УДК 530.145.1

М. Г. Иванов

Московский физико-технический институт (государственный университет)

О единственности квантовой теории измерений для точных измерений с дискретным спектром

Обсуждается структура квантовой теории измерений и однозначность её постулатов для случая точных измерений наблюдаемых с дискретным спектром.

Правило Борна для квантовых вероятностей оказывается фиксировано условием отсутствия «квантовой телепатии».

Проекционный постулат фон Неймана описывает преобразование квантового состояния при измерении без взаимодействия (с минимально возможным взаимодействием). Проекционный постулат может рассматриваться как переход к условным вероятностям при условии получения определённого результата квантового измерения.

Ключевые слова: квантовое измерение, проекционный постулат, квантовые корреляции, ЭПР-эксперимент, ЛЛ-схема, квантовая телепатия, схема с двумя стрелками.

M. G. Ivanov

Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

On uniqueness of the quantum measurement theory for exact measurements with discrete spectra

The paper discusses the structure of quantum mechanics and uniqueness of its postulates for exact measurements with discrete spectra.

The Born rule for quantum probabilities is fixed by a requirement of nonexistence of quantum telepathy.

The Von Neumann projection postulate describes the quantum state transformation under the condition of no-interaction measurement. The projection postulate could be considered as transition to a conditional probability under the condition of a certain result of quantum measurement.

Key words: quantum measurement, projective postulate, quantum correlation, EPR experiment, LL-scheme, quantum telepathy, two-pointer scheme.

1. Введение: структура квантовой теории

Структура квантовой теории, роль квантовой теории измерений и интерпретации квантовой теории являются предметом активного обсуждения с момента возникновения теории до настоящего времени [1–7].

Приведём разбиение квантовой теории на разделы согласно тому, как в них описывается процесс измерения, указав попутно степень разработанности разделов и их связь с увеличением/уменьшением энтропии как мерой неопределённости состояния системы.

При обсуждении измерений будем предполагать, что проводятся измерения наблюдаемых с дискретным спектром, причём измерение является точным: в собственном состоянии наблюдаемой исход измерения даёт соответствующее собственное число с вероятностью 1. Для рассматриваемого класса измерений нет необходимости рассматривать сложные модели, включающие положительно определённые операторно-значные меры (POVM).

- *Теория замкнутой квантовой системы — очень хорошо разработанная* ***фундаментальная*** *теория* (обратима, полностью детерминистична, не содержит вероятностных понятий, энтропия системы постоянна);

- *Теория измерений* — ***полуфеноменологическая***[1] *теория взаимодействия ранее замкнутой системы с измерительным прибором* (необратима, содержит вероятностные понятия, энтропия для объединения системы и прибора возрастает):
  - вычисление вероятностей различных исходов измерения (*правило Борна*) — ***фундаментальная*** *закономерность, лежащая в основе вероятностной интерпретации*,
  - изменение состояния системы после измерения — *наиболее феноменологическая часть квантовой теории, в литературе рассматриваются разные модели*:
    - ∗ если (пока) результат измерения неизвестен (*квантовое неселективное измерение*) — *феноменология, есть хорошо разработанные модели*, например теория декогеренции (необратима, полностью детерминистична, не содержит вероятностных понятий, энтропия системы возрастает),
    - ∗ если (после того как) результат измерения известен *(классическое селективное измерение (коллапс волновой функции))* — ***самая загадочная часть квантовой теории:*** *(само)сознание, эвереттовская интерпретация и т.п.* (феноменологическая теория, необратима, вероятностна, энтропия системы уменьшается). Большинство споров и спекуляций об интерпретации квантовой механики связаны с *коллапсом волновой функции.*

Любое селективное измерение должно рассматриваться как неселективное до того, как его результат известен. Таким образом, квантовое селективное измерение может быть разбито на два этапа:
1) *квантовое неселективное измерение*,
2) *«классическое» селективное измерение* (передача *классической* информации от измерительного прибора наблюдателю).

Второй этап назван «классическим», но на самом деле он более загадочен.

Квантовое неселективное измерение обнуляет недиагональные элементы матрицы плотности в измерительном базисе. Классическое селективное измерение обнуляет все диагональные элементы матрицы плотности за исключением одного, случайно выбранного. Классическое селективное измерение описывается классической теорией вероятности, поэтому описание выбора одной из альтернатив в классической теории вероятности кажется тривиальным. Но на самом деле эта проблема лежит за пределами как классической теории вероятностей, так и квантовой теории. Теория квантовой декогеренции описывает превращение суперпозиции чистых состояний в смесь, но не может описать выбор единственной альтернативы. Так и классическая теория вероятностей описывает вероятности, но не может описать выбор единственной альтернативы.

Далее мы рассматриваем точные измерения наблюдаемых с дискретным спектром.

2. Квантовая телепатия

Согласно правилу Борна вероятность результата a при измерении наблюдаемой $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ вычисляется как

$$p_a = \|\hat{P}_a\psi\|^2, \tag{1}$$

где $\psi \in \mathcal{H}$ ($\|\psi\|^2 = 1$) — чистое состояние системы до измерения, $\hat{P}_a$ — ортогональный проектор на собственное подпространство оператора $\hat{A}$:

$$\forall\varphi \in \mathcal{H} \quad \hat{A}\hat{P}_a\varphi = a\hat{P}_a\varphi.$$

[1] Полуфеноменологический статус теории не исключает развитого математического аппарата. Однако разрабатываемые модели, как правило, не рассматриваются как фундаментальные законы природы.

Правило Борна надёжно проверено на эксперименте. Можем ли мы представить себе неборновский эксперимент? Неборновский эксперимент — это *точное* измерение наблюдаемой с дискретным спектром, которое не удовлетворяет правилу (1).

Теорема о квантовой телепатии. Пусть у Алисы есть подсистема-1, которая допускает борновское измерение наблюдаемой $\hat{A}_1$. Пусть у Бориса есть подсистема-2, которая допускает неборновское измерение наблюдаемой $\hat{A}_2$. Пусть система 1+2 описывается следующим чистым состоянием

$$|\Psi\rangle = \frac{|0_1\rangle|0_2\rangle + |1_1\rangle|1_2\rangle}{\sqrt{2}}, \tag{2}$$

где $\hat{A}_b|a_b\rangle = a|a_b\rangle$, $\||a_b\rangle\|^2 = 1$ ($b = 1,2$ — номер подсистемы). Пусть в распоряжении Алисы и Бориса есть ансамбль пар 1+2 в состоянии Ψ. Тогда Алиса и Борис могут передавать друг другу информацию путём измерения или не измерения наблюдамых $\hat{A}_b$ в заранее оговоренные моменты времени t_m. Время передачи информации при этом может быть сделано достаточно коротким, чтобы получить противоречие со специальной теорией относительности.

Чтобы передать один бит информации Борису, Алиса в момент времени t_1 измеряет или не измеряет наблюдаемую $\hat{A}_1$ для ансамбля подсистем-1. Если измерение выполнено, то состояние (2) коллапсирует

$$|\Psi\rangle \longrightarrow |0\rangle|0\rangle \text{ или } |1\rangle|1\rangle$$

с борновскими вероятностями $\frac{1}{2}$ для каждого результата. Борис в момент времени $t_2 > t_1$ измеряет (не борновским измерением!) наблюдаемую $\hat{A}_2$ для ансамбля подсистем-2 и находит вероятности для 0 и 1. Если Борис находит вероятности $\approx \frac{1}{2}$, то Алиса выполнила измерение наблюдаемой $\hat{A}_1$. Если Борис находит не борновские вероятности $\neq \frac{1}{2}$, то Алиса **не** выполнила измерение наблюдаемой $\hat{A}_1$.

Аналогично Борис может передавать информацию Алисе.

Имея достаточно большой ансамбль скоррелированных систем 1+2, информацию можно передавать с любой наперёд заданной надёжностью.

Таким образом, если мы доверяем специальной теории относительности и формализму описания составных квантовых систем, то мы должны принять правило Борна для вероятностей.

3. Роль и место проекционного постулата

Проекционный постулат описывает изменение состояния квантовой системы после селективного измерения. Проекционный постулат допускает различные модификации, так что перед тем, как его выводить, полезно обсудить, надо ли его вообще выводить. Надо ли выводить постулат, который является всего лишь феноменологическим упрощённым описанием?

Мы будем рассматривать схемы точного селективного измерения дискретных наблюдаемых, которые переводят чистые квантовые состояния в чистые квантовые состояния.

3.1. ЛЛ-схема

В классическом учебнике Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [4] вместо проекционного постулата рассматривается более общая схема. Мы будем называть её *ЛЛ-схемой*. Рассмотрим её, чтобы продемонстрировать «гибкость» проекционного постулата, который может быть легко модифицирован.

Пусть Ψ — состояние квантовой системы перед измерением. Ψ может быть разложено по собственным состояниям Ψ_n измеряемой наблюдаемой $\hat{F}$

$$\Psi = \sum_m c_n\Psi_n, \quad \hat{F}\Psi_n = f_n\Psi_n, \quad \langle\Psi|\Psi\rangle = 1, \quad \langle\Psi_{n_1}|\Psi_{n_2}\rangle = \delta_{n_1n_2}, \quad c_n = \langle\Psi_n|\Psi\rangle.$$

Вероятность p_n результата измерения $F = f_n$ даётся стандартным правилом Борна (1) $p_n = |c_n|^2$. *Согласно проекционному постулату* состояние квантовой системы после измерения должно быть Ψ_n. Согласно более общей ЛЛ-схеме состояние квантовой системы после измерения — это $\varphi_n \neq \Psi_n$, $\langle\varphi_n|\varphi_n\rangle = 1$. Более того, набор состояний φ_n может быть не ортогональным, т.е. состояния φ_n в общем случае не могут быть описаны как набор собственных состояний с разными собственными числами какого-либо самосопряжённого оператора.

Длительность измерения в ЛЛ-схеме не обсуждается.

ЛЛ-схема — это наиболее общее описание *точного* квантового селективного измерения, *если начальное чистое состояние переводится в конечного чистое состояние*.

ЛЛ-схема может быть выведена из комбинации проекционного постулата и унитарной эволюции. Мы можем считать, что измерение по ЛЛ-схеме выполняется в два этапа:

- Мгновенное идеальное измерение, которое описывается проекционным постулатом: $\Psi \to \Psi_n$ с вероятностью $p_n = |c_n|^2$.
- Унитарная эволюция, на протяжении короткого времени δt, описываемая гамильтонианом $\hat{H}_n$, *который зависит от результата измерения*: $e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_n\,\delta t} : \Psi_n \to \varphi_n$ с вероятностью 1.

Подбирая гамильтонианы $\hat{H}_n$, можно описать измерение с произвольным набором состояний φ_n. Более того, можно подобрать гамильтонианы так, что конечное состояние системы станет независимым от результата измерения, т.е. в этом случае ЛЛ-схема описывает процесс приготовления заданного состояния.

3.2. ЛЛ-схема и эксперимент Штерна–Герлаха

Рассмотрим пример измерения по ЛЛ-схеме в эксперименте Штерна–Герлаха. При измерении спина пучок частиц пролетает через область сильно неоднородного магнитного поля. На частицы действует сила, пропорциональная проекции спина на магнитное поле. Исходный неполяризованный пучок расщепляется на несколько пучков с определёнными значениями проекции спина на магнитное поле. В результате создаётся корреляция между координатой частицы вдоль поля (поперёк пучка) и проекцией её спина. Благодаря этой корреляции последующее измерение поперечной координаты частицы позволяет определить проекцию спина частицы. (Можно рассматривать частицу как совокупность двух подсистем: спиновой и координатной, причём в данном измерении координатная подсистема выступает в роли «стрелки».) Если рассматривать спиновое состояние частицы, то его эволюция зависит от магнитного поля в области, где частица пролетает. В эксперименте Штерна–Герлаха магнитное поле сильно неоднородно, таким образом, для компонент расщепившегося пучка эволюция спина по времени описывается различными гамильтонианами в соответствии с ЛЛ-схемой. Впрочем, в исходной схеме опыта проекция спина на магнитное поле в подпучках определена, и эволюция спина после расщепления пусков сводится к разному набегу фазы $e^{-i\omega_m\,\delta t}$, где m — проекция спина. Опыт можно легко модифицировать для воспроизводства ЛЛ-схемы общего вида, поместив после установки Штерна–Герлаха магниты, создающие на пути пучков различные магнитные поля произвольной величины и направления.

3.3. Проекционный постулат и измерение без взаимодействия

В контексте ЛЛ-схемы проекционный постулат является всего лишь приближением. Может показаться, что постановка вопроса о выводе проекционного постулата вообще лишена смысла, поскольку он является лишь одним из возможных приближений при описании селективного измерения. В частности, заведомой идеализацией представляется предположение о мгновенности процесса измерения. Тем не менее проекционный постулат считается точным в важном классе измерений — измерения без взаимодействия.

Обычно проекционный постулат обосновывается тем, что повторное измерение физической величины сразу после завершения первого измерения должно давать тот же результат.

Это аналогично изменению при измерении классического распределения вероятности: если в результате измерения установлено, что $x \in [a, b]$, то из распределения вероятностей без изменений «вырезается» кусок $x \in [a, b]$, а вне этого отрезка вероятности обнуляются: $\rho(x) \to \chi_{[a,b]}(x)\,\rho(x)$, где $\chi_{[a,b]}$ — характеристическая функция отрезка. Такое изменение состояния в классической теории вероятностей может произойти без взаимодействия: вне отрезка $[a, b]$ частица не обнаружена, т.е. прибор с ней не взаимодействовал.

Измерение, описываемое проекционным постулатом в квантовой механике также можно рассматривать как измерение с минимально возможным взаимодействием. Как и в классической теории вероятностей, мы можем (по крайней мере теоретически) построить измерение так, что *при интересующем нас исходе взаимодействие системы с прибором отсутствовало*, т.е. можно построить установку так, что интересующий нас исход измерения соответствует тому, что ни один датчик не сработал. Точная локализация во времени процесса измерения и его длительность оказываются не существенны.

Другой важный случай, когда применяется именно проекционный постулат, — измерение, которому подвергается одна из подсистем сложной системы, состоящей из двух (или более) невзаимодействующих (в процессе измерения) подсистем. Состояния подсистем могут быть скоррелированы за счёт более раннего взаимодействия (прямого или косвенного). Отсутствие взаимодействия в период измерения может достигаться, например, пространственной удалённостью, в этом случае изолированность может гарантироваться постулатами специальной теории относительности. Проекционный постулат применительно к системе в целом может не выполняться (например, измерение может описываться ЛЛ-схемой), но проекционный постулат обязан выполняться для подсистемы, которая не взаимодействовала с измерительным прибором (корреляция подсистем разрушается в процессе измерения). Отсутствие взаимодействия подсистем делает несущественным конкретный момент времени, когда происходит измерение, а также дальнейшую судьбу подсистемы, взаимодействовавшей с прибором. Эта подсистема может быть вообще уничтожена в процессе измерения, например фотон может быть поглощён датчиком.

Таким образом, хотя проекционный постулат не является универсальным законом изменения состояния системы при измерении, он становится точным в двух важных случаях «измерения без взаимодействия»:

- выбранный исход соответствует отсутствию взаимодействия системы и датчика;
- система состоит из невзаимодействующих коррелированных подсистем, причём описывается состояние той подсистемы, которая не взаимодействует с прибором.

В этих случаях проекционный постулат допускает экспериментальную проверку, более того, регулярно проверяется в различных опытах по проверке оснований квантовой механики.

Наличие этих случаев также придаёт смысл попыткам вывода (или обоснования) проекционного постулата из других принципов квантовой теории.

4. Вывод проекционного постулата

4.1. Схема с двумя стрелками

Рассмотрим процесс измерения следуя фон Нейману [1] с двумя существенными изменениями.
1) Вместо одного измерения рассмотрим последовательное измерение двух некоммутирующих наблюдаемых.
2) Обе измеряемых наблюдаемых имеют дискретный спектр (а не непрерывный, как у фон Неймана).
Второе измерение придаёт смысл обсуждению состояния системы между измерениями.

Каждое измерение происходит в два этапа: создание корреляции между системой и стрелкой (микроскопической частью) измерительного прибора, измерение состояния стрелки. Измерения состояний обоих стрелок происходит одновременно в конце эксперимента. Благодаря этому дальнейшая судьба системы может не рассматриваться, а проекционный постулат нам не понадобится. Нам понадобится только правило Борна для вероятностей. Аналогичная модель была независимо предложена в статье [6].

Рассмотрим измерение двух некоммутирующих наблюдаемых $\hat{A}$ и $\hat{B}$ с дискретным спектром. a_i и b_j — собственные числа для $\hat{A}$ и $\hat{B}$ соответственно. Соответствующие ортонормированные собственные векторы — $|a_i, k\rangle$ и $|b_j, l\rangle$. Индексы k и l различают собственные состояния с одинаковыми собственными числами. Проекторы на собственные подпространства:

$$\hat{P}_i = \sum_k |a_i, k\rangle\langle a_i, k|, \qquad \hat{R}_j = \sum_l |b_j, l\rangle\langle b_j, l|,$$

$$\hat{P}_{i_1}\hat{P}_{i_2} = \hat{P}_{i_1}\delta_{i_1 i_2}, \quad \hat{R}_{j_1}\hat{R}_{j_2} = \hat{R}_{j_1}\delta_{j_1 j_2}, \quad \sum_i \hat{P}_i = \sum_j \hat{R}_j = \hat{1}.$$

Большая система, которую мы рассматриваем, состоит из *малой системы* и двух *стрелок.*

Малая система — это подсистема, над которой мы проводим измерения. Стрелка — микроскопическая часть прибора, которая в процессе измерения оказывается коррелирована с малой системой. Операторы наблюдаемых $\hat{A}$ и $\hat{B}$ действуют только на малую систему, собственные состояния $|a_i, k\rangle$ и $|b_j, l\rangle$ — состояния малой системы.

Состояния стрелки-1 и стрелки-2 обозначаются как α и β соответственно. Базисные состояния обоих стрелок — $|\alpha_n\rangle$, $n \in \mathbb{Z}_N$ и $|\beta_m\rangle$, $m \in \mathbb{Z}_M$. N и M — достаточно большие натуральные числа[2] или бесконечность.

Пусть начальное состояние малой системы — $|\psi_0\rangle$. Начальные состояния стрелок — базисные состояния $|\alpha_0\rangle$ и $|\beta_0\rangle$. Таким образом, начальное состояния большой системы имеет вид

$$|\Psi_0\rangle = |\psi_0\rangle \otimes |\alpha_0\rangle \otimes |\beta_0\rangle.$$

Измерение наблюдаемой $\hat{A}$ создаёт корреляцию малой системы со стрелкой-1. Состояние стрелки-2 (произвольное состояние $|\beta_X\rangle$) остаётся прежним

$$\hat{U}_A : |a_i, k\rangle \otimes |\alpha_n\rangle \otimes |\beta_X\rangle \to |a_i, k\rangle \otimes |\alpha_{n+i}\rangle \otimes |\beta_X\rangle, \quad \langle\alpha_{i_1}|\alpha_{i_2}\rangle = \delta_{i_1 i_2}.$$

Оператор $\hat{U}_A$ унитарен, если сумма $n + i$ понимается в смысле $\mathbb{Z}_N$.

Аналогично, измерение наблюдаемой $\hat{B}$ создаёт корреляцию малой системы со стрелкой-2. Состояние стрелки-1 (произвольное состояние $|\alpha_X\rangle$) остаётся прежним

$$\hat{U}_B : |b_j, l\rangle \otimes |\alpha_X\rangle \otimes |\beta_m\rangle \to |b_j, l\rangle \otimes |\alpha_X\rangle \otimes |\beta_{m+j}\rangle, \quad \langle\beta_{j_1}|\beta_{j_2}\rangle = \delta_{j_1 j_2}.$$

Оператор $\hat{U}_B$ унитарен, если сумма $m + j$ понимается в смысле $\mathbb{Z}_M$.

$\hat{U}_A$ преобразует $|\Psi_0\rangle$ следующим образом:

$$\hat{U}_A|\Psi_0\rangle = \hat{U}_A \sum_i (\hat{P}_i|\psi_0\rangle) \otimes |\alpha_0\rangle \otimes |\beta_0\rangle = \sum_i (\hat{P}_i|\psi_0\rangle) \otimes |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_0\rangle.$$

$\hat{U}_B$ преобразует новое состояние $\hat{U}_A|\Psi_0\rangle$ следующим образом:

$$\hat{U}_B\hat{U}_A|\Psi_0\rangle = \hat{U}_B \sum_i (\hat{P}_i|\psi_0\rangle) \otimes |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_0\rangle =$$

$$= \hat{U}_B \sum_{ji} (\hat{R}_j\hat{P}_i|\psi_0\rangle) \otimes |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_0\rangle =$$

[2] N не меньше, чем число различных собственных чисел оператора $\hat{A}$, M не меньше, чем число различных собственных чисел оператора $\hat{B}$.

$$= \sum_{ji} (\hat{R}_j \hat{P}_i |\psi_0\rangle) \otimes |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_j\rangle.$$

Каждый член суперпозиции соответствует определённому состоянию обоих стрелок. Стрелка-1 указывает $A = a_i$, стрелка-2 указывает $B = b_j$. Вероятность этого результата вычисляем по правилу Борна (1):

$$p_{ij} = \|\hat{R}_j \hat{P}_i |\psi_0\rangle\|^2 = \langle\psi_0|\hat{P}_i \hat{R}_j^2 \hat{P}_i|\psi_0\rangle = \langle\psi_0|\hat{P}_i \hat{R}_j \hat{P}_i|\psi_0\rangle. \tag{3}$$

$$p_{ij} = \langle\psi_{Ai}|\hat{R}_j|\psi_{A_i}\rangle.$$

Здесь $|\psi_{Ai}\rangle = \hat{P}_i|\psi_0\rangle$.

Наблюдатель измеряет положение обоих стрелок одновременно в конце эксперимента. Так что измерение двух некоммутирующих наблюдаемых $\hat{A}$ и $\hat{B}$ сводится к измерению двух коммутирующих наблюдаемых — положений двух стрелок.

Сравним полученное описание с описанием с помощью проекционного постулата. Вероятности того, что стрелка-1 покажет $A = a_i$, равна

$$p_i = \sum_j p_{ij} = \sum_j \langle\psi_0|\hat{P}_i \hat{R}_j \hat{P}_i|\psi_0\rangle = \langle\psi_0|\hat{P}_i \underbrace{\left(\sum_j \hat{R}_j\right)}_{\hat{1}} \hat{P}_i|\psi_0\rangle =$$

$$= \langle\psi_0|\hat{P}_i|\psi_0\rangle = \langle\psi_{Ai}|\psi_{Ai}\rangle.$$

Условная вероятность того, что стрелка-2 покажет $B = b_j$, при условии того, что стрелка-1 показала $A = a_i$, равна

$$p_{j|i} = \frac{p_{ij}}{p_i} = \frac{\langle\psi_{Ai}|\hat{R}_j|\psi_{Ai}\rangle}{\langle\psi_{Ai}|\psi_{Ai}\rangle}. \tag{4}$$

Условная вероятность $p_{j|i}$ равна вероятности результата $B = b_j$ для состояния $|\psi_{Ai}\rangle = \hat{P}_i|\psi_0\rangle$, которое получается из начального состояния малой системы с помощью проекционного постулата, применённого к измерению наблюдаемой $\hat{A}$.

Мы видим, что проекционный постулат может быть интерпретирован как переход к условным вероятностям и условным амплитудам вероятности, соответствующим определённому результату измерения.

Вывод проекционного постулата является модельно зависимым (см. 3.1).

4.2. Схема с одной стрелкой

Мы можем упростить схему с двумя стрелками, убрав из схемы стрелку-2 и оператор $\hat{U}_B$. Вместо стрелки-2 можно использовать саму малую систему. В схеме с одной стрелкой вместо измерения положения двух стрелок конечное измерение — это измерение положения стрелки-1 и прямое измерение наблюдаемой $\hat{B}$ для малой системы.

$$|\Psi_0'\rangle = |\psi_0\rangle \otimes |\alpha_0\rangle.$$

$$\hat{U}_A : |a_i, k\rangle \otimes |\alpha_n\rangle \to |a_i, k\rangle \otimes |\alpha_{n+i}\rangle.$$

$$\hat{U}_A|\Psi_0'\rangle = \sum_i (\hat{P}_i|\psi_0\rangle) \otimes |\alpha_i\rangle = \sum_{ji} (\hat{R}_j \hat{P}_i|\psi_0\rangle) \otimes |\alpha_i\rangle$$

В последней формуле член $(\hat{R}_j \hat{P}_i|\psi_0\rangle) \otimes |\alpha_i\rangle$ соответствует результату $A = a_i$, $B = b_j$.

Вероятности p_{ij} (3) и условные вероятности $p_{j|i}$ (4) в схемах с одной стрелкой и с двумя стрелками совпадают.

4.3. Схема с одной стрелкой и ЭПР-эксперимент

Мысленный эксперимент Эйнштейна, Подольского и Розена (ЭПР-эксперимент) основывается на идее сведения измерения некоммутирующих наблюдаемых к измерению заведомо коммутирующих наблюдаемых, связанных с разными подсистемами. Эта идея совпадает с идеей описанных выше схем с двумя и одной стрелками.

Покажем, что ЭПР-эксперимент в модификации Бома [3] (см. стр. 700. Парадокс Эйнштейна, Подольского, Розена) в точности соответствует схеме с одной стрелкой, описанной выше.

Пусть малая система представляет собой кубит в начальном состоянии $|\psi_0\rangle = \frac{|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}$. Стрелка — кубит в начальном состоянии $|\uparrow\rangle$.

$$|\Psi_0'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)|\uparrow\rangle.$$

Первая наблюдаемая — $\hat{A} = \hat{\sigma}_z$. Оператор $\hat{U}_A$ — «условное не», инвертирует состояние стрелки, если малая система находится в состоянии $|\uparrow\rangle$:

$$\hat{U}_A : |\uparrow\rangle|x\rangle \to |\uparrow\rangle\underbrace{(\hat{\sigma}_x|x\rangle)}_{|\text{not } x\rangle}, \quad |\downarrow\rangle|x\rangle \to |\downarrow\rangle|x\rangle.$$

Действуя оператором $\hat{U}_A$ на $|\Psi_0'\rangle$, мы получаем ЭПР-состояние малой системы и стрелки

$$\hat{U}_A|\Psi_0'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle).$$

В конце эксперимента оператор $\hat{\sigma}_z$ измеряется для второго кубита (стрелки) и произвольный 1-битовый оператор $\hat{B}$ измеряется для первого кубита (малой системы).

5. Заключение

Правило Борна для вероятностей может быть выведено из условия отсутствия квантовой телепатии. Этот вывод использует ослабленную версию проекционного постулата для сложных коррелированных систем без взаимодействия подсистем в процессе измерения.

Вместо попыток вывода проекционного постулата фон Неймана из унитарной эволюции мы вывели его из правила Борна и корреляций результатов измерений.

Благодарности

Автор благодарит И. В. Воловича, Ю. М. Белоусова, Г. Б. Лесовика, В. И. Манько, О. Г. Смолянова, С. Н. Филиппова, Н. Н. Шамарова, и участников Семинара по квантовой физике и квантовой информации в МФТИ и семинара О. Г. Смолянова в МГУ за полезное обсуждение.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского Научного Фонда (проект 16-11-00084) в Московском физико-техническом институте (государственном университете).

Литература

1. *фон Нейман И.* Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964.
2. *Everett H.* Relative State Formulation of Quantum Mechanics // Reviews of Modern Physics. 1957. V. 29. P. 454–462.
3. *Бом Д.* Квантовая теория. М.: Наука, 1965.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Том 3. Квантовая механика. М.: Физматлит, 2004. § 7. Волновая функция и измерение.

5. *Иванов М.Г.* Как понимать квантовую механику. М., Ижевск: РХД, 2015.
6. *Oehri D., Lebedev A.V., Lesovik G.B., Blatter G.* Repeated measurements from unitary evolution: avoiding the projection postulate // Phys. Rev. B. 2016. V. 93. 045308; arXiv:1502.02938
7. *Хренников А.Ю., Нилсон Б., Нордебу С.* Вывод квантового правила для вероятности детектирования с помощью броуновского движения в пространстве классических полей // ТМФ. 2013. Т. 174, № 2. С. 342–352.

References

1. *von Neumann J.* Mathematical Foundations of Quantum Mechanics. Princton university press, 1955.
2. *Everett H.* Relative State Formulation of Quantum Mechanics. Reviews of Modern Physics. 1957. V. 29. P. 454–462.
3. *Bohm D.* Quantum Theory. New York, Prentice Hall, 1951.
4. *Landau L. D., Lifschitz E. M.* Quantum Mechanics: Non-relativistic Theory. Course of Theoretical Physics. London. Pergamon, 1977. § 7. The wave function and measurements.
5. *Ivanov M.G.* How to understand quantum mechanics. Moscow, Izhevsk. RCD, 2015. (in Russian).
6. *Oehri D., Lebedev A.V., Lesovik G.B., Blatter G.* Repeated measurements from unitary evolution: avoiding the projection postulate. Phys. Rev. B. 2016. V. 93. 045308; arXiv:1502.02938
7. *Khrennikov A.Yu., Nilsson B., Nordebo S.* Quantum rule for detection probability from Brownian motion in the space of classical fields. Theoretical and Mathematical Physics. 2013. V. 174, I. 2. P. 298–306.

Поступила в редакцию 04.03.2016