ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2014, т. 285, с. 154–165

УДК 517.5

О формулировке квантовой механики с динамическим временем[1]

М. Г. Иванов[2]

Поступило в феврале 2014 г.

Рассматривается квантовая механика, для которой время системы — одна из обобщенных координат. Обобщенный гамильтониан имеет неограниченный спектр, что позволяет ввести эрмитов оператор времени. В предлагаемой формулировке квантовой механики вводятся время системы и время наблюдателя. Уравнение Шрёдингера по времени системы не выполняется или выполняется только приближенно. Волновая функция предполагается квадратично интегрируемой по всем координатам, включая время системы. В некотором пределе данный формализм воспроизводит обычную квантовую механику и соответствующую теорию измерений.

DOI: 10.1134/S0371968514020113

1. ВВЕДЕНИЕ

Релятивистская физика предполагает рассмотрение на равных основаниях пространственных и временны́х координат. Обобщение гамильтонова формализма, при котором время является одной из обобщенных координат системы, рассматривалось, в частности, Дираком в 1933 г. [1]. Дальнейшее развитие обобщенной гамильтоновой динамики изложено Дираком в работах [2–4]. Впоследствии этот подход получил широкое распространение (см., например, [5, 6]).

Потребность в таком подходе естественным образом возникает, например, при рассмотрении электромагнитного поля как дополнительных компонент симплектической структуры фазового пространства [7] или при развитии идей предложенной И.В. Воловичем функциональной механики [8, 9].

Стандартная квантовая механика, а также классическая гамильтонова механика рассматривают время как некоторый универсальный параметр, принципиально отличный от пространственных координат. Такой подход противоречит не только духу теории относительности, но и духу самой квантовой механики, так как измерение (описываемое проекционным постулатом) оказывается точно локализовано по времени. Из-за этого соотношению неопределенностей энергия–время приписывается иной смысл [10], чем соотношениям координата–импульс.

В частности, стандартная квантовая механика не допускает введения оператора времени как наблюдаемой величины. Как было отмечено еще Паули [11], наличие такого оператора предполагало бы, что спектр оператора энергии простирается от $-\infty$ до $+\infty$.[3] Впоследствии работы по построению оператора энергии были направлены главным образом по пути отказа от его эрмитовости (уточнение области определения, свойств оператора и т.п.; см., например, [12]).

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 11-01-00828-а).

[2] Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Россия. E-mail: mgi@mi.ras.ru

[3] Оператор времени должен был бы быть генератором однопараметрической группы сдвигов по энергии, что предполагает неограниченный энергетический спектр.

В статье рассматривается квантовая механика системы, в которой время является одной из обобщенных координат. При этом к гамильтониану исходной системы добавляется член, описывающий ход времени, имеющий непрерывный спектр от $-\infty$ до $+\infty$. Суммарный гамильтониан теперь не ограничен ни сверху, ни снизу, что снимает препятствие к введению эрмитова оператора времени.

Построенный формализм может быть проинтерпретирован в рамках стандартной квантовой механики как переход от исходной системы к составной системе, содержащей "идеальные часы". Формализм включает в себя два времени: квантовое "время системы" ("время на часах") и классическое время наблюдателя. Время системы — наблюдаемая величина (обобщенная координата), а время наблюдателя — числовой параметр, как время в стандартной квантовой механике.

Мы отказывается от того, чтобы волновая функция удовлетворяла уравнению Шрёдингера по времени системы. Более того, волновая функция в координатном представлении квадратично интегрируема по всем координатам, включая время системы. Этот отказ разрешает проблемы, возникавшие ранее с введением эрмитова оператора времени. Унитарная эволюция теперь записывается не по времени системы, а по времени наблюдателя. В некотором пределе данный формализм воспроизводит обычную квантовую механику и соответствующую теорию измерений.

Рассмотрение времени системы наряду с другими координатами автоматически приводит к новой интерпретации квантовой механики, которая строится исключительно как теория измерений (без унитарной эволюции, которая оказывается приближенным эффектом). Измерения оказываются делокализованы не только в пространстве, но и во времени.

Далее в разд. 1 вводится классический обобщенный гамильтониан (расширенный гамильтониан), рассматривающий время как обобщенную координату, в соответствии с подходом, предложенным Дираком в [1, Sect. 2]. В разд. 2 обсуждаются примеры применения задачи на собственные значения для расширенного квантового гамильтониана. В разд. 3 строится квантовая механика с динамическим временем. В разд. 4 строится соответствующая квантовая теория измерений и обсуждается связь со стандартной квантовой механикой. В разд. 5 перечисляются основные выводы статьи и дается новая интерпретация квантовой механики, естественным образом вытекающая из построенного формализма.

1.1. Лагранжев формализм в расширенном конфигурационном пространстве. Пусть задан невырожденный лагранжиан $L(t,q,\dot q)$, где $q=(q^1,\dots,q^n)$ — обобщенные координаты, а $\dot q = dq/dt$ — обобщенные скорости, который явно зависит от времени. Мы можем переписать неавтономную систему как автономную, записав время t как функцию от некоторого монотонного параметра τ [1]. Действие будет иметь вид

$$S[q(t)] = \int L(t,q,\dot q)\,dt = \int L\biggl(t,q,\frac{q'}{t'}\biggr)t'\,d\tau, \qquad q' = \frac{dq}{d\tau}. \tag{1.1}$$

Мы получаем новый (*расширенный*) функционал действия $S_{\mathrm e}[t(\tau),q(\tau)]$ с новым (*расширенным*) лагранжианом $L_{\mathrm e}$, который для любой траектории совпадает с исходным действием $S[q(t)]$, но зависит от другого набора функций:

$$S_{\mathrm e}[t(\tau),q(\tau)] = \int L_{\mathrm e}(t,t',q,q')\,d\tau, \qquad L_{\mathrm e}(t,t',q,q') = L\biggl(t,q,\frac{q'}{t'}\biggr)t'. \tag{1.2}$$

В расширенное действие время t входит как еще одна обобщенная координата q^0. Обобщенные импульсы, канонически сопряженные старым координатам q^i, совпадают с обычными обобщенными импульсами, а обобщенный импульс, канонически сопряженный времени $t=q^0$, совпадает с энергией E со знаком минус:

$$p_i = \frac{\partial L_{\mathrm{e}}}{\partial q^{i\prime}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad i = 1, \dots, n, \qquad p_0 = \frac{\partial L_{\mathrm{e}}}{\partial t'} = L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\, \dot{q}^i = -E. \tag{1.3}$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Уравнения Лагранжа для расширенного лагранжиана для координат $q(\tau)$ и времени $t(\tau)$ с точностью до множителя t' совпадают с уравнениями Лагранжа и уравнением баланса энергии для исходного лагранжиана:

$$\frac{\delta S_{\mathrm{e}}}{\delta q^i(\tau)} = t'\, \frac{\delta S}{\delta q^i(t)} = t' \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{dp_i}{dt} \right), \qquad \frac{\delta S_{\mathrm{e}}}{\delta t(\tau)} = t' \left(\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{dE}{dt} \right). \tag{1.4}$$

“Энергия” $\mathcal{E}$ для расширенного лагранжиана тождественно равна нулю:

$$\mathcal{E} = p_0 t' + p_i q^{i\prime} - L_{\mathrm{e}} = t'(p_0 + E) \equiv 0. \tag{1.5}$$

Расширенное действие описывает ту же физическую систему, что и исходное, но, поскольку выбор параметризации времени $t(\tau)$ произволен (любая гладкая монотонная функция), уравнения Лагранжа оказываются зависимыми (уравнение баланса энергии выражается через остальные уравнения).

1.2. Гамильтонов формализм в расширенном фазовом пространстве. Перейдем к гамильтонову формализму. Поскольку импульсы, введенные для расширенного лагранжиана, являются зависимыми (имеется связь $p_0 + H(t, q, p) = 0$, где $p = (p_1, \dots, p_n)$ — обобщенные импульсы, $H(t, q, p)$ — функция Гамильтона для исходного невырожденного лагранжиана $L(t, q, \dot{q})$), мы имеем дело с частным случаем обобщенной гамильтоновой динамики, введенной Дираком [1–4]. “Энергию” для расширенного лагранжиана надо выразить через координаты и импульсы (включая t и p_0):

$$\mathcal{E} = t' p_0 + q^{i\prime} p_i - L_{\mathrm{e}} = t'(p_0 + p_i \dot{q}^i - L) \equiv t'\,(p_0 + H(t, p, q)). \tag{1.6}$$

Множитель t' не может быть определен из уравнений Лагранжа в силу произвольности параметра τ. Положим $t' = f(t, p_0, q, p)$, где $f \neq 0$ — произвольная гладкая функция. Получается семейство “гамильтонианов”

$$\mathcal{H}(t, p_0, q, p) = f(t, p_0, q, p)\,(p_0 + H(t, q, p)). \tag{1.7}$$

Соответствующие уравнения Гамильтона (“расширенные уравнения Гамильтона”) имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{d\tau} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_0} = f + \frac{\partial f}{\partial p_0}(p_0 + H), \\
\frac{dp_0}{d\tau} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -f\,\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}(p_0 + H), \\
\frac{dq^i}{d\tau} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = f\,\frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i}(p_0 + H), \\
\frac{dp_i}{d\tau} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i} = -f\,\frac{\partial H}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i}(p_0 + H).
\end{aligned}$$

“На энергетической поверхности”, т.е. если задать начальные условия, для которых $p_0 = -H$, расширенные уравнения Гамильтона дают уравнение хода времени $\frac{dt}{d\tau} = f$, уравнение баланса энергии и уравнения Гамильтона для исходных координат и импульсов с новым времени τ. При этом воспроизводится гамильтонова динамика исходной системы.

Если $f = \mathrm{const} \neq 0$, то *для любых начальных условий* воспроизводится гамильтонова динамика исходной системы, поскольку $\frac{d}{dt}(p_0 + H) = 0$, начальное значение p_0 может быть произвольным и энергия $E = -p_0$ оказывается определена с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Можно сказать, что в этом случае интеграл движения $p_0 + H(t, q, p)$ — нулевой уровень шкалы энергии, который может быть выставлен произвольно.

2. ГДЕ ВОЗНИКАЕТ РАСШИРЕННЫЙ КВАНТОВЫЙ ГАМИЛЬТОНИАН

Приведем примеры того, как расширенные гамильтонианы могут быть использованы для переформулировки известных задач квантовой теории.

2.1. Стандартная квантовая механика в терминах расширенного гамильтониана. В простейшем случае ($f \equiv 1$, т.е. если $\frac{dt}{d\tau} = 1$) расширенный гамильтониан имеет вид

$$\widehat{\mathcal{H}} = \widehat{p}_0 + \widehat{H}. \tag{2.1}$$

Уравнение Шрёдингера может быть записано как

$$\widehat{\mathcal{H}}\psi = 0. \tag{2.2}$$

Во временно́м (“координатном по времени”) представлении имеем $\widehat{p}_0 = -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ (со стандартным доопределением до эрмитова оператора) и получаем обычное временно́е уравнение Шрёдингера

$$\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{H}\right)\psi(t) = 0. \tag{2.3}$$

В энергетическом (“импульсном по времени”) представлении имеем $p_0 = -E$ и получаем обычное стационарное уравнение Шрёдингера

$$(-E + \widehat{H})\psi(E) = 0 \tag{2.4}$$

с нормировкой на вероятность данной энергии $\langle\psi(E)|\psi(E)\rangle = p_E$ и нестандартной интерпретацией: $\psi(t)$ и $\psi(E)$ связаны между собой преобразованием Фурье.

Несмотря на то что в расширенный классический гамильтониан время входит на общих основаниях с другими координатами, в квантовой механике между ними возникает различие за счет определения пространства волновых функций, которые не являются квадратично интегрируемыми по времени.

Уравнение (2.2) имеет вид уравнения на собственную функцию оператора $\widehat{\mathcal{H}}$ с собственным числом 0. Мы можем написать аналогичное уравнение для произвольного собственного числа $E_0 \in \mathbb{R}$:

$$\widehat{\mathcal{H}}\psi_{E_0} = E_0\psi_{E_0} \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{H}\right)\psi_{E_0}(t) = E_0\psi_{E_0}(t). \tag{2.5}$$

Уравнения (2.5) описывают ту же самую динамику, что и уравнение (2.2), но с нулевым уровнем шкалы энергии, сдвинутым на E_0. Решения этих уравнений отличаются на фазовый множитель

$$\psi_{E_0}(t) = e^{i\frac{E_0}{\hbar}t}\psi(t). \tag{2.6}$$

Такой сдвиг нулевого уровня шкалы энергии естественно считать разновидностью калибровочного преобразования.

Ненормируемость волновых функций ψ_{E_0} при интегрировании по всем координатам, включая время, связана с тем, что функции относятся к непрерывному спектру. В стандартной формулировке квантовой механики, где время рассматривается не как координата, а как параметр, естественное пространство волновых функций — гильбертово пространство $L_2(\mathbb{R}^n)$. При включении времени в число координат волновая функция должна принадлежать оснащенному расширенному гильбертову пространству $\Phi' \supset L_2(\mathbb{R}^{n+1}) \supset \Phi$.

Утверждение 1. *Оператор* (2.1) *на пространстве* $L_2(\mathbb{R}^{n+1})$ *имеет непрерывный спектр* $(-\infty, +\infty)$ *с одинаковыми кратностями для всех собственных чисел.*

2.2. Уравнение Клейна–Фока–Гордона в терминах расширенного гамильтониана. При ином выборе функции $f \neq \mathrm{const}$ мы можем получить другие расширенные квантовые гамильтонианы. В частности, мы можем воспроизвести уравнение Клейна–Фока–Гордона:

$$\mathcal{H}_{\mathrm{kfg}} = f \cdot (p_0 + H), \qquad f = H - p_0, \qquad H = \sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2}.$$

Такой выбор $\frac{dt}{d\tau} = f = H - p_0 = 2E = 2mc^2 \frac{dt}{dt_{\mathrm{eigen}}}$ соответствует выбору монотонного параметра, пропорционального собственному времени частицы (измеренному в собственных единицах времени) $\tau = t_{\mathrm{eigen}}/(2mc^2)$:

$$\mathcal{H}_{\mathrm{kfg}} = H^2 - p_0^2 = m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2 - p_0^2,$$

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\mathrm{kfg}} = m^2c^4 + \widehat{\mathbf{p}}^2c^2 - \widehat{p}_0^2 = m^2c^4 - c^2\hbar^2\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\right). \tag{2.7}$$

Уравнение Клейна–Фока–Гордона записывается в виде уравнения на собственную функцию с нулевым собственным числом

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\mathrm{kfg}}\psi = 0. \tag{2.8}$$

В данном случае у нас нет той калибровочной свободы изменения собственного числа, которая была при $f \equiv 1$, поскольку изменение собственного числа оператора $\widehat{\mathcal{H}}_{\mathrm{kfg}}$ означало бы не сдвиг нулевого уровня шкалы энергии, а сдвиг квадрата массы частицы.

Непрерывный спектр волнового оператора в плоском пространстве-времени с точки зрения новой интерпретации выглядит неестественно, зато дискретный спектр волнового оператора автоматически давал бы нам спектр масс частиц. Это соответствует идеям, разрабатывавшимся при исследовании спектра волнового оператора в искривленном пространстве-времени В.В. Козловым и И.В. Воловичем [13–16].

Неопределенность значения $\mathcal{H}_{\mathrm{kfg}}$ здесь может быть связана с неопределенностью массы частицы, т.е. с ситуациями, когда сорт частицы в принципе не может быть определен. Подобные явления наблюдаются в КТП, в явлениях осцилляции нейтрино и других проявлениях недиагональности массовых матриц.

3. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА С ДИНАМИЧЕСКИМ ВРЕМЕНЕМ

3.1. Предпочтительность гамильтониана $\widehat{\mathcal{H}} = \widehat{p}_0 + \widehat{H}$. Подобно тому как с помощью классического “гамильтониана” $\mathcal{H}$ мы можем построить гамильтонову динамику по параметру τ, эквивалентную динамике, порождаемой исходным гамильтонианом H, с помощью квантового “гамильтониана” $\widehat{\mathcal{H}}$ мы можем построить на пространстве состояний $L_2(\mathbb{R}^{n+1})$ унитарную эволюцию по времени τ, задаваемую оператором эволюции вида $\exp\bigl(-\frac{i}{\hbar}\widehat{\mathcal{H}}\tau\bigr)$.

Естественно считать, что время t — это время системы (время на часах), а время τ — время наблюдателя.

Здесь и далее мы будем использовать расширенный гамильтониан, определенный простейшим образом (2.1), $\widehat{\mathcal{H}} = \widehat{p}_0 + \widehat{H}$.

Выбор $f = \frac{dt}{d\tau} = \mathrm{const}$ означает, что ход времени наблюдателя не зависит от эволюции системы. Это можно считать проявлением классической природы наблюдателя: маленькая квантовая система не способна повлиять на ход больших классических часов наблюдателя. Получаемый при этом гамильтониан $\widehat{\mathcal{H}}$ имеет в качестве собственных функций решения обычного уравнения Шрёдингера по времени t. Как мы увидим далее, в соответствующем пределе такой гамильтониан позволяет воспроизвести стандартную квантовую механику. Такая форма гамильтониана представляется нам предпочтительной.

Как было показано выше (см. (2.5), (2.6)), спектр гамильтониана (2.1) неограничен и мы можем осуществлять сдвиг состояния по энергии (2.6), действуя оператором умножения на зависящий от времени системы фазовый множитель $\widehat{T}_{E_0} = \exp\bigl(i\frac{E_0}{\hbar}t\bigr)$.

Утверждение 2. *Мы можем ввести эрмитов оператор времени, который* (*в координатном по времени представлении*) *будет иметь вид* $\widehat{t} = t$. *Этот же оператор в произвольном представлении может быть получен дифференцированием унитарного оператора сдвига по энергии* $\widehat{T}_{E_0}$ *по величине* E_0:

$$\widehat{t} = -i\hbar\frac{\partial\widehat{T}_{E_0}}{\partial E_0}, \tag{3.1}$$

$$\frac{d\widehat{t}}{d\tau} \equiv \frac{\partial\widehat{t}}{\partial\tau} + \frac{1}{i\hbar}[\widehat{t},\widehat{\mathcal{H}}] = \frac{1}{i\hbar}[\widehat{t},\widehat{\mathcal{H}}] = \widehat{1}.$$

3.2. Время системы и “идеальные часы”. Разумеется, более строго было бы записывать формулу (2.1) для расширенного гамильтониана в виде

$$\widehat{\mathcal{H}} = \widehat{p}_0 \otimes \widehat{1}_n + \widehat{1}_1 \otimes \widehat{H},$$

где первые множители действуют на пространстве $L_2(\mathbb{R})$, а вторые — на $L_2(\mathbb{R}^n)$. Пространство чистых состояний для новой динамики имеет вид $L_2(\mathbb{R}) \otimes L_2(\mathbb{R}^n)$, где первый множитель описывает время системы, которое мы можем трактовать как состояние “идеальных часов”, *координата стрелки* которых есть $\widehat{t}$, а второй множитель описывает состояние исходной системы.

Гамильтониан идеальных часов — это оператор $\widehat{p}_0$.

Именно “идеальные часы” управляют изменением со временем t исходного гамильтониана $\widehat{H}$. В роли “настоящего времени” (по которому идет унитарная эволюция) выступает теперь время наблюдателя τ. Если исходный гамильтониан $\widehat{H}$ зависел от времени t, то расширенный гамильтониан $\widehat{\mathcal{H}}$ не зависит от времени τ, поскольку изменения в гамильтониане $\widehat{H}$ осуществляются по времени часов t.

Физический смысл расширенного гамильтониана как наблюдаемой $\widehat{\mathcal{H}}$ ранее был установлен как “нулевой уровень отсчета энергии”. Теперь мы получаем другую интерпретацию — суммарная энергия системы и “идеальных часов”. Таким образом, расширенная динамика может быть получена из стандартного рассмотрения открытых квантовых систем путем рассмотрения ансамбля, состоящего из исходной системы и “идеальных часов”.

Поскольку спектр гамильтониана идеальных часов является непрерывным, непрерывен и спектр расширенного гамильтониана. Уравнение Шрёдингера по времени наблюдателя τ выполняется, но уравнение Шрёдингера по времени системы t может выполняться только приблизительно для состояний с малой неопределенностью энергии. Если суммарная энергия часов и системы определена с точностью δE_0, функция $\psi(t,q)|_{\tau=\tau_0}$ может приближенно удовлетворять обычному уравнению Шрёдингера (по времени t) на промежутке $T \sim \hbar/(\delta E_0)$. В пределе $\delta E_0 \to 0$ мы получаем точное уравнение Шрёдингера по t, но при этом волновая функция оказывается равномерно размазанной по оси t, т.е. в этом пределе “идеальные часы” оказываются бесполезными для измерения времени.

В построенном формализме присутствуют две неравноправные временны́е переменные: время наблюдателя τ и время системы (время по часам) t. Мы можем ввести несколько временны́х переменных t_i, т.е. в приведенной интерпретации мы можем дополнить нашу систему не одними, а несколькими часами. Наличие нескольких времен может быть интересно с точки зрения построения теории поля на многообразиях с "неправильной" сигнатурой (с несколькими временами). Такие теории поля были предложены А.Д. Сахаровым [17] и рассматривались в работах И.Я. Арефьевой, И.В. Воловича, Б.Г. Драговича [18, 19].

3.3. Гейзенберговское и шрёдингеровское представления. С помощью унитарного оператора эволюции $\exp\bigl(-\frac{i}{\hbar}\widehat{\mathcal{H}}\tau\bigr)$ мы можем строить для расширенного гамильтониана $\widehat{\mathcal{H}}$ квантовую механику как в шрёдингеровском ($i\hbar\frac{d\psi}{d\tau} = \widehat{\mathcal{H}}\psi$), так и в гейзенберговском ($\frac{d\widehat{\mathcal{A}}}{d\tau} = \frac{\partial\widehat{\mathcal{A}}}{\partial\tau} + \frac{1}{i\hbar}[\widehat{\mathcal{A}},\widehat{\mathcal{H}}]$) представлениях.

Как и в гейзенберговском представлении, в шрёдингеровском в пределе точного определения значения нулевого уровня энергии (при точном знании суммарной энергии исходной системы и часов) мы воспроизводим уравнение Шрёдингера по времени системы t. В этом пределе эволюция по времени τ сводится к физически несущественному вращению общего фазового множителя.

Нетривиален вопрос о причинности в такой двухвременной теории. Измерение, совершаемое над системой, соответствует некоторому определенному времени наблюдателя τ_0, но по времени системы t момент измерения точно не определен. Более того, в результате измерения меняется волновая функция системы во все моменты времени системы t, включая все моменты, которые заведомо "предшествуют измерению" $t < \tau_0$.

Если волновая функция в момент времени τ_0 по часам наблюдателя представляет собой волновой пакет, локализованный по времени t, то это можно интерпретировать как то, что измерения в этот момент также локализованы по времени t. Однако для таких состояний уравнение Шрёдингера по t не выполняется. По мере хода времени наблюдателя τ волновой пакет распространяется по времени системы t. Расплывание волнового пакета можно интерпретировать как постепенную рассинхронизацию времени системы и времени наблюдателя.

Интересно, что в пределе точного задания нулевого уровня энергии волновой пакет равномерно размазан по времени t, а идеальное наблюдение стандартной квантовой механики меняет волновую функцию сразу во все моменты времени t.

Далее мы будем пользоваться гейзенберговским представлением по времени наблюдателя τ. В таком представлении волновая функция $\psi(t,q)$ изменяется только в процессе измерений согласно проекционному постулату.

4. ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ С ДИНАМИЧЕСКИМ ВРЕМЕНЕМ

4.1. Стандартная квантовая механика как предельный случай. Для того чтобы воспроизвести выводы стандартной квантовой механики, мы построим операторы на пространстве $L_2(\mathbb{R}^{n+1})$, измерение которых будет воспроизводить измерение соответствующих операторов на пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $\widehat{A}_0\colon L_2(\mathbb{R}^n)\to L_2(\mathbb{R}^n)$ — оператор наблюдаемой, которая мгновенно измеряется в момент времени t_0. Соответствующий оператор $\widehat{\mathcal{A}}\colon L_2(\mathbb{R}^{n+1})\to L_2(\mathbb{R}^{n+1})$ в новой интерпретации должен иметь тот же спектр, что и оператор $\widehat{A}_0$, коммутировать с расширенным гамильтонианом $\widehat{\mathcal{H}}$, а его собственные функции должны получаться из собственных функций оператора $\widehat{A}_0$ с помощью унитарной эволюции с гамильтонианом $\widehat{H}$.

Условие коммутативности дает

$$[\widehat{\mathcal{A}},\widehat{\mathcal{H}}]=0 \qquad\Leftrightarrow\qquad i\hbar\frac{d\widehat{\mathcal{A}}}{d\tau}\bigg|_t = i\hbar\frac{d\widehat{\mathcal{A}}|_t}{dt} = \bigl[\widehat{\mathcal{A}}|_t,\widehat{H}\bigr] + i\hbar\frac{\partial\widehat{\mathcal{A}}|_t}{\partial t} = 0. \tag{4.1}$$

Здесь через $\widehat{\mathcal{A}}|_t$ обозначено ограничение оператора $\widehat{\mathcal{A}}$ с пространства $L_2(\mathbb{R}^{n+1})$ на подпространство $L_2(\mathbb{R}^n)|_{t=\mathrm{const}}$.[4] Также введем условие инвариантности подпространств $L_2(\mathbb{R}^n)|_{t=\mathrm{const}}$

$$\widehat{\mathcal{A}}L_2(\mathbb{R}^n)|_{t=t_1} \subset L_2(\mathbb{R}^n)|_{t=t_1} \qquad \forall t_1 \in \mathbb{R} \tag{4.2}$$

и начальное условие

$$\widehat{\mathcal{A}}|_{t=t_0} = \widehat{A}_0. \tag{4.3}$$

Здесь и далее операторы в пространстве $L_2(\mathbb{R}^{n+1})$ обозначены прописными рукописными буквами со шляпками ($\widehat{\mathcal{H}}$, $\widehat{\mathcal{A}}$ и т.п.), а операторы в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ — прописными курсивными буквами со шляпками ($\widehat{A}_0$, $\widehat{H}$ и т.п.). Также операторы в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ могут задаваться как ограничения операторов в пространстве $L_2(\mathbb{R}^{n+1})$ на $L_2(\mathbb{R}^n)|_{t=\mathrm{const}}$ ($\widehat{\mathcal{A}}|_t$, $\widehat{\mathcal{A}}|_{t=t_1}$ и т.п.).

Оператор $\widehat{\mathcal{A}}$ является эрмитовым в силу эрмитовости $\widehat{A}_0$ и того факта, что оператор не зависит от $\widehat{p}_0$. Другое доказательство эрмитовости — построение полного базиса собственных функций. Элементы базиса строятся из собственных функций оператора $\widehat{A}_0$, но нумеруются также параметром E_0:

$$\psi_{\mathcal{A}=a}(t) = \widehat{U}(t_0, t, \widehat{H} - E_0)\psi_{A_0=a}(t_0).$$

Здесь оператор эволюции $\widehat{U}(t_0, t, \widehat{H} - E_0)$ переводит волновую функцию в момент времени t_0 в волновую функцию в момент времени t; эволюция описывается гамильтонианом $\widehat{H} - E_0$.

Ограничение $\widehat{\mathcal{A}}|_t$ оператора $\widehat{\mathcal{A}}$ на подпространство $L_2(\mathbb{R}^n)|_{t=\mathrm{const}}$ совпадает с оператором $\widehat{A}_-(t)$ в гейзенберговском представлении для гамильтониана с противоположным знаком $-\widehat{H}$:

$$\widehat{\mathcal{A}}|_t = \widehat{A}_-(t). \tag{4.4}$$

Полученная формула одинаково интерпретируется и с классической, и с квантовой точек зрения. Измерение в момент времени t_0 равносильно измерению в момент времени t, если вместо исходной величины A_0 измерять такую величину $A_-(t)$, которая учитывает эволюцию системы между моментами времени t_0 и t. Например, вместо того чтобы измерять в момент времени t_0 координату x свободной частицы, можно в момент времени t измерить величину

$$x_-(t) = x - \frac{p}{m}(t - t_0). \tag{4.5}$$

Идеальное измерение оказывается делокализованным по всей оси времени системы t. Это может показаться непривычным, так как обычно считается, что идеальное измерение стандартной квантовой механики происходит мгновенно по t. Мы можем сказать, что такое измерение *может* происходить мгновенно по t, но конкретный момент времени не определен. По времени наблюдателя τ измерение происходит мгновенно во вполне определенный момент времени.

Наблюдаемая $\widehat{\mathcal{A}}$ коммутирует с расширенным гамильтонианом $\widehat{\mathcal{H}}$, ее измерение не мешает тому, чтобы как до, так и после ее измерения волновая функция системы описывалась унитарной эволюцией по t с любой наперед заданной точностью.

Мы воспроизвели стандартную квантовую механику (унитарную *эволюцию по времени* t и обычную проекционную теорию измерений) как предельный случай расширенной динамики. Таким образом, расширенная динамика действительно является обобщением стандартной квантовой механики.

Для наблюдаемой $\widehat{A}$ введем неопределенность $\delta A = \sqrt{\langle \widehat{A}^2\rangle - \langle \widehat{A}\rangle^2}$.

[4] Точнее, $L_2(\mathbb{R}^n)|_{t=\mathrm{const}}$ есть подпространство оснащенного гильбертова пространства $\Phi' \supset L_2(\mathbb{R}^{n+1}) \supset \Phi$.

Утверждение 3. *Квантовая механика с пространством состояний* $L_2(\mathbb{R}^{n+1})$, *гамильтонианом* (2.1) $\widehat{\mathcal{H}} = \widehat{p}_0 + \widehat{H}$ *и проективной теорией измерений для наблюдаемых вида* $\widehat{\mathcal{A}}$ (4.1)–(4.3) *в пределе* $\delta\mathcal{H} \to 0$ *воспроизводит стандартную квантовую механику с пространством состояний* $L_2(\mathbb{R}^n)$, *гамильтонианом* $\widehat{H}$ *и проективной теорией измерений для произвольных наблюдаемых.*

4.2. Измерения, локализованные по времени t**.** Как было показано выше, идеальное измерение полностью делокализовано по времени t.

Локализация измерения по времени t может быть вызвана двумя причинами:

1) состояние системы до измерения локализовано по времени, т.е. $\delta\mathcal{H} \neq 0$;
2) измеряемая наблюдаемая не является интегралом движения, т.е. не выполнено условие (4.1).

Для реальных измерений всегда имеют место обе причины, так как

1) $\delta\mathcal{H} = 0$ является предельным случаем, который не может быть физически реализован;
2) мы не можем построить прибор, для которого момент измерения был бы совсем не определен, всегда момент измерения локализован по времени t хотя бы с точностью до промежутка времени, когда прибор включен.

4.2.1. *Квантовый эффект Зенона.* При построении оператора $\widehat{\mathcal{A}}$ (4.1)–(4.3) мы использовали гамильтониан $\widehat{H}$. Построим аналогичный оператор $\widehat{\mathcal{B}}_1$, используя вспомогательный гамильтониан $\widehat{H}_1$:

$$[\widehat{\mathcal{B}}_1, \widehat{\mathcal{H}}_1] = 0, \qquad \widehat{\mathcal{H}}_1 = \widehat{p}_0 + \widehat{H}_1, \qquad \widehat{\mathcal{B}}_1|_{t=t_0} = B_0, \tag{4.6}$$

$$\widehat{\mathcal{B}}_1 L_2(\mathbb{R}^n)|_{t=t_1} \subset L_2(\mathbb{R}^n)|_{t=t_1} \qquad \forall t_1 \in \mathbb{R}. \tag{4.7}$$

Пусть вспомогательный гамильтониан $\widehat{H}_1(t) = \widehat{H}(t) + \delta\widehat{H}(t)$ совпадает с гамильтонианом $\widehat{H}(t)$ во все моменты времени, кроме интервала $t \in (0, \delta t)$. Этот интервал мы будем называть *периодом измерения.* Например, можно взять

$$\widehat{H}_1(t) = \widehat{H} + \chi_{(0,\delta t)}(t)\,\delta\widehat{H}, \tag{4.8}$$

где $\chi_{(0,\delta t)}(t)$ — характеристическая функция интервала $(0, \delta t)$.

Такое построение оператора $\widehat{\mathcal{B}}_1$ соответствует тому, что измерение производится в период $t \in (0, \delta t)$, причем измеряемая величина не является интегралом движения; например, для свободной частицы вместо наблюдаемой $x_-(t)$ (4.5) измеряется аналогичная наблюдаемая с неправильным значением массы:

$$[\widehat{\mathcal{B}}_1, \widehat{\mathcal{H}}_1] = 0, \qquad [\widehat{\mathcal{B}}_1, \widehat{\mathcal{H}}]|_t = -\chi_{(0,\delta t)}(t)[\widehat{B}_-(t), \delta\widehat{H}]. \tag{4.9}$$

При ограничении операторов $\widehat{\mathcal{B}}_1$ и $\widehat{\mathcal{H}}$ на подпространства $L_2(\mathbb{R}^{n+1})|_{t\in(-\infty,0)}$ и $L_2(\mathbb{R}^{n+1})|_{t\in(\delta t,+\infty)}$ мы получаем коммутирующие операторы, а на подпространстве $L_2(\mathbb{R}^{n+1})|_{t\in(0,\delta t)}$ коммутативность нарушается.

Вследствие условия (4.7) проецирование вектора состояния на собственное подпространство оператора $\widehat{\mathcal{B}}_1$ осуществляется независимо в каждом подпространстве $L_2(\mathbb{R}^{n+1})|_t$ ("послойно"). Таким образом, если исходное состояние было собственным состоянием оператора $\widehat{\mathcal{H}}$, т.е. удовлетворяло уравнению Шрёдингера по t с некоторым нулевым уровнем энергии E_0 (2.5), то на подпространствах $L_2(\mathbb{R}^{n+1})|_{t\in(-\infty,0)}$ и $L_2(\mathbb{R}^{n+1})|_{t\in(\delta t,+\infty)}$ уравнение Шрёдингера (2.5) будет выполняться и после измерения (после по времени наблюдателя, т.е. после проецирования исходного состояния на собственное подпространство).

Утверждение 4. *Если начальное состояние удовлетворяло уравнению Шрёдингера* (2.5) *при всех значениях* t, *то для конечного состояния после измерения наблюдаемой* $\widehat{\mathcal{B}}_1$ *вида*

(4.6), (4.7) *уравнение Шрёдингера* (2.5) *по времени* t *будет выполняться “до и после измерения”, т.е. при* $t \in (-\infty, 0) \cup (\delta t, +\infty)$, *но не будет выполняться “в процессе измерения”, т.е. при* $t \in (0, \delta t)$. *Нешрёдингеровское поведение состояния “в процессе измерения” при* $t \in (0, \delta t)$ *соответствует квантовому эффекту Зенона* [20–22, 10].

4.2.2. *Рассеяние системы на измерительном приборе.* Отказ от условия (4.7) приводит к появлению эффекта *рассеяния системы на измерительном приборе*. В этом случае собственные функции оператора $\widehat{\mathcal{B}}_1$ могут быть подобраны так, чтобы они одновременно были собственными функциями оператора $\widehat{\mathcal{H}}$ (решали уравнение Шрёдингера (2.5)) до периода измерения при $t < 0$ *или* после периода измерения $t > \delta t$, но не одновременно на обоих этих интервалах. Если мы выберем собственные состояния $\widehat{\mathcal{B}}_1$, чтобы уравнение Шрёдингера (2.5) выполнялось до периода измерения $t < 0$, то после периода измерения при $t > \delta t$ собственные состояния будут представлять собой линейную суперпозицию собственных функций оператора $\widehat{\mathcal{H}}$, отвечающих разным собственным числам E_0. Таким образом, если до измерения волновая функция удовлетворяла уравнению Шрёдингера по t с определенным нулевым уровнем энергии E_0 (2.5), то в процессе измерения происходит *рассеяние*, в результате которого после измерения мы получаем суперпозицию шрёдингеровских эволюций по t с разными уровнями E_0.

Можно рассматривать аналогичное “рассеяние” и в обратную сторону, когда уравнение Шрёдингера по t выполняется не до, а после измерения.

Условие (4.7) связано с разбиением пространства-времени на слои $t = \mathrm{const}$. В специальной теории относительности такое разбиение зависит от скорости движения системы отсчета. Это позволяет предположить, что мы должны отказаться от условия (4.7) и можем получить эффект рассеяния системы на приборе при рассмотрения измерения, выполняемого ускоренным наблюдателем, наблюдателем в гравитационном поле или несколькими наблюдателями, движущимися с разными скоростями.

4.2.3. *Неопределенности и локализация измерения по времени.* Вернемся к рассмотрению процесса измерения наблюдаемой (4.6), (4.7) в случае (4.8) и оценим дополнительные (по отношению к стандартной теории измерений) неопределенности измерения такой наблюдаемой.

Для наблюдаемых $\widehat{\mathcal{B}}_1$ и $\widehat{\mathcal{H}}$ получаем соотношение неопределенностей

$$\delta\mathcal{B}_1 \cdot \delta\mathcal{H} \geq \frac{1}{2}\bigl|\langle[\widehat{\mathcal{B}}_1, \widehat{\mathcal{H}}]\rangle\bigr| \qquad \Rightarrow \qquad \delta\mathcal{B}_1 \geq \frac{\hbar}{2\,\delta\mathcal{H}}\left|\left\langle \frac{d\widehat{B}_1}{d\tau}\right\rangle\right| = \frac{T}{2}\left|\left\langle \frac{d\widehat{B}_1}{d\tau}\right\rangle\right|,$$

где $T = \hbar/\delta\mathcal{H}$ — характерная ширина волнового пакета по времени t. Для малого интервала $\delta t \ll T$, используя (4.9), получаем оценку

$$\delta\mathcal{B}_1 \geq \frac{1}{2\,\delta\mathcal{H}}\left|\int \chi_{(0,\delta t)}(t)\bigl\langle\psi_t\bigl|[\widehat{B}_-(t), \delta\widehat{H}]\bigr|\psi_t\bigr\rangle\,dt\right| \approx \frac{\delta t}{2\,\delta\mathcal{H}}\,\bigl|\bigl\langle\psi_{t=0}\bigl|[\widehat{B}_0, \delta\widehat{H}]\bigr|\psi_{t=0}\bigr\rangle\bigr| =$$

$$= \frac{\delta t}{2\,\delta\mathcal{H}}\bigl|\langle[\widehat{B}_0, \delta\widehat{H}]\rangle\bigr|\,\underbrace{\langle\psi_{t=0}|\psi_{t=0}\rangle}_{\sim 1/T} \approx \frac{\delta t}{2\hbar}\bigl|\langle[\widehat{B}_0, \delta\widehat{H}]\rangle\bigr| \approx \frac{\delta t}{2}\left|\left\langle\frac{d\widehat{\mathcal{B}}_1|_t}{dt}\right\rangle\right|.$$

Полученная оценка имеет ясный физический смысл: на протяжении времени измерения δt полная производная по времени измеряемой величины $\widehat{\mathcal{B}}_1$ отлична от нуля, что создает дополнительную неопределенность.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что, вводя расширенную систему, состоящую из исходной системы и идеальных часов, мы можем рассматривать время на часах t (координату стрелки часов) на равных с остальными обобщенными координатами системы. Для этого приходится наряду с временем системы t ввести время наблюдателя τ, которое и играет роль универсального параметра.

Расширенный гамильтониан $\widehat{\mathcal{H}}$ (2.1) имеет неограниченный спектр, что позволяет определить эрмитов оператор времени $\widehat{t}$ такой, что $[\widehat{t}, \widehat{\mathcal{H}}] = i\hbar$; этот оператор совпадает с оператором времени системы.

Для времени системы t уравнение Шрёдингера выполняется лишь приблизительно, причем построенный формализм позволяет оценить отклонения от уравнения Шрёдингера для состояний, построенных с помощью неидеальных измерений. В простейшем случае такие отклонения соответствуют квантовому эффекту Зенона [20–22, 10].

Мы можем сформулировать новую интерпретацию квантовой механики: *квантовая механика без унитарной эволюции по* t.

Эта интерпретация естественным образом возникает, если обратиться к гейзенберговскому представлению расширенной динамики по времени наблюдателя τ, в котором волновая функция $\psi(t,q)$ изменяется только в процессе измерений. Такая интерпретация во многом противоположна современным концепциям, которые, начиная с фон Неймана [23], предполагают вывод (или “вывод”) теории измерений из унитарной эволюции. Эверетт [24] предлагал вообще отказаться от проекционного постулата. Здесь, напротив, унитарная эволюция выводится как приближенный эффект теории измерений.

Излагаемая интерпретация оказывается для квантовой теории по-своему естественной. Поэтому мы считаем необходимым ее сформулировать вне зависимости от собственных предпочтений. Нравится нам такая интерпретация или нет, но она должна быть явно сформулирована и исчерпывающим образом исследована.

Перечислим основные постулаты.

- Время измеряется часами, т.е. время системы (время на часах) t — это “настоящее время”, только его мы и можем измерять.
- Изменение состояния квантовой системы происходит в результате измерения.
- Любое квантовое измерение включает в себя неточное измерение расширенного гамильтониана (нулевого уровня шкалы энергии).
- Результат измерения описывается с помощью проекционного постулата (или его обобщений).

Основные выводы состоят в следующем.

- Унитарная эволюция замкнутой квантовой системы — это приближенный эффект, возникающий тогда, когда точность измерения расширенного гамильтониана $\delta\mathcal{H}$ достаточно высока ($\delta\mathcal{H} = \hbar/T$, где T — характерное время, на котором эволюция близка к унитарной).
- Акт квантового измерения не может быть точно локализован во времени, а функция $|\psi(t,q)|^2$ задает распределение вероятностей не только в пространстве, но и во времени.
- Идеальное измерение стандартной квантовой механики равномерно размазано по всей оси времени t: оно может происходить бесконечно быстро, но неизвестно когда.
- Нормировка $\int |\psi(t,q)|^2\,dt\,dq = 1$ означает, что данное состояние системы может быть подвергнуто только одному измерению, после чего состояние системы изменяется.
- Эволюция квантовой системы задается последовательностью измерений, в результате которых состояние системы меняется сразу во всех точках пространства и во все моменты времени.
- Последовательность измерений задается не тем, как они упорядочены по времени t (привязка измерений ко времени t возможна лишь приблизительно), а тем, в какой последовательности они действуют на систему.

- Время наблюдателя τ служит лишь для упорядочения измерений, которые наблюдатель совершает над системой (или над набором систем). Между измерениями время наблюдателя можно считать несуществующим.

Благодарности. Автор благодарит за плодотворное обсуждение и ценные рекомендации И.В. Воловича, В.И. Манько и В.Ж. Сакбаева.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dirac P.A.M.* Homogeneous variables in classical dynamics // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1933. V. 29. P. 389–400.
2. *Dirac P.A.M.* Generalized Hamiltonian dynamics // Can. J. Math. 1950. V. 2. P. 129–148.
3. *Dirac P.A.M.* Generalized Hamiltonian dynamics // Proc. R. Soc. London A. 1958. V. 246. P. 326–332.
4. *Дирак П.А.М.* Лекции по квантовой механике. Ижевск: Ижевск. республ. типогр., 1998.
5. *Arnowitt R., Deser S., Misner C.W.* The dynamics of general relativity // Gravitation: An introduction to current research / Ed. by L. Witten. New York: J. Wiley & Sons, 1962. Ch. 7. P. 227–265.
6. *Гитман Д.М., Тютин И.В.* Каноническое квантование полей со связями. М.: Наука, 1986.
7. *Иванов М.Г.* Кривизна фазового пространства // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Физ.-мат. науки. 2013. №1. С. 361–368.
8. *Волович И.В.* Проблема необратимости и функциональная формулировка классической механики // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Естественнонауч. сер. 2008. №8/1. С. 35–55; *Volovich I.V.* Time irreversibility problem and functional formulation of classical mechanics: E-print, 2009. arXiv: 0907.2445 [cond-mat.stat-mech].
9. *Volovich I.V.* Randomness in classical mechanics and quantum mechanics // Found. Phys. 2011. V. 41, N 3. P. 516–528; arXiv: 0910.5391v1 [quant-ph].
10. *Иванов М.Г.* Как понимать квантовую механику. Москва; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2012. http://mezhpr.fizteh.ru/biblio/q-ivanov.html
11. *Pauli W.* Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik // Handbuch der Physik / Hrsg. v. H. Geiger, K. Scheel. Berlin: J. Springer, 1933. Bd. 24, Tl. 1. S. 83–272. Рус. пер.: *Паули В.* Общие принципы волновой механики. М.; Л.: ОГИЗ Гостехиздат, 1947. с. 103. См. также: *Pauli W.* Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik // Prinzipien der Quantentheorie I. Berlin: Springer, 1958. S. 1–168. (Handbuch der Physik / Hrsg. v. S. Flügge; Bd. 5, Tl. 1). Англ. пер.: *Pauli W.* General principles of quantum mechanics. Berlin: Springer, 1980.
12. *Ольховский В.С.* О времени как квантовой наблюдаемой, канонически сопряженной энергии // УФН. 2011. Т. 181, №8. С. 859–866.
13. *Козлов В.В.* Суммируемые с квадратом решения уравнения Клейна–Гордона на пространстве де Ситтера // УМН. 1987. Т. 42, №4. С. 171.
14. *Волович И.В., Козлов В.В.* О суммируемых с квадратом решениях уравнения Клейна–Гордона на многообразиях // ДАН. 2006. Т. 408, №3. С. 317–320.
15. *Kozlov V.V., Volovich I.V.* Mass spectrum, actons and cosmological landscape: E-print, 2006. arXiv: hep-th/0612135.
16. *Kozlov V.V., Volovich I.V.* Finite action Klein–Gordon solutions on Lorentzian manifolds // Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 2006. V. 3, N 7. P. 1349–1357; arXiv: gr-qc/0603111.
17. *Сахаров А.Д.* Космологические переходы с изменением сигнатуры метрики // ЖЭТФ. 1984. Т. 87, №2. С. 375–383.
18. *Арефьева И.Я., Волович И.В.* Суперсимметрия: теория Калуцы–Клейна, аномалии, суперструны // УФН. 1985. Т. 146, №4. С. 655–681.
19. *Арефьева И.Я., Волович И.В., Драгович Б.Г.* Спонтанная редукция в многомерных ($D=10,11$) теориях супергравитации с произвольной сигнатурой // ТМФ. 1987. Т. 70, №3. С. 422–431.
20. *Халфин Л.А.* К теории распада квазистационарного состояния // ДАН СССР. 1957. Т. 115, №2. С. 277–280.
21. *Халфин Л.А.* К теории распада квазистационарного состояния // ЖЭТФ. 1958. Т. 33, №6. С. 1371–1382.
22. *Халфин Л.А.* Квантовая теория распада физических систем: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ФИАН СССР, 1960.
23. *фон Нейман И.* Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964.
24. *Everett H.* “Relative state” formulation of quantum mechanics // Rev. Mod. Phys. 1957. V. 29. P. 454–462.