

© 2024 г.

М. Г. Иванов*, А. Ю. Полушкин*

ЦИФРОВЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ НАБЛЮДАЕМЫХ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Для симуляции квантовых систем на классических или квантовых компьютерах необходимо дискретизировать непрерывные квантовые наблюдаемые (например, координату и импульс или время и энергию). Рассмотрено представление непрерывных наблюдаемых в позиционных системах счисления как рядов по степеням основания системы счисления, умноженных на “цифры”, каждая из которых по отдельности оказывается эрмитовым оператором с дискретным спектром. В работе исследуются полученные таким образом операторы цифр, коммутационные соотношения между ними и эффекты, оказываемые на решетки и представления выбором той или иной позиционной системы счисления. Естественным образом возникают перенормировки расходящихся сумм и интегралов.

Ключевые слова: квантовые вычисления, кудит, цифровое разложение, перенормировка.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf10536>

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовые вычисления – очень перспективная и динамически развивающаяся область науки. Большие надежды возлагаются на квантовые компьютеры, в основном в силу их потенциальной способности решать вычислительные задачи, которые не под силу решить классическому компьютеру за разумное время в силу фундаментальных ограничений, вызванных большой асимптотической сложностью классических алгоритмов. Несмотря на то что наибольший акцент, как правило, делается на задачи квантовой криптографии [1], становится очевидным, что поскольку квантовое распределение ключей и постквантовая криптография [2] оказываются стойкими, то основной областью применения квантовых компьютеров становится моделирование сложных систем в соответствии с изначальной идеей Фейнмана [3]. Более того, уже сейчас развитие квантовых технологий позволяет решать на квантовом компьютере задачи, решить которые на классическом компьютере представляется

*Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия. E-mail: ivanov.mg@mipt.ru

проблематичным. Область приложений достаточно широка – от теоретической химии [4] до прикладных задач [5].

При решении вычислительных задач естественным образом возникает вопрос о необходимости дискретизировать непрерывные наблюдаемые. Рассмотренное в настоящей работе представление может оказаться полезным для моделирования как квантовых, так и классических систем как на квантовом, так и на классическом компьютерах.

В настоящей работе рассматривается представление непрерывных квантовых наблюдаемых в виде разложения в ряд по наблюдаемым – цифрам. Мы рассматриваем разложение координаты и импульса в ряд по степеням основания соответствующей системы счисления, и цифры сами по себе также оказываются наблюдаемыми. Оператор импульса вводится как генератор координатных сдвигов. В результате разложение в ряд Фурье сводится к разложению в ряд по операторам сдвигов. Для всех систем получены явные разложения операторов цифр в ряд по сдвигам. Кроме того, в работе рассматриваются коммутационные соотношения, которые также оказываются нетривиальными.

Помимо прочего, в процессе построения представления естественным образом возникают различные “физические” эффекты. Например, мы показываем связь между выбором двоичной цифры, калибровочными преобразованиями и эффектом Ааронова–Бома.

В ходе исследования естественным образом возникли различные процедуры перенормировки, позволившие приписать конечные значения некоторым расходящимся суммам, что может оказаться полезным в контексте квантовой теории поля.

Эта работа является обобщением результатов статей [6] и [7] со случаев $q = 2$ и $q = 3$ на случай произвольного основания системы счисления $q \geq 2$. Для простоты сравнения опубликованных ранее результатов с новыми стиль и последовательность изложения по возможности сохранены, что иногда приводит к самоцитированию. Несмотря на то что обобщение со случая $q \in \{2, 3\}$ на произвольное натуральное $q = n$ было достаточно прямолинейно, определенный интерес вызывают “сдвинутые” решетки с “нецелыми” цифрами, которые не были рассмотрены в предыдущих работах достаточно подробно, однако создают некоторые интересные эффекты, такие как нетривиальные граничные условия, создающие аналогию с эффектом Ааронова–Бома.

2. РЕШЕТКА

Чтобы сделать нотацию максимально компактной, здесь и ниже рассматривается система единиц, в которой постоянная Планка равна единице. Иными словами, мы полагаем для постоянной Планка тождество $\hbar = 1$ и, следовательно, для постоянной Дирака имеем $1/\hbar = 2\pi$. При обсуждении квантовых наблюдаемых мы будем в основном рассматривать координату и импульс, следуя обозначениям из оригинальных статей [6], [7], но очевидно, что о них можно думать как о произвольной паре фурье-сопряженных квантовых наблюдаемых, например времени и энергии.

2.1. Координатная решетка. Мы рассматриваем описание координаты с помощью n q -ичных цифр-кудитов; одномерная координатная решетка состоит из $N = q^n$ узлов, замкнутых на кольцо (после “последнего” узла снова идет первый).

Если положить *постоянную координатной решетки* равной $\Delta x = q^{-n_-}$, то *период решетки* оказывается равен $\Xi = N\Delta x = q^{n_+}$, $n_+ = n - n_-$. Значения x пробегает от нуля до $\Delta x \cdot (N - 1)$.

Операция сложения на координатной решетке естественным образом переносится с кольца \mathbb{Z}_N , мы полагаем $x = x + \Xi$. При необходимости можно рассмотреть альтернативные представления $\Delta x \cdot \mathbb{Z}_N$ в действительных числах. Например, принимая во внимание эквивалентность x и $x + \Xi$, мы будем использовать представление, в котором x принимает значения от $-\Delta x \cdot (N - 1)/2$ до $+\Delta x \cdot (N - 1)/2$. Степенной ряд для координаты на решетке конечен:

$$x = \sum_{s=-n_-}^{n_+-1} x_s q^s = \sum_{s=-n_-}^{n_+-1} \mathbf{d}(s, x) q^s. \quad (1)$$

Здесь $x_s = \mathbf{d}(s, x)$ обозначает s -ю цифру в цифровом представлении x . Мы определяем *оператор цифры координаты* следующим образом¹⁾: $\hat{x}_s = \mathbf{d}(s, \hat{x})$.

Иногда мы будем явно обозначать диапазон степеней основания системы счисления, описывающих решетку, и использовать обозначения $x_s = \mathbf{d}_{n_-n_+}(s, x)$ и $\hat{x}_s = \mathbf{d}_{n_-n_+}(s, \hat{x})$.

Для функций, определенных на решетке, введем координатный базис

$$\{|x\rangle\}_{x \in \Delta x \cdot \mathbb{Z}_N} : \hat{x}|x\rangle = x|x\rangle, \quad \langle x'|x''\rangle = \delta_{x', x''}, \quad \psi(x) = \langle x|\psi\rangle, \quad x \in \Delta x \cdot \mathbb{Z}_N. \quad (2)$$

Волновые функции (кет-векторы) будем представлять в форме векторов-столбцов, строки которых упорядочены по убыванию аргумента функции x . Таким образом, если x пробегает значения от нуля до $(N - 1)\Delta x$, то

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi((N - 1)\Delta x) \\ \psi((N - 2)\Delta x) \\ \vdots \\ \psi(\Delta x) \\ \psi(0) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

2.2. Минимальный сдвиг и импульсная решетка. Минимальный сдвиг $\hat{T}_{\Delta x}$ – это сдвиг на один шаг решетки Δx ; всякий другой сдвиг на заданной решетке может быть представлен как его степень $\hat{T}_A = (\hat{T}_{\Delta x})^{A/\Delta x}$, где $A/\Delta x \in \mathbb{Z}_N$:

$$\hat{T}_A \psi(x) = \psi(x + A), \quad \hat{T}_A |x\rangle = |x - A\rangle, \quad \langle x'|\hat{T}_A|x''\rangle = \delta_{x', x'' - A} = \delta_{x' + A, x''}. \quad (4)$$

Таким образом,

$$\hat{T}_{\Delta x} \psi(x) = \hat{T}_{\Delta x} \begin{pmatrix} \psi((N - 1)\Delta x) \\ \psi((N - 2)\Delta x) \\ \vdots \\ \psi(2\Delta x) \\ \psi(\Delta x) \\ \psi(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(0) \\ \psi((N - 1)\Delta x) \\ \psi((N - 2)\Delta x) \\ \vdots \\ \psi(2\Delta x) \\ \psi(\Delta x) \end{pmatrix} = \psi(x + \Delta x). \quad (5)$$

¹⁾ Всякая функция от наблюдаемой может быть корректно определена в представлении, в котором оператор наблюдаемой диагонален. К примеру, оператор “ступеньки” $\theta(\hat{x})$ используется достаточно часто, несмотря на отсутствие у него производных в нуле. Это позволяет нам определить операторы цифры координаты \hat{x}_s в координатном представлении и цифры импульса \hat{p}_r в импульсном представлении без применения каких-либо дополнительных процедур.

Сумма $x + \Delta x$ понимается в смысле $x \in \Delta x \cdot \mathbb{Z}_N$, т. е. это циклический сдвиг функции по решетке на один узел вниз.

Собственные значения оператора минимального сдвига λ_p – это корни из единицы степени N ; они нумеруются параметром p (*параметром импульса*):

$$\widehat{T}_{\Delta x} \psi(x) = \psi(x + \Delta x), \quad \widehat{T}_{\Delta x}^N \psi(x) = \psi(x + \Xi) = \psi(x) \Rightarrow \widehat{T}_{\Delta x}^N = \hat{1}, \quad (6)$$

$$\lambda^N = 1, \quad \lambda_p = e^{2\pi i \Delta x p} = e^{2\pi i \Delta x \Delta p p / \Delta p} = (\lambda_{\Delta p})^{p / \Delta p}, \quad \lambda_{\Delta p} = e^{2\pi i \Delta p \Delta x} = e^{2\pi i / N}. \quad (7)$$

В силу периодичности координатной решетки сдвиг на период Ξ должен быть тождественным преобразованием. Иными словами, для значений параметра импульса мы имеем $\Xi \cdot p \in \mathbb{Z}$. Это выражение дает нам *шаг по импульсу* Δp ,

$$\Xi \cdot \Delta p = 1, \quad \Delta p = q^{-n+}, \quad \Delta p \cdot \Delta x = \frac{1}{N} = q^{-n}. \quad (8)$$

Число значений параметра импульса равно числу значений координаты, так что для параметра импульса мы имеем периодическую решетку с тем же числом узлов, но иным периодом: $\Pi = \Delta p \cdot N = q^{n-}$, $\Pi \Xi = N$, $\lambda_p = \lambda_{p+\Pi}$. Таким образом, мы имеем эквивалентность p и $p + \Pi$. Импульсная решетка обозначается как $\Delta p \cdot \mathbb{Z}_N$.

Соответствующие собственные векторы могут быть получены из соотношения $\psi(x) = (\widehat{T}_x \psi)(0)$. Нормализованные собственные векторы имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_p(x') &= \langle x' | \psi_p \rangle = \frac{\lambda_p^{x' / \Delta x}}{\sqrt{N}} = \frac{e^{2\pi i x' p}}{\sqrt{N}}, \\ \langle \psi_p | x'' \rangle &= \langle x'' | \psi_p \rangle^* = \frac{\lambda_p^{-x'' / \Delta x}}{\sqrt{N}} = \frac{e^{-2\pi i x'' p}}{\sqrt{N}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Мы можем записать проектор на (одномерное) собственное подпространство оператора $\widehat{T}_{\Delta x}$ как

$$\begin{aligned} \widehat{P}_p &= |\psi_p\rangle \langle \psi_p|, \\ \langle x' | \widehat{P}_p | x'' \rangle &= \frac{\lambda_p^{(x' - x'') / \Delta x}}{N} = \frac{\lambda_p^{d / \Delta x}}{N} = \frac{e^{2\pi i p d}}{N}, \quad d = x' - x''. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь x' нумерует строки матрицы, а x'' – столбцы.

2.3. Операторы импульса и цифры импульса. Второй базис, которым мы будем пользоваться, состоит из собственных векторов оператора циклического сдвига.

Определим оператор импульса как оператор, собственные состояния которого совпадают с собственными состояниями оператора сдвига $\widehat{T}_{\Delta x}$, а собственные значения – с соответствующими значениями параметра импульса:

$$\hat{p} = \sum_{p \in \mathbb{Z}_N \cdot \Delta p} \widehat{P}_p p. \quad (11)$$

Для корректного определения оператора импульса нам необходимо выбрать конкретное представление \mathbb{Z}_N в действительных числах, чтобы однозначно определить спектр.

Если не оговорено иное, мы будем использовать представление $\{0, \dots, N-1\}$. Оператор импульса оказывается генератором координатных сдвигов. Действительно,

$$\widehat{T}_A = (\widehat{T}_{\Delta x})^{A/\Delta x} = e^{2\pi i A \hat{p}}, \quad A \in \Delta x \cdot \mathbb{Z}. \quad (12)$$

Подобные операторы были рассмотрены в классической книге Вейля [8] (см. гл. 4, § 14, 15), а затем – более детально Швингером [9].

Степенной ряд для импульса также оказывается конечным:

$$p = \sum_{r=-n_+}^{n_- - 1} p_r q^r = \sum_{r=-n_+}^{n_- - 1} \mathbf{d}(r, p) q^r. \quad (13)$$

Поэтому мы можем явно определить $\hat{p}_r = \mathbf{d}(r, \hat{p})$ – цифру номер r в цифровом представлении импульса p :

$$\hat{p}_r = \sum_{p \in \mathbb{Z}_N \cdot \Delta p} \widehat{P}_p \mathbf{d}(r, p). \quad (14)$$

Иногда нам будет удобно указывать диапазон степеней q , определяющих решетку, и писать $p_r = \mathbf{d}_{n_+ n_-}(r, p)$ и $\hat{p}_r = \mathbf{d}_{n_+ n_-}(r, \hat{p})$.

Необходимо отметить, что если мы имеем стандартные операторы \hat{x} и \hat{p} , являющиеся генераторами импульсных и координатных сдвигов соответственно: $e^{2\pi i A \hat{p}} = \widehat{T}_A$, $e^{2\pi i B \hat{x}} = \widehat{S}_B$, то операторы цифр являются функциями соответствующих наблюдаемых $\hat{x}_s = \mathbf{d}(s, \hat{x})$, $\hat{p}_r = \mathbf{d}(r, \hat{p})$. Это ведет к тому, что алгебра наблюдаемых, задаваемая \hat{x}_s и \hat{p}_r , эквивалентна той, которая задается операторами координаты и импульса. В настоящей работе мы не рассматриваем квантовые деформированные алгебры (см., например, [10], [11]), что может быть темой дальнейших исследований.

2.4. Группа сдвигов. Сделаем тривиальное замечание, которое, однако, может оказаться полезным при рассмотрении произвольной позиционной системы счисления. Мы построили оператор импульса таким образом, что он генерирует группу симметрии относительно сдвигов координатной решетки на целое число узлов, иными словами, группу, изоморфную (относительно сложения) группе вычетов по модулю N : $\Delta x \cdot \mathbb{Z}_N \approx \mathbb{Z}_N$. Но мы можем определить унитарный оператор вида

$$\widehat{T}_a = e^{2\pi i a \hat{p}}, \quad a \in \mathbb{R}. \quad (15)$$

Для $a = A \in \Delta x \cdot \mathbb{Z}_N$ это определение соответствует нашему предыдущему определению \widehat{T}_A , однако теперь подобный оператор представляет циклический сдвиг на произвольное (не обязательно кратное Δx) значение. Соответствующая группа теперь изоморфна группе $\mathbb{R}/\Xi \approx SO(1) \approx U(1)$ вращений окружности на произвольный угол. Сложение здесь также понимается по модулю Ξ : $a = a + \Xi$. В случае $\Xi = \infty$ группа симметрий совпадает с группой \mathbb{R} действительных чисел относительно сложения.

Можно видеть, что если гамильтониан выражен в терминах \hat{p} , то существование решетки не нарушает трансляционную инвариантность (не обязательно относительно трансляций на целое число узлов решетки), однако оператор \hat{p} (как мы увидим

ниже) оказывается нелокальным. Иными словами, матричные элементы $\langle x' | \hat{p} | x'' \rangle$ могут оказываться ненулевыми для сколь угодно больших значений $x' - x''$ (на решетке).

Мы можем определить состояние $|x_0\rangle = \hat{T}_{-x_0}|0\rangle$ с произвольным значением $x_0 \notin \Delta x \cdot \mathbb{Z}_N$, однако такое состояние не будет соответствовать определенному значению координаты, так как оно разлагается по набору базисных состояний $\{|x\rangle\}_{x \in \Delta x \cdot \mathbb{Z}_N}$. В силу унитарности оператора \hat{T}_{-x_0} можно воспользоваться ортонормированным базисом (*сдвинутой координатной решетки*) $\{|x_0 + x\rangle\}_{x \in \Delta x \cdot \mathbb{Z}_N}$ и построить *сдвинутый оператор координаты*

$$\hat{x} = \sum_{x \in \Delta x \cdot \mathbb{Z}_N} |x_0 + x\rangle \langle x_0 + x|. \quad (16)$$

Аналогично можно определить

$$\hat{S}_b = e^{2\pi i b \hat{x}}, \quad b \in \mathbb{R}. \quad (17)$$

Для $b = B \in \Delta p \cdot \mathbb{Z}_N$ это определение соответствует циклическому сдвигу \hat{S}_B импульсной решетки, однако теперь этот оператор соответствует сдвигу на произвольное значение (не обязательно кратное Δp). Соответствующая группа изоморфна группе $\mathbb{R}/\Pi \approx SO(1) \approx U(1)$ вращений окружности на произвольный угол. Сложение вновь понимается по модулю Π : $b = b + \Pi$. В случае $\Pi = \infty$ группа симметрий совпадает с группой \mathbb{R} действительных чисел относительно сложения.

Мы можем определить состояние $|\psi_{p_0}\rangle = \hat{S}_{p_0}|\psi_0\rangle$ с произвольным значением $p_0 \notin \Delta p \cdot \mathbb{Z}_N$, но такое состояние не будет соответствовать определенному значению импульса, так как оно разлагается по нескольким базисным состояниям $\{|\psi_p\rangle\}_{p \in \Delta p \cdot \mathbb{Z}_N}$. В силу унитарности оператора \hat{S}_{p_0} можно воспользоваться ортонормированным базисом (*сдвинутой импульсной решетки*) $\{|\psi_{p_0+p}\rangle\}_{p \in \Delta p \cdot \mathbb{Z}_N}$ и построить *сдвинутый оператор импульса*

$$\hat{p} = \sum_{p \in \Delta p \cdot \mathbb{Z}_N} |\psi_{p_0+p}\rangle \langle \psi_{p_0+p}|. \quad (18)$$

Также необходимо отметить, что в случае целых сдвигов (таких, что $A = \Delta x \cdot n$, $B = \Delta p \cdot m$; $n, m \in \mathbb{Z}$) выполняются канонические коммутационные соотношения в форме Вейля:

$$\hat{T}_a \hat{S}_b \hat{T}_{-a} \hat{S}_{-b} = e^{2\pi i a b} \hat{1}, \quad (19)$$

в то время как для “нецелых” сдвигов эти соотношения нарушаются. Действительно, для произвольного $b \notin \Delta p \cdot \mathbb{Z}_N$ мы можем выразить “нецелые” сдвиги через “целые”:

$$\hat{S}_b = \frac{1 - e^{2\pi i \Delta x \cdot b N}}{N} \sum_{B \in \Delta p \cdot \mathbb{Z}_N} \frac{e^{-2\pi i x_0 (B-b)} \hat{S}_B}{1 - e^{2\pi i \Delta x \cdot (b-B)}}. \quad (20)$$

Здесь x_0 – значение сдвига координатной решетки, если \hat{S}_b и \hat{S}_B определены при помощи сдвинутого оператора координаты (17). Следовательно, для группового коммутатора мы имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \hat{T}_a \hat{S}_b \hat{T}_{-a} \hat{S}_{-b} &= \left(\frac{2 \sin(\pi \Delta x \cdot b N)}{N} \right)^2 \times \\ &\times \sum_{B_1, B_2 \in \Delta p \cdot \mathbb{Z}_N} \frac{e^{-2\pi i x_0 (B_1 - B_2)} e^{2\pi i a B_1} \hat{S}_{B_1 - B_2}}{(1 - e^{2\pi i \Delta x (b - B_1)})(1 - e^{-2\pi i \Delta x (b - B_2)})}. \end{aligned} \quad (21)$$

В случае $a \neq \Delta x \cdot \mathbb{Z}_N$ для координатного сдвига можно записать аналогично:

$$\widehat{T}_a = \frac{1 - e^{2\pi i \Delta p \cdot a N}}{N} \sum_{A \in \Delta x \cdot \mathbb{Z}_N} \frac{e^{-2\pi i p_0(A-a)} \widehat{T}_A}{1 - e^{2\pi i \Delta p(a-A)}}. \quad (22)$$

Здесь p_0 – значение сдвига импульсной решетки, если \widehat{T}_a и \widehat{T}_A определены при помощи сдвинутого оператора импульса (18). Групповой коммутатор, в свою очередь, имеет вид

$$\begin{aligned} \widehat{T}_a \widehat{S}_b \widehat{T}_{-a} \widehat{S}_{-b} &= \left(\frac{2 \sin(\pi \Delta p \cdot a N)}{N} \right)^2 \times \\ &\times \sum_{A_1, A_2 \in \Delta x \cdot \mathbb{Z}_N} \frac{e^{-2\pi i p_0(A_1-A_2)} e^{2\pi i b A_2} \widehat{T}_{A_1-A_2}}{(1 - e^{2\pi i \Delta p(a-A_1)})(1 - e^{-2\pi i \Delta p(a-A_2)})}. \end{aligned} \quad (23)$$

Нарушение канонических соотношений в форме Вейля на произвольной конечной решетке – хорошо известный факт [8]. Действительно, в конечномерном случае мы можем рассчитать определитель (19):

$$1 = \det(\widehat{T}_a \widehat{S}_b \widehat{T}_{-a} \widehat{S}_{-b}) = \det(e^{2\pi i a b} \hat{1}) = e^{2\pi i a b N}, \quad (24)$$

что неверно для произвольных значений $a, b \in \mathbb{R}$.

3. ОПЕРАТОРЫ ЦИФР И ИХ РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СДВИГАМ

Мы определили оператор импульса таким образом, что фурье-гармоника импульса задается оператором $\widehat{T}_A = e^{2\pi i A \hat{p}}$ координатного сдвига. Таким образом, если мы хотим сделать преобразование Фурье цифры импульса (как функции, определенной на решетке)

$$\mathbf{d}_{n_+ n_-}(r, \hat{p}) = \sum_{A \in \Delta x \cdot \mathbb{Z}_N} \tilde{\mathbf{d}}_{n_+ n_-}(r, A) e^{2\pi i A \hat{p}}, \quad (25)$$

то мы получаем разложение цифры импульса по координатным сдвигам

$$\mathbf{d}_{n_+ n_-}(r, \hat{p}) = \sum_{A \in \Delta x \cdot \mathbb{Z}_N} \tilde{\mathbf{d}}_{n_+ n_-}(r, A) \widehat{T}_A. \quad (26)$$

3.1. Классические позиционные системы счисления.

3.1.1. *q-ичная система.* Рассмотрим q -ичную систему счисления с цифрами $\{0, 1, \dots, q\}$. После несложных вычислений (см. приложение A) мы получаем выражение для разложения цифры импульса по координатным сдвигам (в ряд Фурье):

$$\hat{p}_r = \frac{q-1}{2} \hat{1} - \Delta p q^{-r} \sum_{D \in \mathbb{Z}(q^r/\Delta p)} \sum_{\sigma=1}^{q-1} \frac{\widehat{T}_{-A}}{1 - e^{2\pi i \Delta p A}}, \quad A = q^{-r} \left(D + \frac{\sigma}{q} \right). \quad (27)$$

Для разложения координаты в этом случае имеем

$$\hat{x}_s = \frac{q-1}{2} \hat{1} - \Delta x q^{-s} \sum_{D \in \mathbb{Z}(q^s/\Delta x)} \sum_{\sigma=1}^{q-1} \frac{\widehat{S}_B}{1 - e^{2\pi i \Delta x B}}, \quad B = q^{-s} \left(D + \frac{\sigma}{q} \right). \quad (28)$$

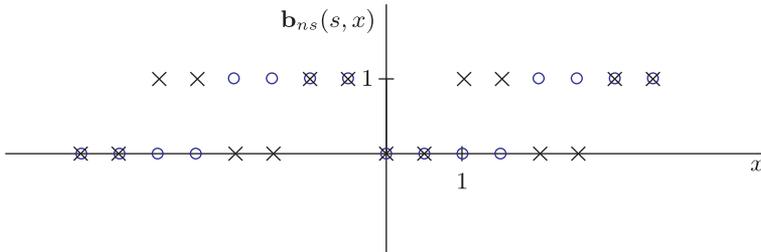


Рис. 1. График значения двоичной цифры номер s на решетке для несимметричной системы ($n_- = 1$), $s = 0$ – крестики, $s = 1$ – окружности.

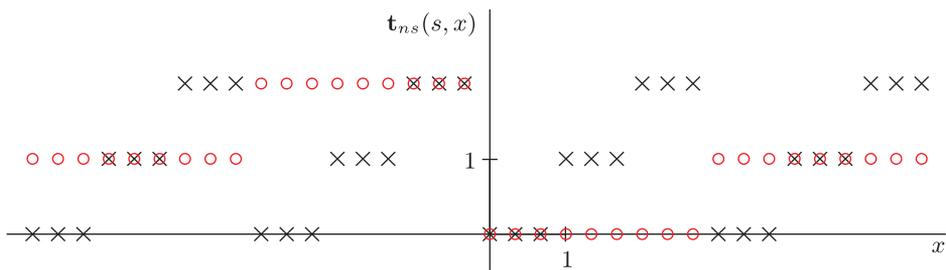


Рис. 2. График значения троичной цифры номер s на конечной решетке ($n_- = 1$), $s = 0$ – крестики, $s = 1$ – окружности.

Теперь перейдем к рассмотрению частных случаев, частично освещенных в предыдущих статьях.

3.1.2. *Двоичная несимметричная система.* Первая система – это “классическая” двоичная система счисления, которая была изучена в статье [6]. Цифры в данной системе принимают значения $\{0, 1\}$, в дальнейшем мы будем называть такую систему *двоичной несимметричной системой* (см. рис. 1).

Для данного случая общая формула приводит к следующему результату:

$$\hat{p}_r = \frac{1}{2} \hat{1} - \Delta p 2^{-r} \sum_{D \in \mathbb{Z}_{2^r/\Delta p}} \frac{\hat{T}_{-A}}{1 - e^{2\pi i \Delta p A}}, \quad A = 2^{-r} \left(D + \frac{1}{2} \right). \tag{29}$$

3.1.3. *Троичная несимметричная система.* В работе [7] была рассмотрена в том числе троичная система с цифрами $\{0, 1, 2\}$, названная *троичной несимметричной системой* (см. рис. 2).

Для этой системы легко получаем следующее выражение:

$$\hat{p}_r = \hat{1} - \Delta p 3^{-r} \sum_{D \in \mathbb{Z}_{3^r/\Delta p}} \sum_{\sigma=1}^2 \frac{\hat{T}_{-A}}{1 - e^{2\pi i \Delta p A}}, \quad A = 3^{-r} \left(D + \frac{\sigma}{3} \right). \tag{30}$$

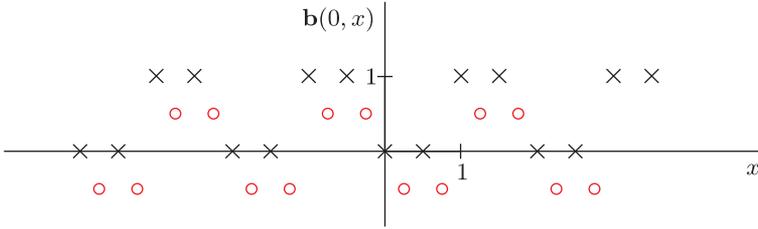


Рис. 3. График значения двоичной цифры номер 0 на решетке ($n_- = 1$) для двоичной симметричной системы ($d_1 = -0.5$) – окружности, для двоичной несимметричной системы ($d_1 = 0$) – крестики.

3.2. Сдвинутые позиционные системы счисления.

3.2.1. *q-ичная система счисления на сдвинутой решетке.* Набору цифр $\{0, 1, \dots, q-1\}$ соответствует решетка от нуля (начало решетки или наименьший узел) до $(N-1) \cdot \Delta x = \Xi - \Delta x$ (конец решетки или наибольший узел) с шагом Δx .

Теперь перейдем к рассмотрению позиционной системы счисления с набором цифр $\{d_1, d_1 + 1, \dots, d_1 + q - 1\}$, где d_1 может, вообще говоря, принимать нецелые значения. Сдвиг наименьшей цифры с нуля приводит к сдвигу наименьшего числа на решетке и, как следствие, к сдвигу самой решетки. “Наименьшее” число на такой решетке $(d_1 d_1 \dots d_1, d_1 \dots d_1)$, так что начало и конец решетки могут быть представлены следующим образом:

$$x_{\min} = \sum_{s=-n_-}^{n_+-1} q^s d_1 = \frac{N-1}{q-1} \underbrace{d_1}_{\ell} \Delta x, \quad x_{\max} = \sum_{s=-n_-}^{n_+-1} q^s (d_1 + q - 1) = x_{\min} + \Xi - \Delta x,$$

$$x_{\min} \equiv x_0 \pmod{\Delta x}, \quad x_0 \in [0, \Delta x), \quad (31)$$

где x_0 – величина сдвига решетки, введенная в (16).

Для перехода к бесконечной решетке или прямой важно существование предела $\lim_{n \rightarrow \infty} x_0 / \Delta x$. Пока отметим лишь, что при $d_1 \in \mathbb{Z}$ предел равен нулю, а при $q = 0$, $d_1 = -1/2$ (симметричная двоичная система) предел равен $1/2$ (см. рис. 3).

Это означает, что теперь мы имеем дело со сдвинутой на x_{\min} решеткой, и в общем случае ноль может больше не оказаться узлом решетки. Для такого случая может быть записано общее выражение для разложения цифры импульса:

$$\hat{p}_r = \frac{2d_1 + q - 1}{2} \hat{1} - \Delta p q^{-r} \sum_{D \in \mathbb{Z}_{q^r / \Delta p}} \sum_{\sigma=0}^{q-1} \frac{\hat{T}_A}{1 - e^{2\pi i \Delta p A}} e^{2\pi i A p_{\min}},$$

$$A = q^{-r} \left(D + \frac{\sigma}{q} \right), \quad (32)$$

и следующее выражение для разложения цифры координаты:

$$\hat{x}_s = \frac{2d_1 + q - 1}{2} \hat{1} - \Delta x q^{-s} \sum_{D \in \mathbb{Z}_{q^s / \Delta x}} \sum_{\sigma=0}^{q-1} \frac{\hat{T}_B}{1 - e^{2\pi i \Delta x B}} e^{2\pi i B x_{\min}},$$

$$B = q^{-s} \left(D + \frac{\sigma}{q} \right). \quad (33)$$

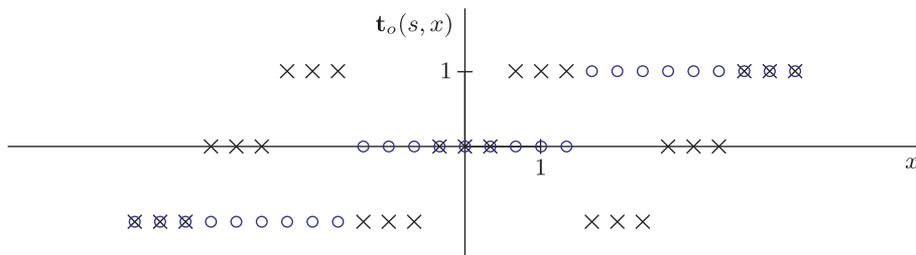


Рис. 4. График значения троичной цифры номер s на конечной решетке ($n_- = 1$) при $s = 0$ – крестики, $s = 1$ – окружности.

Для пояснения полученной формулы рассмотрим несколько конкретных примеров.

Позднее мы еще вернемся к рассмотрению подобных двоичных систем, чтобы продемонстрировать, что сдвинутые решетки оказываются естественными для описания некоторых физических эффектов.

3.3. Троичная симметричная система. Другой случай, ранее рассмотренный в работе [7], в котором сдвинутая решетка возникла явно и естественным образом, – это троичная система с цифрами $\{-1, 0, 1\}$, также названная нами *троичной симметричной системой* (см. рис. 4). Для этой системы можно получить следующее выражение (явно или пользуясь общей формулой):

$$\hat{p}_r = \Delta p 3^{-r} \sum_{D \in \mathbb{Z}_{3^r / \Delta p}} \sum_{\sigma=1}^2 \frac{(-1)^{D+\sigma}}{2i \sin(\pi \Delta p A)} \hat{T}_{-A}, \quad A = 3^{-r} \left(D + \frac{\sigma}{3} \right). \quad (34)$$

3.4. Перенормировки бесконечных и конечных рядов. Как правило, процедура перенормировки состоит из двух шагов – введения регуляризации и ее устранения. В нашем случае в роли регуляризации выступает сама решетка, а в роли параметра регуляризации выступает параметр решетки. В настоящей работе приложения данного типа перенормировок не рассматриваются, дальнейшее развитие идеи этих перенормировок можно найти в статье [12].

3.4.1. *Мотивация к перенормированию бесконечных сумм.* Начнем с рассмотрения графика цифры номер 0 для двоичной несимметричной системы (см. рис. 5). Цифра номер s может быть получена путем растяжения этого графика вдоль оси x в 2^s раз. Таким образом, легко видеть, что для всякого отрицательного x найдется некоторое натуральное число n , для которого все цифры с индексом больше n окажутся равны единице, а это означает, что сумма

$$x \sim \sum_{s=-\infty}^{\infty} x_s 2^s \quad (35)$$

расходится.

Проблема становится еще более явной, если мы переходим к рассмотрению двоичной симметричной системы (см. рис. 6): в данном случае по причине, аналогичной описанной выше, – расходятся суммы как для отрицательных, так и положительных чисел.

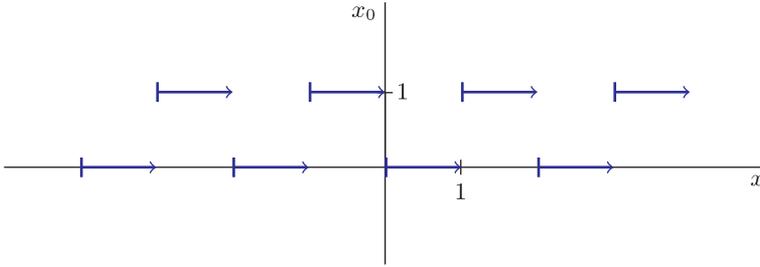


Рис. 5. График значения двоичной цифры номер 0 для двоичной несимметричной системы на прямой.

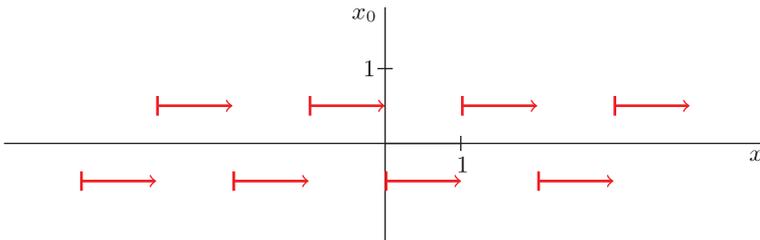


Рис. 6. График значения двоичной цифры номер 0 для двоичной симметричной системы на прямой.

3.4.2. *Перенормировки бесконечных сумм.* Чтобы решить возникающую проблему, рассмотрим произвольную q -ичную систему счисления с цифрами x_s . Как мы уже убедились, для данной системы ряд

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} x_s q^s, \quad (36)$$

вообще говоря, не обязан сходиться, однако мы всегда имеем возможность однозначно восстановить действительное число x по набору его цифр $\{x_s\}$. Это позволяет нам поставить в соответствие всякому конечному числу x ряд вида (36). Все расходимости, возникающие при подобном отображении, имеют вид

$$C \cdot \sum_{s=s_0}^{\infty} q^s, \quad (37)$$

где C – константа, а q – основание рассматриваемой системы счисления. Для этого случая можно ввести правило перенормировки, которое может быть представлено в виде суммы со штрихом, определяемой следующим образом:

$$\sum_{s=0}^{\infty} 'q^s = \frac{1}{1-q}, \quad (38)$$

что сводится к применению формулы для суммы сходящейся геометрической прогрессии за пределами области ее применимости. Важно отметить, что это правило

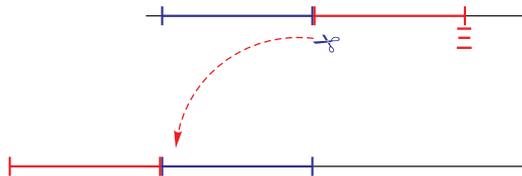


Рис. 7. Перенормировка на решетке, которая сводится к переклеиванию ее конечного участка перед началом решетки.

вводится *только для строго фиксированного значения q , совпадающего с основанием системы счисления*. Подобная “перенормировка” приводит нас к выражению

$$\sum'_{s \in \mathbb{Z}} q^s = 0, \tag{39}$$

которое, вообще говоря, можно считать альтернативным определением введенной перенормировки.

В некоторых ситуациях оказывается удобно рассмотреть ряд (36) в q -адическом смысле, как, например, в статье [13], что приводит к сходимости с бесконечным числом ненулевых цифр до запятой (*q -адическая сходимость*), но расходимости чисел с бесконечным числом ненулевых цифр после запятой (*действительная расходимость*).

Альтернативная форма перенормировки расходящихся рядов, эквивалентная формуле (39), может быть представлена в виде формального вычисления:

$$x = \frac{qx - x}{q - 1} = \frac{1}{q - 1} \sum_{s \in \mathbb{Z}} (x_{s-1} - x_s)q^s. \tag{40}$$

Итак, в итоге имеем следующую формулу для перенормировки бесконечной суммы:

$$x = \sum'_{s=-\infty}^{\infty} x_s q^s = \frac{1}{q - 1} \sum_{s \in \mathbb{Z}} (x_{s-1} - x_s)q^s. \tag{41}$$

В случае, когда ряд (36) сходится, мы получаем после перенормировки его первоначальное значение; для расходящегося ряда мы восстанавливаем величину x , соответствующую задаваемому рядом набору цифр $\{x_s\}$. Теперь мы готовы вернуться к решетке.

3.4.3. Перенормировка на решетке. Поскольку решетка конечна и не имеет бесконечно удаленных узлов, мы не можем получить на ней расходящихся сумм. Таким образом, целью перенормировки больше не является устранение расходимостей, теперь наша цель – *изменение представления \mathbb{Z}_N с $\{0, 1, \dots, N - 1\}$ на $\{-k, -k + 1, \dots, -k + N - 1\}$* (см. рис. 7).

Для более понятной демонстрации концепции рассмотрим два примера. Начнем с простейшего нетривиального случая – двоичной системы. Для двоичной несимметричной системы мы имеем следующие выражения:

$$x = \sum'_{s=-n_-}^{n_+-1} x_s 2^s = \sum_{s=-n_-}^{n_+-1} (x_{s-1} - x_s)2^s, \quad x_{-n_- - 1} = 0. \tag{42}$$

Такая перенормировка эквивалентна замене последней цифры $x'_{n_+-1} = -x_{n_+-1}$:

$$\sum_{s=-n_-}^{n_+-1} x_s 2^s = \sum_{s=-n_-}^{n_+-2} x_s 2^s + x'_{n_+-1} 2^{n_+-1}, \quad (43)$$

и линейна относительно двоичных цифр x_s .

Важно отметить, что в случае $q > 2$ на решетке линейная перенормировка не работает, поскольку деление на $q-1$ может “помещать” число между узлов решетки. Например, в троичном случае линейная перенормировка описывается следующим выражением:

$$x' = \sum_{s=-n_-}^{n_+-1} t_{ns}(s, x) 3^s = \frac{1}{2} \sum_{s=-n_-}^{n_+-1} (t_{ns}(s-1, x) - t_{ns}(s, x)) 3^s, \quad (44)$$

$$t_{ns}(-n_- - 1, x) = 0.$$

Наибольшее троичное число перенормируется корректно:

$$\sum_{s=-n_-}^{n_+-1} 2 \cdot 3^s = \frac{1}{2} (-2 \cdot 3^{-n_-}) = -\Delta x, \quad (45)$$

однако его половина уже “промахивается” мимо узла решетки:

$$\sum_{s=-n_-}^{n_+-1} 3^s = -\frac{\Delta x}{2}. \quad (46)$$

Альтернативный (и корректно работающий) метод получения решетки

$$\{-3^{n-1} \Delta x, \dots, -\Delta x, 0, \Delta x, 2\Delta x, \dots, (3^n - 3^{n-1} - 1) \Delta x\}$$

из исходной решетки ($\{0, \Delta x, 2\Delta x, 3\Delta x, \dots, (3^n - 1) \Delta x\}$) – это вычесть 3^{n+} из последних 3^{n-1} узлов. В таком случае мы имеем

$$t''_{ns}(n_+ - 1, x) = \begin{cases} 0, & t_{ns}(n_+ - 1, x) = 0, \\ 1, & t_{ns}(n_+ - 1, x) = 1, \\ -1, & t_{ns}(n_+ - 1, x) = 2, \end{cases} =$$

$$= t_{ns}(n_+ - 1, x) - \frac{3}{2} (t_{ns}(n_+ - 1, x) - 1) t_{ns}(n_+ - 1, x), \quad (47)$$

$$x'' = \sum_{s=-n_-}^{n_+-1} t_{ns}(s, x) 3^s = \sum_{s=-n_-}^{n_+-2} t_{ns}(s, x) 3^s + t''_{ns}(n_+ - 1, x) 3^{n_+-1}. \quad (48)$$

Эта перенормировка работает, однако она нелинейна относительно троичных цифр.

3.4.4. *Цифра на прямой.* После того как мы определили бесконечные суммы цифр, мы можем обсудить предел $n \rightarrow +\infty$, $\Delta p \rightarrow 0$, $d_1 \in \mathbb{Z}$. В этом случае мы получаем следующее выражение для цифры импульса на прямой:

$$\hat{p}_r = \frac{2d_1 + q - 1}{2} \hat{1} + q^{-r} \sum_{D \in \mathbb{Z}_{q^r/\Delta p}} \sum_{\sigma=0}^{q-1} \frac{\hat{T}_A}{2\pi i A}, \quad A = q^{-r} \left(D + \frac{\sigma}{q} \right). \quad (49)$$

Этот предел соответствует бесконечному числу цифр до запятой для координаты и после запятой для импульса. Следовательно, в этом случае мы имеем бесконечную координатную решетку, в то время как импульсная решетка периодична (и если мы дополнительно потребуем предел $\Delta x \rightarrow 0$, то мы получим действительную прямую и для координаты, и для импульса). Важно отметить, что после перехода к пределу суммирование ведется и по положительным, и по отрицательным целым числам. На конечной периодической решетке понятие положительного или отрицательного числа не определено.

4. КОММУТАЦИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Как было показано Вейлем [8], канонические коммутационные соотношения координата-импульс верны только на бесконечной прямой, но не на решетке (конечной или бесконечной) и не на конечном интервале.

4.1. Коммутатор цифра-цифра. Нетрудно получить коммутатор произвольной функции координаты $f(\hat{x})$ и координатного сдвига \hat{T}_A :

$$[f(\hat{x}), \hat{T}_A] \psi(x) = (f(\hat{x}) - f(\hat{x} + A)) \hat{T}_A \psi(x). \quad (50)$$

Таким образом, имеем

$$[f(\hat{x}), \hat{T}_A] = (f(\hat{x}) - f(\hat{x} + A)) \hat{T}_A. \quad (51)$$

Пользуясь записью $\mathbf{d}(s, \hat{x}) = \hat{x}_s$, получаем выражение для коммутатора цифр координаты и импульса на решетке:

$$[\hat{x}_s, \hat{p}_r] = -\Delta p \cdot q^{-r} \sum_{D \in \mathbb{Z}_{q^r/\Delta p}} \sum_{\sigma=1}^{q-1} \left\{ \frac{\mathbf{d}(s, \hat{x}) - \mathbf{d}(s, \hat{x}) - q^{-r}(D + 1/q)}{1 - e^{2\pi i \Delta p A}} \right\} \hat{T}_{-A} e^{2\pi i A p_{\min}}. \quad (52)$$

Как и для двоичного случая [6], для произвольной системы счисления имеем следующее условие на коммутацию цифр:

$$-r - s - 2 \geq 0, \quad s + r \leq -2. \quad (53)$$

Иными словами, дробная часть импульса коммутирует с дробной частью координаты, младшая цифра импульса не коммутирует только со старшей цифрой координаты, и наоборот – младшая цифра координаты не коммутирует только со старшей цифрой импульса. Дробные части координаты и импульса, таким образом, могут быть выбраны в качестве полного набора наблюдаемых для одномерного движения.

4.2. Коммутатор координата-цифра. В силу того, что $\hat{x} = \sum_{s=-n_-}^{n_+-1} q^s \mathbf{d}(s, \hat{x})$, для коммутатора координаты с цифрой импульса мы получаем следующее выражение:

$$[\hat{x}, \mathbf{d}(r, \hat{p})] = -\frac{1}{q^r} \sum_{D \in \mathbb{Z}_{q^r/\Delta p}} \sum_{\sigma=1}^{q-1} \frac{\Delta p \cdot q^{-r}(D+1/q)}{1 - e^{2\pi i \Delta p A}} \hat{T}_{-A} e^{2\pi i A p_{\min}}. \quad (54)$$

5. КОММУТАТОР КООРДИНАТА-ИМПУЛЬС

Аналогично, пользуясь равенством $\hat{p} = \sum_{r=n_+}^{n_--1} q^r \mathbf{d}(r, \hat{p})$, мы получаем для коммутатора координаты с импульсом следующее выражение:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = -\sum_{r=-n_+}^{n_--1} \sum_{D \in \mathbb{Z}_{q^r/\Delta p}} \sum_{\sigma=1}^{q-1} \frac{\Delta p \cdot q^{-r}(D+1/q)}{1 - e^{2\pi i \Delta p A}} \hat{T}_{-A} e^{2\pi i A p_{\min}}. \quad (55)$$

5.1. Коммутаторы на прямой. При переходе на прямую коммутаторы теряют зависимость от $d_1 \in \mathbb{Z}$ (фазовый сдвиг становится бесконечно малым). Формулы для коммутаторов принимают следующий вид:

$$[\mathbf{d}(s, \hat{x}), \mathbf{d}(p, \hat{r})] = \sum_{D \in \mathbb{Z}} \sum_{\sigma=1}^{q-1} \frac{\mathbf{d}(s, \hat{x}) - \mathbf{d}(s, \hat{x}) - q^{-r}(D + \sigma/q)}{2\pi i(D + \sigma/q)} \hat{T}_{-A}, \quad (56)$$

$$[\hat{x}, \mathbf{d}(r, \hat{p})] = \frac{1}{q^r} \frac{1}{2\pi i} \sum_{D \in \mathbb{Z}} \sum_{\sigma=1}^{q-1} \hat{T}_{-A}, \quad (57)$$

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \frac{1}{2\pi i} \sum_{r \in \mathbb{Z}} \sum_{D \in \mathbb{Z}} \sum_{\sigma=1}^{q-1} \hat{T}_{-A}. \quad (58)$$

5.2. Перенормировки коммутаторов на прямой. Нами получено формальное разложение коммутаторов в ряд по операторам сдвига. В силу того, что $\hbar = 1/2\pi$, мы можем переписать соотношение (58) в следующем виде:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = -i\hbar \sum_{r \in \mathbb{Z}} \sum_{D \in \mathbb{Z}} \sum_{\sigma=1}^{q-1} \hat{T}_{-A}. \quad (59)$$

Пусть \mathbb{A} – множество всех чисел, q -ичное разложение которых содержит конечное множество ненулевых множителей перед отрицательными степенями q (конечное число значимых q -ичных цифр после q -ичной запятой). Множество \mathbb{A} образует группу относительно операции сложения. Тогда множество значений, по которым идет суммирование, имеет вид $\mathbb{A}/0$. В силу того, что $\hat{T}_0 = \hat{1}$, получаем

$$[\hat{x}, \hat{p}] = -i\hbar \sum_{A \in \mathbb{A} \setminus \{0\}} \hat{T}_A = -i\hbar \left(\sum_{A \in \mathbb{A}} \hat{T}_A - \hat{1} \right) = i\hbar \hat{1} - i\hbar \sum_{A \in \mathbb{A}} \hat{T}_A. \quad (60)$$

Нам известно, что для одномерного движения частицы существует каноническое коммутационное соотношение $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \hat{1}$. Таким образом, мы получаем перенормировку

$$\sum_{A \in \mathbb{A}} \hat{T}_A = \sum_{A \in \mathbb{A}} e^{2\pi i A \hat{p}} = 0. \quad (61)$$

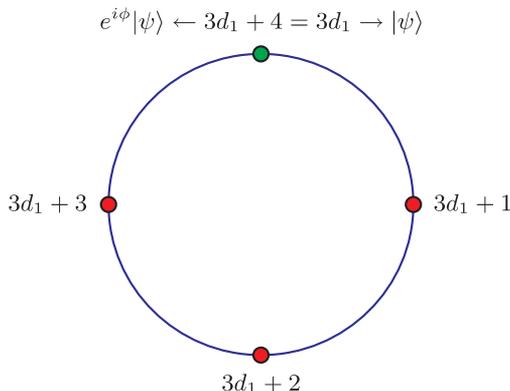


Рис. 8. Сдвинутая решетка из четырех узлов.

Эта перенормировка аналогична формальному равенству

$$\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x p} dx = 0$$

для всякого $p \neq 0$, возникающему при рассмотрении преобразований Фурье.

6. ФИЗИЧЕСКАЯ МОТИВАЦИЯ К СДВИГУ РЕШЕТОК

6.1. Граничные условия. Обозначим цифру номер r импульса p в двоичной системе с цифрами $\{d_1, d_1 + 1\}$ как $\mathbf{b}(r, p, d_1)$. Можно увидеть, что при переходе через период возникают нетривиальные граничные условия. Таким образом, можно заключить, что сдвиг импульсной решетки приводит к изменению граничных условий для координаты. Граничные условия для импульса с цифрами $\{d_1, d_1 + 1\}$ могут быть записаны следующим образом (см. рис. 8):

$$\Psi(x + 2^{n+}) = e^{i\phi} \cdot \Psi(x), \quad \text{где} \quad \phi = 2\pi\ell, \quad \ell = \frac{p_{\min}}{\Delta p} = (2^n - 1)d_1. \quad (62)$$

6.2. Связь с эффектом Ааронова–Бома. В статьях [14], [15] приведено соотношение между магнитным потоком, проходящим через тор, сдвигом обобщенного импульса и граничными условиями для волновых функций (см. рис. 9). Аналогично можно рассмотреть кольцо, сквозь которое пропущен ненулевой магнитный поток Φ .

Стационарное состояние частицы с зарядом e и массой m на данном кольце длины a – собственная функция оператора

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{e}{\hbar c} A_x(x) \right)^2, \quad (63)$$

где $\mathbf{A}(x)$ – векторный потенциал.

Функция $\Psi(x)$ удовлетворяет периодическим граничным условиям

$$\Psi(0) = \Psi(a), \quad \Psi'(0) = \Psi'(a). \quad (64)$$

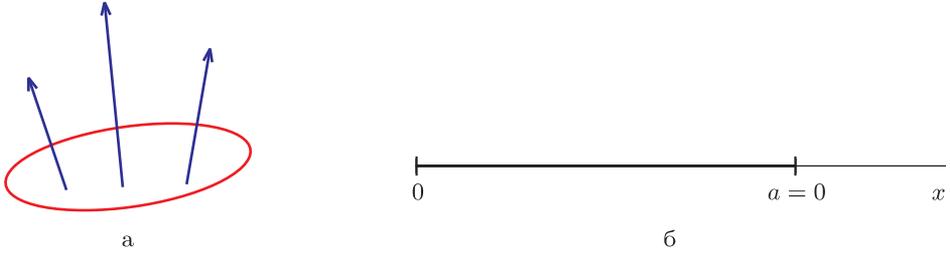


Рис. 9. Кольцо в магнитном поле (а) и координаты на кольце (б).

Калибровочными преобразованиями мы можем обратить в нуль потенциал \mathbf{A} на кольце. Это приведет к разрыву волновой функции на концах отрезка $[0, a]$. Кроме того, очевидно, что вероятность $|\Psi(x)|^2$ не должна меняться. Таким образом, задача сводится к нахождению собственных функций $\psi(x)$ оператора

$$\hat{H}_1 = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \quad (65)$$

с нетривиальными граничными условиями

$$\psi(0) = e^{i\phi} \psi(a), \quad \psi'(0) = e^{i\phi} \psi'(a). \quad (66)$$

Калибровочные преобразования, обращающие в нуль векторный потенциал на кольце, могут быть записаны в следующем виде:

$$\mathbf{A}'(x) = \mathbf{A} - \nabla f(x) = 0. \quad (67)$$

Поскольку вероятность $|\Psi(x)|^2$ не должна меняться при калибровочных преобразованиях (67), новая волновая функция $\psi(x)$ может отличаться от старой волновой функции $\Psi(x)$ только на фазовый множитель:

$$\psi(x) = \Psi(x) e^{-(ie/\hbar c) f(x)}. \quad (68)$$

Для гамильтониана (65) мы легко находим собственные функции, удовлетворяющие граничным условиям (66):

$$\psi(x) = e^{ikx}, \quad k = \frac{2\pi n}{a} - \frac{\phi}{a}. \quad (69)$$

Связь между магнитным потоком Φ и фазой ϕ имеет вид

$$\Phi = f(a) - f(0) = \underbrace{\frac{\hbar c}{e}}_{=\Phi_0/2\pi} \phi. \quad (70)$$

Из этого примера мы можем заключить, что в реальной физической системе сдвиг (обобщенного) импульса приводит к фазовому множителю в граничных условиях (как и в (62)). В подобном случае использование сдвинутых решеток оказывается вполне естественным.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая работа обобщает результаты ранее опубликованных работ [6], [7] на случай q -ичной системы счисления. Единственное условие на цифры рассматриваемых позиционных систем счисления – это условие на разность между соседними цифрами, которая должна быть равна единице.

Возможные приложения рассмотренных разложений не ограничиваются квантовыми вычислениями, они могут быть полезны, к примеру, для решения уравнений в частных производных на классическом компьютере. Важно отметить, что, поскольку мы определяем оператор импульса как генератор координатного сдвига, он оказывается нелокальным (см. приложение Б), что помогает лучше учесть симметрии моделируемой системы.

Естественное возникновение перенормировок в данном случае вызывает определенный интерес. Перенормировка бесконечных и конечных значений (в случае решетки) позволяет находить перенормировки численно, переходя от решетки к непрерывной теории. Время и энергия также могут быть рассмотрены в качестве координаты и импульса [16], что позволяет применить методы перенормировки и к ним. Перенормировки в данном контексте оказываются, вероятно, связанными с квантовой теорией измерений (см. [17], [18] и приведенные там ссылки).

Цифровое представление рассматривает координату и импульс не как величины, наблюдаемые в эксперименте. Напротив, напрямую наблюдаются отдельные цифры координат и импульсов. К примеру, измерение двоичной цифры пространственной координаты выражается в прохождении/непрохождении частицы через дифракционную решетку. Интересно, что системы с нецелыми цифрами в некоторых случаях (например, для систем с нетривиальными граничными условиями) оказываются более естественными, чем традиционные.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Прямоугольная функция на решетке. Рассмотрим периодическую прямоугольную функцию $c(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{Z}(T)$:

$$c(\alpha) = \begin{cases} \mathcal{A}, & L \leq \alpha \leq R, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{Z}(T). \quad (\text{A.1})$$

Мы используем ортонормированный базис $E_k(\alpha) = e^{-2\pi i \alpha k / T} / \sqrt{T}$, $k \in \mathbb{Z}(T)$:

$$\tilde{c}(0) = \langle E_0 | c \rangle = \mathcal{A} \frac{R - L + 1}{\sqrt{T}}, \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} \tilde{c}(k) &= \langle E_k | c \rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{\alpha=L}^R \mathcal{A} e^{2\pi i k \alpha / T} = \\ &= \frac{\mathcal{A}}{\sqrt{T}} e^{2\pi i k L / T} \left(\frac{1 - e^{2\pi i k (R-L+1) / T}}{1 - e^{2\pi i k / T}} \right), \quad k \neq 0, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} c(\alpha) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_T} \tilde{c}(k) \cdot E_k(\alpha) = \\ &= \mathcal{A} \frac{R - L + 1}{T} + \sum_{k=1}^{T-1} \frac{\mathcal{A}}{T} e^{2\pi i k L / T} \left(\frac{1 - e^{2\pi i k (R-L+1) / T}}{1 - e^{2\pi i k / T}} \right) e^{-2\pi i \alpha k / T}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

q -ичная система на решетке. Теперь рассмотрим цифру номер r в q -ичной системе с цифрами $\{0, 1, \dots, q\}$. Она может быть представлена в виде последовательности q прямоугольных функций c_j , для которых могут быть записаны следующие выражения:

$$L_j = q^{n+r} \cdot (j-1), \quad R_j = (q^{n+r} \cdot j) - 1, \quad \mathcal{A}_j = j-1, \quad T_j = q^{n+r+1}, \quad j \in \{1, \dots, q\}.$$

Таким образом, мы получаем

$$p_r = \mathbf{d}(r, p) = \sum_{j=1}^q c_j \left(\frac{p}{\Delta p} \right). \quad (\text{A.5})$$

Пользуясь формулой (A.4), мы получаем следующее выражение для разложения цифры импульса:

$$p_r = \frac{q-1}{2} - \Delta p q^{-r} \sum_{D \in \mathbb{Z}_{q^r} / \Delta p} \sum_{\sigma=1}^{q-1} \frac{e^{-2\pi i A p}}{1 - e^{2\pi i \Delta p A}}, \quad A = q^{-r} \left(D + \frac{\sigma}{q} \right). \quad (\text{A.6})$$

Аналогично для цифры координаты имеем

$$x_s = \frac{q-1}{2} - \Delta x q^{-s} \sum_{D \in \mathbb{Z}_{q^s} / \Delta x} \sum_{\sigma=1}^{q-1} \frac{e^{2\pi i B x}}{1 - e^{2\pi i \Delta x B}}, \quad B = q^{-s} \left(D + \frac{\sigma}{q} \right). \quad (\text{A.7})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Рассмотрим матрицы для операторов импульса и цифры импульса для случаев, когда они достаточно компактны, чтобы уместить их на бумаге.

Везде в данном разделе мы полагаем, что $\Delta x = 1$, $x \in \mathbb{Z}_N \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, координаты и импульсы нумеруются троичными цифрами, помеченными нижним индексом 3, а $\Delta p = 3^{-n} = 1/N$.

Случай $n = 1$ и $N = 3^1 = 3$. Троичная симметричная система. Для этого случая имеем

$$\hat{x} = \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \hat{s}_z,$$

$$\hat{p}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ -i & 0 & i \\ i & -i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sqrt{2} \hat{s}_y + 2 \hat{s}_y \hat{s}_x + i \hat{s}_z).$$

Случай $n = 1$ и $N = 3^1 = 3$. Троичная несимметричная система. Здесь мы получаем следующий результат:

$$\hat{x} = \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \hat{1} + \hat{s}_z,$$

$$\hat{p}_{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 1 - \sqrt{3}i & 1 + \sqrt{3}i \\ 1 + \sqrt{3}i & 6 & 1 - \sqrt{3}i \\ 1 - \sqrt{3}i & 1 + \sqrt{3}i & 6 \end{pmatrix} = \hat{1} + \frac{\sqrt{2}}{6} \hat{s}_x + \frac{1}{\sqrt{6}} \hat{s}_y - \frac{\sqrt{3}}{6} (2 \hat{s}_y \hat{s}_x + i \hat{s}_z).$$

Случай $n = 2$ и $N = 3^2 = 9$. Трои́чная несимметричная система. В этом случае имеем

$$x = x_0 + 3 \cdot x_1 = \text{diag}(8; 7; 6; 5; 4; 3; 2; 1; 0),$$

$$x_0 = \text{diag}(2; 1; 0; 2; 1; 0; 2; 1; 0), \quad x_1 = \text{diag}(2; 2; 2; 1; 1; 1; 0; 0; 0).$$

Введем обозначение

$$E_n = \frac{1}{e^{-2\pi i n/9} - 1},$$

тогда

$$\hat{p}_{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & E_8 & E_7 & 0 & E_5 & E_4 & 0 & E_2 & E_1 \\ E_1 & 3 & E_8 & E_7 & 0 & E_5 & E_4 & 0 & E_2 \\ E_2 & E_1 & 3 & E_8 & E_7 & 0 & E_5 & E_4 & 0 \\ 0 & E_2 & E_1 & 3 & E_8 & E_7 & 0 & E_5 & E_4 \\ E_4 & 0 & E_2 & E_1 & 3 & E_8 & E_7 & 0 & E_5 \\ E_5 & E_4 & 0 & E_2 & E_1 & 3 & E_8 & E_7 & 0 \\ 0 & E_5 & E_4 & 0 & E_2 & E_1 & 3 & E_8 & E_7 \\ E_7 & 0 & E_5 & E_4 & 0 & E_2 & E_1 & 3 & E_8 \\ E_8 & E_7 & 0 & E_5 & E_4 & 0 & E_2 & E_1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\hat{p}_{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3E_6 & 0 & 0 & 3E_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3E_6 & 0 & 0 & 3E_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3E_6 & 0 & 0 & 3E_3 \\ 3E_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3E_6 & 0 & 0 \\ 0 & 3E_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3E_6 & 0 \\ 0 & 0 & 3E_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3E_6 \\ 3E_6 & 0 & 0 & 3E_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3E_6 & 0 & 0 & 3E_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3E_6 & 0 & 0 & 3E_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{p} = \hat{p}_{-1}/3 + \hat{p}_{-2}/9,$$

$$\hat{p} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & E_8 & E_7 & 3E_6 & E_5 & E_4 & 3E_3 & E_2 & E_1 \\ E_1 & 4 & E_8 & E_7 & 3E_6 & E_5 & E_4 & 3E_3 & E_2 \\ E_2 & E_1 & 4 & E_8 & E_7 & 3E_6 & E_5 & E_4 & 3E_3 \\ 3E_3 & E_2 & E_1 & 4 & E_8 & E_7 & 3E_6 & E_5 & E_4 \\ E_4 & 3E_3 & E_2 & E_1 & 4 & E_8 & E_7 & 3E_6 & E_5 \\ E_5 & E_4 & 3E_3 & E_2 & E_1 & 4 & E_8 & E_7 & 3E_6 \\ 3E_6 & E_5 & E_4 & 3E_3 & E_2 & E_1 & 4 & E_8 & E_7 \\ E_7 & 3E_6 & E_5 & E_4 & 3E_3 & E_2 & E_1 & 4 & E_8 \\ E_8 & E_7 & 3E_6 & E_5 & E_4 & 3E_3 & E_2 & E_1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Случай $n = 2$ и $N = 3^2 = 9$. Трои́чная симметричная система. В этом случае имеем

$$x = x_0 + 3x_1 = \text{diag}(4; 3; 2; 1; 0; -1; -2; -3; -4),$$

$$x_0 = \text{diag}(1; 0; -1; 1; 0; -1; 1; 0; -1), \quad x_1 = \text{diag}(1; 1; 1; 0; 0; 0; -1; -1; -1).$$

Введем обозначение

$$G_n = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{3} \sin[(9-n)/9]},$$

тогда

$$\hat{p}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}i} \begin{pmatrix} 0 & G_8 & G_7 & 0 & G_5 & G_4 & 0 & G_2 & G_1 \\ G_1 & 0 & G_8 & G_7 & 0 & G_5 & G_4 & 0 & G_2 \\ G_2 & G_1 & 0 & G_8 & G_7 & 0 & G_5 & G_4 & 0 \\ 0 & G_2 & G_1 & 0 & G_8 & G_7 & 0 & G_5 & G_4 \\ G_4 & 0 & G_2 & G_1 & 0 & G_8 & G_7 & 0 & G_5 \\ G_5 & G_4 & 0 & G_2 & G_1 & 0 & G_8 & G_7 & 0 \\ 0 & G_5 & G_4 & 0 & G_2 & G_1 & 0 & G_8 & G_7 \\ G_7 & 0 & G_5 & G_4 & 0 & G_2 & G_1 & 0 & G_8 \\ G_8 & G_7 & 0 & G_5 & G_4 & 0 & G_2 & G_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{p}_{-2} = \frac{1}{\sqrt{3}i} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{p} = \hat{p}_{-1}/3 + \hat{p}_{-2}/9,$$

$$\hat{p} = \frac{1}{9\sqrt{3}i} \begin{pmatrix} 0 & 3G_8 & 3G_7 & 1 & 3G_5 & 3G_4 & -1 & 3G_2 & 3G_1 \\ 3G_1 & 0 & 3G_8 & 3G_7 & 1 & 3G_5 & 3G_4 & -1 & 3G_2 \\ 3G_2 & 3G_1 & 0 & 3G_8 & 3G_7 & 1 & 3G_5 & 3G_4 & -1 \\ -1 & 3G_2 & 3G_1 & 0 & 3G_8 & 3G_7 & 1 & 3G_5 & 3G_4 \\ 3G_4 & -1 & 3G_2 & 3G_1 & 0 & 3G_8 & 3G_7 & 1 & 3G_5 \\ 3G_5 & 3G_4 & -1 & 3G_2 & 3G_1 & 0 & 3G_8 & 3G_7 & 1 \\ 1 & 3G_5 & 3G_4 & -1 & 3G_2 & 3G_1 & 0 & 3G_8 & 3G_7 \\ 3G_7 & 1 & 3G_5 & 3G_4 & -1 & 3G_2 & 3G_1 & 0 & 3G_8 \\ 3G_8 & 3G_7 & 1 & 3G_5 & 3G_4 & -1 & 3G_2 & 3G_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Благодарности. Авторы благодарят участников конференции Phystech-Quant 2020 (Московский физико-технический институт, 2020), секции теоретической физики 62-й, 63-й и 64-й Научных конференций МФТИ (2019, 2020 и 2021 соответственно), семинара отдела математической физики (Математический институт им. В. А. Стеклова) и семинара лаборатории бесконечномерного анализа и математической физики (Московский государственный университет). Особенно авторы благодарят И. В. Воловича, Э. В. Хайдукова, В. А. Дудченко, В. В. Наумова, Н. Н. Шамарова, В. Ж. Сакбаева и других коллег за плодотворную дискуссию.

Авторы также выражают благодарность рецензенту за его труд по значительному улучшению текста статьи.

Конфликт интересов. Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] L. Chen, S. Jordan, Y.-K. Liu, D. Moody, R. Peralta, R. Perner, D. Smith-Tone, *Report of Post-Quantum Cryptography*, NIST Internal Report 8105, National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD, 2016.
- [2] P. W. Shor, J. Preskill, “Simple proof of security of the BB84 quantum key distribution protocol”, *Phys. Rev. Lett.*, **85**:2 (2000), 441–444.
- [3] R. P. Feynman, “Simulation physics with computers”, *Internat. J. Theor. Phys.*, **21**:6–7 (1982), 467–488.
- [4] Google AI Quantum and Collaborators, “Hartree–Fock on a superconducting qubit quantum computer”, *Science*, **369**:6507 (2020), 1084–1089.
- [5] Y. Ding, X. Chen, L. Lamata, E. Solano, M. Sanz, *Implementation of a hybrid classical-quantum annealing algorithm for logistic network design*, arXiv:1906.10074.
- [6] М. Г. Иванов, “Двоичное представление координаты и импульса в квантовой механике”, *ТМФ*, **196**:1 (2018), 70–87.
- [7] M. G. Ivanov, A. Yu. Polushkin, “Ternary and binary representation of coordinate and momentum in quantum mechanics”, *AIP Conf. Proc.*, **2362** (2021), 040002, 22 pp.
- [8] Г. Вейль, *Теория групп и квантовая механика*, Наука, М., 1986.
- [9] J. Schwinger, “Unitary operator bases”, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **46**:4 (1960), 570–579.
- [10] J. Katriel, “A nonlinear Bogoliubov transformation”, *Phys. Lett. A*, **307**:1 (2003), 1–7.
- [11] I. Arraut, C. Segovia, “A q -deformation of the Bogoliubov transformations”, *Phys. Lett. A*, **382**:7 (2018), 464–466.
- [12] M. G. Ivanov, V. A. Dudchenko, V. V. Naumov, “Number-theory renormalization of the vacuum energy”, *p-Adic Num. Ultramet. Anal. Appl.*, **15**:4 (2023), 284–311.
- [13] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленев, *p-Адический анализ и математическая физика*, Наука, М., 1994.
- [14] W. Ehrenberg, R. E. Siday, “The refractive index in electron optics and the principles of dynamics”, *Proc. Phys. Soc. B*, **62**:1 (1949), 8–21.
- [15] Y. Aharonov, D. Bohm, “Significance of electromagnetic potentials in quantum theory”, *Phys. Rev.*, **115**:3 (1959), 485–491.
- [16] М. Г. Иванов, “О формулировке квантовой механики с динамическим временем”, *Избранные вопросы математической физики и анализа*, Сборник статей. К 90-летию со дня рождения академика Василия Сергеевича Владимировича, Труды МИАН, **285**, МАИК “Наука/Интерпериодика”, М., 2014, 154–165.
- [17] М. Г. Иванов, *Как понимать квантовую механику*, РХД, М.–Ижевск, 2015.
- [18] М. Г. Иванов, “О единственности квантовой теории измерений для точных измерений с дискретным спектром”, *Тр. МФТИ*, **8**:1(29) (2016), 170–178.

Поступила в редакцию 18.05.2023,
 после доработки 5.07.2023,
 принята к публикации 18.08.2023