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2(-d\xi^2 + \mathrm{ch}^2\,\xi\, d\theta^2 + \mathrm{ch}^2\,\xi\ \sin^2\theta\, d\phi^2),$$

$$r \in [0,\infty), \quad \xi \in (-\infty,+\infty), \quad \theta \in [0,\pi], \quad \phi \sim \phi + 2\pi,$$

- в $(D+1)$-мерном пространстве Минковского

$$t = r\ \mathrm{sh}\,\xi, \quad x_1 = r\ \mathrm{ch}\,\xi\ \cos\theta_1, \quad x_2 = r\ \mathrm{ch}\,\xi\ \sin\theta_1\ \cos\theta_2, \quad \ldots \quad x_n = r\ \mathrm{ch}\,\xi\ \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{n-1}\ \cos\theta_n, \quad \ldots$$

$$x_{D-2} = r\ \mathrm{ch}\,\xi\ \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{D-2}\ \cos\phi, \quad x_{D-1} = r\ \mathrm{ch}\,\xi\ \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{D-2}\ \sin\phi,$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2(-d\xi^2 + \mathrm{ch}^2\,\xi\, d\theta_1^2 + \mathrm{ch}^2\,\xi\ \sin^2\theta_1\, d\theta_2^2 + \cdots + \mathrm{ch}^2\,\xi\ \sin^2\theta_1 \ldots \sin^2\theta_{D-2}\, d\phi^2),$$

$$r \in [0,\infty), \quad \xi \in (-\infty,+\infty), \quad \theta_j \in [0,\pi], \quad j = 1,\ldots,D-2, \quad \phi \sim \phi + 2\pi.$$

Зафиксировав $r = R = \mathrm{const}$ получаем метрику $(D-1)+1$-мерного пространства де Ситтера, которое вложено в пространство Минковского как однополый гиперболоид (для плоскости Минковского — как половина гиперболы):

- плоскость Минковского $\to$ прямая

$$ds^2 = -R^2 d\xi^2, \quad \xi \in (-\infty,+\infty).$$

- (2+1)-мерное пространство Минковского $\to$ (1+1)-мерное пространство де Ситтера

$$ds^2 = R^2(-d\xi^2 + \mathrm{ch}^2\,\xi\, d\phi^2), \quad \xi \in (-\infty,+\infty), \quad \phi \sim \phi + 2\pi,$$

Периодические граничные условия $\phi \sim \phi + 2\pi$ могут быть изменены ($\phi \sim \phi + \mathrm{const}$) или отброшены ($\phi \in \mathbb{R}$).

- (3+1)-мерное пространство Минковского $\to$ (2+1)-мерное пространство де Ситтера

$$ds^2 = R^2(-d\xi^2 + \mathrm{ch}^2\,\xi\, d\theta^2 + \mathrm{ch}^2\,\xi\ \sin^2\theta\, d\phi^2),$$

$$\xi \in (-\infty,+\infty), \quad \theta \in [0,\pi], \quad \phi \sim \phi + 2\pi,$$

- $(4+1)$-мерное пространство Минковского $\to$ $(3+1)$-мерное пространство де Ситтера

$$ds^2 = R^2(-d\xi^2 + \mathrm{ch}^2\,\xi\, d\theta_1^2 + \mathrm{ch}^2\,\xi\ \sin^2\theta_1\, d\theta_2^2 + \mathrm{ch}^2\,\xi\ \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2\, d\phi^2),$$

$$\xi \in (-\infty,+\infty), \quad \theta_1,\theta_2 \in [0,\pi], \quad \phi \sim \phi + 2\pi.$$

- $(D+1)$-мерное пространство Минковского $\to$ $(D-1)+1$-мерное пространство де Ситтера

$$ds^2 = R^2(-d\xi^2 + \mathrm{ch}^2\,\xi\, d\theta_1^2 + \mathrm{ch}^2\,\xi\ \sin^2\theta_1\, d\theta_2^2 + \cdots + \mathrm{ch}^2\,\xi\ \sin^2\theta_1 \ldots \sin^2\theta_{D-2}\, d\phi^2),$$

$$\xi \in (-\infty,+\infty), \quad \theta_j \in [0,\pi], \quad j = 1,\ldots,D-2, \quad \phi \sim \phi + 2\pi.$$

8.1.4 Пространство анти-де Ситтера

Для построения пространства анти-де Ситтера введём вспомогательное плоское псевдориманово пространство сигнатурой $(D,2)$ и метрикой

$$ds^2 = -dt^2 - du^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_D^2.$$

Такая метрика соответствует пространству-времени с двумя временными координатами. С точки зрения принципа причинности (отсутствие времениподобных мировых линий) такое пространство-время считается нефизичным, например, замкнутой времениподобной линией является любая замкнутая кривая в плоскости $t-u$.

Введём в плоскости $t-u$ полярные координаты:

$$t = T\,\cos\psi, \quad u = T\,\sin\psi, \quad \psi \sim \psi^2\pi.$$

В гиперплоскости $x_1 - x_2 - \cdots - x_D$ введём сферические координаты:

$$x_1 = r\,\sin\theta_1\,\sin\theta_2\,\cos\phi, \quad x_2 = r\,\sin\theta_1\,\sin\theta_2\,\sin\phi, \quad x_3 = r\,\sin\theta_1\,\cos\theta_2, \quad \ldots$$

$$x_n = r\,\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{D-n}\,\cos\theta_{D-n+1}, \quad \ldots \quad x_D = r\,\cos\theta_1$$

$$\phi \sim \psi + 2\pi, \quad \theta_j \in [0,\pi], \quad j = 1, \ldots D-2.$$

В новых координатах метрика имеет вид

$$ds^2 = -(dT^2 + T^2\,d\psi^2) + dr^2 + r^2(d\theta_1^2 + \sin^2\theta_1\,d\theta_2^2 + \sin^2\theta_1\,\sin^2\theta_2\,d\theta_3^2 + \cdots + \sin^2\theta_1 \ldots \sin^2\theta_{D-2}\,d\phi^2)$$

В восьмой части плоскости $T-r$ (при $T > r \geqslant 0$) введём полярные гиперболические координаты

$$T = \rho\,\operatorname{ch}\xi, \quad r = \rho\,\operatorname{sh}\xi, \quad \xi \in [0,+\infty), \quad T \geqslant 0.$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= \underbrace{-d\rho^2 + \rho^2 d\xi^2}_{-dT^2+dr^2} - \rho^2\,\operatorname{ch}\xi^2\,d\psi^2 + \\ &\quad +\rho^2\,\operatorname{sh}\xi^2(d\theta_1^2 + \sin^2\theta_1\,d\theta_2^2 + \sin^2\theta_1\,\sin^2\theta_2\,d\theta_3^2 + \cdots + \sin^2\theta_1 \ldots \sin^2\theta_{D-2}\,d\phi^2). \end{aligned}$$

Зафиксировав $\rho = R = \text{const}$ получаем метрику $D+1$-мерного пространства анти-де Ситтера

$$\begin{aligned} ds^2 &= R^2 d\xi^2 - R^2\,\operatorname{ch}\xi^2\,d\psi^2 + \\ &\quad +R^2\,\operatorname{sh}\xi^2(d\theta_1^2 + \sin^2\theta_1\,d\theta_2^2 + \sin^2\theta_1\,\sin^2\theta_2\,d\theta_3^2 + \cdots + \sin^2\theta_1 \ldots \sin^2\theta_{D-2}\,d\phi^2). \end{aligned}$$

В роли временной координаты выступает угловая координата ψ.

Периодические граничные условия $\psi \sim \psi + 2\pi$ могут быть изменены ($\psi \sim \psi + \text{const}$) или отброшены ($\psi \in \mathbb{R}$).

Отбросив периодические условия по ψ мы избавляемся от замкнутых времениподобных мировых линий и получаем пространство-время анти-де Ситтера согласующееся с принципом причинности.

Отдельно выпишем метрику анти-де Ситтера в любимой всеми нами размерность $3+1$:

$$ds^2 = R^2\Big[d\xi^2 - \operatorname{ch}\xi^2\,d\psi^2 + \operatorname{sh}\xi^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2)\Big].$$

8.1.5 Конформные координаты в пространствах постоянной кривизны

Подобно тому, как мы можем записать в единой конформно-плоской форме метрики в евклидовом пространстве, на сфере и в пространстве Лобачевского, мы можем аналогично записать метрики в пространствах-временах Минковского, де-Ситтера и анти де-Ситтера:

$$dl^2 = \frac{4\,\eta_{\alpha\beta}\,dX^\alpha\,dX^\beta}{(1 + K\,\eta_{\mu\nu}\,X^\mu\,X^\nu)^2}, \quad \eta_{\alpha\beta} = \operatorname{diag}(-1,+1,+1,+1). \tag{8.1.2}$$

Здесь $K = 0$ для пространства Минковского, $K = \frac{1}{R^2}$ для пространства де-Ситтера и $K = -\frac{1}{R^2}$ для пространства анти де-Ситтера.

Соответствующие выкладки см. (2.8.8) в разделе 2.8.10 «Геометрия Лобачевского и сферическая геометрия» (стр. 246).

8.1.6 Кривизна и тензор энергии-импульса

8.1.6.1 Конформно плоская метрика

Пусть метрика D-мерного пространства имеет вид постоянной матрицы η, задающей сигнатуру, умноженной на некоторый множитель:

$$g_{MN} = \mathrm{e}^{2F(X)}\,\eta_{MN}, \qquad \eta_{MN} = \mathrm{diag}(\pm1, \pm1, \ldots, \pm1).$$

Индексы будем поднимать и опускать индексы, а также записывать скалярные произведения с помощью матриц $\eta_{MN} = \eta^{MN}$

В выбранной системе координат

$$g^{MN} = \mathrm{e}^{-2F(X)}\,\eta^{MN}, \qquad \eta^{MN} = \mathrm{diag}(\pm1, \pm1, \ldots, \pm1) = \eta_{MN},$$

$$\partial_K g_{MN} = 2(\partial_K F)\,\mathrm{e}^{2F}\,\eta_{MN} = 2(\partial_K F)\,g_{MN}.$$

$$\Gamma^M{}_{IJ} = \frac{g^{MK}}{2}[\partial_I g_{JK} + \partial_J g_{KI} - \partial_K g_{IJ}] = (\partial_I F)\delta^M_J + (\partial_J F)\delta^M_I - (\partial^M F)\eta_{IJ}.$$

Для вычисления тензора Римана нам пригодятся следующие выражения (подчёркнутые члены не дадут вклада за счёт симметрии относительно перестановки $K \leftrightarrow J$):

$$\partial_K \Gamma^M{}_{IJ} = (\partial_K\partial_I F)\delta^M_J + \underline{(\partial_K\partial_J F)\delta^M_I} - (\partial_K\partial^M F)\eta_{IJ},$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^M{}_{SK}\Gamma^S{}_{IJ} &= \Big[(\partial_S F)\delta^M_K + (\partial_K F)\delta^M_S - (\partial^M F)\eta_{SK}\Big]\Big[(\partial_I F)\delta^S_J + (\partial_J F)\delta^S_I - (\partial^S F)\eta_{IJ}\Big] = \\
&= \underline{\underline{(\partial_J F)(\partial_I F)\delta^M_K}} + (\partial_J F)(\partial_I F)\delta^M_K - (\partial F)^2\delta^M_K\eta_{IJ} + \\
&\quad + \underline{\underline{(\partial_K F)(\partial_I F)\delta^M_J}} + \underline{(\partial_K F)(\partial_J F)\delta^M_I} - \cancel{(\partial^M F)(\partial_K F)\eta_{IJ}} - \\
&\quad - \underline{(\partial^M F)(\partial_I F)\eta_{JK}} - (\partial^M F)(\partial_J F)\eta_{IK} + \cancel{(\partial^M F)(\partial_K F)\eta_{IJ}}.
\end{aligned}$$

Тензор Римана имеет вид

$$\begin{aligned}
R^M{}_{IKJ} &= \partial_K\Gamma^M{}_{IJ} - \partial_J\Gamma^M{}_{IK} + \Gamma^M{}_{SK}\Gamma^S{}_{IJ} - \Gamma^M{}_{SJ}\Gamma^S{}_{IK} = \\
&= (\partial_K\partial_I F)\delta^M_J - (\partial_J\partial_I F)\delta^M_K + (\partial_J\partial^M F)\eta_{IK} - (\partial_K\partial^M F)\eta_{IJ} + && (8.1.3)\\
&\quad + (\partial_J F)(\partial_I F)\delta^M_K - (\partial_K F)(\partial_I F)\delta^M_J + (\partial F)^2\delta^M_J\eta_{IK} - (\partial F)^2\delta^M_K\eta_{IJ} + && (8.1.4)\\
&\quad + (\partial^M F)(\partial_K F)\eta_{IJ} - (\partial^M F)(\partial_J F)\eta_{IK}. && (8.1.5)
\end{aligned}$$

Тензор Риччи имеет вид

$$\begin{aligned}
R_{IJ} = R^M{}_{IMJ} &= (\partial_J\partial_I F) - D(\partial_J\partial_I F) + (\partial_J\partial_I F) - \Box F\,\eta_{IJ} + \\
&\quad + D(\partial_J F)(\partial_I F) - (\partial_J F)(\partial_I F) + (\partial F)^2\eta_{IJ} - D(\partial F)^2\eta_{IJ} + \\
&\quad + (\partial F)^2\eta_{IJ} - (\partial_I F)(\partial_J F) = \\
&= (D-2)\Big[-\partial_I\partial_J F + (\partial_I F)(\partial_J F) - (\partial F)^2\eta_{IJ}\Big] - \Box F\,\eta_{IJ}
\end{aligned}$$

8.1.6.2 Кривизна пространства постоянной кривизны

Нас интересует метрика (8.1.2), для которой

$$\mathrm{e}^{F(X)} = \frac{2}{f(X)}, \qquad f(X) = 1 + K\eta_{MN}\,X^M X^N \qquad K = \mathrm{const}.$$

$$\partial_K F = -\frac{\partial_K f}{f}, \quad \partial_I\partial_J F = \frac{(\partial_I f)(\partial_J f)}{f^2} - \frac{\partial_I\partial_J f}{f}, \quad \Box F = \frac{(\partial f)^2}{f^2} - \frac{\Box f}{f}.$$

$$R_{IJ} = (D-2)\frac{\partial_I\partial_J f}{f} + \left[-(D-1)\frac{(\partial f)^2}{f^2} + \frac{\Box f}{f}\right]\eta_{IJ}$$

$$\partial_I f = 2K\eta_{IM}X^M, \quad \partial_I\partial_J f = 2K\eta_{IJ}, \quad (\partial f)^2 = 4K^2\eta_{NM}X^M X^N, \quad \Box f = 2DK.$$

Мы получили для тензора Риччи выражение не зависящее от системы координат. Отсюда выводим выражение для скалярной кривизны и тензора Эйнштейна:

$$R_{IJ} = (D-1)K\,g_{IJ}, \quad R = D(D-1)K, \quad G_{IJ} = -\frac{(D-1)(D-2)}{2}\,K\,g_{IJ}$$

Для тензора Римана можно воспользоваться формулой (8.1.5), но удобнее пользуясь тем, что наше пространство однородное и изотропное выразить его через метрический тензор

$$R_{MIKJ} = \text{const} \cdot \Big[g_{MK} g_{IJ} - g_{MJ} g_{IK} \Big] \quad \Rightarrow \quad R_{IJ} = \text{const} \cdot (D-1)\, g_{IJ}.$$

Сравнив с уже полученным выражением для тензора Ричии, получаем

$$R_{MIKJ} = DK \cdot \Big[g_{MK} g_{IJ} - g_{MJ} g_{IK} \Big].$$

8.1.7 Тензор энергии-импульса для космологического члена

Уравнения Эйнштейна для пространства постоянной кривизны имеют вид

$$-K\, g_{IJ} = \text{const} \cdot T_{IJ}.$$

В частности для для 4-мерного пространства постоянной кривизны

$$-3K\, g_{IJ} = \frac{8\pi G}{c^4}\, T_{IJ}.$$

Таким образом в пространстве постоянной кривизны тензор энергии-импульса пропорционален метрическому тензору, причём коэффициент пропорциональности — константа.

Какое вещество может обладать таким тензором энергии-импульса?

Это вещество должно быть однородным и изотропным в пространстве-времени. В частности это означает, что движение относительно этого вещества невозможно обнаружить (нет предпочтительного вектора 4-скорости). Такое вещество в ОТО называют *вакуумом*.

Соответствующая добавка к действию действие имеет вид

$$S_{\text{космо.}} = -\frac{c^3}{8\pi G} \int\limits_U \Lambda \sqrt{-g}\, d^4x, \qquad \Lambda = \text{const}.$$

Константа Λ называется *космологической постоянной*. Коэффициент $-\frac{c^3}{8\pi G}$ подобран так, чтобы уравнения Эйнштейна в присутствии космологической постоянной имели вид

$$G_{MN} + \Lambda\, g_{MN} = \frac{8\pi G}{c^4}\, T_{MN},$$

где T^{MN} — тензор энергии импульса всех полей материи *кроме вакуума*.

Вклад космологического члена в действие и в уравнения Эйнштейна можно трактовать двояко:

- вакуум — разновидность материи, тогда место космологического члена в правой части уравнений Эйнштейна, вместе с другими полями материи,
- космологический член имеет геометрическую природу и Λg_{MN} естественно помещать в левой части уравнений Эйнштейна как добавку к тензору Эйнштейна.

В квантовой теории поля (КТП) другое определение вакуума: вакуум (в КТП) — состояние поля с наинизшей энергией. Формальные вычисления энергия вакуума в КТП обычно дают $+\infty$ (энергия нулевых колебаний вакуума) для бозонных полей и $-\infty$ (энергия моря Дирака) для фермионных полей. Обычно энергию вакуума в КТП отбрасывают руками, кладя его энергию равной нулю. Как на самом деле связаны между собой вакуумы в ОТО и КТП — открытый вопрос.

Глава 8.2

Одиночная космологическая струна—

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2\,d\phi^2 + dz^2, \quad \phi \sim \phi + 2\pi - \alpha.$$

При $\alpha = 0$ получается обычное пространство Минковского в цилиндрических координатах.

При $\alpha \neq 0$ пространство получает особенность специального вида (*коническую сингулярность*) при $r = 0$. Приведённая метрика является решением уравнений Эйнштейна с сингулярным источником (тензор энергии-импульса содержит δ-функции), который называют *космологической струной* или *релятивистской струной*.

$\alpha > 0$ — *угловой дефицит* — натяжение струны положительно.

$\alpha < 0$ — *угловой избыток* — натяжение струны отрицательно.

Глава 8.3

Однородные космологические решения—

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\, d^2\Omega$$

Глава 8.4

Сферически симметричные чёрные дыры—

$$ds^2 = -(1 - \tfrac{2m}{r})\,dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2)$$

$$ds^2 = -(1 - \tfrac{2m}{r} + \tfrac{Q^2}{r^2})\,dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2)$$

Экстремальная чёрная дыра при $Q = m$

$$ds^2 = -(1 - \tfrac{m}{r})^2\,dt^2 + \frac{dr^2}{(1 - \frac{m}{r})^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2)$$

Глава 8.5

Решение Маджумдара-Папапетру—

Глава 8.6

Вращающиеся чёрные дыры—

Глава 8.7

Вращающаяся вселенная Гёделя—

Глава 8.8

Космологические струны—

Глава 8.9

Сильная гравитационная волна—

Index

Аристотель, 17
Блейк, Уильям, 25
Бонди, Герман, 85
Бор, Нильс, 490
Бройль, Луи де, 94, 523
Вигнер, Юджин, 61
Высоцкий, Владимир Семёнович, 210
Гельмгольц, Герман, 17
Джанибеков, Владимир Александрович, 149
Дорофеенко, Александр Викторович, 18, 344
Журавлёва, Валентина Николаевна, 385
Каджита, Такааки, 212
Корж, Дмитрий Сергеевич, 18, 441
Лагранж, Жозеф Луи, 25
Лебедев, Пётр Николаевич, 366
Лоренц, Людвиг Валентин, 349
Лоренц, Хендрик Антон, 349
Макдональд, Артур, 212
Максвелл, Джеймс Клерк, 344, 396
Маршак, Самуил Яковлевич, 90
Минковский, Герман, 14, 396
Мопертюи, Пьер Луи де, 28
Ньютон, Исаак, 14, 25
Планк, Макс, 94
Понтекорво, Бруно Максимович, 213
Пуанкаре, Анри, 14
Резерфорд, Эрнест, 385, 490
Тамм, Игорь Евгеньевич, 396
Томсон, Джи Джи, *см.* Томсон, Джозеф Джон
Томсон, Джозеф Джон, 490
Трунов, Геннадий Михайлович, 398
Фарадей, Майкл, 344, 396
Хевисайд, Оливер, 397
Шварцшильд, Карл, 264
Эйлер, Леонард, 28
Эйнштейн, Альберт, 14, 94, 264
Эшер, Морис, 251
абсолютно твёрдое тело, 138
    в СТО, 140
адиабатический инвариант, 300
    для гармонического осциллятора, 303, 305, 417
    для частицы в магнитном поле, 305, 417–423
адрон, 213
акустическая ветвь, 439
алгебра
    Ли, 68, 102, 104, 231
    Ли интегралов движения классических, 71
    линейная, 523
    наблюдаемых квантовая, 516
    наблюдаемых классическая, 68, 509
амплитуда вероятности, 369, 481
амплитуда комплексная, 307
    электрического поля плоской монохроматической волны, 366
амплитудно-частотная характеристика
    осциллятора с затуханием, 308
    системы осцилляторов, 320
анализ функциональный, 523
антисимметризация тензора, 118
античастица, 212
асимптотическая свобода, 213
ассоциативность, 37
атлас, 63, 159
аффинная структура, 83
базис
    взаимный, 48
баланс аргументов, 41
баланс индексов, 41
барион, 213
бинормаль, 422
биофизика, 16–17
бифуркация, 155
ближняя зона при излучении, 380, 381
бра-вектор, 476, 516
бра-кет, 516
брекет, 476
буст, 96, 233
быстрота, 22, 99, 223
вакуум, 344
    в КТП, 602
    в ОТО, 602
вариация
    действия, 29, 52
    координаты, 29
ведущий центр орбиты, 420
вектор
    Киллинга, 188, 220, 336
    Умова–Пойнтинга, 336
    базисный, 47
    волновой 3-мерный, 94, 363, 365
    волновой 4-мерный, 94, 363, 365
    времениподобный, 89
    ковариантный, 39
    контравариантный, 39
    направленный в будущее, 90
    направленный в прошлое, 90
    поляризации, 367
    поляризации ненормированный, 477
    поляризации нормированный, 477
    присоединённый, 260
    пространственноподобный, 89

светоподобный, 89
состояния, 369, 476, 517
состояния нормированный, 477
состояния фотона, 481
векторное поле
левоинвариантное, 230
потенциальное, 130
соленоидальное, 131
вероятность события, 510
вириал, 79
внешнее касание поверхностей, 128
внешние заряды и токи, *см.* сторонние заряды и токи
возмущение, 381, 514, 521
волна
плоская бегущая, 307
волновая зона, 374
волновая функция, 369, 450, 477
волновод, 373
волновое
уравнение неоднородное, 349
волчок, 146
асиметрический, 146
симметрический, 146
шаровой, 146
восприимчивость
диэлектрическая, 394
восприичивость
магнитная, 394
вращение комплексной плоскости, 132
время
абсолютное, 25
дискретное, 520
когерентности, 367
собственное, 90
собственное, условие вещественности, 90
вронскиан, *см.* определитель Вроньского
высшие производные, 59, 184, 381
вязкость
отрицательная, 307
гайка Джанибекова, *см.* эффект Джанибекова
гамильтониан, *см.* функция Гамильтона или оператор Гамильтона
невозмущённый, 521
полный, 521
расширенный для частицы в электромагниитном поле, 261
свободной релятивистской частицы, 113, 114
гамма-квант, 215
гармонический осциллятор, 35, 53, 69, 132, 156, 303, 371
с затуханием, 307
генератор
буста, 103, 135
группы Лоренца, 114, 234
канонического преобразования, 256
поворота, 103, 134
преобразования Галилея, 133
геодезическая, 171, 177
геодезической уравнение, 170
гидродинамическая аналогия
для уравнения Гамильтона-Якоби, 294
гильбертово пространство
оснащённое, 430
сепарабельное, 430
гироскоп, *см.* волчок
устойчивость, 286
гистерезис, 325
гомоморфизм, 226
ядро, 228
горизонт событий, 265
градиент, 39, 126
как внешняя производная, 271
граничные условия
вариации координат, 52
группа, 225
Ли, 102, 229
Лоренца, 96, 234
Лоренца ортохронная, 234
Лоренца специальная, 234
Лоренца специальная ортохронная, 105, 234
Пуанкаре, 96, 234
абелева, *см.* группа коммутативная
вращений, 234
вращений, собственных, 234
коммутативная, 227
матриц, 38
определение, 226
преобразований, 96, 104, 226
преобразований координат и времени, 57
преобразований координат однопараметрическая, 56
простая, 228
давление, 336
фотонного газа, 343
электромагнитного поля, 344, 366
даламбертиан, *см.* оператор Даламбера
двойное лучепреломление, 477
действие, 28, 51
варьирование, 29
взаимодействия частицы с электромагнитным полем, 113, 339
для релятивистской безмассовой частицы, 263
для уравнений Гамильтона, 64
для электромагнитного поля дуальное, 462
свободной релятивистской частицы, 112
укороченное, 110, 124, 300
функционал, 51, 293
функция, 293
действие Гильберта, 575
дельта-символ Кронекера, 21, 37, 41, 49
дельта-функция Дирака, 22, 310
дивергенция, 127
через внешнюю производную, 271
дивергенция векторного поля, 184
динамика, 81
квантовая, 516
динамический инвариант, 71
дисперсионное соотношение, 437
дифференциал, 41, 51
функции, 52

длина
когерентности, 367
длина волны
комптоновская, 357
добротность, 308
дуальность
ходжевская, 120
единица группы, 226
жорданова форма матрицы, 260
жёсткость, 307
отрицательная, 307
задача
Кеплера, 266
Коши, 352
Циолковского, 34, 35, 152
Циолковского релятивистская, 107, 108, 236
закон
Био-Савара-Лапласа, 471, 488
Кеплера первый, 203
Снелля (Снелла, Снеллиуса), 503
сохранения, 57
сохранения заряда в дифференциальной форме, 335
сохранения полной вероятности, 535
сохранения энергии-импульса в дифференциальной форме, 335
законы Ньютона
как законы сохранения и баланса, 27
нулевой закон Ньютона, 26
стандартная формулировка, 26
замедление времени, релятивистское, 100, 102
замена координат
каноническая, 68, 119
конформная, 38
линейная неоднородная, 38
линейная однородная, 38
общекоординатное преобразование, 38
заряд магнитный, *см.* монополь магнитный
зарядовое вращение, 460
излучение
гамма, 215
магнитное дипольное, 375
ондуляторное, 384
рентгеновское, 215
синхротронное, 384
черенковское, 395, 501
черенковское в вакууме, 502, 503
электрическое дипольное, 278, 375
электрическое квадрупольное, 376
измерение
идеальное классическое приближённое, 511
идеальное классическое точное, 511
классическое идеальное, 511
неселективное, 519
приближённое квантовое, 519
проекционное, 518
селективное, 519
изоморфизм
групп, 226
импульс
в лагранжевом формализме, 53
кинематический, 113, 268
обобщённый, 54, 56
обобщённый частицы в электромагнитном поле, 113
удельный, 152
удлинённый, 279
инварианты
электромагнитного поля, 340
инверсия пространствееная, *см.* симметрия P
индекс
ковариантный, 37
контравариантный, 37
матрицы, 36
немой, 40
свободный, 40
индукция магнитного поля, 393
индукция электрического поля, 393
интеграл движения, 57, 71
аддитивный, 321
интегрирование
q-формы, 274
ковектора по кривой, 274
скаляра по набору точек, 274
скаляра по объёму, 274
формы объёма, 274
интегрируемая гамильтонова система, 296, 300, 301
интепретация
квантовой механики, 516
интервал, 43, 86
вдоль кривой, 90
времениподобный, 89
пространственноподобный, 89
светоподобный, 89
интерпретация
классической механики, 509
теории, 536
интерференционный член, 377
исключение степеней свободы, 277
источник
в уравнении Пуассона, 131
поля, 333, 351, 352
калибровка, *см.* калибровочное условие
Кулона, 278, 349
Лоренца, 349
калибровочная инвариантность, 348
калибровочная окружность, 97
калибровочное (градиентное) преобразование, 338
калибровочное преобразование, 348
для симплектической структуры, 415
дуальное, 462
остаточное, 349, 350
остаточное в калибровке Лоренца, 364, 365
потенциалов сил инерции, 140
калибровочное условие, 348
калибровочные гиперболы, 97
канонически сопряжённые переменные, 63, 507
канонические коммутационные соотношения, 522
канонические преобразования, 63
однопараметрическая группа, 71

карта, 63, 159
качественные методы исследования дифференциальных уравнений, 321
квадратичная форма, 46
  первая, 43
квазиклассическая аналогия
  в квантовой механике, 294
квазиклассичсекое приближение, 294
квазичастица, 317
квантование, 522
  каноническое, 522
квантовая теория поля, 357
квантовый бит, *см.* кубит
кварк, 213
кет-бра, 516
кет-вектор, 476, 516
кинематика, 81
  квантовая, 516
кинематические тождества
  в ньютоновской механике, 82
кинематическое тождество, 114
класс гладкости, 38, 159
классы эквивалентности
  в группе, левые и правые, 227
ковектор, *см.* вектор ковариантный
  базисный, 48
  импульса, 49
колебания
  вынужденные, 308
кольцо, 435
  вычетов, 435
  остатков деления, *см.* колько вычетов
коммутатор, 104
  групповой, 104, 227
  матриц, 516
  матричный, 68, 232
композиция функций $\circ$, 159
контравектор, *см.* вектор контравариантный
конус Маха, 501
конфайнмент кварков, 213
координата
  циклическая, 58, 66, 71
координаты
  аффинные, 38, 47, 48
  канонические, 63, 67
  лоренцевы, 88
  нормальные, 318
  обобщённые, 31
  полярные, 49
  радилокационные в пространстве, 220
  радиолокационные на плоскости, 218, 224
  радиолокационные общего вида, 221
  сферические, 49
  цилиндрические, 49
  эйлеровы, 143
  эллиптические, 297
координаты лагранжевы
  деформируемой среды, 140
  твёрдого тела, 138
координаты сферические, 22
коэффициенты Ламе, 48
крен, *см.* угол крена
кривизна скалярная, 575
кубит, 481
лагранжиан, *см.* функция Лагранжа, *см.* плотность функции Лагранжа
  инвариантный (скалярный), 333
  невырожденный, 62
  расширенный, 109
  электромагнитного поля, 340
лапласиан, *см.* оператор Лапласа
линза магнитная, 361
линия узлов, 144
магнитное зеркало, 423
магнитное поле
  приведённое, 400
магнитный монополь, 360
масса, 27
  в СТО, 92
  голого заряда, 356
  определение в СТО, 92
  переменная в СТО, 93
  покоя (устар.), 92
  релятивистская (устар.), 92
  системы эффективная, 92
материальная точка, 28, 31
матрица, 36
  Грама, 44, 48, 98
  Якоби, 32, 37, 46
  единичная, 37, 41
  жёсткости, 317, 534
  квадратная, 37
  масс, 59, 316, 317, 534
  массовых коэффициентов, *см.* матрица масс
  матрица-столбец, 19
  невырожденная, 228
  ортогональная, 37, 228
  плотности, 369, 482, 516
  псевдоортогональная, 228
  специальная, 228
  столбец, 36, 46
  строка, 36, 46
  унитарная, 228, 477
матрицы
  след, 46
  транспонирование, 46
маятник
  Капицы, 531
  Фуко, 141
  крутильный, 35, 156
  математический, 35, 154, 156, 303
  физический, 35, 157
мезон, 213
мембрана
  релятивистская, 337
мера положительно определённая операторнозначная, 519
мера проекторнозначная, 518
метод Рауса, 66
метрика, *см.* тензор метрический, *см.* тензор метрический
  Минковского, 193

Шварцшильда, 264
евклидова, 44
обратная, *см.* тензор метрический обратный
механическая система, 31
мировая
линия, 89
точка, 82, 89
многообразие
хаусдорфово, 31
многообразие дифференцируемое, 158, 229
многочлены
Лежандра, *см.* полиномы Лежандра
множество нечёткое, 511
множитель Лагранжа, 507
мода собственная колебаний, 319
модель
Лотки-Вольтерры, *см.* модель хищник-жертва Лотки-Вольтерры
атома планетарная, 490
пудинга с изюмом, 490
хищник-жертва Лотки-Вольтерры, 72, 194
моды
неколебательные, 319
момент
2^l-польный, 359
дипольный, 359
дипольный магнитный, 361
квадрупольный, 359
квадрупольный эллипсоида, 361, 466
монопольный, 359
мультипольный электрический, 359
октупольный, 359, 468
момент импульса, 135
момент инерции, 145
относительно оси, 145
монополь
магнитный, 459
мультииндекс, 44
мультиполь
точечный магнитный, 473
точечный электрический, 472
мультипольное разложение
электростатического потенциала, 359
электростатической энергии, 360
мысленные эксперименты, 84–86, 206–210
мюон, 94, 212, 213
набла, 39
наблюдаемые
канонически сопряжённые, 68, 69
квантовые, 516
классические, 67
наблюдаемые (величины), 509
навигационные углы, 144
намагниченность среды, 392
напряжение
сдвиговое, 336
напряжённость
электромагнитного поля комплексная, 460
напряжённость магнитного поля, 393
напряжённость электрического поля, 393
натяжение
электромагнитного поля, 344
невырожденность, 31
неинерциальная система отсчёта
в СТО, 140
в классической механике, 138
нейтрино, 212
мюонное, 107
нейтрон, 213
неустойчивость, 312
норма вектора, 429, 476
нормальный делитель группы, *см.* подгруппа нормальная
нуклон, 213
нуль группы, 227
нутация, 150, 288
нётеровский ток, 455
обертон, 326
обобщённые функции
медленного роста, 430
обратный элемент группы, 226
обращение времени, *см.* симметрия T
объём
фазовый, 70
объём ориентированный, 33
окрестность точки, 159
оператор
Бельтрами-Лапласа, 273
Гамильтона, 534
Даламбера, 348
Лапласа, 131
Лапласа от дифференциальной формы через внешнюю проивздную, 273
Лапласа от скаляра через внешнюю проивздную, 272
волновой одномерный, 331
сдвига, 314
унитарный, 477, 520
эволюции, 477, 482, 520
эволюции в представлении взаимодействия, 522
эволюции невозмущённый, 521
эволюции полный, 521
определитель, 32–34
Вроньского, 312
оптическая аналогия
для уравнения Гамильтона-Якоби, 294
оптическая ветвь, 439
оптически активные среды, 477
оптический резонатор, 370
опускание индекса, 43
орбита точки, 97
ориентация
границы, 275
поверхности, 274
ориентация базиса
трёхмерного, 34
относительность
одновременности, 100, 102
пространства, 101
парадокс близнецов, *см.* эффект близнецов
параллельный перенос, 173

на группе Ли, 230
парамагнетизм Паули, 470
параметр
аффинный, 263
конического сечения, 203, 266, 496
порядка, 155
параметр естественный, 29, 98
переменные
действие-угол, 302
перенормировка, 357, 372
периодические граничные условия, 370
пи-мезон, 107
пион, *см.* пи-мезон
плоская монохроматическая волна
электромагнитная, 365
плотность
заряда, 340
заряда поверхностная, 394
импульса, 330, 336
момента импульса, 335
обобщённого импульса, 332
потока момента импульса, 335
силы объёмная, 343
тока, 340
тока 4-мерная, 340
тока магнитных зарядов, 459
тока поверхностная, 394
функции Лагранжа, 330
функционала Лагранжа, *см.* плотность функции Лагранжа
числа систем, 525, 527
электромагнитных зарядов комплексная, 460
электромагнитных токов , 460
энергии, 330, 336
поверхность
энергетическая, 253
поворот, 96
гиперболический, *см.* буст
собственный, 233
подгруппа, 227
инвариантная, *см.* подгруппа нормальная
нормальная, 228
тривиальная, 228
поднимание индекса, 43
позитрон, 94
показатель преломления, 395
поле
Хиггса, 115
гравимагнитное, 285
магнитное, 338
электрическое, 338
поле калибровочное, 577
поливектор, 117
полиномы
Лежандра, 474
Лежандра, графики, 475
Лежандра, формулы, 474
полиномы Лежандра, 469
полностью антисимметричный символ, 49
полный интеграл
уравнения Гамильтона-Якоби, 295
положительная определённость нестрогая, 517
полюс, особебеность функции, 310
поляризатор, 478
поляризации
вектор, 389
степень, 369
тензор, 368, 388, 389
тензор ненормированный, 480
тензор нормированный, 481
поляризация
круговая, 367
эллиптическая, 368
поляризация среды диэлектрическая, 392
поляришация
линейная, 367
поперечность электромагнитной волны
3-мерная, 364, 365
4-мерная, 364, 365
порог реакции, 213
порядок группы, 226
постоянная
Кулона, 20, 340
Планка, 94
Планка как малый параметр, 527
гравитационная, 264
космологическая, 602
тонкой структуры, 357
электрическая, 20, 340
потенциал
Лиенара–Вихерта, 382, 492
векторный, 35, 113, 153, 338
векторный сил инерции, 139, 285
запаздывающий, 353
запаздывающий векторный в калибровке Кулона, 278
ковекторный, 338
ковекторный для дуального тензора электромагнитного поля, 461
мексиканская шляпа, 154, 336
скалярный, 113, 338
скалярный сил инерции, 139, 285
тока, 461
центробежный, 67
потенциальная энергия
как предельный случай, 277
правило Бора-Зоммерфельда, 303
правило Лейбница
для внешней производной, 122
правило правой руки, 34
предел
слабый, 430
представитель класса эквивалентности
в группе, 228
представление
Гайзенберга, 514, 521
Гамильтона, 513, 521
Лиувилля, 512, 520
Шрёдингера, 512, 520
взаимодействия квантовое, 515, 521
взаимодействия классическое, 256, 514
группы линейное, 227

группы неприводимое, 227
преобразование
Галилея, 133
Галилея для энергии и импульса, 134
Лежандра, 65
Лоренца, 133
Лоренца для 4-импульса, 134
Лоренца для момента импульса, 136
Лоренца для электромагнитного поля, 137
Фурье, 363, 432–433
Фурье на решётке, 441–449
градиентное, *см.* преобразвоание калибровочное
единичное, *см.* преобразование тождественное
калибровочное, 123
обратное, 96
скоростей, 100
тождественное, 96
точечное, 123
точечное канонических переменных, 413
ускорения, 100
преобразование типов
автоматическое, 273
прецессия
Томаса, 243
вынужденная, 150, 288
перигелия, 203, 266
свободная, 147, 288
принцип
Мопертюи, 110
Ферма, 110
принцип соответствия, 92
принцип экстремальный
Ферма, 28
стационарного действия, 28, 52
прицельное расстояние, *см.* прицельный параметр, 495
прицельный параметр, 386
проектор, 478
произведение
векторное, 49, 121
внешнее, 121
преобразований, 96
смешанное, 121
производная
вариационная, 52
внешняя, 121
ковариантная, 39, 169, 171
функциональная, 51
производящая функция
канонического преобразования, 410
проницаемость
диэлектрическая, 394
магнитная, 394
пространство
(анти)де-Ситтера, 250
Минковского, 44, 86, 88
аффинное, 38
быстро убывающих функций, 430
гильбертово, 523
гильбертово оснащённое, 523
гильбертово сепарабельное, 523
конфигурационное, 30, 31
конфигурационное расширенное, 109, 123
линейное, 104
нехаусдорфово, 160
основных функций, 430
псевдоевклидово, 88
фазовое, 61, 63
фазовое расширенное, 253
хаусдорфово, 160
чистых квантовых состояний, 517
пространство-время
в ньютоновской механике, 82
прострaнство-время
в СТО, 88
протон, 213
процесс
упругий/неупругий, 93
псевдотензор, 119
псевдотензор электромагнитного поля дуальный, 338
пуассонова структура, 123
неканоническая, 268
пучность стоячей волны, 369
пучок траекторий, 294
пятно Пуассона, 495

радиационные пояса, 306, 423
радиус
Бора, 357
Шварцшильда, 265
электрона классический, 356
радиус-вектор, 38
четырёхмерный, 88, 90
разбиение единицы, 519
разложение единицы, 478
ранг матрицы, 38
рассеяние
неупругое, 386
резерфордовское, 496
расстояние, 43
в ньютоновской механике, 82
регулярные точки
обобщённой функции, 431
резонанс, 309
без трения, 310
нелинейный для нескольких степеней свободы, 327
нелинейный одномерный, 324
параметрический, 312, 426
параметрический с трением, 313
при ударных воздействиях, 314, 425
резонатор, 373
решётка
обратная, 445
прямая, 445
ротор, 128
через внешнюю производную, 271
ротор векторного поля, 184
световой конус, 89

будущего, 90
прошлого, 89
связности коэффициенты, 169, 173
связность
метрическая несимметричная, 178
симметричная, 176
симметричная метрическая, 171, 177
свёртка индексов, 37, 40
свёртка функций, 393
сдвиг
левый, 226, 230
сечение
дифференциальное, 386
поглощения волны, 390
поглощения частицы, 385
рассеяния волн, 387
рассеяния частиц дифференциальное, 386
рассеяния частиц полное, 386
сила, 27
вынуждающая, 308
вязкого трения и самоускорения, 285
гироскопическая, 316
обобщённая, 54, 56
обобщённая внешняя, 54, 56
радиационного трения, 380
сила инерции, 139
Кориолиса, 140
вращения, 139
поступательного движения, 139
центробежная, 140
силовые линии электромагнитного поля, 343–347
силы
гироскопические, 534
символ Кронекера, *см.* дельта-символ
символ Леви-Чивиты, 21, 34
символ полностью антисимметричный, *см.* сивол Леви-Чивиты
симметризация тензора, 118
симметрии
пространства-времени в СТО, 86
простраснтва-времени в ньютоновской механике, 83
симметрия, 30
P, 233
T, 233
действия, 56, 57
функции Лагранжа, 57
симплекстическая структура, 196
симплектическая форма
каноническая, 536
синергетика, 321
система единиц
СГС (гауссова), 115
СГС, гауссова, 391
СГСМ, 396
СИ, 20, 115, 340
СИ, международная, 391
ФТ, физико-техническая, 391
Хевисайда, 20
Хевисайда–Лоренца, 399
абсолютных практических, 396
гауссова, 20
гауссова СГС, 20, 340
международная, *см.* система единиц СИ
физико-техническая, 20, 340
система координат
лагранжева, 144
система связанных осцилляторов, 316
скаляр, 38
скалярное поле
комплексное электрически заряженное, 337
скалярное произведение
комплексных векторов, 366, 476
скобка
Ли, 68, 104, 231
Пуассона, 509
Пуассона квантовая, 516
скобка Пуассона, 67
для функционалов наблюдаемых, 530
скорость
групповая, 437
дрейфа частицы в скрещенных полях, 261
обобщённая, 53
фазовая, 94, 364, 365, 367, 437
четырёхмерная, 91
след
матрицы, 37
сложение и вычитание частот
в нелинейных систесмах, 326
сложение наблюдаемых, 509
квантовых, 516
сложение скоростей, *см.* преобразование скоростей
случай общего положения, 320
собственное вращение, 150
собственное число, 19
собственные
колебания, 319
частоты, 319
собственные колебания
электромагнитного поля, 366
собственные функции
дифференциального оператора, 314
оператора Лапласа, 132
собственные числа
дифференциального оператора, 314
оператора Лапласа, 132
собственный вектор, 19
событие, *см.* мировая точка
сокращение продольной длины, релятивистское, 101, 102
солитон, 337
солнечный ветер, 423
соображения размерности, 20, 340
соображения симметрии, 340
состоние
квантове смешанное, 482
состояние
гамильтоновой системы, 510
гамильтоновой системы смешанное, 510
гамильтоновой системы чистое, 510
квантовое, 516

квантовое ненормированное, 517
квантовое чистое, 481
смешанное квантовое, 517
собственное, 518
чистое квантовое, 517
состояния
взаимоисключающие квантовые, 517
гамильтоновой системы взаимоисключающие, 510
сохранение
импульса, 27, 58
момента импульса, 27, 59
обобщённого импульса, 66
энергии, 58
спектр наблюдаемой, 518
спектральная задача
для дифференциального оператора, 314
для оператора Лапласа, 132
спиральность, 367
спонтанное нарушение симметрии, 154, 336
спящий режим свободнйо прецессии гироскопа, 149
среднее взвешенное, 517
среднее значение наблюдаемой, 510
статистические методы
исследования нелинейных уравнений, 321
степень свободы, 31
столкновение упругое/неупругое, *см.* процесс упругий/неупругий
сторонние заряды и токи, 391
стоячая волна, 369
структура
пуассонова, 69
структурные коэффициенты алгебры Ли, 231
струна
космологическая, *см.* струна релятивистская
релятивистская, 603
сферические гармоники, *см.* функция сферическая
сферические углы, 22
тангаж, *см.* угол тангажа
таон, 212
тахион, 90
тензор, 37
базисный, 48
инерции, *см.* момент инерции
метрический, 39, 43
метрический обратный, 43
момента импульса, 136
напряжений, 336
одномерный, 49
поляризации среды, 392
электромагнитного поля, 105, 114, 235, 338
электромагнитного поля дуальный, 120, 338
энергии-импульса фотонного газа, 343
энергии-импульса электромагнитного поля канонический, 342
энергии-импульса электромагнитного поля симметричный, 342
тензор Кручения, 176
тензор Римана, 574
тензор Риччи, 575
тензор Эйнштейна, 575
тензор кручения, 574
тензор энергии-импульса, 582
в общей теории относительности, 456
тензора
валентность, 38
признак, 41
ранг, *см.* тензора валентность
тензорное произведение, 40
теорема
Гаусса-Остроградского, 128
Грина, 130
Лармора, 140
Лиувилля, 70, 125
Ньютона-Лейбница, 127
Нётер, 220
Нётер для импульса, 58
Нётер для момента импульса, 59
Нётер для симметрий зависящих от времени, 58
Нётер для симметрий не зависящих от времени, 57
Нётер для симметрий, добавляющих полную производную, 279
Нётер для энергии, 58
Нётер тривиальный случай, 58
Стокса, 130
Стокса для дифференциальных форм, 276
о гомоморфизм, 228
о движении центра инерции, 135, 220
о движении центра масс, 28, 280
о невозможности причесать ежа, 230
теория
возмущений для ангармонических колебаний, 267
возмущений для системы нелинейных осцилляторов, 325–327
групп, 225, 227
измерений, 536
измерений квантовая, 516
измерений классическая, 509
подобия, 49
представлений групп, 225, 227
размерности, 49
тета-функция Хевисайда, 22, 311, 431
тетрада, 577
тетрадный формализм, 577
тождества кинематические, 460
тождество Якоби
для скобки Пуассона, 68, 70, 72
тор, 159, 302
точка подвеса, 147
траектория, 51
транспонирование матрицы, 37
трение
вязкое, 307
радиационное, 389
угловой дефицит
треугольника, 246
углы Эйлера

в теоретической механике, 144
в теоретической физике, 143
угол
гиперболический, *см.* быстрота
крена, 144
курсовой, *см.* угол рысканья
нутации, 143
прецессии, 143
рысканья, 144
собственного вращения, 143
тангажа, 144
узел стоячей волны, 369
умножение
векторное, 68
групповое, 226
квантовой наблюдаемой на вещественное число, 516
матриц, 36, 46
наблюдаемой на вещественное число, 509
наблюдаемых, 509
наблюдаемых квантовых, 516
унитарная эврлюция, 482
уравнение
Гамильтона–Якоби действие, 526
Гамильтона–Якоби как описание ансамбля, 525–526
Гамильтона–Якоби кванитовый аналог, 533
Гамильтона–Якоби квантовая поправка, 528
Гамильтона–Якоби квантовый аналог, 527
Гамильтона-Якоби, 294, 507
Дирака, 470
Клейна-Фока-Гордона, 336
Лапласа, 131, 350
Лиувилля квантовое, 508, 520
Лиувилля классическое, 507, 512
Паули, 470
Пуассона, 131, 350
Пуассона в магнитостатике, 355
Пуассона в электростатике, 355
Шрёдингера, 132, 321, 450, 508, 520
Шрёдингера в периодическом потенциале, 314
Шрёдингера в представлении взаимодействия, 522
Шрёдингера временно́е, 336
Шрёдингера нелинейное, 321
Шрёдингера стационарное, 336
Шрёдингера через переменные q и p, 534
баланса импульса электромагнитного поля, 343
баланса энергии, 55
баланса энергии электромагнитного поля, 343
вековое, 317
волновое, 132, 330
волновое одномерное, 331
непрерывности потока вероятности, 528
непрерывности потока систем, 525
непрерывности электрического тока, 334, 342, 354
непрерывности энергии-импульса, 335
непрывности связанных зарядов и токов, 392
поля, 333
релаксации, 132
синус-Гордона, 337
теплопроводности (диффузии), 132
фон Неймана, *см.* уравнение Лиувилля квантовое
фон Неймана в представлении взаимодействия, 522
характеристическое, 307, 428
уравнения
Гамильтона в канонической форме, 62
Гамильтона эквивалентные уравнению Шрёдингера, 535
Эйлера–Лагранжа, 54
баланса энергии-импульса, 335
уравнения Максвелла
вторая пара, 272, 342
первая пара, 123, 184, 338
уравнения Эйнштейна, 575, 582
ускорение
свободного падения, 285
четырёхмерное, 91
условия
нормировки квантового состояния на единицу, 516
применимости классической электродинамики, 357, 382
применимости электростатики, 278
совместности уравнений Максвелла, 342, 458
условно периодическое движение, 302
устойчивость
по Ляпунову, 316
сильная, 312
слабая, 312
факторгруппа, 228
факториал двойной, 358
форма
дифференциальная, 117
замкнутая, 122
объёма, 119
объёма в присутствии метрики, 119
симплекстическая, 123
симплектическая, 69
точная, 122
формализм Палатини, 583
формула
Мещерского, 34
фотон, 94, 215, 481
функционал, 51
Гамильтона, 507
Гамильтона для уравнения Гамильтона–Якоби, 525
Гамильтона для уравнения Шрёдингера, 529
Лагранжа, 330
действия, 507
функция
Гамильтона, 62
Гамильтона невозмущённая, 514
Гамильтона полная, 514
Грина, 434

Грина для волнового уравнения, 352
Грина для волнового уравнения запаздывающая и опережающая, 464
Грина для волнового уравнения запаздывающая и опережающая, 353
Грина осциллятора, 310
Грина осциллятора запаздывающая, 310
Грина уравнения Пуассона, 351, 358
Лагранжа, 30, 51
Лагранжа с высшими производными, 59, 184
Рауса, 66
Релея диссипативная, 319
гиперборлическая, 98
квадратично-интегрируемая, 430
обобщённая, 310
однородная, 79
сферическая, 359, 473
характеристическая, 510, 511
функция Дирака, *см.* дельта-функция
функция Хевисайда, *см.* тета-функция
центр
инерции, 135
масс, 135
циклоида, 261
удлинённая, 261
укороченная, 261
частица
свободная, 26
частота
комплексная, 308
ларморовская, 357
резонансная, 309
собственная, 308
циклическая, 94
чёрная дыра, 264
чётность перестановки, 118
шапочка Соболева, 393
экспонента
матричная, 116, 232
экстремаль, 171
эксцентриситет, 203, 496
электрон-позитронная пара, 357
эллипсоид инерции, 146
энергия
в лагранжевом формализме, 53, 54
вакуума, 372
взаимодействия, 356
магнитостатического поля, 469
самодействия магнитостатическая, 469
самодействия точечного заряда, 356
самодействия электростатическая, 356
электростатическая, 355
эрмитово сопряжение, 476, 516
эфир электромагнитный, 344
эффект
Вавилова–Черенкова, 395, 500–503
Джанибекова, 149
Зеемана классический, 141
Казимира, 372
Комптона, 215
близнецов, 210
прожектора, 384, 494
якобиан, 32
ящик, 370